

## A study on CNOT-based quantum circuits using rewriting systems

坂下, 一生

<https://doi.org/10.15017/1398533>

---

出版情報 : 九州大学, 2013, 博士 (機能数理学), 課程博士  
バージョン :  
権利関係 : 全文ファイル公表済

氏 名：坂下一生

論文題目：A study on CNOT-based quantum circuits using rewriting systems  
(書換え系を用いた CNOT 量子回路に関する研究)

区 分：甲

## 論 文 内 容 の 要 旨

本論文の主題は書換え系を用いた CNOT (制御 NOT) 量子回路の簡約化である。項書換え系はプログラム言語の抽象解釈や数式処理システムのモデルなどに用いられ、プログラムの最適化、プログラム検証、自動定理証明など様々な分野に応用されている。また量子回路は量子計算アルゴリズムを表現する計算モデルである。量子計算のアルゴリズムを実装する上で必要となる量子ゲートの数を減らし、より小さな回路で量子計算アルゴリズムを実現することが課題の1つである。

本論文では CNOT ゲートによって構成される量子回路 (CNOT 量子回路) の等価変換を文字列書換え系で定式化し、量子回路の簡約化への応用を考える。CNOT ゲートは重要な量子ゲートの一つで、1 量子ゲートと CNOT ゲートの組み合わせで任意の量子回路を構成できることが知られている (計算万能性)。簡約化を行う上で書換え系の持つ性質のうち合流性が重要になる。合流性を持つ書換え系による回路の変換結果は一意であることが保証される。そこで量子回路を簡約化するために必要な合流性を持つ書換え系の性質及びそれを導く等式集合について考察を行う。

本論文は以下の様な構成になっている。まず、第1章では研究の背景を述べる。第2章では、書換え系に関する様々な定義を述べる。書換えを行う上で書換えが停止すること (停止性)、書換えの順序によらず結果が一致すること (合流性) は書換え系において重要な性質である。この性質を持つ書換え系を構成することは CNOT 量子回路の書換えを効率的に行う上で重要である。合流性を持つ書換え系を導く手続きとして Knuth-Bendix の完備化アルゴリズムが知られている。本章では危険対という概念を導入し Knuth-Bendix のアルゴリズムの概要を紹介する。

第3章では、まず量子回路・量子ゲートに関する基本的な定義を行う。次に量子ゲートを書換え系のアルファベットとし量子回路間の等価変換を書き換え規則として定式化する。書換え系と等式理論には深い関係があることが知られている。そこで我々は3量子ビット CNOT 量子回路間の等式からなる等式集合を与え、その等式集合から Knuth-Bendix の完備化アルゴリズムを用いて完備な書換え系を求める。この完備な書換え系から 168 種類の CNOT 量子回路が存在し、任意の CNOT 量子回路を高々長さ 6 で構成できることを示す。一般に Knuth-Bendix の完備化アルゴリズムは初めに与える等式集合によって結果が異なる、そこで同じ完備な変換規則集合を得るのに必要な等式集合の大きさの最小値についての考察を行い少なくとも 8 種類の等式を必要とすることを示す。最後に一般の  $n$  量子ビット CNOT 量子回路に拡張について考察する。 $n$  量子ビット CNOT 量子回路を書換え系として扱う際には非常に多くの書換え規則が必要となるがこれまで行ってきた定式化と同様に議論できることを示す。

第4章では、一般の文字列書換え系に関する手続きの Mathematica ソフトウェアによる実装について述べる。まず Knuth-Bendix の完備化アルゴリズムを実現するために用いた危険対を見つける関数や簡約を行う関数等についてその例を挙げながら示す。さらに得られた完備な変換規則集合

は一般に既約ではないことから既約化手続きの実装について述べる。最後に CNOT 量子回路の書換え系を別の角度から考察するためにケーリーグラフを求めそれを描画した。さらにグラフの直径と最小回路の長さの上限が一致することや回路の種類が 3 章で得られた結果との整合性を確認する。