順序づけ統計量を利用した「平均値と標準偏差の推定値の計算」について

山内, 二郎
東京大學第一工學部計測工學教室

出版情報：統計数理研究. 3 (1/2), pp.52-57, 1949-12-20. 統計科学研究会

限界 (AOQL) は現行では約7%であるのに，改正案では20%となる。この點で比較すると，この改正案は消費者にとつて相當な"改惡"であるとも言える。

§5　改正理由と批判　上記の改正案の立案の基礎數値は，つぎのような條件を考えて定めた　—(1) 消費者危險が現行よりも大きくならないこと。(2) 生產者危險および平均檢査個數をなるべく小さくすること。

生產者危險αをなるべく小さくしようと思えば，それを0にとるのが一番よいということになる。また，いまのように"棄却"のかわりに"全數檢査"という判決を出すような方式では，極端に考えて仕切の大きさを無限大と假定するならば，全數檢査を受ける確率がすこしでもあれば，たちまち平均檢査個數が無限大になつてしまうから，平均檢査個數をなるべくすくなくするためにも，"全數檢査" という判決を受ける確率を0にするのがよいと思われる。それで以上のように，普通の例題には出ていないような妙な定め方をしたのである。普通は平行な2直線として現われる限界線が，第1圖のように"採擇"の方だけしか現われてこなくなつたのはそのためである。もつとも，これで全數檢査を受ける確率がつねに0となるわけではない。直線の傾斜sよりも仕切不良率pの方が大きいならば，L_pは1より小さく，從つて$1-L_p$なる確率をもつて"全數檢査"となる。これは逐次拔取をいくらつゞけても採擇線にぶつからない場合なのである。

さて，上記の條件のうち (1) の方が，"$p>0.3$のとき，全數檢査を受けることなく採擇する確率" が大きくならないようにということであるならば，一應この改正案で目的が達せられている。けれども，もし合格品平均品質が現行よりもわるくならないようにということであると，改正案は改惡となつてしまう。この邊のところは，消費者の立場からの希望をよくきいてから決定しないと，あとでさんざん苦情をきかされることになるかもしれない。

さらにまた，"良品ととりかえる" というとき，その良品はどこからどうして持つてくるつもりなのかということも，筆者にとつては1つの疑問である。これらのことを，實際家から，いろいろな具體例について，敎えていただきたい。なお，ついでながら，"全數檢査" でなくて，"棄却" という判決をする場合，棄却された仕切はいつたいどう始末するのかということも，本當のことがよく分からないので，敎えていただきたいと思う。

§7.　むすび　拔取檢査についてあまりご存じでない方には，かなり偏したものではあるが，1つの例題を提供したことになり；相當よくご承知の方には，$\alpha=0$ という特別な場合の特性について，ちよつと注意をうながすことになり；實際家の方からは筆者の疑問に答えていただく機緣となり得たならば，貴重な紙面を費やしたこの小文も，多少の意義を持つわけである。最後に，この問題を筆者に示された山内二郎敎授に感謝の意を表する。

順序づけ統計量を利用した「平均値と標準偏差の推定値の計算」について

山　內　二　郎

東京大學第一工學部計測工學敎室

(昭和24年6月3日受理)

ある正規分布に從う母集團からとつた標本をつかつて平均値や標準偏差を推定するとき，もしその標本の數が非常に大きいと普通の方法では手數がかゝるので，標本を大きさの順にならべいくつかのある番目の標本だけをつかつて，その平均値で平均値の推定値としたり，部分範圍の平均値から標準偏差を推定したりすると實用上便利であり，その方面の研究[1),2)]が行われている。

平均をとるときに標本に適當な重さをつけたら，一次式による計算で推定の效率を幾分でも高められるのではないかという考えで，計算を進めて見た。F. Mosteller[2)] の論文には重さを考えた一次式を扱つたと記

しているが，実用的に有用な等しい重さの場合に限つて論じている。本文では主としてどれ位推定の効率が高められるかを知ることと，もう一つは石田保士[3]の小標本の標準偏差の推定量のよさの判定を与えることを目標とした。論法は Mosteller[2] の研究を借りたので記號もほとんどそれによつた。なおこの内容について討議して下つた方々，特に Mosteller の論文の存在を教えて下さつた森口繁一氏，その論文を貸して下さつた小川潤次郎氏に深く感謝する。

§1. 基本関係式

母集團は正規分布 $N(x, \mu, \sigma^2)$ で，標本の大きさ n，大きさの小さいものから順にならべて $x(n_i)$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ をぬき出し，

$$n_{k-i+1}+n_i=n, \quad a_{k-i+1}=a_i \tag{1.1}$$

となる常数 $a_i (i=1, 2, \cdots, k)$ を用い

$$\hat{m}=\frac{\sum a_i x(n_i)}{\sum a_i} \tag{1.2}$$

であらわされる統計量 $\hat{m}$ を考えると，Mosteller の定理により

$$\lambda_i=\frac{n_i}{n}=\int_{-\infty}^{u_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \tag{1.3}$$

を固定して $n\to\infty$ としたとき，$x(n_i)$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ が平均値 u_i，分散 σ_i^2，共変量 $\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$

$$\sigma_i^2=\frac{\lambda_i(1-\lambda_i)}{n[f(u_i)]^2}, \quad \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j=\frac{\lambda_i(1-\lambda_j)}{nf(u_i)f(u_j)} \quad (1\leqq i<j\leqq k) \tag{1.4}$$

を持つ多変数正規分布に漸進分布するから，$E(\hat{m})=\mu$ となることは容易にわかる。ここに $f(u_i)$ は $N(E(x_i), 0, \sigma^2)$ である。

従つて $\hat{m}$ の分散は

$$\sigma^2(\hat{m})=\frac{2\sigma^2}{nK^2}\left[\sum^{q} a_i^2\frac{\lambda_i}{f_i^2}+2\sum_{i<j}^{q}a_i a_j\frac{\lambda_i}{f_i f_j}\right] \tag{1.5}$$

に近似する。ここに $K=\sum^{k} a_i$, $f_i=f(u_i)$, q は $\frac{k}{2}$ 又は $\frac{1}{2}(k+1)$, k が奇数のとき $\lambda_{(k+1)/2}=\frac{1}{2}$ については $f_{(k+1)/2}=1/\sqrt{2\pi}$ であるが，(1.5) 中では $f_{(k+1)/2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ を用いる。

次に標準偏差の推定として

$$\hat{\sigma}=\frac{\sum^{q} a_i\{x(n_{k-i+1})-x(n_i)\}}{c} \tag{1.6}$$

$$c=2\sum^{q} a_i v_i, \quad v_i=-u_i$$

を考えると，$E(\hat{\sigma})=\sigma$ となり，$\hat{\sigma}$ の分散は

$$\sigma^2(\hat{\sigma})=\frac{2\sigma^2}{nc^2}\left[\sum^{q} a_i^2\frac{\lambda_i(1-2\lambda_i)}{f_i^2}+2\sum_{i<j}^{q}a_i a_j\frac{\lambda_i(1-2\lambda_j)}{f_i f_j}\right] \tag{1.7}$$

に近似する。この場合 $q=k/2$ である。

さて Mosteller の方法にしたがつて，$\hat{m}$ の場合に $\sum x/n$ に對する効率をとり $\eta(\hat{m})$ とし，$\hat{\sigma}$ の場合には n 個の標本をつかつた不偏標準偏差推定量 s' に對する効率をとり $\eta(\hat{\sigma})$ とすると，(1.5) と (1.7) とから

$$\frac{1}{\eta(\hat{m})}=\frac{2}{k^2}\left[\sum a_i^2\frac{\lambda_i}{f_i^2}+2\sum_{i<j}a_i a_j\frac{\lambda_i}{f_i f_j}\right] \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{\eta(\hat{\sigma})}=\frac{4}{c^2}\left[\sum a_i^2\frac{\lambda_i(1-2\lambda_i)}{f_i^2}+2\sum_{i<j}a_i a_j\frac{\lambda_i(1-2\lambda_j)}{f_i f_j}\right] \tag{1.9}$$

を得る。

§2. 最高効率の a_i の決定法

$\hat{m}$ と $\hat{\sigma}$（これらを代表して $\hat{\theta}$ と記す）の何れの場合でも x は $N(x, 0, 1)$ として一般性を失わず，また何れの場合でも

$$E=\sum^{q} a_i^2 A_{ii}+2\sum^{q} a_i a_j A_{ij} \tag{2.1}$$

$$P=\sum^{q} a_i B_i \tag{2.2}$$

$$Y=P^2/E \tag{2.3}$$

とおくと，次のようになる。

$\hat{\theta}$	$\hat{m}$	$\hat{\sigma}$
$A_{ij}=A_{ji} (i\leqq j)$	$\lambda_i/f_i f_j$	$\lambda_i(1-2\lambda_j)/f_i f_j$
B_i	$1\left(i\neq\frac{k+1}{2}\right)$, $\frac{1}{2}\left(i=\frac{k+1}{2}\right)$	v_i
Y	$\eta(\hat{m})/2$	$\eta(\hat{\sigma})$

効率をできるだけ高くするには Y をできるだけ大きくするように $a_i (i=1, 2, \cdots, k)$ が決定されればよい。$A_{ij}>0$ であるから，この $a_i (i=1, 2, \cdots, q)$ の値を $a_i^0 (i=1, 2, \cdots, q)$ と記し，(2.1) の係数の行列を A，(2.2) の係数の縦一列の行列を B，a_i^0/P の縦一列の行列を $[a^0/P]$ と記すと，

$$\left[\frac{a^0}{P}\right]=\frac{|A|}{D}A^{-1}B \tag{2.4}$$

を得る。$|A|$ は行列 A の行列式，D は

$$\frac{D}{|A|}=B'A^{-1}B \tag{2.5}$$

である。これを(2.1)に代入して整理すると

$$\frac{E}{P^2}=\sum\frac{\alpha_i^0 a_i^0}{P^2}=\frac{1}{B'A^{-1}B} \tag{2.6}$$

を得，従つて

$$Y=B'A^{-1}B=\frac{D}{|A|} \tag{2.7}$$

を得る。

この場合 a_i^0 の値は，比例常数をのぞいて

$$a_i^0=\frac{1}{2}\frac{\partial Y}{\partial B_i} \tag{2.8}$$

となり，(2.7)によつて

$$\sum a_i^0 B_i=Y \tag{2.9}$$

を得るから，検算に利用できる。

以上の結果を $\hat{m}$ と $\hat{\sigma}$ とについてさらに計算すると次のようになる。

$\hat{m}$ の場合には計算により

$$|A|=\frac{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)\cdots\cdots(\lambda_q-\lambda_{q-1})}{f_1^2 f_2^2\cdots\cdots f_q^2} \tag{2.10}$$

$b_i=f_iB_i$ と記すと

$$D f_1^2 f_2^2\cdots\cdots f_q^2=\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_1 & \cdots\cdots & \lambda_1 & b_1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots\cdots & \lambda_2 & b_2\\ \vdots & \vdots & \lambda_3\cdots & \lambda_3 & b_3\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\cdots & \lambda_q & b_q\\ b_1 & b_2 & b_3\cdots & b_q & 0\end{vmatrix} \tag{2.11}$$

となるから

$$\begin{aligned}Y=&\frac{b_1^2\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}+\frac{b_2^2(\lambda_3-\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}+\cdots\cdots\\&+\frac{b_i^2(\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1})}{(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_{i+1}-\lambda_i)}+\cdots\cdots\\&+\frac{b_{q-1}^2(\lambda_q-\lambda_{q-2})}{(\lambda_{q-1}-\lambda_{q-2})(\lambda_q-\lambda_{q-1})}+\frac{b_q^2}{\lambda_q-\lambda_{q-1}}\\&-\frac{2b_1b_2}{\lambda_2-\lambda_1}-\frac{2b_2b_3}{\lambda_3-\lambda_2}-\cdots\cdots\\&-\frac{2b_ib_{i+1}}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}-\cdots\cdots-\frac{2b_{q-1}b_q}{\lambda_q-\lambda_{q-1}}\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}=&\frac{b_1^2}{\lambda_1}+\frac{(b_2-b_1)^2}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{(b_3-b_2)^2}{\lambda_3-\lambda_2}+\cdots\cdots\\&+\frac{(b_{q-1}-b_{q-2})^2}{\lambda_{q-1}-\lambda_{q-2}}+\frac{(b_q-b_{q-1})^2}{\lambda_q-\lambda_{q-1}}\end{aligned}$$

ここで $\lambda_0=0$ とすると，$f_0=0$ であつて，$b_0=0$ であるから(2.12)は一般形として

$$Y=\sum_{i=1}^{q}\frac{(b_i-b_{i-1})^2}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}. \tag{2.12a}$$

を得る。この場合 a_i^0 は(2.8)によつて

$$a_i^0=f_i\left[\frac{b_i-b_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}-\frac{b_{i+1}-b_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}\right]\ (i\neq q) \tag{2.13}$$

$$a_q^0=f_q\left[\frac{b_q-b_{q-1}}{\lambda_q-\lambda_{q-1}}\right] \tag{2.13q}$$

(2.13q)で注意しておくことは $q=\frac{k+1}{2}$ のとき f_q には $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ を用い，b_q には $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，$\lambda_q=\frac{1}{2}$ を用いることで，また(2.13)とも $i\neq\frac{k+1}{2}$ では $B_i=1$ であるから，(2.13)，(2.13q)は次のようになる。

$$a_i^0=f_i\left[\frac{f_i-f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}-\frac{f_{i+1}-f_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}\right] \tag{2.13a}$$

$$a^0_{\frac{k}{2}}=f_{\frac{k}{2}}\left[\frac{f_{\frac{k}{2}}-f_{\frac{k}{2}-1}}{\lambda_{\frac{k}{2}}-\lambda_{\frac{k}{2}-1}}\right] \tag{2.13b}$$

$$a^0_{\frac{k+1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-f_{\frac{k-1}{2}}}{\frac{1}{2}-\lambda_{\frac{k-1}{2}}}\right] \tag{2.13c}$$

また $\hat{\sigma}$ の場合には，計算により

$$|A|=\frac{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\cdots\cdots(\lambda_q-\lambda_{q-1})(1-2\lambda_q)}{f_1^2 f_2^2\cdots\cdots f_q^2} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}&Df_1^2f_2^2\cdots\cdots f_q^2\\&=b_1^2\lambda_2(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)\cdots(\lambda_q-\lambda_{q-1})(1-2\lambda_q)\\&\quad+b_2^2\lambda_1(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_3)\cdots(\lambda_q-\lambda_{q-1})(1-2\lambda_q)+\cdots\\&\quad+b_i^2\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\cdots(\lambda_{i-1}-\lambda_{i-2})(\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1})\\&\quad(\lambda_{i+2}-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda_q-\lambda_{q-1})(1-2\lambda_q)+\cdots\cdots\\&\quad+b_q^2\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\cdots(\lambda_{q-1}-\lambda_{q-2})(1-2\lambda_{q-1})\\&\quad-2b_1b_2\lambda_1(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)\cdots(\lambda_q-\lambda_{q-1})(1-2\lambda_q)\\&\quad-2b_2b_3\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_3)\cdots(\lambda_q-\lambda_{q-1})(1-2\lambda_q)\\&\quad-\cdots\cdots-2b_ib_{i+1}\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_{i+2}\\&\quad-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda_q-\lambda_{q-1})(1-2\lambda_q)-\cdots\cdots-2b_{q-1}b_q\lambda_1\\&\quad(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\cdots(\lambda_{q-1}-\lambda_{q-2})(1-2\lambda_q)\end{aligned} \tag{2.15}$$

となり，従つて

$$\begin{aligned}Y=&\frac{b_1^2\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}+\frac{b_2^2(\lambda_3-\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\\&+\frac{b_3^2(\lambda_4-\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)}+\cdots\cdots\\&+\frac{b_{q-1}^2(\lambda_q-\lambda_{q-2})}{(\lambda_{q-1}-\lambda_{q-2})(\lambda_q-\lambda_{q-2})}+\frac{b_q^2(1-2\lambda_{q-1})}{(\lambda_q-\lambda_{q-1})(1-2\lambda_q)}\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$-\frac{2b_1b_2}{\lambda_2-\lambda_1}-\frac{2b_2b_3}{\lambda_3-\lambda_2}-\cdots-\frac{2b_{q-1}b_q}{\lambda_q-\lambda_{q-1}}$$
$$=\frac{b_1^2}{\lambda_1}+\frac{(b_2-b_1)^2}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{(b_3-b_2)^2}{\lambda_3-\lambda_2}+\cdots$$
$$+\frac{(b_q-b_{q-1})^2}{\lambda_q-\lambda_{q-1}}+\frac{2b_q^2}{1-2\lambda_q}$$

となる。ここで $\lambda_0=0$ とすると，$f_0=0$，$b_0=0$；$\lambda_{q+1}=\frac{1}{2}$ とすると，$v_{q+1}=0$，$b_{q+1}=0$ であるから，一般形として

$$Y=\sum_{i=1}^{q+1}\frac{(b_i-b_{i-1})^2}{\lambda_i-\lambda_{i-1}} \tag{2.16a}$$

を得る。この場合の a_i^0 は (2.8) によつて

$$a_i^0=f_i\left[\frac{f_iv_i-f_{i-1}v_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}-\frac{f_{i+1}v_{i+1}-f_iv_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}\right] \tag{2.17}$$

を得る。

(2.12a) と (2.16a) とは全く同じ形式のものである。

§3. 最高効率の間隔の決定

$\lambda_i(i=1,2,\cdots,q)$ が与えられたときの最高効率を与える係数とそのときの効率は上記のように決定されるが，さらにこの最高効率を最も高くする間隔をさがすことも 2.12)や(2.16)を用いてできる。まず $\lambda_j(j\neq i)$ を固定して λ_i を動かすときの Y の極大を求めることを考える。

$\frac{d\lambda_i}{dv_i}=-f_i$，$\frac{df_i}{dv_i}=-v_if_i$ を考えると

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Y}{\partial v_i}=f_i\left(\frac{b_i-b_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}-\frac{b_{i+1}-b_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}\right)\left(\frac{dB_i}{dv_i}-B_iv_i+\frac{b_i-b_{i-1}}{2(\lambda_i-\lambda_{i-1})}+\frac{b_{i+1}-b_i}{2(\lambda_{i+1}-\lambda_i)}\right) \tag{3.1}$$

であつて，この値は $\lambda_i\to\lambda_{i-1}$ のとき負，$\lambda_i\to\lambda_{i+1}$ のとき正であるから，λ_{i-1} と λ_{i+1} との間に Y を極大にする λ_i が存在する。(3.1) を 0 とする条件のうち

$$\frac{b_i-b_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}-\frac{b_{i+1}-b_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}=0$$

が成立するとすると

$$b_i=b_{i-1}+(\lambda_i-\lambda_{i-1})\frac{b_{i+1}-b_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}$$

と書けるが，b_i を λ_i の函数として λ_i 軸に対する b_i 曲線は上に凸であつてこの一次式を満足する b_i は b_{i-1} か b_{i+1} かであつてその中間には存在しない。したがつて Y の極大は

$$\frac{dB_i}{dv_i}-B_iv_i+\frac{b_i-b_{i-1}}{2(\lambda_i-\lambda_{i-1})}+\frac{b_{i+1}-b_i}{2(\lambda_{i+1}-\lambda_i)}=0 \tag{3.2}$$

のときであつて，$\hat{m}$ の場合には

$$v_i=\frac{1}{2}\left[\frac{f_i-f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}+\frac{f_{i+1}-f_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}\right] \tag{3.3}$$

$$v_{\frac{k-1}{2}}=\frac{1}{2}\left[\frac{f_{\frac{k-1}{2}}-f_{\frac{k-3}{2}}}{\lambda_{\frac{k-1}{2}}-\lambda_{\frac{k-3}{2}}}+\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-f_{\frac{k-1}{2}}}{\frac{1}{2}-\lambda_{\frac{k-1}{2}}}\right] \tag{3.4}$$

のときであり，$\hat{\sigma}$ の場合には

$$1-v_i^2+\frac{1}{2}\left[\frac{f_iv_i-f_{i-1}v_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}+\frac{f_{i+1}v_{i+1}-f_iv_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}\right]=0 \tag{3.5}$$

のときである。

これ等の関係を利用し，中央に近い方から順次遠い方へうつつて λ_i を決定して行き，λ_1 で終つたときの Y の値を求め，その最大な値となる間隔が求める間隔となる。

§4. 平均値の計算式の例

例 1. $k=3$ の場合。

この場合の最高の効率は 0.8825 であつて λ_1 は 0.16 に近く，$\lambda_2=0.5$ であるが，この近くでは効率の変化はあまりはげしくなく，たとえば

$$\hat{m}=\frac{7x_{0\cdot16}+10x_{0\cdot50}+7x_{0\cdot84}}{24},\quad \sigma^2(\hat{m})=\frac{\sigma^2}{0.8825n}$$

$$\hat{m}=\frac{2x_{0\cdot15}+3x_{0\cdot50}+2x_{0\cdot85}}{7},\quad \sigma^2(\hat{m})=\frac{\sigma^2}{0.8819n}$$

この $\lambda_1=0.15$ のときの係数2と3とは有効数字5桁目でごく僅かな差のある程度である。

Mosteller の算術平均では最もよいときは $\lambda_1=0.1826$，$\lambda_2=0.5000$ で，効率 0.879 である。

例 2. $k=4$ の場合。

この場合の最高の効率は 0.925 であつて，$\lambda_1=0.10$，$\lambda_2=0.35$ の近くであつて，係数を丸めて実用的計算式をつくると

$$\hat{m}=\frac{3x_{0\cdot10}+5x_{0\cdot35}+5x_{0\cdot65}+3x_{0\cdot90}}{16},$$

$$\sigma^2(\hat{m})=\frac{\sigma^2}{0.920n}$$

例 3. $\lambda_i=\left(i-\frac{1}{2}\right)/k$ の場合。

この場合の最高效率は $k=4$ のとき 0.918, $k=5$ のとき 0.940 で, Mosteller の算術平均の場合にはそれぞれ 0.913, 0.934 である。

實用的な計算式としては

$$\hat{m}_4=\frac{1.71(x_{0.125}+x_{0.875})+2.29(x_{0.375}+x_{0.625})}{8},$$

$$\sigma^2(\hat{m}_4)=\frac{\sigma^2}{0.918\,n}$$

$$\hat{m}_5=\frac{0.75(x_{0.1}+x_{0.9})+(x_{0.3}+x_{0.7})+x_{0.5}}{4.5},$$

$$\sigma^2(\hat{m}_5)=\frac{\sigma^2}{0.939\,n}$$

§ 5. 標準偏差の計算式の例

例 1. $k=4$ の場合。

この場合の最高效率は 0.790 で, Mosteller の場合, $\lambda_1=0.07$, $\lambda_2=0.20$ で 0.75 を與えている。

$$\hat{\sigma}=\frac{x_{0.977}-x_{0.023}+2(x_{0.873}-x_{0.127})}{8.55},$$

$$\sigma^2(\hat{\sigma})=\frac{\sigma^2}{0.79(2n)}$$

例 2. $k=8$ の場合。

Mosteller の等荷重の式には $\lambda_1=0.02$, $\lambda_2=0.08$, $\lambda_3=0.15$, $\lambda_4=0.25$ の場合效率 0.890 を與えているが, この間隔で重さをとると, $a_1=0.0940$, $a_2=0.1243$, $a_3=0.1065$, $a_4=0.1141$, $c=1$ で效率は 0.901 となる。

λ_1 に 0.02 を許すと, $\lambda_1=0.02$, $\lambda_2=0.05$, $\lambda_3=0.10$, $\lambda_4=0.20$ にとり $a_1=0.1405$, $a_2=0.1404$, $a_3=0.1931$, $a_4=0.2757$, $c=1$ のとき $\sigma^2(\hat{\sigma})=\sigma^2/0.906\,(2n)$ となる。

例 3. 石田の小標本の簡便式との比較。

本文の場合は標本の数 n がかなり大きいときであつて小標本のときにそのまゝあてはめることには詳しい検討を要するのであるが, おそらく小標本のときにつかつても近似的にある目安を得る役には立つであろうと考えて, 石田の小標本の簡便法の重さとの比較を試みた。λ_i のとり方は小標本のときの $x(n_i)$ の推定値に相當する λ_i ととるのがのぞましいと考えたが, 近似の意味で $\lambda_i=\left(i-\frac{1}{2}\right)/k$ とし, 大標本のときの最高效率を與える係數を $c=1$ として定め, また石田の係數は比較のため $\sqrt{\frac{2}{\pi}}(k-(2i-1))/\left(\frac{k}{2}\right)$ を求め, 次表の結果を得た。この係數の比例性がきわめてよく, この點から石田の方法は優れているといえよう。参考のために大標本の場合の效率とそれを小標本にもあてはまると假定した近似效率をも示したが, このも

k	$\lambda_i=\left(i-\frac{1}{2}\right)/k$	$a_i(c=1)$*	石田の係數*	大標本の場合の效率 $\eta(\hat{\sigma})$	小標本の場合への近似效率**
3	0.8333, 0.1667	±0.5168	±0.5319	0.526	0.862
4	0.8750, 0.1250 0.6250, 0.3750	±0.3920 ±0.1539	±0.3939 ±0.1330	0.619	0.881
5	0.9000, 0.1000 0.7000, 0.3000	±0.3172 ±0.1783	±0.3192 ±0.1596	0.681	0.898
6	0.9167, 0.0833 0.7500, 0.2500 0.5833, 0.4167	±0.2667 ±0.1768 ±0.05164	±0.2660 ±0.1596 ±0.05320	0.725	0.909
7	0.9286, 0.0714 0.7857, 0.2143 0.6429, 0.3571	±0.2319 ±0.1686 ±0.07284	±0.2280 ±0.1520 ∓0.07599	0.759	0.918
8	0.9375, 0.0625 0.8125, 0.1875 0.6875, 0.3125 0.5625, 0.4375	±0.2052 ±0.1590 ±0.08144 +0.02715	±0.1905 ±0.1425 ±0.08549 ±0.02350	0.784	0.926

9	0 9444, 0 0556	±0 1841	±0 1773	0 805	0 932
	0 8333, 0 1667	±0.1496	±0.1330		
	0 7222, 0 2773	±0 08511	±0.08365		
	0 6111, 0 3889	±0 04013	±0 04433		
10	0 9500, 0 0500	±0 1677	±0 1596	0.822	0 937
	0 8500, 0 1500	±0 1408	±0 1241		
	0.7500, 0.2500	±0 08562	±0 08865		
	0.6500, 0 3500	±0 04814	±0.05319		
	0.5500, 0 4500	±0 01562	±0.01773		

* λ_i の大きい方が正，小さい方が負。

** $\sigma^2(s'_k)/[\sigma^2/(2n\eta(\hat{\sigma}))]_{n=k}$

のの妥當性については疑問がある。試みに $k=5$ のときの $x(n_i)$ の推定値に相當する λ_i をとり，$\lambda_1=0.1224$, $\lambda_2=0.3103$ として最高效率を與える係數を求めると $a_1=0.3595$, $a_2=0$ 1650 で，大標本の效率 0 636，小標本への近似效率 0 833 を得，また範圍をだけをつかつたとき $a=0$ 430，效率 0 603，$\sigma^2(s')/\sigma^2(\hat{\sigma})=0$ 794 を得た。Mosteller によればこの範圍をつかつたとき $\sigma^2(s')/\sigma^2(R')=0.962$ であるから，小標本への近似效率としたものには問題がある。機會を見て檢べたいと思つている。

文　獻

1) S.S. Wilks : *Bul. Ann. Math., Soc*, 54 (1948) 6.

2) Frederick Mosteller : *Ann. Math. Statistics*, 17 (1946) 377.

3) 石田保士 : 科學, 昭和 18 年 1 月 第 13 卷第 1 號 13.

ガラスの破斷强度に關する確率論的考察

平　田　森　三

東京大學第二工學部

(昭和 24 年 7 月 2 日受理)

各種固體材料の破斷强度を測定する場合に，普通には一定速度で張力を増してゆくか，或は伸張を一定の割合で増してゆつて，割れ目の發生した瞬間にかゝつていた張力を求めるのであるが，試験片の形状，大きさを一定に保つておいてもその値はかなり變動する。その變動の原因は單に個々の試験片の同一性が完全には實現し得ないということだけからは説明し難く，固體の破壞に關しても確率論的考察が必要であると思われる。この問題に關聯してガラスの破斷强度を測定した結果と，それに對する確率論的考察について報告する。

§1. 一定靜的荷重に對する割れ目發生時間の後れ

ガラスにある瞬間以後急に一定張力 f をかけ續けるとき，割れ目が發生するまでの時間の後れ t は試験毎にかなり著しい變動を示す。できるだけ同一に作られた多數の試験片について，この後れの時間が t よりも大きいものの割合分布 $p(t)$ を求めてみると，次に示すような關係がある。[2)]

$$p(t)=\exp(-mt) \qquad (1)$$

このことは，一定の張力 f がかけはじめられてから，t 秒經過した後において，單位時間内に割れ目の發生す