九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

IBNR見積法のサーベイ : ランオフ三角形とチェインラダー法

田中, 立志
九州大学大学院数理学研究院

https://hdl.handle.net/2324/13269

出版情報：COE Lecture Note. 13, pp.1-9, 2009-02-06. 九州大学大学院数理学研究院
バージョン：
権利関係：

IBNR 見積法のサーベイ
– ランオフ三角形とチェインラダー法 –

田 中 立 志
九州大学大学院数理学研究院

1 序

支払備金（Incurred But Not Reported, IBNR）とは, 既発生の保険事故に対する保険金債務のことである. IBNR は, 発生主義での期間損益の計算のため, 会社財政状況の正確な評価のため, あるいは収支状況を正しく把握し料率改定を行うためにも大変重要な概念である. 以下では, 文献 [2] に従い, IBNR の統計的見積法について, その基本的な概念であるチェインラダー法を中心に紹介する.

2 ロスディベロップメントデータ

2.1 当該年度保険金

あるポートフォリオを当該年度保険金によってデータ化しよう. $Z_{i,k}$ を, 事故年度 i の事故で経過年度 k において支払った保険金とする. ただし, i, k は 0 以上の整数値をとるものとする. この $Z_{i,k}$ を, 事故年度 i, 経過年度 k の当該年度保険金 (incremental loss) という.

以下の表は, n 年度までの当該年度保険金のデータである. 一般的に事故年度と経過年度の 2 つの変数によりこのような三角形のデータができることがわかる. この三角形は, 保険業界ではランオフ三角形あるいはロスディベロップメントと呼ばれる. $i+k \leq n$ のとき観測可能, $i+k > n$ のとき観測不能という. 観測可能な部分のデータを用いて観測不能な部分を推定することが目的となる.

	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	$n-i$	$\cdots$	$n-1$	n
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$	$\cdots$	$Z_{0,k}$	$\cdots$	$Z_{0,n-i}$	$\cdots$	$Z_{0,n-1}$	$Z_{0,n}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	$\cdots$	$Z_{1,k}$	$\cdots$	$Z_{1,n-i}$	$\cdots$	$Z_{1,n-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
i	$Z_{i,0}$	$Z_{i,1}$	$\cdots$	$Z_{i,k}$	$\cdots$	$Z_{i,n-i}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
$n-k$	$Z_{n-k,0}$	$Z_{n-k,1}$	$\cdots$	$Z_{n-k,k}$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
$n-1$	$Z_{n-1,0}$	$Z_{n-1,1}$							
n	$Z_{n,0}$								

縦軸：事故年度, 横軸：経過年度

2.2 累計保険金

あるポートフォリオを累計保険金によってデータ化しよう．$S_{i,k}$ を, 事故年度 i の事故で経過年度 k までに支払った保険金の総額とする．ただし, i, k は 0 以上の整数値をとるものとする．この $S_{i,k}$ を, 事故年度 i, 経過年度 k の累計保険金 (cumulative loss) という．また, $k \to \infty$ のとき, $\lim_{k\to\infty} S_{i,k}$ を事故年度 i の最終累計保険金 (ultimate cumulative loss) という．

以下の表は, n 年度までの当該年度保険金のランオフ三角形である．$i + k \leq n$ のとき観測可能, $i + k > n$ のとき観測不能という．

	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	$n-i$	$\cdots$	$n-1$	n
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	$\cdots$	$S_{0,k}$	$\cdots$	$S_{0,n-i}$	$\cdots$	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	$\cdots$	$S_{1,k}$	$\cdots$	$S_{1,n-i}$	$\cdots$	$S_{1,n-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$	$\cdots$	$S_{i,k}$	$\cdots$	$S_{i,n-i}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
$n-k$	$S_{n-k,0}$	$S_{n-k,1}$	$\cdots$	$S_{n-k,k}$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
$n-1$	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$							
n	$S_{n,0}$								

縦軸：事故年度, 横軸：経過年度

当該年度保険金 $Z_{i,k}$ との間には関係式

$$S_{i,k} = \sum_{l=0}^{k} Z_{i,l}$$

が成り立つため, 未来の当該年度保険金を見積もることと未来の累計保険金を見積もることとは同じことである．が, どこにどのような仮定を設けて推定するかで様々な推定方法が考えられ, それらは実際に異なる推定値を与え得る．保険実務における IBNR の見積もりに関してどの推定方法に則って求めた推定値が最良であるかは, 数学以外の要素も孕んだ難しい問題であり多方面からの見解を要するであろう．本稿では, あくまで保険実務への数学的見地からの応用として, 過去の保険金データに基づく統計的見積法についていくつか知られているものを紹介する．

3 ディベロップメントパターン

われわれの課題は, ランオフ三角形の右下の部分を推定することである．その統計的推定の際には以下の仮定を設ける．

「データは, すべての事故年度で共通の 1 つのパターン（確率過程）に従う」

以下に, 3 つの基本的なディベロップメントパターンを記す．

当該年度保険金割合に関するディベロップメントパターン
$\sum_{l=0}^{n}\theta_l = 1$ を満たすような数 $\theta_0,\dots,\theta_n$ が存在して, 任意の $i,k \in \{0,\dots,n\}$ に対して

$$\theta_k = \frac{E[Z_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$$

が成立する. すなわち, 当該年度保険金 $Z_{i,k}$ の平均の, i 事故年度の最終累計保険金の平均に対する割合が事故年度によらずに一定であるという仮定である. このディベロップメントパターンを, パターン I と略す.

累計保険金割合に関するディベロップメントパターン
$\gamma_n = 1$ を満たすような数 $\gamma_0,\dots,\gamma_n$ が存在して, 任意の $i,k \in \{0,\dots,n\}$ に対して

$$\gamma_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$$

が成立する. すなわち, 累計保険金 $S_{i,k}$ の平均の, i 事故年度の最終累計保険金の平均に対する割合が事故年度によらずに一定であるという仮定である. このディベロップメントパターンを, パターン C と略す.

因子に関するディベロップメントパターン
数 $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ が存在して, 任意の $i \in \{0,\dots,n\}, k \in \{1,\dots,n\}$ に対して

$$\varphi_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,k-1}]}$$

が成立する. すなわち, 累計保険金 $S_{i,k}$ の平均の, 累計保険金 $S_{i,k-1}$ の平均に対する割合が事故年度によらずに一定であるという仮定である. このディベロップメントパターンを, パターン F と略す.

上記の 3 つはすべて, 事故年度 i にはよらないパラメータの存在を仮定する. また,

$$\gamma_k = \sum_{l=0}^{k}\theta_l, \varphi_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}$$

が成立することにより, 上記の 3 つは本質的にはどれも同じものであることに注意する.

4 さまざまな統計的見積法

当該年度保険金あるいは累計保険金のどちらかの推定値を与えればもう一方の推定値も与えられるので, どちらか一方を推定すればよい. ここでは将来の累計保険金を見積もるいくつかの方法について概説する.

4.1 ボーンヒュッター・ファガソン法

以下, BF 法と略す. BF 法では以下の仮定とエスティメーターを設けて累計保険金を推定する. (エスティメーターとは, 保険金見積の際に必要な値のことである. これはどこかで別に見積もっておく必要がある.)

$\boxed{\text{仮定}}$
数 $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ と, $\gamma_n = 1$ を満たす数 $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$ が存在して, 任意の $i, k \in \{0, \ldots, n\}$ に対して

$$E[S_{i,k}] = \gamma_k \alpha_i$$

が成立する.

$\boxed{\text{エスティメーター}}$
$j \in \{0, \ldots, n\}$ に対し, j 年度の最終累計保険金 $\hat{\alpha}_j$ と, j 年度の累計保険金割合 $\hat{\gamma}_j$ はどこからか勝手に与えられているものとする. ただし, $\hat{\gamma}_n = 1$ とする.

$\boxed{\text{推定値}}$
このとき, $i + k \geq n$ に対する累計保険金は以下の値として推定される.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{BF}} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{\alpha}_i.$$

$\boxed{\text{注意}}$
仮定のディベロップメントパターンは, パターン C だと思える. 実際, $E[S_{i,n}] = \alpha_i$ であるから $E[S_{i,k}] = \gamma_k E[S_{i,n}]$ である.
BF 法は, 以下で述べる手法すべての基礎となっている.

4.2 ベンクタンダー・ホビネン法

以下, BH 法と略す. BH 法では上記の BF 法と同じ仮定と同じエスティメーターを設けて累計保険金を推定する.

$\boxed{\text{推定値}}$
$i + k \geq n$ に対する累計保険金は以下の値として推定される.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{BH}} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{S}_{i,n}^{\mathrm{BF}}.$$

また, より一般に, $m \geq 0$ に対して

$$\hat{S}_{i,k}^{(m)} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{S}_{i,n}^{(m-1)}$$

として推定される. ただし, $\hat{S}_{i,n}^{(-1)} = \hat{\alpha}_i$ である.

$\boxed{\text{注意}}$
累計保険金に重点を置き, 最終累計保険金のエスティメーターの寄与を減らしたいときに, BF 法を改良した BH 法が用いられる.

4.3 ロスディベロップメント法

以下, LD 法と略す. LD 法では以下の仮定とエスティメーターを設けて累計保険金を推定する.

$\boxed{\text{仮定}}$
$\gamma_n = 1$ を満たす数 $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ が存在して, 任意の $i, k \in \{0, \dots, n\}$ に対して

$$E[S_{i,k}] = \gamma_k E[S_{i,n}]$$

が成立する.

$\boxed{\text{エスティメーター}}$
$j \in \{0, \dots, n\}$ に対し, j 年度の累計保険金割合 $\hat{\gamma}_j$ はどこからか勝手に与えられているものとする. ただし, $\hat{\gamma}_n = 1$ とする.

$\boxed{\text{推定値}}$
このとき, $i + k \geq n$ に対する累計保険金は以下の値として推定される.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{LD}} = \hat{\gamma}_k \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}}.$$

$\boxed{\text{注意}}$
仮定のディベロップメントパターンは, パターン C そのものである. 推定値 $\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{LD}}$ は以下のようにも書ける.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{LD}} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i}) \hat{S}_{i,n}^{\mathrm{LD}}.$$

すなわち, LD 法は BF 法の特別な場合である.

4.4 チェインラダー法

以下, CL 法と略す. CL 法では以下の仮定を設けて累計保険金を推定する. エスティメーターは要らないことに注意する.

$\boxed{\text{仮定}}$
数 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ が存在して, 任意の $i \in \{0, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, n\}$ に対して

$$E[S_{i,k}] = \varphi_k E[S_{i,k-1}]$$

が成立する.

$\boxed{\text{推定値}}$
このとき, $i + k \geq n$ に対する累計保険金は以下の値として推定される.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{CL}} = S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^{k} \hat{\varphi}_l^{\mathrm{CL}},$$

ただし,

$$\hat{\varphi}_l^{\mathrm{CL}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}.$$

注意

仮定のディベロップメントパターンは, パターン F そのものである. $\hat{\gamma}_k^{\mathrm{CL}} = \prod_{l=k+1}^{n} \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\mathrm{CL}}}$ とせよ. 推定値 $\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{CL}}$ は以下のようにも書ける.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{CL}} = \hat{\gamma}_k^{\mathrm{CL}} \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}^{\mathrm{CL}}}.$$

すなわち, CL 法は LD 法（したがって BF 法）の特別な場合である.

4.5　グロッシングアップ法

以下, GU 法と略す. GU 法では CL 法と同じ仮定を設けて累計保険金を推定する. エスティメーターは要らないことに注意する.

推定値

$i + k \geq n$ に対する累計保険金は以下の値として推定される.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{GU}} = \hat{\gamma}_k^{\mathrm{GU}} \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}^{\mathrm{GU}}},$$

ただし, $\hat{\gamma}_n^{\mathrm{GU}} = 1$ で, $k < n$ のとき

$$\hat{\gamma}_k^{\mathrm{GU}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k-1} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k-1} \hat{S}_{j,k-1}^{\mathrm{GU}}}.$$

注意

推定値 $\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{GU}}$ は,

$$\hat{\gamma}_n^{\mathrm{GU}}(=1) \to \hat{S}_{0,n}^{\mathrm{GU}} \to \hat{\gamma}_{n-1}^{\mathrm{GU}} \to \hat{S}_{1,n}^{\mathrm{GU}} \to \hat{\gamma}_{n-2}^{\mathrm{GU}} \to \hat{S}_{2,n}^{\mathrm{GU}} \to \cdots$$

と, 帰納的に計算していくことになる. また, 推定値 $\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{GU}}$ は以下のようにも書ける.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{GU}} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k^{\mathrm{GU}} - \hat{\gamma}_{n-i}^{\mathrm{GU}})\hat{S}_{i,n}^{\mathrm{GU}}.$$

すなわち, GU 法は BF 法の特別な場合である. 実は, GU 法と CL 法は同値であることが文献 [1](1999) によって知られている.

4.6　マージナルサム法

以下, MS 法と略す. MS 法では以下の仮定とエスティメーターを設けて累計保険金を推定する.（MS 法では, エスティメーターの与え方も指定する.）

仮定

数 $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ と, $\sum_{l=0}^{n} \theta_l = 1$ を満たす数 $\theta_0, \ldots, \theta_n$ が存在して, 任意の $i, k \in \{0, \ldots, n\}$ に対して

$$E[Z_{i,k}] = \theta_k \alpha_i$$

が成立する.

エスティメーター

以下の (i), (ii), (iii) からなる連立方程式の解として, $\hat{\alpha}_0^{\mathrm{MS}}, \ldots, \hat{\alpha}_n^{\mathrm{MS}}$ および $\hat{\theta}_0^{\mathrm{MS}}, \ldots, \hat{\theta}_n^{\mathrm{MS}}$ が与えられているものとする.

(i) 任意の $i \in \{0, \ldots, n\}$ に対し, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-i} \hat{\alpha}_i \hat{\theta}_j = \sum_{j=0}^{n-i} Z_{i,j}$,

(ii) 任意の $k \in \{0, \ldots, n\}$ に対し, $\displaystyle\sum_{l=0}^{n-k} \hat{\alpha}_l \hat{\theta}_k = \sum_{l=0}^{n-k} Z_{l,k}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} \hat{\theta}_l = 1$.

推定値

このとき, $i + k \geq n$ に対する累計保険金は以下の値として推定される.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{MS}} = \hat{\gamma}_k^{\mathrm{MS}} \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}^{\mathrm{MS}}},$$

ただし,

$$\hat{\gamma}_k^{\mathrm{MS}} = \sum_{l=0}^{k} \hat{\theta}_l^{\mathrm{MS}}.$$

注意

仮定のディベロップメントパターンは, パターン I だと思える. 実際, $E[S_{i,n}] = E[\sum_{l=0}^{n} Z_{i,l}] = \sum_{l=0}^{n} \theta_l \alpha_i = \alpha_i$ であるから, $E[Z_{i,k}] = \theta_k E[S_{i,n}]$ である. また, エスティメーターの満たす連立方程式の解は一意的に定まり, $\hat{\alpha}_i^{\mathrm{MS}} = \hat{S}_{i,n}^{\mathrm{GU}}, \hat{\theta}_0^{\mathrm{MS}} = \hat{\gamma}_0^{\mathrm{GU}}, \hat{\theta}_k^{\mathrm{MS}} = \hat{\gamma}_k^{\mathrm{GU}} - \hat{\gamma}_{k-1}^{\mathrm{GU}} (k \geq 1)$ となる. これはすなわち, MS 法は GU 法（したがって CL 法）と同値であることを意味している.

4.7 ケープコッド法

以下, CC 法と略す. CC 法では LD 法と同じ仮定と同じエスティメーターを設けて累計保険金を推定する. また, この手法では, 事故年度 i ごとの保険料 $\pi_i \in (0, \infty)$ のデータも要する.

推定値

$i + k \geq n$ に対する累計保険金は以下の値として推定される.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{CC}} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k^{\mathrm{CC}} - \hat{\gamma}_{n-i}^{\mathrm{CC}}) \pi_i \hat{\kappa}^{\mathrm{CC}},$$

ただし,

$$\hat{\kappa}^{\mathrm{CC}} = \frac{\sum_{j=0}^{n} S_{j,n-j}}{\sum_{j=0}^{n} \hat{\gamma}_{n-j} \pi_j}.$$

この $\hat{\kappa}^{\mathrm{CC}}$ のことをケープコッド損害率という.

注意

CC 法は BF 法の特別な場合である. 実際, $\hat{\alpha}_i = \pi_i \hat{\kappa}^{\mathrm{CC}}$ とおけばよい. CC 法のほうが LD 法よりも計算結果のばらつきが小さい.

4.8 アディティブ法

以下, AD 法と略す. AD 法では以下の仮定を設けて累計保険金を推定する. エスティメーターは要らないことに注意する. また, この手法では, CC 法同様, 事故年度 i ごとの保険料 $\pi_i \in (0, \infty)$ のデータも要する.

仮定

数 $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$ が存在して, 任意の $i, k \in \{0, \ldots, n\}$ に対して

$$E[Z_{i,k}] = \zeta_k \pi_i$$

が成立する.

推定値

このとき, $i + k \geq n$ に対する累計保険金は以下の値として推定される.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{AD}} = S_{i,n-i} + \sum_{l=n-i+1}^{k} \hat{Z}_{i,l}^{\mathrm{AD}},$$

ただし,

$$\hat{Z}_{i,l}^{\mathrm{AD}} = \hat{\zeta}_l^{\mathrm{AD}} \pi_i, \hat{\zeta}_l^{\mathrm{AD}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} \pi_j}.$$

注意

仮定のディベロップメントパターンは, パターン C だと思える. 実際, $\alpha_i = \pi_i \sum_{l=0}^{n} \zeta_l, \gamma_k = \frac{\sum_{l=0}^{k} \zeta_l}{\sum_{l=0}^{n} \zeta_l}$ とおくと, $E[S_{i,k}] = E[\sum_{l=0}^{k} Z_{i,l}] = \sum_{l=0}^{n} \zeta_l \pi_i = \gamma_k \alpha_i$ であり, $\gamma_n = 1$ より $\alpha_i = E[S_{i,n}]$ であるから, $E[S_{i,k}] = \gamma_k E[S_{i,n}]$ である.

$\hat{\gamma}_k^{\mathrm{AD}} = \frac{\sum_{l=0}^{k} \hat{\zeta}_l^{\mathrm{AD}}}{\sum_{l=0}^{n} \hat{\zeta}_l^{\mathrm{AD}}}, \hat{\alpha}_i^{\mathrm{AD}} = \pi_i \sum_{l=0}^{n} \hat{\zeta}_l^{\mathrm{AD}}$ とせよ. このとき, 推定値 $\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{AD}}$ は以下のようにも書ける.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{AD}} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k^{\mathrm{AD}} - \hat{\gamma}_{n-i}^{\mathrm{AD}}) \hat{\alpha}_i^{\mathrm{AD}}.$$

したがって, AD 法は BF 法の特別な場合である.

さらに, $\hat{\kappa}^{\mathrm{AD}} = \sum_{l=0}^{n} \hat{\zeta}_l^{\mathrm{AD}}$ とせよ. このとき,

$$\hat{\kappa}^{\mathrm{AD}} = \frac{\sum_{j=0}^{n} S_{j,n-j}}{\sum_{j=0}^{n} \hat{\gamma}_{n-j}^{\mathrm{AD}} \pi_j}$$

と書ける. したがって, AD 法は CC 法の特別な場合である.

5 跋：考察

少なくとも現在の保険業務における手法の中ではチェインラダー法が最良とされており, 実務でも活躍している. その理由は, ある程度理に適っているという理論的な利点と, 計算が容易とい

う時間的・実務的な利点があるからであろう．しかし, 現行のチェインラダー法はあくまで点推定であり, 区間推定を与えない．（チェインラダー法においてある種の区間推定を与える方法については本レクチャーノートの斎藤氏の稿「Mack の公式：支払備金の区間推定」を参照.）また, 過去のデータが 0 であれば以後 0 しか現れないという実務的な弱点もある．（これを克服するひとつの方法が, 本レクチャーノートの筆者の稿「保険金見積もりの細分化」で与えられる.）これらにどう対処するかは, 保険業界の今後の課題である.

参考文献

[1] Klaus D. Schmidt and Holger Lorenz, *Grossing-Up, Chain-Ladder and Marginal-Sum Estimation*, Blätter DGVM 24, 1999, 195-200.

[2] Klaus D. Schmidt, *Methods and Models of Loss Reserving Based on Run-Off Triangles: A Unifying Survey*, Casual Actuarial Society Forum Fall 2006, 269-317.