ガッキ ノ ネイロ オ シヤ ニ イレタ オンコウ コウセイ リロン ノ ケンキュウ カンカクテキ キョウワ リロン ノ オンガク エノ オウヨウ

小畑, 郁男

https://doi.org/10.15017/1398258

出版情報：Kyushu Institute of Design, 2001, 博士（芸術工学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

第2章　同時に鳴る音高集合のR不協和度の算出

本章においては、感覚的協和理論を音高構成理論に応用するために必要な「同時に鳴る音高集合の R 不協和度」を求めるための理論値計算モデルを決定する。

2.1　R不協和度を求めるための数学モデル

ここでは、R 不協和度を求めるための数学モデルとして、Plomp and Levelt 理論に基づく Sethares[37]、Huchinson and Knopoff[11] の二つのモデルと亀岡モデル [14] [15] [16] [17] について、その概要を説明する。

2.1.1　Plomp and Levelt 理論に基づく二つの数学モデル

Sethares モデル

Plomp and Levelt 理論では、2 つの純音によって生じる R 不協和は臨界帯域幅に対する 2 つの純音の周波数差の比を変数とする関数で表わされる。Sethares は 2 つの純音の周波数差を x とし、まず R 不協和度 d を x の関数として表現することから始めている。

$$d(x) = e^{-b_1 x} - e^{-b_2 x} \tag{2.1}$$

実験値との比較によって、$b_1 = 3.5$、$b_2 = 5.75$ とし、曲線の上昇、下降する程度を表現する。二つの純音の周波数を f_1、$f_2(f_1 < f_2)$ とし、その振幅をそれぞれ a_1、a_2 とするとき、音域で異なる臨界帯域幅に対応するために 2.1 式は

$$d(f_1, f_2, a_1, a_2) = a_1 a_2 [e^{-b_1 s(f_2 - f_1)} - e^{-b_2 s(f_2 - f_1)}] \tag{2.2}$$

に変形される。ここで、

$$s = \frac{x^*}{s_1 f_1 + S_2} \tag{2.3}$$

であり、$s_1 = 0.021$、$s_2 = 19.0$、最大 R 不協和点 x^* は 2.1 式より求められ、$x^* = 0.24$ である。

一般に $f_1 < f_2 < \ldots\ldots < f_n$ である n 個の純音を要素として持つ音 F の R 不協和度はそれぞれの音の振幅を $a_1, a_1, \ldots\ldots a_n$ とすれば、

$$D_F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d(f_1, f_2, a_1, a_2) \tag{2.4}$$

で得られる。

Huchinson and Knopoff モデル

二つの純音 T_1 と T_2 の R 不協和因子 D は、その振幅と周波数の関数として表現されている。T_1 と T_2 の振幅を A_1 、A_2 とし、それぞれの周波数を f_1 、f_2 とすれば、

$$D = \frac{A_1 A_2 g(f_1 - f_2)}{N} \tag{2.5}$$

N は規準化の因子であり、

$$N = A_1^2 + A_2^2 \tag{2.6}$$

とすることによって 2.5 式は無次元となり、比例的に振幅が増減しても同じ R 不協和度を得ることができる。また、T_1、T_2 音の中心周波数を $\overline{f}(= \frac{1}{2}(f_1 + f_2))$ とすれば、臨界帯域幅 CBW は

$$CBW = 1.72(\overline{f})^{0.65} \tag{2.7}$$

で表わされる。2.5 式の重み付け因子 $g(f_1 - f_2)$ は

$$y = \frac{\mid f_1 - f_2 \mid}{CBW(f)} \tag{2.8}$$

とすることによって、$g(y)$ と表現される。n 個の純音を要素として持つ音の全体の R 不協和度 D は要素から作られるすべての純音の対によって作られる R 不協和度の和を求め規準化することによって、

$$D = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_i A_j g_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} A_i^2} \tag{2.9}$$

で表わされる。

2.1.2 亀岡モデル

亀岡モデルでは心理量「R 不協和度」に対応する物理量「R 不協和強度」があると考える。基準音 T_1 ともうひとつの音 T_2 の 2 つの純音が作る R 不協和度は以下の手順で算出される。

最大 R 不協和となる周波数偏差の算出 一対の純音間には R 不協和度が最大となる周波数偏差が存在する。T_1 と T_2 音の周波数偏差が R 不協和度が最大となる周波数偏差よりも大きいか小さいかによって R 不協和度を求める式は異なるので、まず T_1 と T_2 の最大 R 不協和点の周波数偏差 f_b を求める（ f_1 は T_1 の、 f_2 は T_2 の周波数 $f_2 > f_1$ ）。

$$f_b = 2.27 f_1^{0.477} \tag{2.10}$$

音圧レベルを LdB とし、その影響を考えれば、

$$f_b = 2.27(1 + \frac{L - 57}{40}) f_1^{0.477} \tag{2.11}$$

一対音の絶対 R 不協和度の算出 T_1 T_2 音の絶対 R 不協和度 $D'_{2ei}(f_1, f_2)$ は $T_1 T_2$ 音が標準値[1]であると仮定して、

1. $0.01 f_1 \leq f_2 - f_1 \leq f_b$ の場合、

$$D'_{2ei}(f_1, f_2) = k'_0[100\frac{2 + log\{(f_2 - f_1)/f_1\}}{2 + log(f_b/f_1)} + C'_0] \tag{2.12}$$

[1]亀岡モデルは、音圧レベル $57dB(re\ 2 \times 10^{-5}\ N/m^2)$ を標準として実験を行い計算式を導いている。以下ことわりのない限り dB は $dB(re\ 2 \times 10^{-5}\ N/m^2)$ を意味する。

2. $f_b < f_2 - f_1 \leq f_1$ の場合、

$$D'_{2ei}(f_1, f_2) = k'_0[90\frac{log\{(f_2 - f_1)/f_1\}}{log(f_b/f_1)} + 10 + C'_0] \tag{2.13}$$

3. $f_2 > 2f_1$ 、$f_2 < 1.01f_1$ のとき、

$$D'_{2ei}(f_1, f_2) = k'_0 C'_0 \tag{2.14}$$

2.14 式でははは雑音だけの絶対 R 不協和度が算出される。

音圧レベルの状態にあわせた絶対 R 不協和度の補正 音圧レベルの状態にあわせて、絶対 R 不協和度を補正する。 p_1 は T_1 、 p_2 は T_2 の音圧、 そして p_0 は 57dB に相当する基準音圧 $2 \times 10^{-1.15}\mu$ bar とするとき、

1. 等しい音圧レベル ($p_1 = p_2 = p$) の場合、

$$D'_{2i} = D'_{2ei}(p/p_0)^{n_e} \tag{2.15}$$

2. $p_1 > p_2$ の場合、

$$D'_{2i} = D'_{2ei}(p_1/p_0)^{n_e}(p_2/p_1)^{n_h} \tag{2.16}$$

3. $p_1 < p_2$ の場合、

$$D'_{2i} = D'_{2ei}(p_2/p_0)^{n_e}(p_1/p_2)^{n_l} \tag{2.17}$$

ここで、 $n_e = 0.20$ 、 $n_h = 0.15$ 、 $n_l = 0.32$ 。

一対音の絶対 R 不協和強度の算出 絶対 R 不協和度から絶対 R 不協和強度を計算し、雑音による R 不協和強度を減じることによって、一対音のみによる絶対 R 不協和強度を求める。 $D'_{2i} = k'_0(D'_{I2i})^\beta$ なので、一対音の R 不協和強度 D'_{I2i} は、

$$D'_{I2i} = (D'_{2i}/k'_0)^{1/\beta} \tag{2.18}$$

である。この R 不協和強度 D'_{I2i} は雑音の R 不協和強度を含んでいるので、雑音の R 不協和強度 は $D_{In} = (D_{no}/k'_0)^{1/\beta}$ 、D_{no} に $k'_0C'_0$ を代入して $D_{In} = (C'_0)^{1/\beta}$ を D'_{I2i} より減ずれば、一対音だけの R 不協和強度は

$$D_{I2i} = (D'_{2i}/k'_0)^{1/\beta} - (C'_0)^{1/\beta} \tag{2.19}$$

となる。

複合音の絶対 R 不協和強度の算出 複合音は複数の部分音を持っている。部分音同士のすべての組み合わせについて、一対音のみによる R 不協和強度を上記の方法で求めたのち、加算することによってその総和を求め、さらに雑音による R 不協和強度を加えることにより、複合音の絶対 R 不協和強度を求める。複合音の総合的な R 不協和強度 D_{It} は一対音の総数を M 個とすれば、

$$D_{It} = \sum_{i=1}^{M} D_{I2i} + D_{In} \tag{2.20}$$

となる。

複合音の絶対 R 不協和度の算出 複合音の絶対 R 不協和強度から、複合音の絶対 R 不協和度を計算する。$k_0 = 1.0$ 、 $C'_0 = 65$ なので $D_{In} = 65^{1/\beta}$ 、ゆえに絶対 R 不協和度 D_m は 、

$$D_m = k_0 D_{It}^\beta = \{\sum_{i=1}^{M} D_{I2i} + 65^{1/\beta}\}^\beta \tag{2.21}$$

となる。実験の結果 $\beta = 0.25$ 。

2.1.3 R 不協和度を求めるための数学モデルの特徴

具体的な手順は異なっているが、Sethares モデルと Huchinson and Knopoff モデルは共に、Plomp and Levelt によって得られた「臨界帯域幅に対する 2 つの純音の周波数差の比を変数とする関数」を根拠に、計算式を組み立てている。R 不協和を生み出す一対音の振幅が大きければ当然 R 不協和度は高くなるので、その影響を両モデルは 2 音の振幅の積として考え、振幅が小さければ影響が小さいことの表現と考えている (2.2、2.5 式)。

これに対し亀岡モデルでは、臨界帯域との関係で「R 不協和度」を考えないところに、上記のモデルとの違いがある[2]。振幅に関しては、実験の結果をもとに 2.15-2.17 式において状況の違いによる影響が、マスキングについても考慮されながら、算出される。

複合音全体の R 不協和度算出については、加算的である点ではすべてのモデルは同じであるが、Sethares、Huchinson and Knopoff のモデルが、すべての一対音が作る R 不協和度の総和としているのに対し (2.4、2.9 式参照)、亀岡モデルにおいては、R 不協和強度の総和から複合音の R 不協和度を算出している (2.20、2.21 式参照)。

これらの数学モデルは、R 不協和度を量として算出するモデルではあるが、Sethares モデルと Huchinson and Knopoff モデルは相対的に定性的な性格が強く、亀岡モデルの方は定量的な性格がより強いと思われる。

それゆえに、本稿における R 不協和度の理論値算出のモデルは亀岡モデルを基礎とすることにした。

[2]音圧レベルが増加すれば、R 不協和度は増加する。音圧レベルに差があり、そのレベル差が同じである場合は、低音側のレベルが高い方が R 不協和度も高い。このように、「R 協和性」は音圧の関数でもあるので、臨界帯域幅との関係で考える Plomp の仮説 [34] に亀岡は同意していない [16, p126]

2.2 亀岡モデルの検討と理論値計算モデル

2.2.1 亀岡モデルの検討

最大周波数偏差の算出

2.11 式において、$f_1 = 440Hz$ のとき、L が 17 よりも小さい値になれば、f_b の値は負となってしまう。それゆえに、2.11 式を無制限に適用することはできない。亀岡は音圧レベルが 50-70dB SPL である場合の 2.10 式のより正確な近似として、2.11 式を考えているので、本稿では音圧レベルが 50dB 以下の音では、50dB の場合の f_b 値で代用することにした。

音律と一対音の R 不協和度

f_1 と f_2 の周波数差が f_1 の $\frac{1}{100}$ よりも小さいとき、言い替えれば f_2 が $1.01f_1$ よりも小さいときは 2 純音から生みだされる不協和はなく、雑音だけの絶対 R 不協和度となる (2.14 式参照)。

C4 音と E4 音が同時になるとき、例えば、C4 の第 5 倍音と E4 の第 4 倍音のように純正律、中全律では一致するが、ピタゴラス律や平均律では一致しない倍音がある (表 2.1 参照)。この例において低いほうの音 (C4 の第 5 倍音) の周波数を f_1 とすれば、ピタゴラス律においては $f_1 = 1303.7$ であるので、$1.01f_1 = 1316.737$ である。高いほうの音 (E4 の第 4 倍音)f_2 は $f_2 = 1320$ であるので、$1.01f_1 < f_2$ となって (2.12) 式により R 不協和度は計算されるのであるが、平均律では $f_1 = 1308.13$ なので、$1.01f_1 = 1321.2113$ となって、$f_2 = 1318.51$ と比較すれば $1.01f_1 > f_2$ である。これは (2.14) 式の場合であるので、計算上は R 不協和は生じないことになる。表 2.1 の他の倍音についても同様である。

また C4 音と G4 音が同時に鳴るときにピタゴラス律と純正律において一致し、中全律、平均律

表 2.1: C4 音と E4 音の共通 (近接) する倍音の周波数　第 16 倍音まで (周波数は A4 を 440Hz として計算)。

倍音名	ピタゴラス律	純正律	中全律	平均律
C4 第 5 倍音	1303.7	1320	1315.91	1308.13
E4 第 4 倍音	1320	1320	1315.91	1318.51
C4 第 10 倍音	2607.41	2640	2631.81	2616.26
E4 第 8 倍音	2640	2640	2631.81	2637.02
C4 第 15 倍音	3911.11	3960	3947.72	3924.38
E4 第 12 倍音	3960	3960	3947.72	3955.53

では一致しない倍音、例えば G4 の第 2 倍音 C4 の第 3 倍音に関しても同様に、中全律においては $1.01f_1 = 794.967061$ 、$f_2 = 789.544$ 、平均律においては $1.01f_1 = 791.83091$、$f_2 = 784.877$ となって、いずれも計算上 R 不協和は生じない (表 2.2 参照)。

すなわち、音律に関する議論の中心には倍音の一致によるうなりの消滅に関する問題があるのだが、音律による協和感の違いを亀岡モデルによって表現することはできないということである。現実に、基音が 57dB で、倍音の次数を n としたとき振幅が $\frac{1}{n}$ である音色[3]の第 16 倍音までを対象として計算した亀岡モデルによる絶対 R 不協和度を表 2.3 に記したが、音律の違いによる絶対 R 不協和度の差はほとんどない。

[3] $6dB/oct$ で減衰する音色

表 2.2: C4 音と G4 音の共通 (近接) する倍音の周波数　第 16 倍音まで (周波数は A4 を 440Hz として計算)。

倍音名	ピタゴラス律	純正律	中全律	平均律
G4 第 2 倍音	782.222	792	787.0961	783.991
C4 第 3 倍音	782.222	792	789.544	784.877
G4 第 4 倍音	1564.44	1584	1574.19	1567.98
C4 第 6 倍音	1564.44	1584	1579.09	1569.75
G4 第 6 倍音	2346.67	2376	2361.29	2351.97
C4 第 9 倍音	2346.67	2376	2368.63	2354.63
G4 第 8 倍音	3128.89	3168	3148.38	3135.96
C4 第 12 倍音	3128.89	3168	3158.18	3139.51
G4 第 10 倍音	3911.11	3960	3935.48	3919.95
C4 第 15 倍音	3911.11	3960	3947.72	3924.38

表 2.3: 音律と絶対 R 不協和度　n 次の倍音の振幅が基音の $1/n$ である音色の第 16 倍音までを対象として計算 (周波数は A4 を 440Hz として計算)。

音律名	ピタゴラス律	純正律	中全律	平均律
C4 と E4 による絶対 R 不協和度	236.626	236.678	236.742	237.083
C4 と G4 による絶対 R 不協和度	220.618	220.322	220.484	220.558

加算方法

C4 と G4 が同時に鳴るとき、表 2.3 に示したようにピタゴラス律や純正律では一致する倍音が存在する。このような場合、亀岡モデルでは 2.20 式が示すように、一致する倍音が二つあれば同じ周波数の音が二つあるとして処理されることになる。しかしながら現実の現象は物理的には異なっている。例えば $440Hz$、$57dB$ の音が二つあるとき、同相であるとすれば $440Hz$、約 $63dB$ の音が一つだけ存在し、逆相であれば、音自体が消え去ってしまうことになる[4]。

$Test$ 音 (表 2.4 参照) を用いて R 不協和度を計算してみれば、もっとも振幅が大きくなる同位相

表 2.4: $Test$ 音の倍音構造

$Test$ 音	基音	第 2 倍音	第 3 倍音	第 4 倍音	第 5 倍音	第 6 倍音
周波数	440	880	1320	1760	2200	2640
音圧レベル (dB)	45	57	45	39	39	33

の場合であっても、2 つの音を 1 つの音に合成して考えた場合の方が、2 つの音があるとして計算する亀岡モデルによる計算値よりも絶対 R 不協和度の値は小さいことがわかる (表 2.5 参照)。すなわち、亀岡モデルによる理論値計算では、一致する倍音が多ければ多い程、実際の値よりも絶対 R 不協和度は大きくなると考えられる。それは、例えばユニゾンの場合の絶対 R 不協和度が大きくなるということを意味し、いわゆる「協和音」に代表される、一致する倍音の数が多い音高集合が同時に鳴るときの絶対 R 不協和度は正確に算出されないということにもなる。それゆえに、様々な場合の絶対 R 不協和度を比較しようとすれば、何らかの修正が必要となってくる。

表 2.5: 亀岡モデルによる $Test$ 音の絶対 R 不協和度

$Test$ 音の状態	絶対 R 不協和度
1 つの $Test$ 音	91.4546
部分音の音圧を $6dB$ づつ増した 1 つの $Test$ 音	114.005
亀岡モデルによる 2 つの $Test$ 音	122.647

[4]亀岡モデルだけではなく、2.4 式、2.9 式を見れば、Seathares モデルや Huchinson and Knopoff モデルにおいても同様であることがわかる。Huchinson は R 不協和が極端に小さいところでは自らのモデルは不正確であると述べている [11, p.7]。

2.2.2　理論値計算モデル

以下の手順で算出される値を、音高集合全体の R 不協和度の理論値とする。実際の計算プログラムに関しては付録 B(115 ページ) に掲載した。

音階音の周波数の算出

A4 が 440Hz である平均律の各音階音の周波数を算出する (B.2.1、116 ページ参照)。

音色リストの作成

1. 基本周波数の関数として音色を表現する (B.4、121 ページ参照)。
2. 同時に鳴る音高集合の構成音の基本周波数を上記の関数に代入し、周波数と音圧レベルを組み合わせたリストをすべての倍音について作成する。

部分音構造の修正

二つの純音 T_1、T_2 の周波数 f_1、$f_2 (f_1 < f_2)$ が $1.01 f_1 > f_2$ のとき、その周波数差は充分に小さく、亀岡モデルにおいては 2.14 式が示すように R 不協和は生じないとして取り扱われてもいるので、この条件を満たす範囲の f_1 と f_2 を分離できないひとつの音として取り扱うことは認められ得ると考える。

この二つの音を $d_1(t) = D_1 \sin(\omega_1 t + \psi_{01})$、$d_2(t) = D_2 \sin(\omega_2 t + \psi_{02})$ と表現すれば、$\omega_2 > \omega_1$、$\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$、$\psi_0 = \frac{\psi_{01}+\psi_{02}}{2}$ とするとき、この二つの音の合成 $d(t) (= d_1(t) + d_2(t))$ は

$$d(t) = B \sin(\omega t + \psi_0 + \delta') \tag{2.22}$$

と表わすことができる [18]。ただし、

$$B = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + 2D_1 D_2 \cos\{(\omega_2 - \omega_1)t + (\psi_{02} - \psi_{01})\}} \tag{2.23}$$

2 つの音の周波数が同一であるとき、2.23 式の $2D_1 D_2 \cos\{(\omega_2 - \omega_1)t + (\psi_{02} - \psi_{01})\}$ の項は $\omega_2 - \omega_1$ が 0 となるので、位相差 $\psi_{02} - \psi_{01}$ によって $-2D_1 D_2$ から $2D_1 D_2$ までの値をとる。また周波数差がわずかである場合、この項は「うなり」を表わすことになる。

いずれの場合も、この項の平均値は 0 であるので、ここでは理論値計算の際の $d(t)$ の振幅を

$$B = \sqrt{D_1^2 + D_2^2} \tag{2.24}$$

として計算する。すなわち、T_1、T_2 の 2 音は f_1、f_2 の平均値の周波数をもち、$\sqrt{D_1^2 + D_2^2}$ を振幅とするひとつの音と考え、部分音構造の修正を行う (B.6.1、125 参照)。

R 不協和度の計算

上で得た純音の集合全体がひとつの複合音の部分音であると考え、2.10 から 2.21 までの式を適用して、同時に鳴る音全体の絶対 R 不協和度を求める (B.6.1、127)。

2.2.3 ユニゾンの R 不協和度

倍音の次数を n としたとき、振幅が $\frac{1}{n}$ となる音色 (基音を $57dBSPL$ とする) で $A4(440Hz)$ 音のユニゾンについて旧亀岡モデルと部分音構造を修正した後の新亀岡モデルによって計算した R 不協和度を比較する (表 2.6 参照)。

表 2.6: A4 ユニゾンの R 不協和度比較

$A4$ 音の数	1	2	3	4	5	6	7	8
旧モデルによる R 不協和度計算値	144	202	247	285	319	349	377	403
新モデルによる R 不協和度計算値	144	165	177	186	193	198	203	207

旧モデルによる計算値によれば、同じ音が重なるにつれて R 不協和度の値は急激に上昇し、実感とかなり食い違う結果となるが、新モデルによる計算結果は比較の問題ではあるが実感にちかいものになっていると思われる。R 不協和度は部分音の数に大きな影響を受けるので、倍音の一致は部分音の数を減少させることによって、R 不協和度の減少に寄与するということがいえるだろう。

2.3 要約

3 つの数学モデルを検討した結果、亀岡モデルを R 不協和度、すなわち、感覚的協和理論における不協和度を算出するための基礎とすることにした。音律の違いは亀岡モデルによる計算結果に本質的な影響を与えない。いいかえれば、音律の違いによる協和感の差は亀岡モデルによって表現することはできないので、12 等分平均律による音階を用いて理論値計算をする。同時に鳴る音高集合において、一致するか、あるいは周波数にほとんど差がない倍音が存在するときにおこる問題点を解決するために、亀岡モデルの補足修正を行い理論値計算モデルとした。

以下の章においては、この補足修正を行った亀岡モデルによって R 不協和度は算出されている。ただし、第 3 章では例外的に補足修正を行う前の亀岡モデルによって R 不協和度を算出した。