マークドポアソン過程 : 保険金見積もりの細分化について

谷口, 説男
九州大学大学院数理学研究院

出版情報：COE Lecture Note. 13, pp.37-45, 2009-02-06. 九州大学大学院数理学研究院
バージョン：
権利関係：

マークドポアソン過程
– 保険金見積もりの細分化について –

谷 口 説 男
九州大学大学院数理学研究院

はじめに

保険契約のポートフォリオ全体のクレーム総額の分布を集合的リスクモデルで扱う手法として，クレーム総額を複合ポアソン分布によりモデル化する方法がある．このモデルでは，クレーム総額を複合ポアソン過程を用いてモデル化する．複合ポアソン過程の構造から，モデルに取り込まれるのは各クレームに対する支払金額と総クレーム回数だけである．すなわち，i 番目のクレーム支払金額を Y_i とし，総クレーム回数を N とするとき，このモデルで取り扱われるのは次式で与えられる支払総額 S である;

$$S = \sum_{i=1}^{N} Y_i.$$

ただし，次の様な構造が仮定されている．

(1) N はパラメータ W のポアソン分布に従う ($N \sim \mathbf{Po}(W)$ とあらわす)．すなわち

$$P(N = n) = \frac{W^n}{n!}e^{-W}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

(2) $Y_1, Y_2, \ldots$ は独立で，すべて確率変数 Y と同じ分布に従い，さらに N と独立である．

確率変数 Y の分布を P_Y と表し，上の確率変数 S はパラメータ (W, P_Y) の複合ポアソン分布に従うという ($\boldsymbol{S \sim \mathbf{Po}(W, P_Y)}$ と記す)．ただし，分布 P_Y とは，$\mathbb{R}$ 上の次で特徴付けられる確率測度のことをいう．

$$P_Y((-\infty, a]) = P(Y \leqq a), \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

上の複合ポアソン分布では，クレームにさらに事故発生時刻，事故発生から保険金支払いが始まるまでの待ち時間，支払完了までの経過状況などの情報を取り込むことはできない．この様な要請に応えるものとしてマークドポアソン過程がある．本報告では，R. Norberg の論文 “Prediction of outstanding liabilities in non-life insurance” (Astin Bull., 23 (1993), 95–115) に従って，マークドポアソン過程について紹介する．

1　マークドポアソン過程

1.1　クレーム

クレームは，以下の統計量から成ると考えよう．

$$
\begin{array}{rl}
\text{事故発生時刻}: & T \\
\text{発生後報告されるまでの経過時間}: & U \\
\text{報告後支払い完了までの経過時間}: & V \\
T+U+v\,\text{までの累計支払保険金}: & Y(v)\ (0 \leqq v' \leqq V) \\
\text{総支払保険金}: & Y = Y(V)
\end{array}
$$

クレームの構成要因は下図のような関係にある.

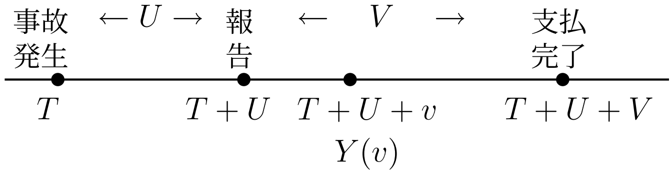

図 4: クレームを構成する統計量

クレームの構成要因のうち事故発生時間意外の要因からなる組

$$Z = (U, V, Y, \{Y(v')\}_{0 \leqq v' \leqq V})$$

をマーキングという．マーキングは支払情報 (the development of claim) を記述しており，クレームは，事故発生時刻とマーキングの組

$$(T, Z)$$

で与えられる．後で利用するために，マーキングの全体 $\mathcal{Z}$ とクレームの全体 $\mathcal{C}$ を次のように定義しておく.

$$\mathcal{Z} = \Big\{ Z = (U, V, Y, \{Y(v)\}_{0 \leqq v \leqq V}) \,\Big|\, U, V, Y \geqq 0, 0 \leqq Y(v) \leqq Y(v')\,(v \leqq v') \Big\}$$

$$\mathcal{C} = \big\{ (T, Z) \,\big|\, T > 0, Z \in \mathcal{Z} \big\} = (0, \infty) \times \mathcal{Z}.$$

1.2 マークドポアソン過程 – 定義

複合ポアソン過程 $S = \sum_{\iota=1}^{N} Y_\iota$ は，列 $\{Y_\iota\}_{1 \leqq \iota \leqq N}$ により定まる．Y_ι は ι 番目のクレーム支払金額であるから，それは自然に発生時刻 T_ι を含んでいる．すなわち，複合ポアソン過程は，発生時刻とクレーム支払金額の組の列

$$\{(T_\iota, Y_\iota\}_{1 \leqq \iota \leqq N}$$

から定まる．この支払金額 Y_ι をマーキング Z_ι に変えた組の列

$$\big\{(T_\iota, Z_\iota)\big\}_{1 \leqq \iota \leqq N}$$

が**マークドポアソン過程**である.

マークドポアソン過程の詳しい構造を見ていこう．時刻 t までの事故発生回数を $N(t)$ と表せば，事故発生時刻の列 $T_1 < T_2 < \ldots$ と総事故発生回数 N は

$$T_\iota = \inf\{t \,|\, N(t) \geqq \iota\}, \quad N = \lim_{t \to \infty} N(t)$$

という関係式により定まる (下図参照).

マークドポアソン過程では

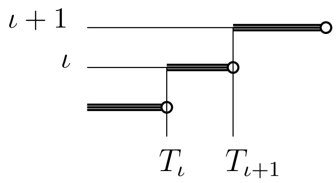

図 5: 事故発生時刻と発生回数

$\{N(t)\}_{t \geqq 0}$ は強度関数 $w(t)$ をもつ非斉次ポアソン過程である

と仮定する．ただし，強度関数 $w(t)$ をもつ非斉次ポアソン過程とは，次のように定義される確率過程である．確率過程 $\{N(t)\}_{t \geqq 0}$ が，3 条件

(1) $P(N(t) \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}) = 1$,

(2) $s \leqq t$ ならば，$P(N(s) \leqq N(t)) = 1$,

(3) $P(\lim_{h \searrow 0} N(t+h) = N(t), \forall t \geqq 0) = 1$

を満すとき，**計数過程**であるという．ここで $\mathbb{Z}_{\geqq 0} = \{0, 1, 2, \ldots\}$．$\int_0^\infty w(u)du < \infty$ を満す関数 $w : [0, \infty) \to [0, \infty)$ を採る．計数過程 $\{N(t)\}_{t \geqq 0}$ が強度関数 $w(t)$ をもつ**非斉次ポアソン過程**であるとは，2 条件

(1) 独立な増分を持つ．すなわち，任意の $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対し，$N(t_j) - N(t_{j-1})$, $1 \leqq j \leqq n$, は独立である，

(2) $N(t) - N(s) \sim \mathbf{Po}\left(\int_s^t w(u)du\right)$, $0 \leqq s < t$

が成り立つことをいう ($\boldsymbol{\{N(t)\}_{t \geqq 0} \sim \mathbf{Po}(w(t); t \geqq 0)}$ と記す)．計数過程，非斉次ポアソン過程については，後節「共同研究中間発表会における参考資料– 確率論・線形計画法・ガウス推定 –」**A.4**(58 頁) を参照せよ．

マークドポアソン過程 $\{(T_\iota, Z_\iota)\}_{1 \leqq \iota \leqq N}$ のマーキング Z_ι には次のような仮定をおく．

$t \geqq 0$ 毎に $\mathcal{Z}$ に値をとる確率変数 $Z(t)$ が存在し，

$$Z_\iota = Z(T_\iota)$$

が成立し，さらに $Z(t)$，$t \geqq 0$，は互いに独立である．

これは丁度，複合ポアソン分布において，Y_i を (T_i, Y_i) という組と見做したことおよび $Y_1, Y_2, \ldots$ が互いに独立であると仮定したことと呼応している．

以上をまとめると，マークドポアソン過程は次のように定義される．

定義 1.1 (マークドポアソン過程) $w : [0, \infty) \to [0, \infty)$ は

$$W = \int_0^\infty w(u)du < \infty$$

をみたすと仮定する．$\{N(t)\}_{t \geqq 0} \sim \mathbf{Po}(w(t); t \geqq 0)$ とする．$\{Z(t); t \geqq 0\}$ を，$\{N(t)\}_{t \geqq 0}$ と独立で，さらに互いに独立な $\mathcal{Z}$-値確率変数 $Z(t)$ の族とする．$P_{Z|t}$ を $Z(t)$ の分布とする，すなわち，$P_{Z|t} = P_{Z(t)}$ とおく．

$$N = \lim_{t \to \infty} N(t), \quad T_\iota = \inf\{t \geqq 0 \mid N(t) \geqq \iota\}, \quad Z_\iota = Z(T_\iota)$$

と定める．このとき

$$\{(T_\iota, Z_\iota)\}_{1\leqq\iota\leqq N}$$

を**生起率** (intensity)$\{w(t)\}$，**位置依存マーキング** (position-dependent marking)$\{P_{Z|t}\}$ の**マークドポアソン過程** (marked Poisson process) という．これを

$$\boldsymbol{\{(T_\iota, Z_\iota)\}_{1\leqq\iota\leqq N} \sim \mathbf{Po}(w(t), P_{Z|t}; t \geqq 0)}$$

と記す.

注意 1.2 $N \sim \mathbf{Po}(W)$ である．実際,

$$E[e^{\zeta N}] = \lim_{t\to\infty} E[e^{\zeta N(t)}] = \lim_{t\to\infty} \exp\left[\left(\int_0^t w(u)du\right)(e^{\zeta \int_0^t w(u)du} - 1)\right] = \exp[W(e^{\zeta W} - 1)].$$

1.3　マークドポアソン過程 – 分布

定理 1.3 $\{(T_\iota, Z_\iota)\}_{1\leqq\iota\leqq N} \sim \mathbf{Po}(w(t), P_{Z|t}; t \geqq 0)$ とする．

$$P_{T,Z}(dt, dz) = \frac{w(t)}{W} dt P_{Z|t}(dz)$$

とおく．このとき

$$P(N = n,\, (T_i, Z_i) \in (dt_i, dz_i),\, i = 1, \ldots, n) = \frac{W^n}{n!} e^{-W}\, n! \prod_{i=1}^n P_{T,Z}(dt_i, dz_i). \tag{10}$$

とくに，マークドポアソン過程はつぎの 2 段階で構成できる．
(i) $N \sim \mathbf{Po}(W)$ を構成する．
(ii) N 個の $P_{T,Z}$ に従う確率変数 $(T'_1, Z'_1), \ldots, (T'_N, Z'_N)$ を構成し，T'_i の小さい順に並べ直す．

定理の最後に述べられた構成方法の (ii) における並べ替えの場合の数 $n!$ が (10) に現れている．

証明 $\{N(t)\} \sim \mathbf{Po}(w(t); t \geqq 0)$ であるから，$\{T_i - T_{i-1}\}_{i=1,2,\ldots}$ は独立である．ただし，$T_0 = 0$ とした．さらに

$$\begin{aligned}
&P(T_i - T_{i-1} > t \,|\, T_{i-1} = s) \\
&\quad = P(N(t+s) - N(s) = 0 \,|\, T_{i-1} = s) \\
&\quad = P(N(t+s) - N(s) = 0) \qquad (\because \text{独立増分性}) \\
&\quad = \exp\left(-\int_s^{s+t} w(u)du\right) \qquad \left(\because N(t+s) - N(s) \sim \mathbf{Po}\left(\int_s^{s+t} w(u)du\right)\right).
\end{aligned}$$

両辺を微分すれば

$$P(T_i - T_{i-1} \in dt \,|\, T_{i-1} = s) = w(s+t) e^{-\int_s^{s+t} w(u)du}\, dt$$

となる．$T_i - T_{i-1}$，$i = 1, 2, \ldots$，の独立性に注意すれば，これより

$$P((T_1, \ldots, T_n) \in dt_1 \cdots dt_n) = \left(\prod_{i=1}^n e^{-\int_{t_{i-1}}^{t_i} w(u)du} w(t_i)\right) dt_1 \cdots dt_n. \tag{11}$$

つぎに最後のクレームが時刻 t_n に起きそれ以後クレームが発生しない事象を考えればつぎを得る．

$$
\begin{aligned}
&P(N=n \,|\, T_1=t_1,\dots,T_n=t_n) \\
&\qquad = \lim_{t\to\infty} P(N(t)-N(t_n)=0) = \lim_{t\to\infty} e^{-\int_{t_n}^{t} w(u)du} = e^{-\int_{t_n}^{\infty} w(u)du}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

関数 $h:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ に対し

$$
\begin{aligned}
&E[h((T_1,Z_1),\dots,(T_n,Z_n));N=n] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} E\big[h((T_1,Z_1),\dots,(T_n,Z_n))\mathbf{1}_{\{N=n\}} \,\big|\, T_1=t_1,\dots,T_n=t_n\big] P((T_1,\dots,T_n)\in dt_1\cdots dt_n)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．(11)，(12) に注意すれば，

$$
\begin{aligned}
&P(N=n,\,(T_i,Z_i)\in(dt_i,dz_i),\,i=1,\dots,n) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} e^{-\int_{t_{i-1}}^{t_i} w(u)du} w(t_i)\right) dt_1\cdots dt_n e^{-\int_{t_n}^{\infty} w(u)du} \prod_{i=1}^{n} P_{Z|t_i}(dz_i) \\
&= e^{-\int_0^{\infty} w(u)du} \prod_{i=1}^{n} \{w(t_i)dt_i\, P_{Z|t_i}(dz_i)\} = \frac{W^n}{n!} e^{-W}\, n! \prod_{i=1}^{n} \left\{\frac{w(t_i)}{W}\, dt_i\, P_{Z|t_i}(dz_i)\right\}
\end{aligned}
$$

となり，主張を得る． ∎

マークドポアソン過程 $\{(T_\iota,Z_\iota)\}_{1\leqq\iota\leqq N}$ の第 2 成分，すなわち ι 番目のマーキング

$$
Z_\iota = (U_\iota, V_\iota, Y_\iota, \{Y_\iota(v')\}_{0\leqq v'\leqq V_\iota})
$$

に対し，

$$
X = \sum_{\iota}^{N} Y_\iota
$$

とおけば，これは最終的な総支払保険金を表すことになる．右辺は Y_ι の順によらないことに注意すれば，定理 1.3 により，Y_ι の従う分布 P_Y はつぎで与えられるとしてよい．

$$
P_Y(dy) = \frac{1}{W} \int_{(0,\infty)} w(t) P_{Y|t}(dy)dt. \tag{13}
$$

ただし $Z(t)=(U(t),V(t),Y(t),\{Y(t;v')\}_{0\leqq v'\leqq V(t)})$ と表したときの $Y(t)$ の分布を $P_{Y|t}$ と表している．とくにつぎがいえる．

系 1.4 次式が成り立つ．

$$
E[e^{\zeta X}] = \exp\!\left(\left[\int_{(0,\infty)} dt \int_{[0,\infty)} P_{Y|t}(dy) w(t) e^{\zeta y}\right] - W\right).
$$

証明 $X\sim\mathbf{Po}(W,P_Y)$ であるから，

$$
E[e^{\zeta X}] = \exp\big(W\{E[e^{\zeta Y}]-1\}\big).
$$

これに上の等式 (13) を代入すればよい． ∎

この系から，容易に X の高次モーメントが求められる．たとえば

$$
E[X] = \frac{d}{d\zeta}\bigg|_{\zeta=0} E[e^{\zeta X}] = \int_{(0,\infty)} dt \int_{[0,\infty)} P_{Y|t}(dy) w(t) y
$$

となる．

2　マークドポアソン過程の分解

2.1　マーキングの分類

現在時刻 τ を用いて，クレーム $(t,z)\in\mathcal{C}$ のマーキング $z=(u,v,y,\{y(v')\}_{v'\leqq v})\in\mathcal{Z}$ を支払状況に応じて以下のように 4 種類に分類する．

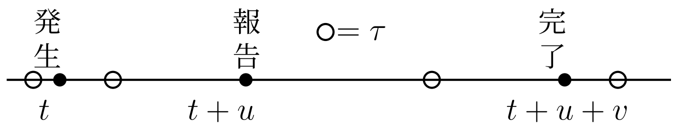

図 6: マーキングの分類

$$
\begin{aligned}
\text{支払が完了したクレーム:}\quad & \mathcal{Z}_t^{\mathrm{s}}=\{z\,|\,t+u+v\leqq\tau\}\\
\text{報告済だが支払未了のクレーム:}\quad & \mathcal{Z}_t^{\mathrm{rns}}=\{z\,|\,t+u\leqq\tau< t+u+v\}\\
\text{事故は既発生だが未報告のクレーム:}\quad & \mathcal{Z}_t^{\mathrm{inr}}=\{z,|\,t\leqq\tau<t+u\},\\
\text{事故が未発生のクレーム:}\quad & \mathcal{Z}_t^{\mathrm{cni}}=\{z\,|\,\tau<t\}
\end{aligned}
$$

添え字 s，rns，inr，cni はそれぞれ

s=settled,
rns=reported not settled,
inr=incurred not reported,
cni=covered not incurred

の略である．つぎが成り立つ．

$$
\mathcal{Z}=\mathcal{Z}_t^{\mathrm{s}}\cup\mathcal{Z}_t^{\mathrm{rns}}\cup\mathcal{Z}_t^{\mathrm{inr}}\cup\mathcal{Z}_t^{\mathrm{cni}},\quad \mathcal{Z}_t^{g}\cap\mathcal{Z}_t^{\mathrm{g}'}=\emptyset\quad(g\neq g').
$$

$g=$s，rns，inr，cni に対し，$z\in\mathcal{Z}_t^g$ となるクレーム (t,z) を ***g*-クレーム**とよぶ．

2.2　マークドポアソン過程の分解

マークドポアソン過程 $\{(T_\iota,Z_\iota)\}_{1\leqq\iota\leqq N}\in\mathbf{Po}(w(t);t\geqq 0)$ に対し，マーキングの分類を用い，$Z_\iota\in\mathcal{Z}_{T_\iota}^g$ なるものを集めて，次の 4 つに分解する．

$$
\{(T_\iota^{\mathrm{s}},Z_\iota^{\mathrm{s}})\},\{(T_\iota^{\mathrm{rns}},Z_\iota^{\mathrm{rns}})\},\{(T_\iota^{\mathrm{inr}},Z_\iota^{\mathrm{inr}})\},\{(T_\iota^{\mathrm{cni}},Z_\iota^{\mathrm{cni}})\}.
$$

T_ι^g は g-クレームの ι-回目の発生時刻である．これは，T_ι と同様に，

$$
\text{時刻 } t \text{ までの } g\text{-クレームの発生回数 } N^g(t)=\sum_\iota \mathbf{1}_{\{T_\iota\leqq t,Z_\iota\in\mathcal{Z}_{T_\iota}^g\}}
$$

から，

$$
T_\iota^g=\inf\{t\,|\,N^g(t)\geqq\iota\}
$$

という関係式を通じて定まる．以下の定理で見るように，$\{N^g(t)\}_{t\geqq 0}$ は強度関数

$$w^g(t) = w(t)P_{Z|t}(\mathcal{Z}_t^g)$$

をもつ非斉次ポアソン過程となっている．さらに

$$Z_\iota^g = Z(T_\iota^g)$$

である．

定理 2.1 (i) $\{(T_\iota^g, Z_\iota^g)\}_{1\leqq\iota\leqq N^g}$，$g=$s，rns，inr，cni は独立である．
(ii) $\{(T_\iota^g, Z_\iota^g)\}_{1\leqq\iota\leqq N^g}$ は，生起率 $\{w^g(t)\}$，位置依存マーキング $\{P_{Z|t}^g\}$ のマークドポアソン過程である;

$$\{(T_\iota^g, Z_\iota^g)\}_{1\leqq\iota\leqq N^g} \sim \mathbf{Po}(w^g(t), P_{Z|t}^g; t \geqq 0).$$

ただし，

$$P_{Z|t}^g(A) = \frac{P_{Z|t}(A)}{P_{Z|t}(\mathcal{Z}_t^g)}, \quad A \subset \mathcal{Z}_t^g.$$

証明 $\mathcal{G} = \{\text{s,rns,inr,cni}\}$ とおく．独立な

$$\{(T_\iota^g, Z_\iota^g)\}_{1\leqq\iota\leqq N^g} \sim \mathbf{Po}(w^g(t), P_{Z|t}^g; t \geqq 0), \quad g \in \mathcal{G}$$

をとる．すなわち，つぎを (i)∼(iii) みたす $\{N^g(t), Z^g(t)\}_{t\geqq 0}$，$g \in \mathcal{G}$，をとり，

$$T_\iota^g = \inf\{t \,|\, N^g(t) \geqq \iota\}, \quad Z_\iota^g = Z^g(T_\iota)$$

とおく．
(i) $\{N^g(t), Z^g(t)\}_{t\geqq 0}$，$g \in \mathcal{G}$，は独立である．
(ii) $\{N^g(t)\}_{t\geqq 0} \sim \mathbf{Po}(w^g(t); t \geqq 0)$.
(iii) $\{Z^g(t); t \geqq 0\}$ は $\{N^g(t)\}_{t\geqq 0}$ と独立で，さらに互いに独立であり，$P_{Z^g(t)} = P_{Z|t}^g$ をみたす．

$$N(t) = \sum_{g\in\mathcal{G}} N^g(t)$$

とおく．$\{N^g(t)\}$ の独立性とそれぞれの独立増分性より

$$\begin{aligned} E[e^{\sum_{k=1}^m \zeta_k\{N(t_k)-N(t_{k-1})\}}] &= E[e^{\sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{k=1}^m \zeta_k\{N^g(t_k)-N^g(t_{k-1})\}}] \\ &= \prod_{g\in\mathcal{G}}\prod_{k=1}^m E[e^{\zeta_k\{N^g(t_k)-N^g(t_{k-1})\}}] = \prod_{k=1}^m E[e^{\zeta_k\{N(t_k)-N(t_{k-1})\}}]. \end{aligned}$$

よって $\{N(t)\}_{t\geqq 0}$ は独立増分である．ふたたび $\{N^g(t)\}$ の独立性とポアソン分布の再生性より

$$N(t) - N(s) = \sum_{g\in\mathcal{G}}\{N^g(t) - N^g(s)\} \sim \mathbf{Po}\Big(\sum_{g\in\mathcal{G}}\int_s^t w^g(u)du\Big) = \mathbf{Po}\Big(\int_s^t w(u)du\Big).$$

したがって

$$\{N(t)\}_{t\geqq 0} \sim \mathbf{Po}(w(t); t \geqq 0).$$

$\{N(t)\}_{t\geqq 0}$ のジャンプは1であるから，$\{N^g(t)\}_{t\geqq 0}$ が同時にジャンプすることはない．すなわち，

$$T_\iota = \inf\{t \mid N(t) \geqq \iota\}$$

に対し，

$$\{T_\iota; \iota \geqq 1\} = \bigcup_{g\in\mathcal{G}} \{T_\iota^g; \iota \geqq 1\}, \quad \{T_\iota^g; \iota \geqq 1\} \cap \{T_\iota^h; \iota \geqq 1\} = \emptyset \quad (g \neq h)$$

が成り立つ．

$Z(t)$ を，$Z(T_\iota) = \sum_{g\in\mathcal{G}} Z^g(T_\iota)\mathbf{1}_{\{T_\iota \in \mathcal{Z}^g_{T_\iota}\}}$ により定める．$P^g_{Z|t}(dz)$ の定義より，

$$P_{Z|t}(dz) = \sum_{g\in\mathcal{G}} P^g_{Z|t}(dz).$$

これより

$$\begin{aligned} P(Z_\iota \in dz) = P(Z_{T_\iota} \in dz) &= \sum_{g\in\mathcal{G}} P(Z_{T_\iota} \in dz, T_\iota \in \{T^g_\eta; \eta \geqq 1\}) \\ &= \sum_{g\in\mathcal{G}} P^g_{Z|T_\iota}(dz) P_{Z|T_\iota}(\mathcal{Z}^g_{T_\iota}) = P_{Z|T_\iota}(dz). \end{aligned}$$

よって

$$\{(T_\iota, Z_\iota)\} \sim \mathbf{Po}(w(t), P_{Z|t}; t \geqq 0).$$

以上の考察により，マークドポアソン過程が定理の主張をみたす確率過程により構成されることがわかり，主張が従う． ∎

2.3 支払備金

マークドポアソン過程 $\{(T_\iota, Z_\iota)\}_{1\leqq\iota\leqq N}$ のマーキング Z_ι を

$$Z_\iota = (U_\iota, V_\iota, Y_\iota, \{Y_\iota(v)\}_{v\leqq V_\iota})$$

と表す．g=s, rns, inr, cni に対し

$$\begin{aligned} X^g &= \sum_{\iota\leqq N^g} Y^g_\iota, \\ X^{\mathrm{prns}} &= \sum_{\iota\leqq N^{\mathrm{rns}}} Y^{\mathrm{rns}}_\iota(\tau - T^{\mathrm{rns}}_\iota - U^{\mathrm{rns}}_\iota), \\ X^{\mathrm{orns}} &= \sum_{\iota\leqq N^{\mathrm{rns}}} \{Y^{\mathrm{rns}}_\iota - Y^{\mathrm{rns}}_\iota(\tau - T^{\mathrm{rns}}_\iota - U^{\mathrm{rns}}_\iota)\} \end{aligned}$$

とおく．ここで，表記が明確さを欠いているが，$Y^{\mathrm{rns}}_\iota(\tau - T^{\mathrm{rns}}_\iota - U^{\mathrm{rns}}_\iota)$ は $Y^{\mathrm{rns}}_\iota(v)$ において $v = \tau - T^{\mathrm{rns}}_\iota - U^{\mathrm{rns}}_\iota$ としたときの値であり，Y^{rns}_ι と $\tau - T^{\mathrm{rns}}_\iota - U^{\mathrm{rns}}_\iota$ の積ではない．

現在時刻 τ までに

- X^{s} は支払の完了した額を，
- X^{prns} は報告済の X^{rns} のうち支払われた額を，

- X^{orns} は報告済の X^{rns} のうち支払れていない (outstanding) 額を，
- X^{inr}，X^{cni} はともに報告されていない額を

表す．よって，未報告のため未払いとなっている額は

$$X^{\mathrm{nr}} = X^{\mathrm{inr}} + X^{\mathrm{cnr}}$$

である．

$$\mathcal{Z}_t^{\mathrm{nr}} = \mathcal{Z}_t^{\mathrm{inr}} \cup \mathcal{Z}_t^{\mathrm{cnr}}$$

とし，$N^{\mathrm{nr}}, Y_\iota^{\mathrm{nr}}$ を上と同様に定めれば

$$X^{\mathrm{nr}} = \sum_{\iota \leqq N^{\mathrm{nr}}} Y_\iota^{\mathrm{nr}}$$

とも表記できる．

未払保険金は次で与えられる．

$$X^{\mathrm{o}} = X^{\mathrm{orns}} + X^{\mathrm{nr}}.$$

これらの分布は，定理 2.1 で述べた分解と定理 1.3 の分布の計算から，求めることが可能である．