ベクトル時系列の解析法

小河原, 正巳
中央氣象臺氣象研究所

出版情報：統計数理研究. 3 (1/2), pp.46-50, 1949-12-20. Research Association of Statistical Sciences
バージョン：
権利関係：

一. ベクトル時系列の解析法

小 河 原 正 巳

中央氣象臺 氣象研究所

(昭和 23 年 10 月數學會年會講演)
(昭和 24 年 5 月 14 日受　理)

§1. 緒　　論

たとえば天氣豫報の際に或地點における氣壓 $X_1(t)$ を外挿する場合に，これを1次元の時系列として外挿したのでは高い精度の豫想は困難であつて，これに關連をもつ他の因子 $X_2(t)$, ····, $X_k(t)$ を同時に考え，$X_1(t)$ を1つのベクトルの1成分として外挿することによつて豫想の精度を改善することができる。以下にこのような場合の解析法を先ず基礎になる定理から述べようと思う。

n 次元の定常確率過程の理論は H. Cramér[1], J. L. Doob[2] その他[3] によつて研究されているが，時系列解析のためには相關行列函數自體による解析法が必要であつて，それは1次元の場合における H. Wold[4] の方法が形式的には殆んどそのまゝ擴張される部分が多い。

$X(t)=\begin{pmatrix}X_1(t)\\ \vdots\\ X_k(t)\end{pmatrix}$, $(t=\cdots,-1,0,1,2,\cdots)$ を定常ベクトル確率系列とする。$E\{X_\alpha(t)\}=0$, $E\{X_\alpha^2(t)\}=1$, $(\alpha=1,\cdots,k)$ として一般性を失わない。

$$\rho_\tau^{\alpha\beta}=E\{X_\alpha(t)X_\beta(t-\tau)\} \qquad (1.1)$$

とするとき，行列 $P_\tau=(\rho_\tau^{\alpha\beta})$ を $X(t)$ の自己相關行列という。$\rho_\tau^{\alpha\beta}=\rho_{-\tau}^{\beta\alpha}$ は明か。よく知られているように $(\rho_\tau^{\alpha\beta})$ は $X(t)$ のスペクトル行列函數 $(F_{\alpha\beta}(\lambda))$ により

$$(\rho_\tau^{\alpha\beta})=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda\tau}d(F_{\alpha\beta}(\tau)) \qquad (1.2)$$

と表わされ，$(F_{\alpha\beta}(\lambda))=(F_{\alpha\beta}^{(1)}(\lambda))+(F_{\alpha\beta}^{(2)}(\lambda))$, ($F_{\alpha\beta}^{(1)}(\lambda)$ は連續函數, $F_{\alpha\beta}^{(2)}(\lambda)$ は階段函數)なる Lebesgue の分解に對應して $(\rho_\tau^{\alpha\beta})=(\rho_\tau^{(1)\alpha\beta})+(\rho_\tau^{(2)\alpha\beta})$, $X(t)=X^{(1)}(t)+X^{(2)}(t)$ と分解される。$X^{(2)}(t)$ の成分はSlutsky の B_2-過程において特に t が整數値をとるものであつて，このような $X^{(2)}(t)$ を B_2-確率系列とよぶことにしよう。

一般にベクトル X と Y の相關係數は

$$\rho(X,Y)=\frac{Tr.\{(E(YX'))(E(XX'))^{-1}(E(XY'))(E(YY'))^{-1}\}}{\min.(k,l)} \qquad (1.3)$$

で定義される。[5] こゝに X' は X の轉置行列，k, l はそれぞれ X, Y の(本質的)次元數である。0 でない任意の τ に對し $X(t)$ と $X(t-\tau)$ とが無相關のとき $X(t)$ は無自己相關であるという。$\rho(X(t), X(t-\tau))=0$ なるための必要十分條件は $\rho_\tau^{\alpha\beta}=0(\alpha,\beta=1,2,\cdots,k)$ である。任意の s と t につき $X(s)$ と $Y(t)$ が無相關のとき確率系列 $\{X(t)\}$ と $\{Y(t)\}$ は無相關であるという。

§2. 特異確率系列

ある常數行列 $A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots\cdots$ に對し

$$X(t)+A^{(1)}X(t-1)+\cdots\cdots+A^{(h)}X(t-h)=0,$$
$$t=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots,\ A^{(h)}\neq0,\ h\leqq\infty \qquad (2.1)$$

なるとき $X(t)$ は位數 h の特異確率系列という。各成分 $X_\alpha(t)$ が位數 h_α の特異確率系列なら，$X(t)$ は位數 $\max_\alpha(h_\alpha)$ の特異系列である。

定理 1. 定常な特異確率系列は一般に時間に無關係な確率變數[6] と B_2-確率系列との和であり，B_2-確率系列は定常な特異確率系列である。

證明 $h<\infty$ のときは定差方程式 (2.1) を解き定常性の條件を考慮すれば定理の前半を得る。$h=\infty$ のときは (2.1) の最初の n 項までとつた方程式の解を $X^{(n)}(t)$ とすれば $X(t)=\lim st X^{(n)}(t)$ が存在し，これが (2.1) を滿足する B_2-確率系列なることが證明される。後半は各成分について證明すればよい。即ち $X_\alpha(t)$ の n 項までの部分和が滿足する定差方程式を作り $n\to\infty$ とする。

系 1.1. $X(t)$ が位數 h の特異系列なら，その各

成分も特異系列でその位数は $hk-1$ を超えない。

證明　(2.1) の左邊を $L(t)$ とおき，$L(t-\tau)=0$, $(\tau=0,1,\cdots,(k-1)h)$ のうちの $k(k-1)h+1$ 個の方程式から $X_\alpha(t-\tau)(\alpha=2,3,\cdots,k,\ \tau=0,1,\cdots,hk)$ を消去すればよい。

系 1.2.　定常な特異確率系列の自己相關行列 P_τ は B_τ-系列である。從つて $P_\tau\to 0$, $(\tau\to\infty)$

證明　(2.1) の兩邊に右から $X'(t-\tau)$ をかけて平均をとれば

$$P_\tau+A^{(1)}P_{\tau-1}+\cdots+A^{(h)}P_{\tau-h}=0,$$
$$(\tau=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{2.2}$$

となるから，これの解は B_τ-系列である。

特異確率系列の成分の間には相關はない。從つてその自己相關行列は對角行列となる。しかし特異確率系列の分散行列と自己相關行列に對してはエルゴード定理は成立しないからその標本たる特異時系列（特異確率系列は最初若干個の實現値が分ればあとは決定論的に定まる，それが特異時系列である）に對しては各成分の間の時間平均 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\cdot dt$ の意味の相關係數は 0 でないことがある。（積分を和にしても同様）實際 $x_1(t)=\sum c_i\cos(\lambda_i t-\varphi_i)$, $x_2(t)=\sum d_i\cos(\mu_i t-\psi_i)$ $(c_i, d_i, \varphi_i, \psi_i$ は常數) とあれば，その時間平均による相關係數は

$$\gamma(x_1(t),x_2(t-\tau))=\{\sum_u c_{i_u}d_{j_u}\cos(\nu_u\tau-\varphi_{i_u}-\psi_{j_u})\}\Big/\sqrt{(\sum c_i^2)(\sum d_j^2)} \tag{2.3}$$

但し i_u, j_u は $\lambda_{i_u}=\mu_{j_u}=\nu_u\ (u=1,2,\cdots)$ なる如き番號である。たとえば地球の自轉や公轉に關係した現象にはこのような相關が現われる。

§3.　分解定理

定理 2.　定常ベクトル確率系列 $X(t)$ は次のように一意的に分解される。

$$X(t)=X^{(1)}(t)+X^{(2)}(t) \tag{3.1}$$

こゝに $\{X^{(1)}(t)\}$, $\{X^{(2)}(t)\}$ は平均値 0 の無相關な確率系列で

i)　$X^{(1)}(t)$ は連續なスペクトル行列函數をもち

$$X^{(1)}(t)=Y(t)+B^{(1)}Y(t-1)+B^{(2)}Y(t-2)+\cdots \tag{3.2}$$

と表わされる。こゝに $Y(t)$ は無自己相關な定常確率系列で，$X(t-\tau)$ $(\tau=1,2,\cdots)$ とも無相關である。

ii)　$X^{(2)}(t)$ は特異確率系列（不連續スペクトル行列函數をもつもの）で

$$X^{(2)}(t)+A^{(1)}X^{(2)}(t-1)+A^{(2)}X^{(2)}(t-2)+\cdots=0 \tag{3.3}$$

これは次のようにして證明される。

第 1 段　$X(t-\tau)$ $(\tau=1,2,\cdots,i)$ の 1 次結合式 $Z^{(i)}(i=1,2,\cdots)$ を互に無相關で $E\{Z_\alpha^{(i)}\}=0$, $E\{(Z_\alpha^{(i)})^2\}=1$ なる如く作ることができる。

證明　$Z^{(1)}=X(t-1)$,

$$Z^{(2)}=X(t-2)-P_{-1}P_0^{-1}X(t-1),\cdots$$

一般に行列 $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \cdots, Q^{(i-1)}$ を

$$Z^{(i)}=X(t-i)+Q^{(1)}X(t-i+1)+\cdots+Q^{(i-1)}X(t-1)$$

が $Z^{(j)}(j=1,2,\cdots,i-1)$ と無相關となるようにきめることができ，$Z^{(i)}$ に適當な對角行列をかけて $E\{Z_\alpha^{(i)})^2\}=1$ ならしめ得る。

第 2 段　$Y^{(n)}(t)=X(t)+A^{(1)}(n)X(t-1)+\cdots+A^{(n)}(n)X(t-n)$ (3.4)

とおき $E\{Y^{(n)\prime}(t)Y^{(n)}(t)\}=\min.$ ならしめれば $A^{(i)}(n)$ は

$$P^\tau+A^{(1)}(n)P_{\tau-1}+\cdots+A^{(n)}(n)P_{\tau-n}=0$$
$$(\tau=1,2,\cdots,n) \tag{3.5}$$

の解で

$$E\{Y^{(n)\prime}(t)Y^{(n)}(t)\}_{\min.}$$
$$=\frac{1}{|P(n)|}\sum_{\alpha=1}^{k}\begin{vmatrix}1 & P_{-1}^{*\alpha\prime}\cdots\cdots P_{-n}^{*\alpha\prime}\\ P_{-1}^{*\alpha} & P_0\cdots\cdots P_{n-1}\\ & \\ P_{-n}^{*\alpha} & P_{n-1}\cdots\cdots P_0\end{vmatrix} \tag{3.6}$$

但し　$P_{-i}^{*\alpha}=\begin{pmatrix}\rho_{-i}^{1\alpha}\\ \vdots\\ \rho_{-i}^{k\alpha}\end{pmatrix}$,　$P(n)=\begin{pmatrix}P_0\cdots\cdots P_{n-1}\\ \vdots\\ P_{n-1}\cdots P_0\end{pmatrix}$

$\operatorname*{limst}_{n\to\infty} Y^{(n)}(t)=Y(t)$,　$\lim_{n\to\infty}A^{(i)}(n)=A^{(i)}$ が存在して

$$Y(t)=X(t)+A^{(1)}X(t-1)+A^{(2)}X(t-2)+\cdots \tag{3.7}$$

證明　(3.5) は最小自乗法により直ちに導かれ，從つて

$$Y_\alpha^{(n)}(t)=\frac{1}{|P(n)|}\begin{vmatrix}X_\alpha(t) & X'(t-1)\cdots\cdots X'(t-n)\\ P_{-1}^{*\alpha} & P_0\cdots\cdots\cdots\cdots P_{n-1}\\ & \\ P_{-n}^{*\alpha} & P_{n-1}\cdots\cdots\cdots P_0\end{vmatrix} \tag{3.8}$$

故に (3.6) を得る。次に $X(t-i)$ の代りに $Z^{(i)}(t)$ を用い，最小自乗法により

$$Y^{(n)}(t)=X(t)-C^{(1)}Z^{(1)}(t)-\cdots-C^{(n)}Z^{(n)}(t) \tag{3.9}$$

の係数$C^{(i)}=(C^{(i)}_{\alpha\beta})$をきめれば(3.9)は(3.4)と同じベクトルとなり$\bar{\rho}^{\alpha\beta}_i=E\{Z^{(i)}_\alpha(t)Z^{(i)}_\beta(t)\}$とおけば

$$E\{(Y^{(n)}_\alpha(t))^2\}=1-\sum_{i=1}^{n}(\sum_{\beta,\gamma}C^{(i)}_{\alpha\beta}C^{(i)}_{\alpha\gamma}\bar{\rho}^{\beta\gamma}_i) \tag{3.10}$$

右辺括弧内は正値二次形式であるから$\lim_{n\to\infty}E\{(Y^{(n)}_\alpha(t))^2\}=\kappa^2_\alpha\geqq 0$. これより$Y^{(n)}(t)$の収斂が出る。

第3段　$Y(t)$は$X(t-\tau)$　$(\tau=1,2,\cdots\cdots)$と無相關であり，從つて$Z^{(i)}(t)$，$(i=1,2,\cdots\cdots)$とも無相關である。

證明　(3.8)を使えば$E\{Y^{(n)}_\alpha(t)X_\beta(t-\tau)\}=0$, α, $\beta=1,2,\cdots\cdots,k$, $\tau=1,2,\cdots\cdots,n$.

故に　$E\{Y_\alpha(t)X_\beta(t-\tau)\}=\lim_{n\to\infty}E\{Y^{(n)}_\alpha(t)X_\beta(t-\tau)\}=0$

第4段　$\rho(Y(t),X(t))=\frac{1}{k}T_r.(E(YX'))(E(XX'))^{-1}$

$$=\frac{1}{k}T_r((E(XY'))(E(XX'))^{-1}$$

證明　(3.8)と$P(n)$が對稱なることから

$E\{Y^{(n)}_\alpha(t)X_\beta(t)\}=E\{Y^{(n)}_\beta(t)X_\alpha(t)\}$,

故に　$E\{Y_\alpha(t)X_\beta(t)\}=E\{Y_\beta(t)X_\alpha(t)\}$,

從つて　$E\{Y(t)X'(t)\}=E\{X(t)Y'(t)\}$. 又(3.7)から$E\{Y(t)Y'(t)\}=E\{X(t)Y'(t)\}$. 故に(1.3)から證明すべき式を得る。

第5段　$Y(t)$は無自己相關である。

證明　(3.9)により

$$E\{Y^{(n)}_\alpha(t)Y^{(n)}_\beta(t-\tau)\}$$

$$=E\{Y^{(n)}_\alpha(t)[X_\beta(t-\tau)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{k}C^{(i)}_{\beta\gamma}Z^{(i)}_\gamma(t-\tau)]\}$$

$$=E\{Y^{(n)}_\alpha(t)[-\sum_{i=n-\tau+1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{k}C^{(i)}_{\beta\gamma}Z^{(i)}_\gamma(t-\tau)]\}$$

$Y^{(n)}_\beta(t-\tau)$の収斂により右辺$\to 0$　$(n\to\infty)$.

第6段　最小自乘法により

$$X^{(2)}(n,t)=X(t)-B^{(0)}Y(t)-B^{(1)}Y(t-1)-\cdots\cdots-B^{(n)}Y(t-n) \tag{3.11}$$

の係数を定めれば

$B^{(0)}=I$,

$$B^{(i)}=(E(X(t)Y'(t-i)))(E(Y(t-i)Y'(t-i))^{-1},\quad i=1,2,\cdots\cdots \tag{3.12}$$

$\lim_{n\to\infty}X^{(2)}(n,t)=X^{(2)}(t)$が存在して

$$X^{(2)}(t)=X(t)-Y(t)-B^{(1)}Y(t-1)-B^{(2)}Y(t-2)-\cdots\cdots \tag{3.13}$$

證明　略。

第7段　$X^{(1)}(t)=Y(t)+B^{(1)}Y(t-1)+B^{(2)}Y(t-2)+\cdots$

とおけば，$X(t)=X^{(1)}(t)+X^{(2)}(t)$で$\{X^{(1)}(t)\}$と$\{X^{(2)}(t)\}$とは無相關である。

證明　$E\{X^{(2)}(n,t)Y'(t+i)\}=E\{X(t)Y'(t+i)\}=0$ $(i>0)$,　又(3.12)により$E\{X^{(2)}(n,t)Y'(t-i)\}=E\{X(t)Y'(t-i)\}-B^{(i)}E\{Y(t-i)Y'(t-i)\}=0$, $(i\geqq 0)$. 故に$n\to\infty$として$E\{X^{(2)}(t)Y'(t-i)\}=0$, $(i=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$, 從つて$E\{X^{(2)}(t)X^{(1)\prime}(t)\}=\sum_{i=0}^{\infty}E\{X^{(2)}(t)Y'(t-i)\}B^{(i)\prime}=0$

第8段　$X^{(1)}(t)$は不連續スペクトルをもたない。

證明　$E\{X^{(1)}(t)X^{(1)\prime}(t-\tau)\}=\sum_{i=\tau}^{\infty}B^{(i)}E(Y(t)Y'(t))$

$$B^{(i-\tau)\prime}=\sum_{i=\tau}^{\infty}(\sum_{\gamma,\delta=1}^{k}b^{(i)}_{\alpha\gamma}b^{(i-\tau)}_{\beta\delta}v^{\gamma\delta}),$$

但し　$v^{\gamma\delta}=E(Y_\gamma(t)Y'_\delta(t))$.

$E\{X^{(1)}(t)X^{(1)\prime}(t)\}=(\sum_{i=0}^{\infty}(\sum_{\gamma,\delta=1}^{k}b^{(i)}_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}v^{\gamma\delta}))$　は収斂であるから

$$\sum_{i=\tau}^{n}\{\sum_{\gamma,\delta=1}^{k}v^{\gamma\delta}b^{(i)}_{\alpha\gamma}b^{(i-\tau)}_{\beta\delta}\}$$

$$\leqq\sum_{i=\tau}^{n}\{(\sum_{\gamma,\delta=1}^{k}v^{\gamma\delta}b^{(i)}_{\alpha\gamma}b^{(i)}_{\alpha\delta})(\sum_{\gamma,\delta=1}^{k}v^{\gamma\delta}b^{(i-\tau)}_{\beta\gamma}b^{(i-\tau)}_{\beta\delta})\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq\{\sum_{i=\tau}^{n}(\sum_{\gamma,\delta}v^{\gamma\delta}b^{(i)}_{\alpha\gamma}b^{(i)}_{\alpha\delta})\cdot\sum_{i=0}^{n-\tau}(\sum_{\gamma,\delta}v^{\gamma\delta}b^{(i)}_{\beta\gamma}b^{(i)}_{\beta\delta})\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq\{\sum_{i=\tau}^{\infty}(\sum_{\gamma,\delta}v^{\gamma\delta}b^{(i)}_{\alpha\gamma}b^{(i)}_{\alpha\delta})\cdot E\{X^{(1)}_\beta(t)X^{(1)\prime}_\beta(t)\}\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\to 0\quad(\tau\to\infty).$$

故に$E\{X^{(1)}(t)X^{(1)\prime}(t-\tau)\}\to 0$, $(\tau\to\infty)$. 從つて$\rho(X^{(1)}(t),X^{(1)}(t-\tau))\to 0$, $(\tau\to\infty)$. 故に$X^{(1)}(t)$は不連續スペクトルを持たない。(卽ち連續スペクトルだけをもつ)。

第9段　$X^{(2)}(t)$は特異確率系列である。

證明　一般に$E\{X'X\}$を$||X||^2$とかけば，第2段により，任意の$\varepsilon>0$に對しnを十分大きく選び，$A^{(1)},A^{(2)},\cdots\cdots,A^{(n)}$を適當にとれば

$$\kappa^2\leqq||X(t)+A^{(1)}X(t-1)+\cdots\cdots+A^{(n)}X(t-n)||<\kappa^2+\varepsilon,\quad 但し\ \kappa^2=\sum_{\alpha=1}^{k}\kappa_\alpha^2.$$

故に　$\kappa^2\leqq||X^{(1)}(t)+A^{(1)}X^{(1)}(t-1)+\cdots\cdots+A^{(n)}X^{(1)}(t-n)||+||X^{(2)}(t)+A^{(1)}X^{(2)}(t-1)+\cdots$

$\cdots+A^{(n)}X^{(2)}(t-n)\|<\kappa^2+\varepsilon$

しかるに如何なる $D^{(1)},\cdots,D^{(m)}$ に対しても

$$\|Y(t)+D^{(1)}Y(t-1)+\cdots+D^{(m)}Y(t-m)\|\geqq\|Y(t)\|=\kappa^2.$$

故に
$$\begin{aligned}&\|X^{(1)}(t)+A^{(1)}X^{(1)}(t-1)+\cdots+A^{(n)}X^{(1)}(t-n)\|\\&=\lim_{m\to\infty}\|X^{(1)}(m,t)+A^{(1)}X^{(1)}(m,t-1)+\cdots+A^{(n)}X^{(1)}(m,t-n)\|\\&=\lim_{m\to\infty}\|Y(t)+D^{(1)}Y(t-1)+\cdots+D^{(m+n)}Y(t-m-n)\|\geqq\kappa^2\end{aligned}$$

故に $0<\|X^{(2)}(t)+A^{(1)}X^{(2)}(t-1)+\cdots+A^{(n)}X^{(2)}(t-n)\|<\varepsilon$

故に $X^{(2)}(t)+A^{(1)}X^{(2)}(t-1)+A^{(2)}X^{(2)}(t-2)+\cdots=0$

(證明終)

系 2.1. $K_\alpha^2=\kappa_\alpha^2+\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{\beta\beta'} b^{(i)}_{\alpha\beta}b^{(i)}_{\alpha\beta'}v^{\beta\beta'})$ とおけば，一般に $0\leqq K_\alpha^2\leqq 1$. 特に $K_\alpha^2=1$ ($\alpha=1,2,\cdots,k$) ならば $X(t)\equiv X^{(1)}(t)$, $X^{(2)}(t)\equiv 0$, $\kappa_\alpha^2=1$ ($\alpha=1,2,\cdots,k$) ならば $X(t)\equiv Y(t)$, $\kappa_\alpha^2=0$ ($\alpha=1,2,\cdots,k$) ならば $X(t)\equiv X^{(2)}(t)$, $X^{(1)}(t)\equiv 0$.

證明 $K_\alpha^2=E\{(X^{(1)}_\alpha(t))^2\}$ から明か。

系 2.2. $\kappa_\alpha^2>0,\alpha=1,2,\cdots,\gamma$, $\kappa_\beta^2=0,\beta=\gamma+1,\cdots,k$ のときは $B^{(i)}$ は矩形行列となるが，$X^{(1)}(t)$, $X^{(2)}(t)$ は一般には k 次元である。(この場合にも二三の修飾により定理の證明はそのまゝ成立つ。

系 2.3. $X(t)$ が特異確率系列なるためには $\kappa_\alpha=0$ ($\alpha=1,2,\cdots,k$) なることが必要且十分である。

系 2.4. κ_α^2 の少くとも1つが0でなければ，$X(t)\equiv X^{(1)}(t)$, $X^{(2)}(t)\equiv 0$ となり得る。

證明 k 次元の $X(t)$ が $\gamma(\geqq 1)$ 次元の $Y(t-i)$ $i=0,1,\cdots,n$ ($\gamma n\geqq k$) によつて表わされ得るからである。

§4. ベクトル時系列の解析法と外挿公式

ベクトル時系列

$$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_k(t)\end{pmatrix},\quad t=1,2,\cdots,N \tag{4.1}$$

が與えられたとき，これを定常化するには各成分について行えばよい。[7] 但しこゝに定常時系列とは定常確率系列の標本と考えられる時系列をいう。定常化された時系列に含まれる特異成分（ベクトル値周期函数）を検出するには各成分のコレログラムによる。($\gamma^{\alpha\alpha}_\tau\to 0$, $\tau\to\infty$)。異る成分の間のコレログラム $\gamma^{\alpha\beta}_\tau$ に減衰しない周期性が現われるときは，それは $x_\alpha(t)$ と $x_\beta(t)$ とに共通な周期である。(§2を参照)。特異成分の分離は各成分についてペリオドグラムの方法による。

(1) 系列相関行列が $R_\tau=(\gamma^{\alpha\beta}_\tau)\to 0$ ($\tau\to\infty$) 但し $R_\tau\neq 0$ ($\tau>\tau_0$) なるときは母集団系列として

$$X(t)+A^{(1)}X(t-1)+\cdots+A^{(h)}X(t-h)=Y(t) \tag{4.2}$$

を想定することができる。

$$R_\tau+A^{(1)}R_{\tau-1}+\cdots+A^{(h)}R_{\tau-h}=0,\quad (\tau=1,2,\cdots,h) \tag{4.3}$$

を解いて $A^{(i)}$ を求め

$$P_\tau+A^{(1)}P_{\tau-1}+\cdots+A^{(h)}P_{\tau-h}=0,\quad (\tau=h+1,\cdots) \tag{4.4}$$

但し $P_\tau=R_\tau$ ($\tau=1,2,\cdots,h$)，を解いて標本誤差の範囲内で $P_\tau=R_\tau$ ($\tau=h+1,\cdots$) となるように最初の h を定める。と (4.2)

$$X(t)=Y(t)+B^{(1)}Y(t-1)+\cdots \tag{4.5}$$

とから $B^{(i)}$ を求むべき方程式

$$B^{(i)}+A^{(1)}B^{(i-1)}+\cdots+A^{(h)}B^{(i-h)}=0\ (i=1,2,\cdots),\quad \text{但し } B^{(0)}=I,\ B^{(-i)}=0,\ (i>0) \tag{4.6}$$

を得る。$Y(t-i)$ の標本値 $y(t-i)$ は (4.2) から求められ，外挿値は條件附確率變數

$$X^{(c)}(t+s)=Y(t+s)+B^{(1)}Y(t+s-1)+\cdots+B^{(s-1)}Y(t+1)+B^{(s)}y(t)+B^{(s+1)}y(t-1)+\cdots \tag{4.7}$$

の平均値

$$\begin{aligned}F_s=F\{X^{(c)}(t+s)\}&=B^{(s)}y(t)+B^{(s+1)}y(t-1)+\cdots\\&=-A^{(1)}F_{s-1}-A^{(2)}F_{s-2}-\cdots-A^{(s-1)}F_1-A^{(s)}x(t)-A^{(s+1)}x(t-1)-\cdots\end{aligned} \tag{4.8}$$

で與えられる。(4.7) の分散行列は

$$(\mu^{\alpha\beta}_s)=\Big(\sum_{i=0}^{s-1}\sum_{\gamma,\delta=1}^{k} b^{(i)}_{\alpha\gamma}b^{(i)}_{\beta\delta}v^{\gamma\delta}\Big) \tag{4.9}$$

$x_\alpha(t)$ の分散を s_α^2 とすれば

$$v^{\alpha\beta}=\sum_{i,j=0}^{h}\sum_{\mu,\nu=1}^{k} a^{(i)}_{\alpha\mu}a^{(j)}_{\beta\nu}s_\mu s_\nu r^{\mu\nu}_{j-i} \tag{4.10}$$

直相関係数による外挿方式，例えば

$$\begin{pmatrix}X_1(t)\\X_2(t)\\X_3(t)\end{pmatrix}+\sum_i\begin{pmatrix}0&a^{(i)}_{12}&a^{(i)}_{13}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1(t-i)\\X_2(t-i)\\X_3(t-i)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Y_1(t)\\Y_2(t)\\Y_3(t)\end{pmatrix} \tag{4.11}$$

は明かに (4.2) の特別の場合である。

(2) $R_\tau \equiv 0$ $(\tau > h)$ とみなされる場合には

$$X(t) = Y(t) + B^{(1)}Y(t-1) + \cdots + B^{(h)}Y(t-h) \tag{4.12}$$

を採用する。

$$E\{X(t)X'(t-i)\}$$
$$= B^{(i)}(E(YY')) + B^{(i+1)}(E(YY'))B^{(1)\prime} + \cdots\cdots + B^{(h)}(E(YY'))B^{(h-i)\prime} \quad (i=0, 1, 2, \cdots\cdots, h) \tag{4.13}$$

から未知数 $B^{(i)}$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, h)$ 及び $E(YY')$ を求めることができる。$A^{(i)}$ は

$$A^{(i)} + B^{(1)}A^{(i-1)} + \cdots\cdots + B^{(h)}A^{(i-h)} = 0 \quad (i=1, 2, \cdots\cdots) \tag{4.12}$$

但し $A^{(0)}=I$, $A^{(-i)}=0$ $(i>0)$, から求められる。以下 (1) の場合と殆んど同様にして外挿も行われる。

文献及び註

1) H. Cramér　On the theory of Stationary Random Processes, *Ann. Math* 41 (1940).
2) J. L. Doob　The Elementary Gaussian Process, *Ann. Math. Stat.* 15 (1941).
3) G. Maruyama・The Harmonic Analysis of Stationary Stochastic Processes, 九大理學部研究報告 (1947).
4) H. Wold　A Study in the Analysis of Stationary Time Series (1938).
5) 小河原正巳：次元の異るベクトル確率變量の相關係數について，數學第1卷第3號 (1948).
6) Doob のいう $M(1)$ 過程に相當するもの。
7) 日本應用力學會編，應用統計學，第7章 (近刊)。

逐次抜取検査方式の一例

——棄却域を設けない場合——

森　口　繁　一

東京大學第一工學部應用數學教室

(昭和24年5月14日受理)

§1. まえがき　編集子から，急いで何か書くようにと頼まれたので，ちょうど手許にあった1つの例題を述べて，ご參考に供し，またご教示を得ることとしたい。問題はある製品の抜取檢査である。檢査された品物は良品と不良品とに分けられる（いわゆる“屬性試驗”）。いままでの經驗によると，仕切の不良率は10％ぐらいが普通であり，ときたま30％ぐらいのものも出るという。そして30％以上の不良率をもつ仕切は取引きしたくないのだそうである。ところで現在この品物の檢査は1種の2回抜取檢査方式を用いて行うことになつている。これを新しい逐次抜取檢査方式に改めるにはどうすればよいか？　それがわれわれに與えられた問題である。

§2. 現行の檢査方式　現行の方式は大體次ぎの通りである：—(1) まず5個を拔き取つて試驗し，それが全部良品ならば仕切を合格とする。(2) いまの5個のうちに不良品があれば，さらに30個を拔き取つて試驗する。その30個のうちの不良品が1個以下ならば仕切を合格とする。(3) いまの30個のなかの不良品が2個以上あれば，全數檢査を行う。

檢査中に發見された不良品の處置については明確な記述がないが，多分すべて良品ととりかえるのであろう。そして仕切は結局つねに採擇されるので，本來の意味での生産者危險は0であるといわねばならない。消費者危險というものも，本來の意味では考えにくい。しかし，もしも全數檢査を受けることなく採擇される確率 L_p を仕切不良率 p に對して記述するならば，それはある意味において檢査方式の特性を表わすものと見られよう。（この曲線を“OC曲線”と呼ぼう。）

われわれの場合，$L_p=(1-p)^5+\{1-(1-p)^5\}\{(1-p)^{30}+30p(1-p)^{29}\}$ で，OC曲線は第2圖の點線のようになる。ここで注意すべきは，$p_1=0.10$ に對