保険金見積もりの細分化

田中, 立志
九州大学大学院数理学研究院

出版情報：COE Lecture Note. 13, pp.47-51, 2009-02-06. 九州大学大学院数理学研究院
バージョン：
権利関係：

保険金見積もりの細分化

田 中 立 志
九州大学大学院数理学研究院

1 序

チェインラダー法によりクレーム額の推定を行うと, 前年度 0 であれば次年度以降も 0 である. しかし, 実際には諸事情により保険金 0 の次の年に 0 でない数字が現れることがある. これに対処すべく考案されたクレームのモデルが文献 [1] で取り扱われている.

クレームとは, 発生時刻 T と発生からのディベロップメント Z の組として定義される. クレーム額やクレーム頻度の情報はすべてディベロップメント Z のほうに組み込んで考える. クレーム (T, Z) を時系列で集めた集合をクレーム過程と呼ぶが, これはマーク付きポアソン過程であることが知られている. ここでは, 文献 [1] に従い, 従来考えられてきた年単位のクレーム過程を, より細分化したスパン単位のクレーム過程に置き換え, そのことによる利点と今後の課題について考察する.

2 クレーム過程

2.1 復習

クレームとは組 $C = (T, Z)$ のことである. ただし, T はクレームの発生時刻, Z は発生から支払完了までの経過（これをマークという）を表す.

クレーム過程とはクレームの族 $\{(T_\iota, Z_\iota)\}_{\iota=1,\ldots,N}$ のことをいう. 時刻 T_ι たちは, $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ としても一般性を失わない. これらの時刻は, 時間 $t > 0$ においてパラメーター $w(t)$ をもつ非斉次ポアソン過程により生成されている. より正確には,

$$\{N(t)\} \sim \mathrm{Po}(w(t); t \geq 0)$$

により,

$$T_\iota = \inf\{t > 0 | N(t) \geq \iota\}$$

と定義される.

以上のとき, クレーム過程 $\{(T_\iota, Z_\iota)\}$ は, 生起率 $w(t)$ と位置依存マーキング $P_{Z|t}$ のマーク付きポアソン過程と呼ばれ,

$$\{(T_\iota, Z_\iota)\}_{\iota=1,\ldots,N} \sim \mathrm{Po}(w(t), P_{Z|t}; t \geq 0)$$

で表す.

われわれは

$$Z_\iota = (J_\iota, Y_{J,\iota}, Y_{J+1,\iota}, \ldots, Y_{D,\iota}, G_\iota)$$

なる型のマークを考える. ただし, $J_\iota \in \{1, \ldots, D\}$,$Y_{J,\iota} + Y_{J+1,\iota} + \cdots + Y_{D,\iota} \geq 0$,$n \in \{0, \ldots, D - J\}$,$G_\iota \in \mathcal{C}$ である. 記号はそれぞれ,

ι: クレーム番号

J_ι: 経過年数

D: 支払完了年度

$Y_{k,\iota}$: 経過年度 k における当該年度保険金

G_ι: クレームのひとつの特徴

$\mathcal{C}$: クレームの特徴の族

を意味している.

これらのデータの下で, クレーム ι に対する最終累計保険金 R_D と支払備金 $IBNR_D$ は次式で与えられる.

$$R_D = \sum_{\substack{i \le D \\ D-i+1 \le k \le D}} Y_k,$$

$$IBNR_D = \sum_{\substack{j > D-i+1 \\ i \le D \\ D-i+1 \le k \le D}} Y_k.$$

2.2 クレーム過程の細分化

自然数 q をひとつ固定する. 区間 $[0,1]$ の分割を

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_q = 1$$

で与え, 分割されたそれぞれの区間を

$$i_m = (i,m) := [i-1+s_{m-1}, i-1+s_m) \quad (i = 1,\ldots,D, m = 1,\ldots,q)$$

とする. これにより, 1 年間を q 個の " シーズン " に分け, 年単位のクレーム分析をより細かくし, シーズンごとにクレームを分析することを考える.

クレーム番号 ι をひとつ固定し, 以後表記しない. (i,m,j,g)-クレームとは, シーズン i_m に発生し, j 年経過した, g という特徴を持つクレームのこととする. $N_{i,m,j,g} = N(i,m,j,g)$ を (i,m,j,g)-クレームの個数とし, (i,m,j,g,n)-クレームとして n 番目 $(1 \le n \le N_{i,m,j,g})$ の (i,m,j,g)-クレームのこととする. $Y_{i,m,j,k,g,n}$ として, 当該年度 k における (i,m,j,g,n)-クレームの当該年度保険金とすると, 前節最後のクレーム ι に対する最終累計保険金 R_D と支払備金 $IBNR_D$ は次式で与えられる.

$$R_D = \sum_{\substack{1 \le n \le N(i,m,j,g) \\ i \le D, j \le D \\ 1 \le m \le q \\ g \in G \\ D-i+1 \le k \le D}} Y_k,$$

$$IBNR_D = \sum_{\substack{1 \le n \le N(i,m,j,g) \\ i \le D \\ 1 \le m \le q \\ g \in G \\ D-i+1 < j \le k \le D}} Y_k.$$

(i,m,j,g)-クレームの族のことを (i,m,j,g)-クレーム過程と呼ぶことにしよう. Norberg [2] は以下の定理を示した.

定理 2.1（Norberg, 1999） (i,m,j,g)-クレーム過程はマーク付きポアソン過程である．さらに, 各 (i,m,j,g)-クレーム過程は独立であり, (i,m,j,g)-クレームの生起率は

$$w_{i,m,j,g}(t) = w(t)P_{Z|t}(J=j, G=g) = w(t)P_{Z|t}(J=j|G=g)P_{Z|t}(G=g) \quad (t \in i_m)$$

である．

3　離散モデル

われわれは次の 4 つを見積もらなければならない．

(i) $w(t)$

(ii) $P_{Z|t}(G=g)$

(iii) $P_{Z|t}(J=j|G=g)$

(iv) (i,m,j,g) が与えられたときの $P_{Z|t}(Y_{J,\iota}, Y_{J+1,\iota}, \ldots, Y_{D,\iota})$．

3.1　$w(t)$

クレーム ι の生起率 $w(t)$ には, 以下の仮定を設ける．

ある $w_i (i=1,\ldots,D), \sigma_m (m=1,\ldots,q)$ が存在し, $w(t) = w_i\sigma_m$ $(t \in i_m)$ が成立する．

すなわち, クレームの生起率は事故年度とそのシーズンごとに定数であるとする．

3.2　$P_{Z|t}(G=g)$

クレームの特徴が g である分布 $P_{Z|t}(G=g)$ には, 以下の仮定を設ける．

$$P_{Z|t}(G=g) = C\frac{e_{i,m,g}}{e_{i,m}}f(i,m,g).$$

ただし, $e_{i,m}$ はシーズン i_m におけるクレームのエクスポージャー, $e_{i,m,g}$ は i_m における g-クレーム（特徴 g をもつクレーム）のエクスポージャー, C は正の定数, $f(i,m,g)$ は正の値をとるとする．

3.3　$P_{Z|t}(J=j|G=g)$

特徴 G が与えられているときの, クレームの経過年数 J の分布 $P_{Z|t}(J=j|G=g)$ には, 以下の仮定を設ける．

ある関数 r' が存在して, $P_{Z|t}(J=j|G=g) = r'(j,g,t-[t])$ $(t \in i_m)$．

これは J が事故発生年度とは独立であることを意味しており, チェインラダー法でもよくなされる仮定である．

3.4 結論 1

前の 3 つの節での仮定により, 以下を結論付けることができる.

定理 3.1

$$E[N_{i,m,j,g}] = e_{i,m,g} C w_i \sigma_m f(i,m,g) r(m,j,g).$$

証明

$$\begin{aligned} E[N_{i,m,j,g}] &= \int_{t\in(i,m)} e_{i,m} w_{i,m,j,g}(t) dt \\ &= e_{i,m,g} C w_i \sigma_m f(i,m,g) \int_{t\in(i,m)} r'(j,g,t-[t]) dt. \end{aligned}$$

最後の積分を $r(m,j,g)$ とおけばよい. ∎

3.5 (i,m,j,g) が与えられたときの $P_{Z|t}(Y_{J,\iota}, Y_{J+1,\iota}, \ldots, Y_{D,\iota})$

クレーム額の分布には, 以下の 2 つの仮定を設ける.

〔I〕

$$P_{Z|t}(Y_J, Y_{J+1}, \ldots, Y_D) = P(Y_J, Y_{J+1}, \ldots, Y_D) \quad (t \in i_m).$$

すなわち, $(Y_J, Y_{J+1}, \ldots, Y_D)$ は区間 i_m にのみ依存し, (i,m,j,g) が与えられたときに同分布に従う. たとえば, 区間 i_m のはじめにすべての保険金の支払いが発生するなどの状況では, この仮定が満たされる.

〔II〕

$$\text{ある関数 } h \text{ が存在して, 任意の } k \in \{j+1, \ldots, D\} \text{ に対して,}$$
$$P_{Z|t}(Y_k | Y_{k-1}, \ldots, Y_j) \sim P_{Z|t}(Y_k | h(Y_{k-1}, \ldots, Y_j)).$$

関数 h としてはたとえば, 保険金の総額 $S_k = Y_k + \cdots + Y_j$ などを用いる. たとえば, もし確率過程 (S_k) がマルコフ過程であれば, $h(Y_{k-1}, \ldots, Y_j) = S_k$ として仮定が満たされる.

3.6 結論 2

以上の仮定の下で, 以下が成立する.

定理 3.2

$$P_t(Y_D, Y_{D-1}, \ldots, Y_j) = P(Y_D | h(Y_{D-1}, \ldots, Y_j)) P(Y_{D-1} | h(Y_{D-2}, \ldots, Y_j)) \cdots P(Y_j) \quad (t \in i_m).$$

3.7 準備すべきデータ

以上のような離散モデルを考えるために準備すべきデータは,

$N_{i,m,j,g}$ $(i+j-1 \leq D)$: 発生年度 + 経過年数 -1 が D 以下である (i,m,j,g)-クレームの個数

$Y_{i,m,j,k,g,\iota}$ $(i+j-1 \leq D, j \leq k)$: 発生年度 + 経過年数 -1 が D 以下である, 報告済みの (i,m,j,g)-クレーム額

の 2 点である.

4 考察

まず, 文献 [1] によると, このような細かい分析を行うほうが, 分布のより精度のよいフィッティングを行うことができる. 海外では損害保険業務においてこのようなことを行っているのかもしれない. また, クレームの特徴 G の情報を加味したことにより, ランオフ三角形を用いた将来予測において 0 という数字から 0 でない数字を導き出すことも可能になる, としてある. このことはチェインラダー法やその他今までの統計的見積法においてはできなかったことであり, 保険実務における利点となり得る.

しかしながら, 情報を細分化したことによって, 個々の分析を個々の場合のデータに基づいて行う必要がある. それだけのデータが揃うか, あるいは分析に要する時間は大きくなりすぎないか, 計算機上で計算可能か, などの疑問点が残る. さらに, クレームの特徴 G の把握をどのように行うのかは, 数学では統制できない問題かもしれない.

参考文献

[1] Christian Roholte Larsen, *An Individual Claims Reserving Model*, Astin Bull., 37(1) 2007, 113-132.

[2] R. Noberg, *Prediction of outstanding liabilities in non-life insurance*, Astin Bull., 23 1993, 95-115.