

n 次元正規分布の一つの特徴づけについて

河田, 敬義
東京文理科大學

<https://hdl.handle.net/2324/12943>

出版情報 : 統計数理研究. 3 (1/2), pp.66-67, 1949-12-20. Research Association of Statistical Sciences

バージョン :

権利関係 :



以上においてすべて平均値は0であるものと假定したが、0でないときも適當に處理することができる。

文 献

- 1) 坂元平八, 統計量の獨立性について, 統計研究, Vol 1, No 9 (1944). 及び數學 Vol 1, No 4 (1949)
- 2) A T Craig, Note on the independence of certain quadratic forms, *Ann. Math. Stat.* 14 (1943).
- 3) 小川潤次郎, 正規母集団に於ける一次形式, 二次形式及び双一次形式統計量の間の獨立性に関して, 統計研究, Vol 4, No 1 (1948).
- 4) Wilks, *Mathematical Statistics*. § 5 24.

- 5) 坂元 1), 定理 II
- 6) Wilks, 4), § 5 23
- 7) 以下の方法は既に多くの人々によつて述べられたものであるが, 定理の利用方法の例として挙げることにした。例えば小川潤次郎 正規回歸の理論及び其の應用に就て, 統計研究, Vol 3 No 21-22. (1948). 又伊藤清氏よりも聞いたことがある。以下の例は主に Wilks 4) の資料よりとつた。なお上記坂元 1), 小川 3) をも参照。
- 8) 坂元平八, 最尤推定値の獨立性及びその自由度の關係について, 統計数理研究, Vol 2, No. 1, 2. (1948).

n 次元正規分布の一つの特徴づけについて

河 田 敬 義

東京文理科大学

(昭和24年7月9日受理)

n 個の確率変数 $x_1, \dots, x_n$ の定める n 次元確率分布の分布密度が

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m_i)^2 \right\} \quad (1)$$

であるならば,

$$y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \quad z = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n \quad (2)$$

が互に獨立であるための必要十分條件は

$$\alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n = 0 \quad (3)$$

である。實はこの性質が正規分布(1)の特性なのである。即ち

定理 1. “ n 個の確率変数 $x_1, \dots, x_n$ に對して, (2)の y と z とが, (3) が成り立つならば必ず獨立であるならば, $x_1, \dots, x_n$ は n 次元正規分布で, 確率密度(1)をもつ。”

注意 $x_1, \dots, x_n$ に對しては, 平均値や分散の存在を假定しなくてもよい。

證明 (i) $n=2$ $\varphi_i(t) = E(\exp(itx_i))$ ($i=1, 2$) とおく。

$$y = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \quad z = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta$$

は, 假定によつて互に獨立であるから,

$$E(\exp(isy + itz)) = E(\exp(isy)) E(\exp(itz))$$

である。この兩邊を φ_1, φ_2 で表せば, x_1 と x_2 とは獨立であるから

$$\begin{aligned} \varphi_1(s \cos \theta - t \sin \theta) \varphi_2(s \sin \theta + t \cos \theta) \\ = \varphi_1(s \cos \theta) \varphi_1(-t \sin \theta) \varphi_2(s \sin \theta) \varphi_2(t \cos \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

が成り立つ。ここで $\theta = \pi/4$ として, s, t の代りに $\sqrt{2}s, \sqrt{2}t$ とおけば

$$\varphi_1(s-t) \varphi_2(s+t) = \varphi_1(s) \varphi_1(-t) \varphi_2(s) \varphi_2(t) \quad (3)$$

となる。さらに $s=t$ 及び $s=-t$ とおけば

$$\begin{aligned} \varphi_2(2s) &= [\varphi_1(s)]^2 [\varphi_2(s)]^2 \\ \varphi_1(2s) &= \varphi_1(s)^2 [\varphi_2(s)]^2 \end{aligned} \quad (4)$$

となる。これから一般に

$$[\varphi_1(s)] = [\varphi_2(s)] \quad (5)$$

がわかる。又(3)の兩邊の絶対値をとつて

$$s = rt \quad (r=1, 2, \dots) \quad \text{とすれば}$$

$$|\varphi_1((r-1)t)| |\varphi_1(r+1)t| = [\varphi_1(rt)]^2 [\varphi_1(t)]^2 \quad (6)$$

となる。(4)の兩邊の絶対値をとれば

$$|\varphi_1(2t)| = [\varphi_1(t)]^4$$

であるから, (6)を用いて, r に関する数学的帰納法

によつて

$$|\varphi_i(r t)| = |\varphi_i(t)|^{r^2} \quad (7)$$

が成り立つことがわかる。ここで $t = s/r$ とすれば、 $|\varphi_i(s)|^{1/r^2} = |\varphi_i(s/r)|$ となり。再び $s = p t$ とおいて、 $\lambda = p/r$ に対して

$$|\varphi_i(\lambda t)| = |\varphi_i(t)|^{\lambda^2} \quad (8)$$

が成り立つ。 φ_i は連続であるから、(8) は任意の實数で成り立つ。故に $t=1$ とおくと

$$|\varphi_i(\lambda)| = |\varphi_i(1)|^{\lambda^2} = \exp(\alpha \lambda^2), \quad \alpha < 0$$

となる。従つて

$$\varphi_i(t) = \exp(\alpha t^2 + 2\pi i \theta_i(t)) \quad (9)$$

と表される。 $\overline{\varphi_i(t)} = \varphi_i(-t)$ より

$$\theta_i(-t) = -\theta_i(t)$$

としてよい。(4) と (5) とから

$$\exp(i \theta_i(2t)) = \exp(3i \theta_i(t) - i \theta_i(t))$$

よつて $\theta_i(t) \equiv 2\theta_i(2t) \pmod{1}$ を得る。故に

$\theta_i(2^n t) \equiv 2^n \theta_i(t) \pmod{1}$ である。ここで $t = \omega$ を無理数とおけば、

$$2\pi \theta_i(2^n \omega) \equiv 2^n \pi \theta_i(\omega) \pmod{1}, \quad m_i = 2\pi \theta_i(\omega)/\omega$$

となる。 $2^n \omega$ は mod. 1 で稠密であり、又 $\theta_i(t)$ は t の連続函数であるから、結局

$$2\pi \theta_i(t) \equiv t m_i \pmod{1}$$

となる。故に (9) より

$$\varphi_i(t) = \exp(\alpha t^2 + i m_i t) \quad (\alpha < 0) \quad (10)$$

となり、 x_i の分布は正規分布をなすことがわかつた。しかも x_i の分散 $\sigma_i^2 = -2\alpha$ は共通である。

(ii) 一般の場合。 $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ に対して $z = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$ を、 $\sum \alpha_i^2 = \sum \beta_i^2$, $\sum \alpha_i \beta_i = 0$ にとる。この y, z に対して

$$u = y \cos \theta + z \sin \theta = \sum (\alpha_i \cos \theta + \beta_i \sin \theta) x_i$$

$$v = -y \sin \theta + z \cos \theta = \sum (-\alpha_i \sin \theta + \beta_i \cos \theta) x_i$$

は

$$\sum (\alpha_i \cos \theta + \beta_i \sin \theta) (-\alpha_i \sin \theta + \beta_i \cos \theta) = 0$$

を満足するから、(i) がそのまま y, z に対して適用される。従つて

$$E(\exp(i t y)) = \exp(-\alpha t^2 + i t m) \quad \alpha < 0$$

と表される。しからに

$$m = E(y) = \sum \alpha_j E(x_j) = \sum \alpha_j m_j = 0$$

$$\sigma^2(y) = \sum \alpha_j^2 \sigma^2(x_j) = \sum \alpha_j^2 \sigma^2$$

(σ^2 は $x_1, \dots, x_n$ に共通) であるから

$$E(\exp(i t y)) = \exp\left(-\frac{t^2}{2} \left(\sum \alpha_j^2 \sigma^2\right) + i t \sum \alpha_j m_j\right)$$

となる。ここで $t=1$, $\alpha_1 = t_1, \dots, \alpha_n = t_n$ とおけば

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = E(\exp(i \sum t_j x_j))$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum t_j^2 \sigma^2 + i \sum t_j m_j\right\} \quad (10)$$

となる。これは n 次元正規分布 (1) の特性函数である。(丁)

注意 “ $x_1, \dots, x_n$ の二次形式変計量 $q_1 = (Ax, x)$, $q_2 = (Bx, x)$ (A, B は対称行列) が $AB=0$ ならば必ず独立であるならば、 $x = (x_1, \dots, x_n)$ は正規分布 (1) に従う” ことがわかる。それは (2) に対して

$q_1 = y^2$, $q_2 = z^2$ とおけば、 $AB=0$ と (3) とが同値であるからである。従つて変元-Craig の定理の十分条件の成り立つのは、正規分布に限ることがわかつた。

定理 2. “ n 個の確変数 $x_1, \dots, x_n$ が、すべて平均値及び有限の分散を有するとき、もしも (2) の y, z に対して、 y, z の相関係数が 0 ならば必ず y, z が独立となるならば、 $(x_1, \dots, x_n)$ は正規分布に従う。”

証明 $(x_1, \dots, x_n)$ の n 個の一次形式 $(t_1, \dots, t_n)$ を適當にとれば、 $t_1, \dots, t_n$ の分散がすべて 1 で、且つ相互の相関係数をすべて 0 ならしめることができる。このとき $y = \sum \alpha_i t_i$, $z = \sum \beta_i t_i$ に対して、その相関係数 r は

$$r = \sum \alpha_i \beta_i / \{(\sum \alpha_i^2)^{1/2} (\sum \beta_i^2)^{1/2}\}$$

と與えられるから、 $r=0$ と $\sum \alpha_i \beta_i = 0$ とは同値である。よつて定理 1 より $(t_1, \dots, t_n)$ は正規分布 (1) に従い。それによつて又 $(x_1, \dots, x_n)$ も正規分布をなすことがわかる。(了)