九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

実データを使用したRandomWalk法の活用例

吉満, 隆亮
日新火災海上保険

https://hdl.handle.net/2324/13272

出版情報：COE Lecture Note. 13, pp.33-36, 2009-02-06. Faculty of Mathematics, Kyushu University
バージョン：
権利関係：

実データを使用したRandomWalk法の活用例

吉 満 隆 亮
日新火災海上保険

本編では，RandomWalk 法を用いて，実データにより将来の支払保険金の区間推定を行う．将来の支払保険金を区間推定する方法はさまざまあるが，簡便な手法で将来キャッシュフローを区間推定できるという点では，RandomWalk 法は，極めて有効な手法であると考えられる．

1 RandomWalk モデル

RandomWalk モデルでは，累積の支払保険金をパラメータ $t \in (0, \infty]$ の確率過程 P_t とみなし，P_t が幾何ブラウン運動

$$dP_t = \mu(t) P_t dt + \sigma(t) P_t dB_t \tag{9}$$

に従うものと仮定する．ただし，B_t はブラウン運動，$\mu(t)$ は累積の支払保険金の瞬間増加率，$\sigma(t)$ はボラティリティである．(9) の解は

$$\frac{P_{t_2}}{P_{t_1}} \sim LN\left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\mu(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right) dt, \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(t) dt}\right)$$

で与えられ，よって RandomWalk 法は，LDF が対数正規分布に従うときに用いることができる．さらに，各経過年度の LDF が独立であると仮定すると，任意の $[t, T]$ で

$$\log\left(\frac{P_T}{P_t}\right) = \log\left(\prod_{j=t}^{T-1} \frac{P_{j+1}}{P_j}\right) = \sum_{j=t}^{T-1} \log\left(\frac{P_{j+1}}{P_j}\right)$$

となり，正規分布の再生性から

$$\log\left(\frac{P_T}{P_t}\right) \sim N\left(\sum_{j=t}^{T-1} \mu_j, \sum_{j=t}^{T-1} \sigma_j^2\right)$$

となる．ただし，$\mu_j = \displaystyle\int_j^{j+1} \left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right) ds$，$\sigma_j^2 = \displaystyle\int_j^{j+1} \sigma^2(s) ds$ とする．よって，例えば，90 %信頼区間は

$$\left(P_t \times \exp\left(\sum_{j=t}^{T-1} \mu_j - 1.645\sqrt{\sum_{j=t}^{T-1} \sigma_j^2}\right), P_t \times \exp\left(\sum_{j=t}^{T-1} \mu_j + 1.645\sqrt{\sum_{j=t}^{T-1} \sigma_j^2}\right)\right)$$

で与えられる．

2 実データを使用したRandomWalk法の活用例

RandomWalk法を実際のデータ（ただし仮データ）に当てはめることを試みる．ただし，実用化という観点から，数学的な厳密さは要求せず，途中の計算はMicrosoft社のExcelを用いて行っている．ここでは，2008年度末時点の累積保険金(百万円単位)を使用する．

	経過年度							
契約年度	1	2	3	4	5	6	7	8
2001	182	622	646	739	784	788	789	796
2002	181	548	605	715	718	722	723	
2003	265	761	981	1,038	1,042	1,150		
2004	333	1,011	1,076	1,170	1,313			
2005	288	873	1,106	1,227				
2006	278	844	1,299					
2007	404	1,214						
2008	374							

$\mu(t)$,$\sigma^2(t)$ を推定するために，LDFの対数を計算する．

	経過年度						
契約年度	1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8
2001	1.227	0.037	0.134	0.060	0.004	0.001	0.010
2002	1.109	0.099	0.167	0.004	0.005	0.002	
2003	1.057	0.254	0.057	0.003	0.099		
2004	1.109	0.063	0.084	0.116			
2005	1.109	0.237	0.104				
2006	1.112	0.431					
2007	1.100						
標本平均	1.117	0.187	0.109	0.046	0.036	0.002	0.010
標本分散	0.003	0.022	0.002	0.003	0.003	0.000	0.000

Heyer[1]に従い，$\mu(t), \sigma(t)$ の関数形は

$$(\mathrm{I})\alpha\exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\gamma}\right],\quad (\mathrm{II})\alpha\left[1+\gamma\left(\frac{t}{\beta}\right)\right]^{-1/\gamma},\quad (\mathrm{III})\alpha t^{-\beta}+\gamma,\quad (\mathrm{IV})\alpha\frac{\beta\gamma^{\beta}}{t^{\beta+1}}$$

のいずれかであると仮定し，最小二乗法を用いてパラメータ α, β, γ を推定する．今回のデータでは，次の結果を得る．

	関数形	α	β	γ
$\mu(t)$	(II)	99742.46526	0.010444194	0.335140073
$\sigma^2(t)$	(IV)	8.729029926	0.001795941	529.8058071

	1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8	二乗誤差
平均	1.11463	0.21325	0.07490	0.03437	0.01836	0.01081	0.00680	0.002432
分散	0.01033	0.00604	0.00428	0.00332	0.00271	0.00229	0.00198	0.342408

最小二乗法を Excel のソルバーを用いて実行しているが，簡潔に説明すると次のようなループをさせる Macro を作成している．α,β,γ に適当に初期値を与え，μ_j，σ_j^2 と標本平均 μ と標本分散 σ^2 との距離

$$d^2 = \sum_j \left\{(\mu_j - \mu)^2 + (\sigma_j^2 - \sigma^2)^2\right\}$$

を計算する (より厳密には，μ_j が σ_j^2 に依存するため，σ_j^2 を計算した後に μ_j を決定している)．さらに違う初期値 α',β',γ' を与えたときの距離 d_1^2 が d^2 よりも小さければ，そのときの初期値 α',β',γ' を選ぶ．このようなことを繰り返し，d^2 が最小に収束するような α,β,γ を決定する．ここで μ_j,σ_j^2,α,β,γ を同時に求めていることに留意する．関数形のすべての組み合わせ (16 通り) の中から，二乗誤差の最も小さいものの組み合わせを選ぶ．信頼区間を 90%とすると次のようになる．

	1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8
μ_j	1.11463	0.21325	0.07490	0.03437	0.01836	0.01081	0.00680
σ_j^2	0.01033	0.00604	0.00428	0.00332	0.00271	0.00229	0.00198
標準偏差	0.10165	0.07771	0.06543	0.05762	0.05207	0.04787	0.04455
上限	1.24491	0.31284	0.15876	0.10821	0.08509	0.07216	0.06389
下限	0.98436	0.11367	-0.00896	-0.03946	-0.04837	-0.05054	-0.05029

結果として，次のような信頼区間 90%の将来キャッシュフローを得ることができる．

○累積支払保険金の上限

	経過年度							
契約年度	1	2	3	4	5	6	7	8
2001	182	622	646	739	784	788	789	796
2002	181	548	605	715	718	722	723	771
2003	265	761	981	1,038	1,042	1,150	1,236	1,273
2004	333	1,011	1,076	1,170	1,313	1,430	1,480	1,515
2005	288	873	1,106	1,227	1,367	1,428	1,469	1,499
2006	278	844	1,299	1,522	1,620	1,681	1,722	1,753
2007	404	1,214	1,660	1,844	1,946	2,011	2,055	2,088
2008	374	1,300	1,664	1,830	1,921	1,978	2,017	2,046

○累積支払保険金の期待値

	経過年度							
契約年度	1	2	3	4	5	6	7	8
2001	182	622	646	739	784	788	789	796
2002	181	548	605	715	718	722	723	728
2003	265	761	981	1,038	1,042	1,150	1,163	1,171
2004	333	1,011	1,076	1,170	1,313	1,338	1,352	1,361
2005	288	873	1,106	1,227	1,269	1,293	1,307	1,316
2006	278	844	1,299	1,400	1,449	1,475	1,492	1,502
2007	404	1,214	1,502	1,619	1,676	1,707	1,725	1,737
2008	374	1,141	1,412	1,522	1,575	1,604	1,622	1,633

○累積支払保険金の下限

	経過年度							
契約年度	1	2	3	4	5	6	7	8
2001	182	622	646	739	784	788	789	796
2002	181	548	605	715	718	722	723	688
2003	265	761	981	1,038	1,042	1,150	1,094	1,077
2004	333	1,011	1,076	1,170	1,313	1,251	1,235	1,223
2005	288	873	1,106	1,227	1,179	1,171	1,163	1,155
2006	278	844	1,299	1,287	1,296	1,295	1,292	1,286
2007	404	1,214	1,360	1,422	1,443	1,449	1,448	1,445
2008	374	1,002	1,199	1,266	1,292	1,301	1,304	1,303

3 RandomWalk 法の長所と短所

RandomWalk 法の長所は，将来キャッシュフローの区間推定を Excel を用いて簡単に計算できることである．一方で，LDF が対数正規分布に従うという前提は一部の保険種目には当てはまらず，また Excel の計算機能の限界もあり，これらの点は今後改良する余地が残る．

参考文献

[1] Daniel D.Heyer, A RandomWalk Model for Paid Loss Development