

指向性音源に対する防音壁挿入損失に関する研究

松本, 源生

<https://doi.org/10.11501/3181892>

出版情報 : 九州芸術工科大学, 2000, 博士 (工学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

付録A 地面上の散乱体に対する境界要素法の適用

A.1 Helmholtz-Huygens の積分方程式の導出

始めに、二次元自由空間において、受信点 \mathbf{q} 、音源 \mathbf{r} 、散乱体 S が置かれているときに、Helmholtz-Huygens 積分方程式を導く。

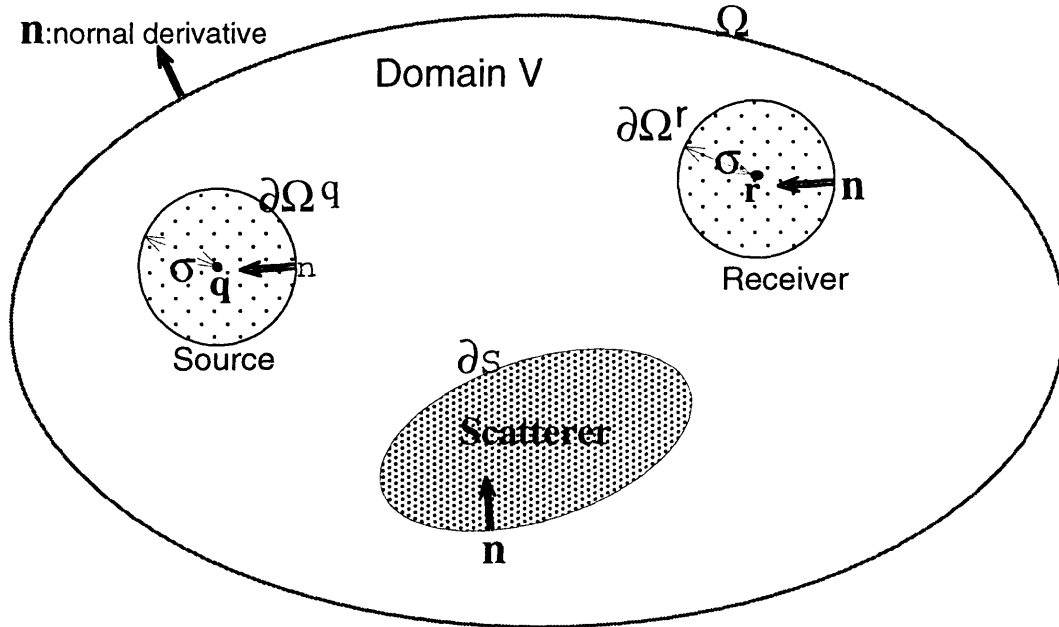


Fig. A.1 領域 V 内の散乱体、音源、受信点

Fig. A.1 に示すように、 \mathbf{q} を中心とする半径 σ の円筒内部を Ω_q とし円筒表面を $\partial\Omega_q$ 、散乱体 S の表面を ∂S とする。さらに、無限遠を Ω_∞ 、無限遠境界を $\partial\Omega_\infty$ 、また Ω_∞ 外部の二次元空間から Ω_q と散乱体 S の内部を除いた空間を V とする。この領域 V において次式で表される Helmholtz 方程式が成立する。

$$(\Delta + k^2) \Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

(A.1) 式に対する Green 関数の満たす方程式は、

$$(\Delta + k^2) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \text{where } \mathbf{r}_0 \in V \quad (\text{A.2})$$

である。(A.2) 式に $\Phi(\mathbf{r})$ を掛けたのもから (A.1) 式に $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ を掛けたのを引くと、次式が成立する。

$$\Phi(\mathbf{r}) \Delta G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \Delta \Phi(\mathbf{r}) = -\Phi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (\text{A.3})$$

上式 (A.3) 式において, \mathbf{r} と \mathbf{r}_0 を交換し, Green 関数の相反性 (つまり, $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r})$) を用いると,

$$\Phi(\mathbf{r}_0)\Delta G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r})\Delta\Phi(\mathbf{r}_0) = -\Phi(\mathbf{r}_0)\delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \quad (\text{A.4})$$

となる. 更に, 上式を領域 V に渡って \mathbf{r}_0 について積分すると,

$$\int_V \left\{ \Phi(\mathbf{r}_0)\Delta G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r})\Delta\Phi(\mathbf{r}_0) \right\} dS(\mathbf{r}_0) = -\Phi(\mathbf{r}) \quad (\text{A.5})$$

となる. ここで, Green の公式を適用すると, 次式が成立する.

$$-\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\partial\Omega_s + \partial S + \partial\Omega_\infty} \left\{ \Phi(\mathbf{r}_0)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r})\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\Phi(\mathbf{r}_0) \right\} dl(\mathbf{r}_0) \quad (\text{A.6})$$

但し, \mathbf{n} は外向きの法線ベクトル, $dl(\mathbf{r}_0)$ は境界 $\partial\Omega_\infty + \Omega_q + \Omega_r + S$ に沿う線積分である. (A.6) 式, 二次元自由音場の Helmholtz-Huygens 積分方程式である. Green 関数としては, Helmholtz 方程式 (A.1) の主要解 [37],

$$G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|) \quad (\text{A.7})$$

を用いる. また, 三次元音場でも Helmholtz-Huygens 積分方程式は, (A.6) 式で表せるが, Green 関数として異なるものを用いる. 以後, 本章では三次元よりも計算機の負荷が少なく済む二次元音場での境界要素法の定式化について, 地面が存在するときから, 工場建屋に加え防音壁が併存する音場への適用まで述べてゆく.

A.2 地面上の Helmholtz-Huygens の積分方程式

続いて, Fig.A.2 に示すように, 音源, 散乱体, 受音点は半自由空間, すなわち地面上に存在するような音場について, Helmholtz-Huygens の積分方程式を導く. このような場合には, (A.6) 式の Green 関数としては, 剛な地面 F を組み入れている *Green's function of the wave equation for the first boundary value problem for the infinite semi-space* [19, 38] を適用し,

$$G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) = \frac{1}{4j} \left\{ H_0^{(2)}(k\sigma_r) + H_0^{(2)}(k\sigma_{r_{image}}) \right\} \quad (\text{A.8})$$

とおくことにより, 地面をも組み込むことが可能となる. ここで, $\sigma_r = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|$, $\sigma_{r_{image}} = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{image}|$ であり, \mathbf{r}_{image} は \mathbf{r} の地面 F に対する鏡像である. この場合, 新たに境界 F が加わることに注意しなければならない. また, 散乱体 S 表面が地面 F に接しているときは, その部分を境界 ∂B にて表示する. 以下の節において, それぞれの境界に沿った線積分について詳細に計

算する。ここで、(A.6) 式を、

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= -\int_{\partial\Omega_\infty+\partial\Omega_q+\partial\Omega_r+\partial S} \left\{ \Phi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Phi(\mathbf{r}_0) \right\} dl(\mathbf{r}_0) \\ &= -\left(\int_{\partial\Omega_\infty} \left\{ \dots \right\} dl(\mathbf{r}_0) + \int_{\partial\Omega_q} \left\{ \dots \right\} dl(\mathbf{r}_0) + \int_F \left\{ \dots \right\} dl(\mathbf{r}_0) + \int_{\partial S} \left\{ \dots \right\} dl(\mathbf{r}_0) \right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} -I_{\partial\Omega_\infty} - I_{\partial\Omega_q} - I_{\partial\Omega_r} - I_F - I_{\partial S}\end{aligned}\tag{A.9}$$

のように、無限遠境界における積分項 $I_{\partial\Omega_\infty}$ 、音源近傍境界における積分項 $I_{\partial\Omega_q}$ 、受音点近傍境界における積分項 $I_{\partial\Omega_r}$ 、地面における積分項 I_F 、散乱体 S 表面における積分項 $I_{\partial S}$ に分けることとする。ただし、散乱体 S 表面が地面 F に接しているときの境界 ∂B も、散乱体 S 表面における積分項 $I_{\partial S}$ に含める。これら 5 個の積分項の展開は複雑であるため、下記のような項目順に解説する。

- i) 無限遠点の積分について
- ii) 音源近傍の積分について
- iii) 受音点近傍の積分について
- iv) 地面 F に沿った積分について
- v) 散乱体表面 ∂S に沿った積分について
- vi) 音源、受音点が散乱体表面にあるとき
- vii) 地面上部の全境界 $I_{\Omega_\infty} + I_{\Omega_q} + I_{\Omega_r} + F + \partial S$ についてまとめる

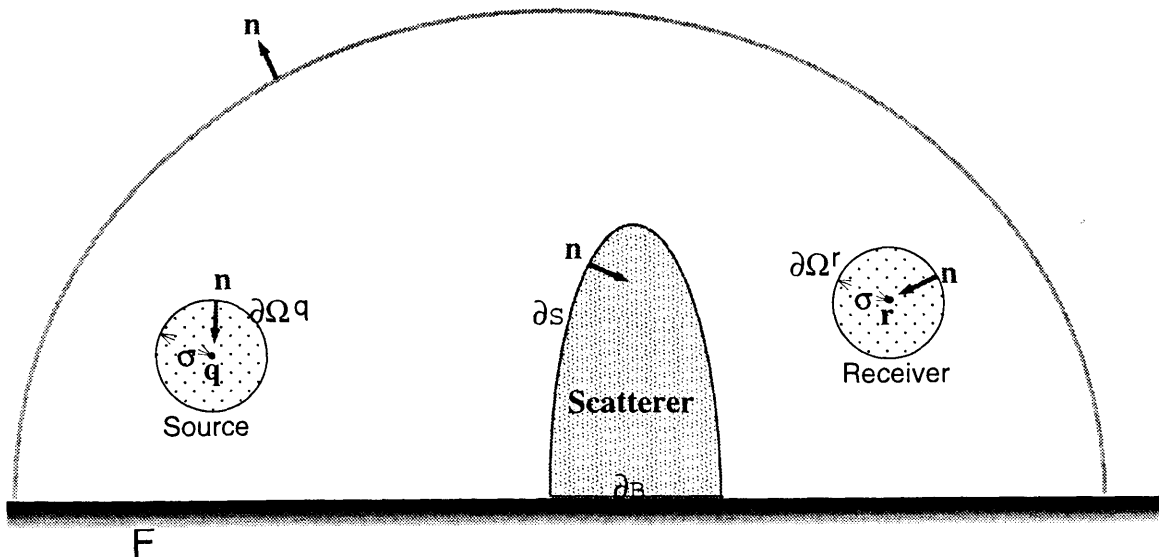


Fig. A.2 反射性地面上の散乱体，音源，受音点

i) 無限遠点の積分について

Fig. A.3 に示すように、各パラメータを定義する。無限遠点においては、Sommerfeld Infinity Condition

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \sqrt{r_0} \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_0)}{\partial r_0} + jk\Phi(\mathbf{r}_0) \right) = 0 \quad (\text{A.10})$$

を満足すると仮定すると、十分大きな R に対して、Helmholtz 方程式の主要解は

$$\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(kR) \simeq \frac{1}{j} \sqrt{\frac{1}{8\pi kR}} e^{-j(kR - \frac{1}{4}\pi)} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(kR) \right) \simeq -jk \cdot \frac{1}{j} \sqrt{\frac{1}{8\pi kR}} e^{-j(kR - \frac{1}{4}\pi)} \quad (\text{A.12})$$

と近似される。従って、受信点から無限遠点までの距離 R_1 、受信点の鏡像から無限遠点までの距離 R_2 に対しては、

$$\begin{aligned} I_{\partial\Omega_\infty} &= \int_{\Sigma} \left\{ \Phi(\mathbf{r}_0) \cdot -jk \cdot \frac{1}{j} \sqrt{\frac{1}{8\pi kR_1}} e^{-j(kR_1 - \frac{1}{4}\pi)} + \Phi(\mathbf{r}_0) \cdot -jk \cdot \frac{1}{j} \sqrt{\frac{1}{8\pi kR_2}} e^{-j(kR_2 - \frac{1}{4}\pi)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{j} \sqrt{\frac{1}{8\pi kR_1}} e^{-j(kR_1 - \frac{1}{4}\pi)} \frac{\partial}{\partial n} \Phi(\mathbf{r}_0) - \frac{1}{j} \sqrt{\frac{1}{8\pi kR_2}} e^{-j(kR_2 - \frac{1}{4}\pi)} \frac{\partial}{\partial n} \Phi(\mathbf{r}_0) \right\} dl(\mathbf{r}_0) \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{j} \left(\sqrt{\frac{1}{8\pi kR_1}} e^{-j(kR_1 - \frac{1}{4}\pi)} + \sqrt{\frac{1}{8\pi kR_2}} e^{-j(kR_2 - \frac{1}{4}\pi)} \right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_0)}{\partial r_0} + \Phi(\mathbf{r}_0) \right) r_0 d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

となる。

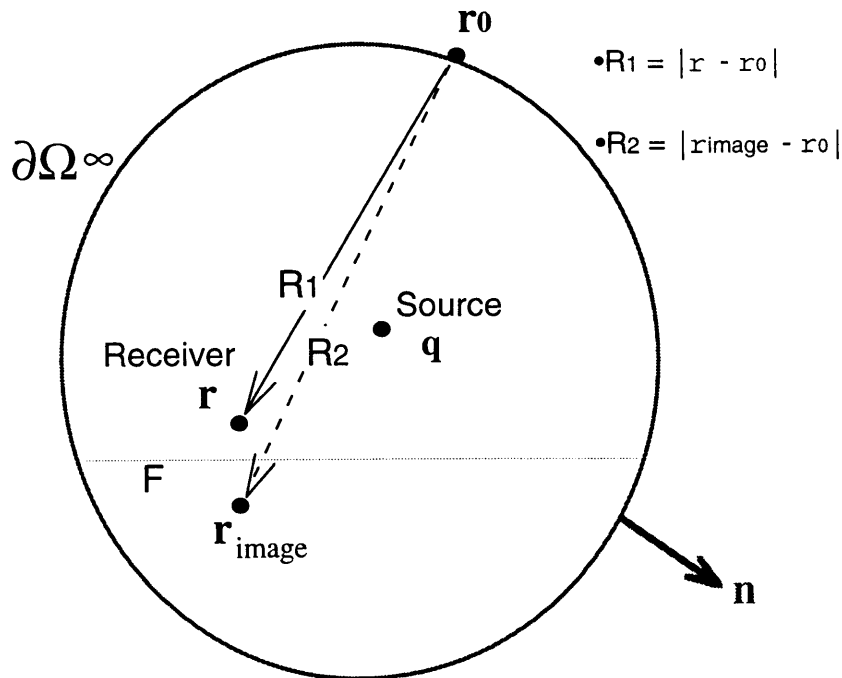


Fig. A.3 無限遠境界上の位置関係

r_0 と R_1, R_2 は十分大きな数値であり, 極限では同一視してもよいので,

$$I_{\partial\Omega_\infty} = \int_0^{2\pi} -\frac{2}{j} \sqrt{\frac{1}{8\pi k}} e^{-j(kr_0 - \frac{1}{4}\pi)} \cdot \sqrt{r_0} \left(\frac{\partial\Phi(\mathbf{r}_0)}{\partial R} + \Phi(\mathbf{r}_0) \right) d\theta \quad (\text{A.14})$$

となる. 従って, Sommerfeld Infinity Condition(A.10) 式の下で次式が成立する

$$I_{\partial\Omega_\infty} = 0 \quad (\text{A.15})$$

ii) 音源近傍の積分について

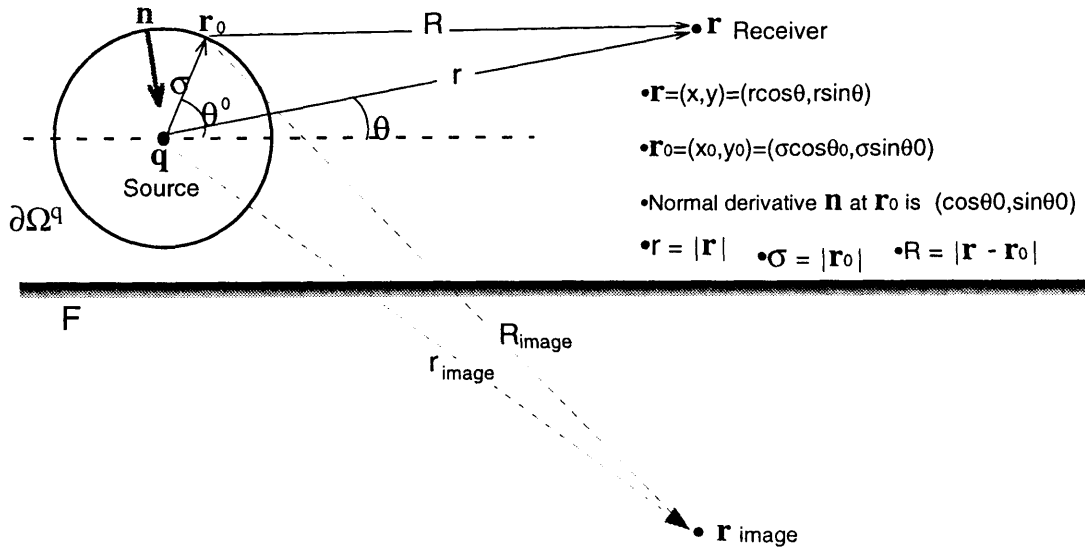


Fig. A.4 音源近傍の位置関係

Fig. A.4 に示すように, 各パラメータを定義する. 半径 σ が十分小さいとき, $\partial\Omega_q$ 上の音圧は,

$$\Phi(\mathbf{r}_0) = \Phi(\sigma, \theta_0) = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k\sigma) \quad (\text{A.16})$$

により表せる. 従って,

$$\begin{aligned} I_{\partial\Omega_q} &= \left(\frac{1}{4j} \right)^2 \int_{\partial\Omega_q} \left\{ H_0^{(2)}(k\sigma) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(H_0^{(2)}(kR) + H_0^{(2)}(k\sigma R_{image}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(H_0^{(2)}(kR) + H_0^{(2)}(k\sigma R_{image}) \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(H_0^{(2)}(k\sigma) \right) \right\} dl(\mathbf{r}_0) \\ &= \left(\frac{1}{4j} \right)^2 \int_{\partial\Omega_q} \left\{ H_0^{(2)}(k\sigma) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(H_0^{(2)}(kR) \right) - H_0^{(2)}(kR) \frac{\partial}{\partial \sigma_r} \left(H_0^{(2)}(k\sigma) \right) \right\} dl(\mathbf{r}_0) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4j} \right)^2 \int_{\partial\Omega_q} \left\{ H_0^{(2)}(k\sigma) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(H_0^{(2)}(kR_{image}) \right) - H_0^{(2)}(kR_{image}) \frac{\partial}{\partial \sigma_{r_{image}}} \left(H_0^{(2)}(k\sigma) \right) \right\} dl(\mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Fig. A.4 からわかるように, (A.17) 式左辺の 2 つの積分は同様に計算できるため, 1 個目の積分を $I_{Real\Omega_q}$ と記述し詳細に展開する. まず, σ_r に関して偏微分を実行すると,

$$I_{Real\Omega_q} = \left(\frac{1}{4j}\right)^2 \int_{\partial\Omega_q} \left\{ H_0^{(2)}(k\sigma) \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(2)}(kR)) - H_0^{(2)}(kR) \cdot -kH_1^{(2)}(k\sigma) \right\} dl(\mathbf{r}_0) \quad (\text{A.18})$$

となる. 更に, $l = \sigma_r \theta$ と置くことにより, 線積分を角度 θ に関する積分に展開すると,

$$I_{Real\Omega_q} = \left(\frac{1}{4j}\right)^2 \left\{ \int_0^{2\pi} \sigma H_0^{(2)}(k\sigma) \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(2)}(kR)) + \int_0^{2\pi} H_0^{(2)}(kR) k\sigma H_0^{(2)}(k\sigma) \right\} d\theta \quad (\text{A.19})$$

となる. (A.19) 式の第 1 項に関しては, $H_1^{(2)}(kR)$ が Ω_q 上で一様であるので

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma_r \rightarrow 0} (\text{第 1 項}) &= \int_0^{2\pi} \lim_{\sigma_r} \sigma H_0^{(2)}(k\sigma) \cdot (-kH_1^{(2)}(kR) \cos(n, r)) d\theta \\ &= -kH_1^{(2)}(kR) \cos(n, r) \int_0^{2\pi} \lim_{\sigma_r} \sigma H_0^{(2)}(k\sigma) d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma_r} \sigma H_0^{(2)}(k\sigma) &= \lim_{\sigma_r} \{ \sigma J_0(k\sigma) - j\sigma N_0(k\sigma) \} \\ &= \lim_{\sigma_r} \sigma J_0(k\sigma) - j \lim_{\sigma_r} \sigma N_0(k\sigma) \\ &= 0 - j \frac{2}{\pi} \lim_{\sigma_r} (\sigma \log \sigma - \sigma \cdot 0.11593) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

が成立するので, (A.19) 式の第 1 項は, 0 となる.

次に, (A.19) 式の第 2 項に関しても, $H_1^{(2)}(kR)$ が Ω_q 上で一様であることを利用すると,

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma_r \rightarrow 0} (\text{第 2 項}) &= H_0^{(2)}(kR) k\sigma \lim_{\sigma_r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} H_0^{(2)}(k\sigma) d\theta \\ &= H_0^{(2)}(kR) k\sigma \int_0^{2\pi} \lim_{\sigma_r} H_0^{(2)}(k\sigma) d\theta \\ &= H_0^{(2)}(kR) \cdot 2\pi \cdot -j \frac{2}{\pi} \\ &= -4j H_0^{(2)}(kR) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

となるので, 次式が成立する.

$$I_{Real\Omega_q} = -\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(kR) \quad (\text{A.23})$$

(A.17) 式の 2 行目の積分である, 音源の鏡像に関する積分についても同様に計算すると,

$-\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(kR_{image})$ が求まる. 従って, 音源近傍の積分については, 次式となる.

$$I_{\partial\Omega_q} = -\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(kR) - \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(kR_{image}) \quad (\text{A.24})$$

iii) 受信点近傍の積分について

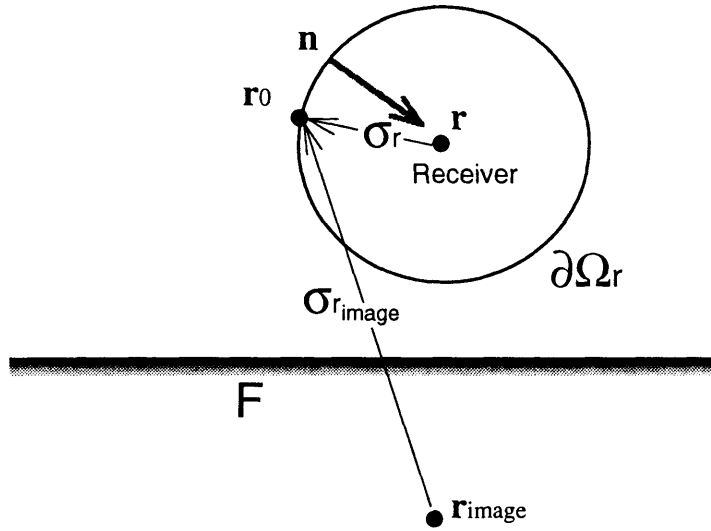


Fig. A.5 受信点近傍の位置関係

Fig. A.5 に示すように、受信点から境界 Ω_r 上の点までの距離と受信点の鏡像から境界 Ω_r 上の点までの距離を、それぞれ $\sigma_r, \sigma_{r_{image}}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 I_{\Omega_r} &= \int_{\Omega_r} \left[\Phi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left\{ \frac{1}{4j} \left(H_0^{(2)}(k\sigma_r) + H_0^{(2)}(k\sigma_{r_{image}}) \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{4j} \left(H_0^{(2)}(k\sigma_r) + H_0^{(2)}(k\sigma_{r_{image}}) \right) \right\} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Phi(\mathbf{r}_0) \right] dl(\mathbf{r}_0) \\
 &= \frac{1}{4j} \left[\int_{\Omega_r} \Phi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(H_0^{(2)}(k\sigma_r) \right) dl(\mathbf{r}_0) + \int_{\Omega_r} \Phi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(H_0^{(2)}(k\sigma_{r_{image}}) \right) dl(\mathbf{r}_0) \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\Omega_r} H_0^{(2)}(k\sigma_r) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{n}} dl(\mathbf{r}_0) - \int_{\Omega_r} H_0^{(2)}(k\sigma_{r_{image}}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{n}} dl(\mathbf{r}_0) \right] \quad (\text{A.25})
 \end{aligned}$$

と展開できる。以後、上式の各積分をまめに計算する。

第1項の積分 (I_1 とおく) については、 $l = \sigma_r \theta$ とおくことにより、線積分が角度 θ に関する積分に展開できる。

$$\begin{aligned}
 I_1 &= - \int_{\Omega_r} \Phi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial \sigma_r} \left(H_0^{(2)}(k\sigma_r) \right) dl(\mathbf{r}_0) \\
 &= - \int_{\Omega_r} \Phi(\mathbf{r}_0) \cdot -k \cdot H_1^{(2)}(k\sigma_r) dl(\mathbf{r}_0) \\
 &= \int_0^{2\pi} \Phi(\mathbf{r}_0) \cdot k\sigma_r \cdot H_1^{(2)}(k\sigma_r) d\theta \\
 &= k\sigma_r \cdot H_1^{(2)}(k\sigma_r) \int_0^{2\pi} \Phi(x + \sigma_r \cos \theta, y + \sigma_r \sin \theta) d\theta \quad (\text{A.26})
 \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{r} = (x, y)$ とおいている。この積分は、 $\sigma_r \rightarrow 0$ のとき、 $2\pi\Phi(\mathbf{r})$ に近づく。何故ならば、

$$m_{\sigma_r} = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |\Phi(x + \sigma_r \cos \theta, y + \sigma_r \sin \theta) - \Phi(x, y)|$$

とおくとき、 Φ は連続なので、 $m_{\sigma_r} \rightarrow 0$ ($\sigma_r \rightarrow 0$) となる。従って、

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{2\pi} \Phi(x + \sigma_r \cos \theta, y + \sigma_r \sin \theta) d\theta - 2\pi\Phi(x, y) \right| \\ & \leq \int_0^{2\pi} |\Phi(x + \sigma_r \cos \theta, y + \sigma_r \sin \theta) - \Phi(x, y)| d\theta \\ & \leq 2\pi m_{\sigma_r} \\ & \rightarrow 0 \quad (\sigma_r \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

また、 $xH_1^{(2)}(x) \rightarrow -j\frac{2}{\pi}(x \rightarrow 0)$ という関係が成立するので、(A.26) 式より、第1項の積分 I_1 は、

$$I_1 = j\frac{2}{\pi} \cdot 2\pi\Phi(\mathbf{r}) \quad (\sigma_r \rightarrow 0) \quad (\text{A.28})$$

となる。

次に、第2項の積分 $I_{1_{image}}$ について計算する。

$$\begin{aligned} I_{1_{image}} &= - \int_{\Omega_r} \Phi(\mathbf{r}_0) \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma_{r_{image}}} \left(H_0^{(2)}(k\sigma_{r_{image}}) \right) \cdot \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{image}) dl(\mathbf{r}_0) \\ &= - \int_0^{2\pi} \Phi(\mathbf{r}_0) \cdot -kH_1^{(2)}(k\sigma_{r_{image}}) \cdot \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{image}) \cdot \sigma_r d\theta \\ &= k\sigma_r \int_0^{2\pi} \Phi(\mathbf{r}_0) \cdot H_1^{(2)}(k\sigma_{r_{image}}) \cdot \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{image}) d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

絶対値をとると、

$$\begin{aligned} |I_{1_{image}}| &= k\sigma_r \left| \int_0^{2\pi} \Phi(\mathbf{r}_0) \cdot H_1^{(2)}(k\sigma_{r_{image}}) \cdot \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{image}) d\theta \right| \\ &\leq k\sigma_r \int_0^{2\pi} |\Phi(\mathbf{r}_0) \cdot H_1^{(2)}(k\sigma_{r_{image}}) \cdot \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{image})| d\theta \\ &\leq k\sigma_r \int_0^{2\pi} |\Phi(x + \sigma_r \cos \theta, y + \sigma_r \sin \theta) \cdot H_1^{(2)}(k\sigma_{r_{image}})| d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

ここで、 $\mathbf{r} = (x, y)$ とおいている。この積分は、 $\sigma_r \rightarrow 0$ のとき、 $2\pi |\Phi(\mathbf{r}) \cdot H_1^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{image}|)|$ に近づく。何故ならば、

$$n_{\sigma_r} = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| \Phi(x + \sigma_r \cos \theta, y + \sigma_r \sin \theta) \cdot H_1^{(2)}(k\sigma_{r_{image}}) - \Phi(x, y) \cdot H_1^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{image}|) \right|$$

とおくとき、 $\Phi, H_1^{(2)}$ は連続なので、 $n_{\sigma_r} \rightarrow 0$ ($\sigma_r \rightarrow 0$) となる。そこで、(A.27) 式と同様にすれば証明できる。従って、

$$|I_{1_{image}}| \rightarrow 0 \quad (\sigma_r \rightarrow 0) \quad (\text{A.31})$$

故に、第2項の積分 $I_{1_{image}}$ は、

$$I_{1_{image}} = 0 \quad (\sigma_r \rightarrow 0) \quad (\text{A.32})$$

次に、第3の積分 I_2 に関して計算する。

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_{\Omega_r} H_0^{(2)}(k\sigma_r) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_0)}{\partial \sigma_r} dl(\mathbf{r}_0) \\ &= - \int_0^{2\pi} H_0^{(2)}(k\sigma_r) \cdot \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_0)}{\partial \sigma_r} \cdot \sigma_r dl(\mathbf{r}_0) \\ &= -\sigma_r H_0^{(2)}(k\sigma_r) \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_0)}{\partial \sigma_r} d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

ここで、(A.27)式と同様にして、 $\sigma_r \rightarrow 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \sigma_r H_0^{(2)}(k\sigma_r) &\rightarrow 0 \\ \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_0)}{\partial \sigma_r} d\theta &\rightarrow 2\pi \cdot \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \sigma_r} \end{aligned}$$

となる。故に、第3項の積分 I_2 は、

$$I_2 = 0 \quad (\sigma_r \rightarrow 0) \quad (\text{A.34})$$

次に、第4の積分 $I_{2_{image}}$ に関して計算する。

$$\begin{aligned} I_{2_{image}} &= - \int_{\Omega_r} H_0^{(2)}(k\sigma_{r_{image}}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_0)}{\partial \sigma_r} \cdot \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{image}) dl(\mathbf{r}_0) \\ &= - \int_0^{2\pi} H_0^{(2)}(k\sigma_{r_{image}}) \cdot \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_0)}{\partial \sigma_r} \cdot \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{image}) \cdot \sigma_r dl(\mathbf{r}_0) \\ &= -\sigma_r \int_0^{2\pi} H_0^{(2)}(k\sigma_{r_{image}}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_0)}{\partial \sigma_r} \cdot \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{image}) d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

ここで、(A.29)~(A.31)式を導いたときと同様にして、上式の積分は $\sigma_r \rightarrow 0$ のとき、

$$|I_{2_{image}}| \rightarrow 0 \quad (\sigma_r \rightarrow 0)$$

となる。故に、第4項の積分 $I_{2_{image}}$ は、

$$I_{2_{image}} = 0 \quad (\sigma_r \rightarrow 0) \quad (\text{A.36})$$

(A.28)式、(A.32)式、(A.34)式、(A.36)式より、受音点近傍の積分 I_{Ω_r} は、

$$\begin{aligned} I_{\Omega_r} &= \frac{1}{4j} \cdot j \frac{2}{\pi} \cdot 2\pi \Phi(\mathbf{r}) \\ &= \Phi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

iv) 地面 F に沿った積分について

(A.8) 式により定義される Green 関数の性質上, 受音点 $\mathbf{r} \in V$ に対して,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) = 0 \quad (\mathbf{r}_0 \in F) \quad (\text{A.38})$$

が成立するものである.

また, 地面 F は剛なので,

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (\mathbf{r}_0 \in F) \quad (\text{A.39})$$

となる. 従って, 次式が成立する.

$$I_F = \int_F \left\{ \Phi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Phi(\mathbf{r}_0) \right\} dl(\mathbf{r}_0) = 0 \quad (\text{A.40})$$

v) 散乱体表面 ∂S に沿った積分について

∂S に沿った積分に関しては, もしも散乱体 S が地面 F に接する場合は, 接している部分を ∂B と記述すれば, この部分は散乱体表面の音響的な性質に関わらず, ∂B の表面は剛となる. 従って, 前節の地面 F と全く同様な議論が展開できて,

$$I_{\partial B} = \int_{\partial B} \left\{ \Phi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Phi(\mathbf{r}_0) \right\} dl(\mathbf{r}_0) = 0 \quad (\text{A.41})$$

となる. そこで,

$$I_{\partial S} = \int_{\partial S - \partial B} \left\{ \Phi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Phi(\mathbf{r}_0) \right\} dl(\mathbf{r}_0) \quad (\text{A.42})$$

と, 簡略化される. このように, 散乱体表面 ∂S に沿った積分については, 地面と接している場合は, その接している部分に関しては無視してよいので扱いが非常に楽になる.

vi) 音源, 受音点が散乱体表面にあるとき

音源近傍, 受音点近傍の積分に関しては A.2 節, A.2 節における積分範囲が, 2π でなく開き角 (小円 σ の中で, V に含まれる角度) となる. 従って, (A.24) 式および (A.37) 式より,

$$I_{\partial \Omega_q} = \varepsilon(\mathbf{q}) \phi_d(\mathbf{r}) \quad (\text{A.43})$$

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(kR) + \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(kR_{image})$$

$$I_{\Omega_r} = \varepsilon(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) \quad (\text{A.44})$$

ここで, $\varepsilon(\mathbf{q})$ および $\varepsilon(\mathbf{r})$ は小円 σ が V に含まれる割合である.

vii) 地面上部の全境界 $I_{\Omega_\infty} + I_{\Omega_q} + I_{\Omega_r} + F + \partial S$ について、まとめる

無限遠の積分に関しては (A.15) 式, 音源近傍の積分には (A.43) 式, 受音点近傍の積分には (A.44) 式, 剛な地面に沿った積分には (A.40) 式および散乱体表面に沿った積分には (A.42) 式より, 受音点 $\mathbf{r} \in V_1$ における速度ポテンシャルは次式で表せる.

$$\varepsilon(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{q})\phi_d(\mathbf{r}) - \int_{\partial S - \partial B} \left\{ \Phi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Phi(\mathbf{r}_0) \right\} dl(\mathbf{r}_0) \quad (\text{A.45})$$

上式 (A.45) は, 受音点 \mathbf{r} が領域 V_1 の内点であるときに導いた式である. では, 領域 V の境界上, すなわち, 受音点 $\mathbf{r} \in F$ のときは,

- (A.6) 式は成立.
- 無限遠点の積分 $I_{\partial\Omega_\infty}$ は同様に処理できる.
- 地面に沿った積分 I_F , 散乱体表面に沿った積分 I_S も同様に処理でる.
- 受音点近傍の積分に関しては, V_1 に含まれ積分路が Fig. A.6 に示すように円ではなく半円になるので, 処理手順は同様ではない.

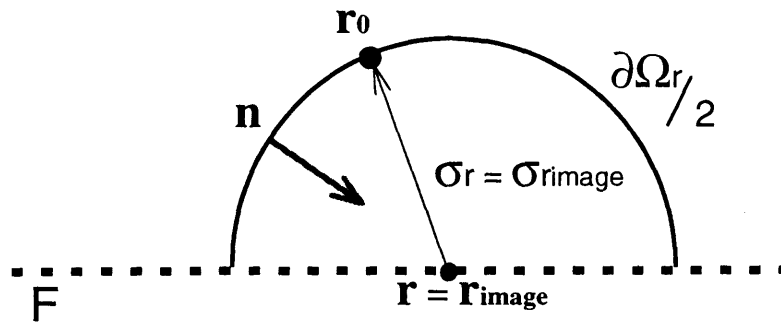


Fig. A.6 受音点 r が ∂S もしくは ∂B 上に位置するときの線積分の評価

そこで, 受音点近傍の積分 $I_{\partial\Omega_r/2}$ を A.2 節と同様に,

$$I_{\Omega_r/2} = \frac{1}{4j} (I_1 + I_{1_{image}} + I_2 + I_{2_{image}}) \quad (\text{A.46})$$

とおいてみる. I_1 に関する積分は, 積分路が半円となることに注意すると, (A.26) 式と同様にして

$$I_1 = \int_{\Omega_r} \Phi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial \sigma_r} (H_0^{(2)}(k\sigma_r)) dl(\mathbf{r}_0)$$

$$\begin{aligned}
&= -k\sigma_r \cdot H_1^{(2)}(k\sigma_r) \int_0^\pi \Phi(x + \sigma_r \cos \theta, y + \sigma_r \sin \theta) d\theta \\
&= -2j\Phi(\mathbf{r})
\end{aligned} \tag{A.47}$$

である。受信点が F, B 上, すなわち $\mathbf{r} \in F + B$ のときは, $\mathbf{r}_{image} = \mathbf{r}$ となるので, $I_{1_{image}}$ に関する積分も,

$$I_{1_{image}} = -2j\Phi(\mathbf{r}) \tag{A.48}$$

である。 $I_2, I_{2_{image}}$ に関しては, 積分路が半円になっても, (A.29)~(A.32)式, (A.34)~(A.36)式とほぼ同様にして, 0となる。このことと (A.46)~(A.48)式より, 次式が成り立つ。

$$I_{\Omega_r/2} = \Phi(\mathbf{r}) \tag{A.49}$$

となるので, (A.30)式と全く同じ式になる。従って, 地面上部の音圧は, 受信点が領域の内点でも境界上の点であっても, (A.45)式により求まる。また, 音源が F 上に位置するときも同様に展開することにより, (A.45)式がそのまま適用できることが確認できる。

A.3 境界要素法の適用

音源を q , 受信点を \mathbf{r} とすると, (A.45)式は速度ポテンシャルを音圧で置き換えることにより,

$$\varepsilon(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{q})p_d(\mathbf{r}) - \int_{\partial S - \partial B} \left\{ p(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} p(\mathbf{r}_0) \right\} dl(\mathbf{r}_0) \tag{A.50}$$

となる。ただし, $p_d(\mathbf{r})$ は直接音項であり, $p_d(\mathbf{r}) = 4/j G(\mathbf{r}; \mathbf{q})$ と表示される。この Helmholtz-Hoygens 積分方程式に, 境界要素法 [38] を適用する。

ここで, 媒質の密度を ρ , 媒質中の音速を c , \mathbf{r}_0 における \mathbf{n}_0 方向の粒子速度を $u(\mathbf{r}_0)$, 境界表面のアドミタンスを $\beta_0(\mathbf{r}_0)$, そのアドミタンスを空気のアドミタンスで基準化したものを $\beta(\mathbf{r}_0)$ とし, 時間項として $e^{j\omega t}$ を採用する。ここで, 局所作用 (locally reactive) [39] を仮定すると,

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{n}_0} = -\rho \frac{\partial u(\mathbf{r}_0)}{\partial t} = -\rho \beta_0(\mathbf{r}_0) \frac{\partial p(\mathbf{r}_0)}{\partial t} = -jk\rho_0 c_0 \beta_0(\mathbf{r}_0) p(\mathbf{r}_0) = -jk\rho_0 \beta(\mathbf{r}_0) p(\mathbf{r}_0) \tag{A.51}$$

が成立する。また,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left\{ H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|) + H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{image}|) \right\} \\
&= -k \cos(\mathbf{n}_0, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|) - k \cos(\mathbf{n}_0, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{image}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{image}|)
\end{aligned} \tag{A.52}$$

が成立する。これらを (A.50) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{q})p_d(\mathbf{r}) &- \frac{4}{k} \int_{\partial S - \partial B} \left\{ \beta(\mathbf{r}_0) \left(H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|) + H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{image}|) \right) \right. \\ &+ j \left(\cos(\mathbf{n}_0, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|) \right. \\ &\left. \left. + \cos(\mathbf{n}_0, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{image}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{image}|) \right) \right\} p(\mathbf{r}_0) dl(\mathbf{r}_0) \quad (\text{A.53}) \end{aligned}$$

が成立する。この式を離散化する。

散乱体表面を N 個の要素 $\partial S_1, \dots, \partial S_N$ に分割する。ただし、地面に接している ∂B に関しては計算の必要がないので、離散化は地面に面している部分のみ行えば十分である。ここで、一定要素の仮定、すなわち各要素上 ∂S_i における音圧が要素中点での音圧 $p(\mathbf{r}_i)$ で近似されるとすると、

$$\varepsilon(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{q})p_d(\mathbf{r}) - \sum_{j=1}^N p(\mathbf{r}_j) A_{ij} \quad (\text{A.54})$$

のように積分が離散化される。ただし、

$$\begin{aligned} A_{ij} = A_{S_j}(\mathbf{r}) &= \frac{4}{k} \int_{\partial S_j} \left\{ \beta(\mathbf{r}_0) \left(H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|) + H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{image}|) \right) \right. \\ &\left. + j \left(\cos(\mathbf{n}_0, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|) + \cos(\mathbf{n}_0, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{image}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{image}|) \right) \right\} dl(\mathbf{r}_0) \quad (\text{A.55}) \end{aligned}$$

ここで、 \mathbf{r} に各境界要素上の点 $\mathbf{r}_m (m = 1, \dots, N)$ を代入すると、 $\varepsilon(\mathbf{r}_i) = 1/2$ なので、

$$\sum_{j=1}^N p(\mathbf{r}_j) A_{S_j}(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} p(\mathbf{r}_i) = \varepsilon(\mathbf{q}) p_d(\mathbf{r}_i), \quad (i = 1, \dots, N) \quad (\text{A.56})$$

のように、 N 元の連立方程式が成立する。(A.56) 式は、以下のように行列表示される。

$$\begin{bmatrix} A_{11} + \frac{1}{2} & \dots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ p(\mathbf{r}_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_d(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ p_d(\mathbf{r}_N) \end{bmatrix} \quad (\text{A.57})$$

この行列の演算 (A.57) 式を解くことにより、境界表面の音圧 $p(\mathbf{r}_1), \dots, p(\mathbf{r}_N)$ が求まる。更に、この境界表面の音圧を (A.54) 式に代入することにより、任意の受音点 \mathbf{r} における音圧を計算することができる。

行列の演算は、Gauss の消去法や LU 分解による連立一次方程式のアルゴリズムを適用すればよい。また、(A.55) 式による積分計算は Gauss 型の積分公式 [40] を利用すれば十分な精度がある。