九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

ガラスの破斷強度に關する確率論的考察

平田, 森三
東京大學第二工學部

https://hdl.handle.net/2324/12941

出版情報：統計数理研究. 3 (1/2), pp.57-60, 1949-12-20. Research Association of Statistical Sciences
バージョン：
権利関係：

KYUSHU UNIVERSITY

9	0 9444, 0 0556 0 8333, 0 1667 0 7222, 0 2773 0 6111, 0 3889	±0 1841 ±0.1496 ±0 08511 ±0 04013	±0 1773 ±0.1330 ±0.08865 ±0 04433	0 805	0 932
10	0 9500, 0 0500 0 8500, 0 1500 0.7500, 0.2500 0.6500, 0 3500 0.5500, 0 4500	±0 1677 ±0 1408 ±0 08562 ±0 04814 ±0 01562	±0 1596 ±0 1241 ±0 08865 ±0.05319 ±0.01773	0.822	0 937

* λ_k の大きい方が正，小さい方が負。

** $\sigma^2(s'_k)/[\sigma^2/(2n\eta(\hat{\sigma}))]_{n=k}$

のの妥當性については疑問がある。試みに $k=5$ のときの $x(n_i)$ の推定値に相當する λ_i をとり，$\lambda_1=0.1224$, $\lambda_2=0.3103$ として最高效率を與える係數を求めると $\alpha_1=0.3595$, $\alpha_2=0\ 1650$ で，大標本の效率 0 636，小標本への近似效率 0 838 を得，また範圍をだけをつかつたとき $\alpha=0\ 430$, 效率 0 603, $\sigma^2(s')/\sigma^2(\hat{\sigma})=0\ 794$ を得た。Mosteller によればこの範圍をつかつたとき $\sigma^2(s')/\sigma^2(R')=0.962$ であるから，小標本への近似效率としたものには問題がある。機會を見て檢べたいと思つている。

文　　獻

1) S.S. Wilks : *Bul. Ann. Math., Soc*, 54 (1948) 6.

2) Frederick Mosteller : *Ann. Math. Statistics*, 17 (1946) 377.

3) 石田保士：科學，昭和 18 年 1 月 第 13 卷第 1 號 13.

ガラスの破斷强度に關する確率論的考察

平　田　森　三

東京大學第二工學部

(昭和 24 年 7 月 2 日受理)

各種固體材料の破斷强度を測定する場合に，普通には一定速度で張力を增してゆくか，或は伸張を一定の割合で增してゆつて，割れ目の發生した瞬間にかゝつていた張力を求めるのであるが，試驗片の形狀，大きさを一定に保つておいてもその値はかなり變動する。その變動の原因は單に個々の試驗片の同一性が完全には實現し得ないということだけからは說明し難く，固體の破壞に關しても化學反應論的考察が必要であると思われる。この問題に關してガラスの破斷强度を測定した結果と，それに對する確率論的考察について報告する。

§1. 一定連續荷重に對する割れ目發生時間の後れ

ガラスにある瞬間以後に一定張力 f をかけ續けるとき，割れ目が發生するまでの時間の後れ t は試驗毎にかなり著しい變動を示す。できるだけ同一に作られた多數の試驗片について，この後れの時間が t よりも大きいものの頻度分布 $p(t)$ を求めてみると，次に示すような關係がある。[2]

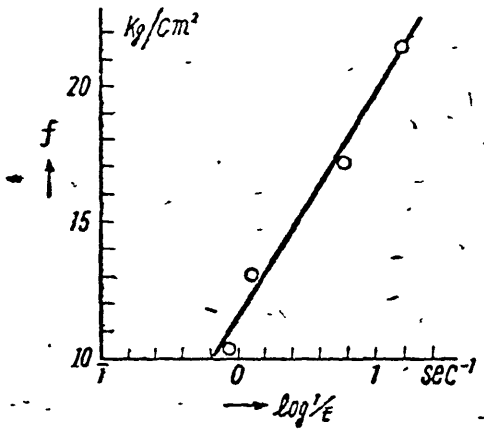
$$p(t)=\exp(-mt) \tag{1}$$

このことは，一定の張力 f がかけはじめられてから，t 秒經過した後において，單位時間内に割れ目の發生す

る確率 $\mu(t)$ は t には無關係に常に一定値 m をもつことを意味する。m の大きさは f によつて定まる。實驗の結果は第1圖に示すように兩者の間にほゞ次の關係が成立つ。

$$m = A\exp(\alpha \cdot f) \qquad (2)$$

この關係の意味づけは，割れ目の發生に關して次のような機構を假定することによつて達成せられる。



第1圖　應力と割れ目發生時間の後れ

§2.　割れ目發生の確率

ガラスの分子構造に關しては從來いろいろの說が提出せられているが，ガラスの熱傳導度の溫度係數其他の考察から不規則な網目構造の連續體と見るのが妥當と思われる。[3] その網目を構成するボンド配列の不規則性がある限度をこえると，或はそういう限度をこえたボンドが互に近接してある數以上同時に發生すると，それが次々に波及して終には巨視的な割れ目になると考える。外部から何等の應力が及ぼされていない狀態でも各分子の熱運動のために，そういう確率 m は絕對に0だとはいえない。即ち，一箇の分子を上記のような狀態にもちきたすための活性化エネルギーを E_0 とすれば，割れ目發生の確率は

$$m = a\exp(-E_0/kT)$$

となる。勿論，この m の大きさは通常の溫度では非常に小さく殆ど0に近い。もし外部から應力 f がかけられた場合には，そのために1箇の分子に加えられるエネルギーを E とすれば，前述の m は次のように變るのであろう。

$$m = a\exp[-(E_0 - E)/kT] \qquad (3)$$

この E が f のいかなる函數であるかは簡單にはきめられない。おそらく f と共に E は急激に大きくなる性質のもので，

$$E \propto f^n$$

と書かれるべきであろう。しかし今，f が大きく，割れ目發生の確率も大きくなつたところでは，E は近似的には f に比例するとし，たゞその比例常數が非常に大きい値をとると考えても差支えないであろう。

$$E = \sigma \cdot f \qquad (4)$$

これを (3) 式に代入すれば，前出の實驗式 (2) と同じ形が得られる。即ち，

$$m = a\exp(-E_0/kT)\exp(\sigma \cdot f/kT)$$

$$\left.\begin{aligned} A &= a\exp(-E_0/kT) \\ \alpha &= \sigma/kT \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

§3.　一定荷重速度に對する破斷强度

普通の材料試驗機の如く荷重速度を一定に保つ場合，ガラスのように破斷に達するまでの伸張變が極めて小さいものでは斷面積の縮小は殆んど無視してよいから，應力 f が時間に比例して大きくなる場合と同じだと考えることができる。即ち，

$$f = k \cdot t \qquad (6)$$

なお，ガラスではヤング率は破斷にいたるまで f には無關係に殆んど一定と見なされるから，伸張の速度を一定に保つような試驗機を用いての實驗でも，應力の時間的變化は (6) 式があてはまる場合と考えてよい。

さて，このように時間に比例して應力 f が增す場合には，割れ目發生の確率は時間 t に對して無關係ではなくなり，(6) 式を (5) 式に代入して，次の關係が得られる。

$$\mu(t) = A\exp(\alpha\ k\ t) \qquad (7)$$

但し，時間 t の原點は嚴密には $f=0$ の時刻ではなくて，(4) 式を導いたときに考えたように，f がある程度大きくなつたところに移して考え，それまでは近似的に $\mu=0$ とすればよいであろう。

はじめに述べたように割れ目發生までの時間の後れが t よりも大きい確率 $p(t)$ と $\mu(t)$ の間には次の關係が成立するはずである。

$$\mu(t)dt = -\frac{dp}{dt}$$

$$= -d(\log p)$$

即ち，

$$p(t)=\exp[A/\alpha k\{1-\exp(\alpha kt)\}] \quad (8)$$

割れ目発生の後れが t と $t+dt$ の間にある確率 $q(t)dt$ については，

$$q(t)dt=-dp(t)$$

の關係があるから，

$$q(t)=A\exp(\alpha kt)\exp\left[\frac{A}{\alpha k}\{1-\exp(\alpha kt)\}\right] \quad (9)$$

t の平均値については

$$\bar{t}=\int_0^\infty t\cdot q(t)dt$$

從つて，一定荷重速度による強度試驗において破断の起つたときの應力 f は次のような頻度分布 $\varphi(f)$ をもつて變動するはずである。

$$\varphi(f)=A\exp(\alpha f)\exp\left[\frac{A}{\alpha k}\{1-\exp(\alpha f)\}\right] \quad (10)$$

その際，f の平均値は

$$\bar{f}=\int_0^\infty kAt\exp(\alpha kt)\exp\left[\frac{A}{\alpha k}\{1-\exp(\alpha kt)\}\right]dt$$

又，頻度が最大になるような破断強度を f_m とすれば，

$$\frac{\partial\varphi(f)}{\partial f}=0$$

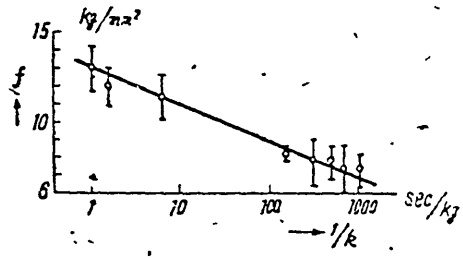
の條件から，

$$f_m=\frac{1}{\alpha}\log\frac{\alpha}{A}k$$

となる。α，A に (5) 式を代入すると，

$$f_m=\frac{kT}{\sigma}\left[\log\left\{\frac{\sigma}{kTa}\cdot\exp(E_0/kT)\right\}+\log k\right] \quad (11)$$

$\bar{f}$ の計算は複雑になるので，もしこの f_m をもつて與えられた條件のもとでの破断強度と定義すれば，(11)式の關係は試驗片の大きさ，形状及び温度が一定のときには，f_m は荷重速度 k が增すと急激に大きくなることを意味する。ガラス細糸の破断強度と荷重速度についてG APELT の行つた實驗結果は第2圖に示す通りであるが，これは (11) 式によつてよく説明される。



第2圖　破断強度と荷重速度 (G APELT)

§ 4. 試驗片の大きさの影響

荷重速度，温度等が一定の場合，試驗片の大きさによつて破断強度が異なることも (11) 式の結果から容易に推定できる。まず，一樣な斷面積をもつた長さ l の試驗片の場合には，t 時において試驗片のどこかに割れ目の發生する確率 $\mu(t)dt$ は，(7) 式と同様に

$$\mu(t)dt=l\cdot A\exp(\alpha kt)$$

とおけばよいから，

$$f_m\propto\log\frac{1}{l}$$

の關係が得られる。即ち，試驗片が長くなるほど破断強度は小さくなるはずであるが，これは實驗的にも從來からよく知られていることである。しかし定量的にその比例常数を求め得るような十分な資料は未だないようであるが，もしそれが明らかになれば (11) 式の關係から，(4) 式について述べたような σ の値を推定することができるであろう。

次に，長さが一定で斷面積が異なる場合の影響も同樣な考察から導くことができる。但し，試驗片の表面と内部とで分子配列の状態にいかなる差異があるかが明らかにされないと (7) 式の常数を正確に決定することはできないが，今かりに斷面が半径 r の圓で，$\mu(t)$ が次のように書かれるとする。

$$\mu(t)dt=(\pi\gamma^2\cdot\xi+2\pi\gamma\cdot\eta)A\exp(\alpha kt)$$

この試驗片が破断したときの荷重の最大頻度値を F_m とすれば，これは (11) 式の中の a を $(\pi\gamma^2\xi+2\pi\gamma\eta)a$ でおきかえたものに等しいはずであるから，單位斷面積當りの破断強度は次のようになる。

$$f_m=\frac{F_m}{\pi\gamma^2}\propto\frac{1}{\gamma^2}\log\frac{1}{\gamma^2\xi+2\gamma\eta}$$

即ち，γ が小さくなれば f_m は急激に大きくなる。このこともガラスせんいの強度に關する實驗の結果[5]とよく一致する。

§ 5. 一定荷重を一定時間たけかけた場合

GLATHALT 及び PRESTON[6] は一定時間 τ の間だけ一定荷重をかけたときのガラスの破断頻度 f を求める實驗を行つて，次の關係を得た。

$$\frac{1}{f}=a+b\log\tau \qquad (12)$$

この場合にも近似的荷重に対する割れ目の後れに時間に関する考察を適用する事ができる。t の平均値を $\bar{t}$ とすれば

$$\bar{t}=\frac{1}{m},$$

及び (1) 式の関係から，$\bar{t}$ よりも早く割れ目の發生する確率は

$$1-p(t)=1-\frac{1}{e}=0.632\cdots\cdots$$

となる。。GLATHALT 達の實驗で，もし τ 秒以内に割れてしまう確率が 0.632 であるような f をもつてその破斷强度としたものと想像してみると，いいかえれば，$\tau=\frac{1}{m}$ とすれば，(12) 式は

$$\frac{1}{f}=a+b\log\frac{1}{m}$$

となり，これはかきかえると

$$m=B\exp(-\beta/f) \qquad (13)$$

となる。N. W. TAYLOR[7] はこの關係を説明するために，ガラス内の最强ボンドである Si-O が應力のために或る限度 λ_0 以上引伸ばされると割れ目が發生し，その時間の後れというのは應力のためにある小體積 V 内の分子配列に異動が起つて Si-O ボンドに上記の λ_0 だけの伸びが生ずるまでに必要な時間に相當するものであり，f が大きくなるほど V は小さくなるものと假定した。もしこの考えに從つて (13) 式が，應力が t と共に增す場合にも適用されるとすれば，(7) 式から最大頻度を持つ破斷强度 f_m に關して (11) 式を導いたと同様に，この場合の f_m と荷重速度との關係を求めることができる。即ち，

$$m=B\exp(-\beta/kt),$$

$$p(t)=\exp\left[-B\int_0^t\exp(-\beta/kt)dt\right]$$

$$q(t)=B\exp(-\beta/kt)\exp\left[-B\int_0^t\exp(-\beta/kt)dt\right].$$

從つて，$q(t)$ が極大になる t は次の關係から求められる。

$$\frac{\beta}{Bk}=(kt)^2\exp\left(-\frac{\beta}{kt}\right)$$

或は，f_m については

$$\frac{\beta}{Bk}=f_m^2\exp\left(-\frac{\beta}{f_m}\right) \qquad (14)$$

(14) 式の右邊は f_m が增すと急激に大きくなる。即ち，荷重速度 k が小さいほど f_m は大きいことを意味する。これは定性的にも (11) 式の結果とは逆であり，又從來の實驗の結果とも矛盾する。

なお，GLATHART たちの實驗の結果は必ずしも (12) 式によつて示す必要はなく，f と $\log\frac{1}{\tau}$ とを座標軸にとつてかき表わしてみると，ほゞ一直線の上にのり，(2)式の關係が成立つと，みなすこともできる。この點は割れ目發生の機構に關して重要な問題であるから，更に十分に實驗の資料を集めて檢討する必要があると思う。

終りに，この問題について理工研の武藤俊之助教授から有益な示教を受けたことに對し深く感謝する。

(1949, 6, 30)

文 献

1) 大森恭輔，九大工學彙報 16 (1942), 239.
2) 平田森三，日本物理學年會講演 (1948年5月23日)；機械の研究 1 (1949), 232
久保田廣，應用物理 17 (1948), 286.
3) C. KITTEL, *Phys. Rev.* 75 (1949), 972.
4) G. APELT, *ZS. f. Phys* 91 (1934), 336.
5) A. A GRIFFITH, *Phil Trans Roy. Soc. London A.* 221 (1920), 163
E J. GOODING, *Soc. Glas. Technol* 16 (1932), 145.
6) J. L. GLATHART and F. W. PRESTON, *Journ Appl Phys.* 17 (1946), 189
7) N. W. TAYLOR, *Journ Appl. Phys.* 18 (1947), 943