

ベクトル時系列の解析法

小河原, 正巳
中央気象臺気象研究所

<https://hdl.handle.net/2324/12938>

出版情報 : 統計数理研究. 3 (1/2), pp.46-50, 1949-12-20. Research Association of Statistical Sciences

バージョン :

権利関係 :

ベクトル時系列の解析法

小河原正巳

中央氣象臺 氣象研究所

(昭和 23 年 10 月 數學合年會講演)
(昭和 24 年 5 月 14 日 受理)

§ 1. 総論

たとえば天気予報の際に或地點における気圧 $X_1(t)$ を外挿する場合に、これを 1 次元の時系列として外挿したのでは高い精度の豫想は困難であつて、これに関連をもつ他の因子 $X_2(t), \dots, X_k(t)$ を同時に考え、 $X_1(t)$ を 1 つのベクトルの 1 成分として外挿することによつて豫想の精度を改善することができる。以下にこのような場合の解析法を先づ基礎になる定理から述べようと思う。

n 次元の定常確率過程の理論は H. Cramér¹⁾, J. L. Doob²⁾ その他³⁾ によつて研究されているが、時系列解析のためには相関行列函数自身による解析法が必要であつて、それは 1 次元の場合における H. Wold⁴⁾ の方法が形式的には殆んどそのまま擴張される部分が多い。

$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_k(t) \end{pmatrix}$, ($t = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$) を定常ベクトル確率系列とする。 $E\{X_\alpha(t)\} = 0$, $E\{X_\alpha(t)X_\beta(t)\} = 1$, ($\alpha = 1, \dots, k$) として一般性を失わない。

$$\rho_r^{\alpha\beta} = E\{X_\alpha(t)X_\beta(t-r)\} \quad (1.1)$$

とするとき、行列 $P_r = (\rho_r^{\alpha\beta})$ を $X(t)$ の自己相関行列という。 $\rho_r^{\alpha\beta} = \rho_{-r}^{\beta\alpha}$ は明か。よく知られているように $(\rho_r^{\alpha\beta})$ は $X(t)$ のスペクトル行列函数 $(F_{\alpha\beta}(\lambda))$ により

$$(\rho_r^{\alpha\beta}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda r} d(F_{\alpha\beta}(\lambda)) \quad (1.2)$$

と表わされ、 $(F_{\alpha\beta}(\lambda)) = (F_{\alpha\beta}^{(1)}(\lambda)) + (F_{\alpha\beta}^{(2)}(\lambda))$, $(F_{\alpha\beta}^{(1)}(\lambda))$ は逆数函数、 $(F_{\alpha\beta}^{(2)}(\lambda))$ は階段函数なる Lebesgue の分解に對照して $(\rho_r^{\alpha\beta}) = (\rho_r^{(1)\alpha\beta}) + (\rho_r^{(2)\alpha\beta})$, $X(t) = X^{(1)}(t) + X^{(2)}(t)$ と分解される。 $X^{(2)}(t)$ の成分は Slutsky の B_r -過程において特に t が整数値をとるものであつて、このような $X^{(2)}(t)$ を B_r -確率系列

とよぶことにしよう。

一般にベクトル X と Y の相関係数は

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Tr}\{[(E\{YX'\})](E\{XX'\})^{-1}(E\{XY'\})[(E\{YY'\})^{-1}]\}}{\text{min.}(k, l)} \quad (1.3)$$

で定義される。⁵⁾ こゝに X' は X の轉置行列、 k, l はそれぞれ X, Y の(本質的)次元数である。0 でない任意の τ に對し $X(t)$ と $X(t-\tau)$ とが無相関のとき $X(t)$ は無自己相関であるという。 $\rho(X(t), X(t-\tau)) = 0$ なるための必要十分條件は $\rho_r^{\alpha\beta} = 0$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, k$) である。任意の s と t につき $X(s)$ と $Y(t)$ が無相関のとき確率系列 $\{X(t)\}$ と $\{Y(t)\}$ は無相関であるという。

§ 2. 特異確率系列

ある常數行列 $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$ に對し

$$X(t) + A^{(1)}X(t-1) + \dots + A^{(h)}X(t-h) = 0, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, A^{(h)} \neq 0, h \leq \infty \quad (2.1)$$

なるとき $X(t)$ は位數 h の特異確率系列という。各成分 $X_\alpha(t)$ が位數 h_α の特異確率系列なら、 $X(t)$ は位數 $\max_\alpha(h_\alpha)$ の特異系列である。

定理 1. 定常な特異確率系列は一般に時間に無関係な確率變數⁶⁾ と B_r -確率系列との和であり、 B_r -確率系列は定常な特異確率系列である。

證明 $h < \infty$ のときは定差方程式 (2.1) を解き定常性の條件を考慮すれば定理の前半を得る。 $h = \infty$ のときは (2.1) の最初の n 項までとつた方程式の解を $X^{(n)}(t)$ とすれば $X(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} X^{(n)}(t)$ が存在し、これが (2.1) を満足する B_r -確率系列なることが證明される。後半は各成分について證明すればよい。即ち $X_\alpha(t)$ の n 項までの部分和が満足する定差方程式を作り $n \rightarrow \infty$ とする。

系 1.1. $X(t)$ が位數 h の特異系列なら、その各

成分も特異系列でその位数は $h(k-1)$ を超えない。

証明 (2.1) の左邊を $L(t)$ とおき, $L(t-\tau)=0$, ($\tau=0, 1, \dots, (k-1)h$) のうちの $k(k-1)h+1$ 個の方程式から $X_\alpha(t-\tau)$ ($\alpha=2, 3, \dots, k, \tau=0, 1, \dots, h$) を消去すればよい。

系 1.2. 定常な特異確率系列の自己相関行列 P_τ は B_T -系列である。従つて $P_\tau \rightarrow 0$, ($\tau \rightarrow \infty$)

証明 (2.1) の兩邊に右から $X'(t-\tau)$ をかけて平均をとれば

$$P_\tau + A^{(1)}P_{\tau-1} + \dots + A^{(k)}P_{\tau-k} = 0, \quad (\tau=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.2)$$

となるから, これの解は B_T -系列である。

特異確率系列の成分の間には相関はない。従つてその自己相関行列は対角行列となる。しかし特異確率系列の分散行列と自己相関行列に対してはエルゴード定理は成立しないからその標本たる特異時系列 (特異確率系列は最初若干個の實現値が分ればあとは決定論的に定まる, それが特異時系列である) に対しては各成分の間の時間平均 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cdot dt$ の意味の相関係数は 0 でないことがある。(積分を和にしても同様) 実際

$x_1(t) = \sum c_i \cos(\lambda_i t - \varphi_i)$, $x_2(t) = \sum d_j \cos(\mu_j t - \psi_j)$ ($c_i, d_j, \varphi_i, \psi_j$ は常数) とあれば, その時間平均による相関係数は

$$r(x_1(t), x_2(t-\tau)) = \frac{\sum_{i,j} c_i d_j \cos(\nu_{ij} \tau - \varphi_{ij} - \psi_{ij})}{\sqrt{(\sum c_i^2)(\sum d_j^2)}} \quad (2.3)$$

但し i_u, j_u は $\lambda_{i_u} = \mu_{j_u} = \nu_u$ ($u=1, 2, \dots$) なる如き番號である。たとえば地球の自轉や公轉に關係した現象にはこのような相関が現われる。

§ 3. 分解定理

定理 2. 定常ベクトル確率系列 $X(t)$ は次のように一意的に分解される。

$$X(t) = X^{(1)}(t) + X^{(2)}(t) \quad (3.1)$$

こゝに $\{X^{(1)}(t)\}$, $\{X^{(2)}(t)\}$ は平均値 0 の無相関な確率系列で

$$i) \quad X^{(1)}(t) \text{ は連続なスペクトル行列函数をもち} \\ X^{(1)}(t) = Y(t) + B^{(1)}Y(t-1) + B^{(2)}Y(t-2) + \dots \quad (3.2)$$

と表わされる。こゝに $Y(t)$ は自己相関な定常確率系列で, $X(t-\tau)$ ($\tau=1, 2, \dots$) とは無相関である。

ii) $X^{(2)}(t)$ は特異確率系列 (不連続スペクトル行列函数をもつもの) で

$$X^{(2)}(t) + A^{(1)}X^{(2)}(t-1) + A^{(2)}X^{(2)}(t-2) + \dots = 0 \quad (3.3)$$

これは次のようにして證明される。

第 1 段 $X(t-\tau)$ ($\tau=1, 2, \dots, t$) の 1 次結合式 $Z^{(i)}(i=1, 2, \dots)$ を互に無相関で $E\{Z_\alpha^{(i)}\}=0$, $E\{(Z_\alpha^{(i)})^2\}=1$ なる如く作ることができる。

証明 $Z^{(1)}=X(t-1)$,

$$Z^{(2)}=X(t-2) - P_{-1}P_0^{-1}X(t-1), \dots$$

一般に行列 $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, Q^{(i-1)}$ を

$$Z^{(i)} = X(t-i) + Q^{(1)}X(t-i+1) + \dots + Q^{(i-1)}X(t-1)$$

が $Z^{(j)}, j=1, 2, \dots, i-1$ と無相関となるように定めることができ, $Z^{(i)}$ に適當な対角行列をかけて $E\{(Z_\alpha^{(i)})^2\}=1$ ならしめ得る。

$$\text{第 2 段 } Y^{(n)}(t) = X(t) + A^{(1)}(n)X(t-1) + \dots + A^{(n)}(n)X(t-n) \quad (3.4)$$

とおき $E\{Y^{(n)}(t)Y^{(n)}(t)\} = \min$. ならしめれば $A^{(i)}(n)$ は

$$P_\tau + A^{(1)}(n)P_{\tau-1} + \dots + A^{(n)}(n)P_{\tau-n} = 0 \quad (\tau=1, 2, \dots, n) \quad (3.5)$$

の解で

$$E\{Y^{(n)}(t)Y^{(n)}(t)\}_{\min} \\ = \frac{1}{|P(n)|} \sum_{\alpha=1}^k \begin{vmatrix} 1 & P_{-1}^{*\alpha} & \dots & P_{-n}^{*\alpha} \\ P_{-1}^{*\alpha} & P_0 & \dots & P_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{-n}^{*\alpha} & P_{n-1} & \dots & P_0 \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

$$\text{但し } P_{-i}^{*\alpha} = \begin{pmatrix} \rho_{-i}^{\alpha} \\ \vdots \\ \rho_{-i}^{\alpha} \end{pmatrix}, \quad P(n) = \begin{pmatrix} P_0 & \dots & P_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n-1} & \dots & P_0 \end{pmatrix}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} Y^{(n)}(t) = Y(t)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{(i)}(n) = A^{(i)}$ が存在して

$$Y(t) = X(t) + A^{(1)}X(t-1) + A^{(2)}X(t-2) + \dots \quad (3.7)$$

証明 (3.5) は最小自乗法により直ちに導かれ, 従つて

$$Y_\alpha^{(n)}(t) = \frac{1}{|P(n)|} \begin{vmatrix} X_\alpha(t) & X'(t-1) & \dots & X'(t-n) \\ P_{-1}^{*\alpha} & P_0 & \dots & P_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{-n}^{*\alpha} & P_{n-1} & \dots & P_0 \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

故に (3.6) を得る。次に $X(t-1)$ の代りに $Z^{(i)}(t)$ を用い, 最小自乗法により

$$Y^{(n)}(t) = X(t) - C^{(1)}Z^{(1)}(t) - \dots - C^{(n)}Z^{(n)}(t) \quad (3.9)$$

の係数 $C^{(i)} = (C_{\alpha\beta}^{(i)})$ をきめれば (3.4) と同じベクトルとなり $\bar{p}^{\alpha\beta} = E\{Z_{\alpha}^{(i)}(t)Z_{\beta}^{(i)}(t)\}$ とおけば

$$E\{(Y_{\alpha}^{(n)}(t))^2\} = 1 - \sum_{i=1}^n \sum_{\beta,\gamma} C_{\alpha\beta}^{(i)} C_{\alpha\gamma}^{(i)} \bar{p}^{\beta\gamma} \quad (3.10)$$

右邊括弧内は正值二次形式であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{(Y_{\alpha}^{(n)}(t))^2\} = \kappa_{\alpha}^2 \geq 0$. これより $Y^{(n)}(t)$ の收斂が出る。

第3段 $Y(t)$ は $X(t-\tau)$ ($\tau=1, 2, \dots$) と無相関であり、従つて $Z^{(i)}(t)$, ($i=1, 2, \dots$) とも無相関である。

證明 (3.8) を使えば $E\{Y_{\alpha}^{(n)}(t)X_{\beta}(t-\tau)\} = 0$, $\alpha, \beta=1, 2, \dots, k, \tau=1, 2, \dots, n$.

故に $E\{Y_{\alpha}(t)X_{\beta}(t-\tau)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} E\{Y_{\alpha}^{(n)}(t)X_{\beta}(t-\tau)\} = 0$

$$\begin{aligned} \text{第4段 } \rho(Y(t), X(t)) &= \frac{1}{k} T_r \cdot (E(YX'))(E(XX'))^{-1} \\ &= \frac{1}{k} T_r \cdot (E(XX'))(E(XX'))^{-1} \end{aligned}$$

證明 (3.8) と $P(n)$ が対称なることから

$$E\{Y_{\alpha}^{(n)}(t)X_{\beta}(t)\} = E\{Y_{\beta}^{(n)}(t)X_{\alpha}(t)\},$$

故に $E\{Y_{\alpha}(t)X_{\beta}(t)\} = E\{Y_{\beta}(t)X_{\alpha}(t)\}$,

従つて $E\{Y(t)X'(t)\} = E\{X(t)Y'(t)\}$. 又 (3.7) から $E\{Y(t)Y'(t)\} = E\{X(t)Y'(t)\}$. 故に (1.3) から

証明すべき式を得る。

第5段 $Y(t)$ は無自己相関である。

證明 (3.9) により

$$\begin{aligned} E\{Y_{\alpha}^{(n)}(t)Y_{\beta}^{(n)}(t-\tau)\} &= E\{Y_{\alpha}^{(n)}(t)[X_{\beta}(t-\tau) - \sum_{i=1}^n \sum_{\gamma} C_{\beta\gamma}^{(i)} Z_{\gamma}^{(i)}(t-\tau)]\} \\ &= E\{Y_{\alpha}^{(n)}(t)[- \sum_{i=n-\tau+1}^n \sum_{\gamma} C_{\beta\gamma}^{(i)} Z_{\gamma}^{(i)}(t-\tau)]\} \end{aligned}$$

$Y_{\beta}^{(n)}(t-\tau)$ の收斂により 右邊 $\rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

第6段 最小自乗法により

$$X^{(2)}(n, t) = X(t) - B^{(1)}Y(t) - B^{(2)}Y(t-1) - \dots - B^{(n)}Y(t-n) \quad (3.11)$$

の係数を定めれば

$$\begin{aligned} B^{(0)} &= I, \\ B^{(i)} &= (E\{X(t)Y'(t-i)\})(E\{Y(t-i)Y'(t-i)\})^{-1}, \\ i &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} X^{(2)}(n, t) = X^{(2)}(t)$ が存在して

$$X^{(2)}(t) = X(t) - Y(t) - B^{(1)}Y(t-1)$$

$$- B^{(2)}Y(t-2) - \dots \quad (3.13)$$

證明 略。

$$\begin{aligned} \text{第7段 } X^{(1)}(t) &= Y(t) + B^{(1)}Y(t-1) \\ &\quad + B^{(2)}Y(t-2) + \dots \end{aligned}$$

とおけば, $X(t) = X^{(1)}(t) + X^{(2)}(t)$ で $\{X^{(1)}(t)\}$ と $\{X^{(2)}(t)\}$ とは無相関である。

證明 $E\{X^{(2)}(n, t)Y'(t+i)\} = E\{X(t)Y'(t+i)\} = 0$ ($i > 0$), 又 (3.12) により $E\{X^{(2)}(n, t)Y'(t-i)\} = E\{X(t)Y'(t-i)\} - B^{(1)}E\{Y(t-i)Y'(t-i)\} = 0$, ($i \geq 1$). 故に $n \rightarrow \infty$ として $E\{X^{(2)}(t)Y'(t-i)\} = 0$, ($i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 従つて $E\{X^{(2)}(t)X^{(1)}(t)\} = \sum_{i=0}^{\infty} E\{X^{(2)}(t)Y'(t-i)\}B^{(i)} = 0$

第8段 $X^{(1)}(t)$ は不連続スペクトルをもたない。

$$\begin{aligned} \text{證明 } E\{X^{(1)}(t)X^{(1)}(t-\tau)\} &= \sum_{i=\tau}^{\infty} B^{(i)}E\{Y(t)Y'(t)\} \\ B^{(i-\tau)} &= \sum_{i=\tau}^{\infty} \left(\sum_{\gamma, \delta=1}^k b_{\alpha\gamma}^{(i)} b_{\beta\delta}^{(i-\tau)} v^{\tau} \right)^2, \end{aligned}$$

但し $v^{\tau} = E\{Y_{\tau}(t)Y'_{\tau}(t)\}$.

$E\{X^{(1)}(t)X^{(1)}(t)\} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{\gamma, \delta=1}^k b_{\alpha\gamma}^{(i)} b_{\beta\delta}^{(i)} v^{\tau} \right) \right)$ は收斂であるから

$$\begin{aligned} & \sum_{i=\tau}^n \left\{ \sum_{\gamma, \delta=1}^k v^{\tau} b_{\alpha\gamma}^{(i)} b_{\beta\delta}^{(i-\tau)} \right\} \\ & \leq \sum_{i=\tau}^n \left\{ \left(\sum_{\gamma, \delta=1}^k v^{\tau} b_{\alpha\gamma}^{(i)} b_{\alpha\delta}^{(i)} \right) \left(\sum_{\gamma, \delta=1}^k v^{\tau} b_{\beta\gamma}^{(i-\tau)} b_{\beta\delta}^{(i-\tau)} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\sum_{i=\tau}^n \left(\sum_{\gamma, \delta=1}^k v^{\tau} b_{\alpha\gamma}^{(i)} b_{\alpha\delta}^{(i)} \right) \cdot \sum_{i=0}^{n-\tau} \left(\sum_{\gamma, \delta=1}^k v^{\tau} b_{\beta\gamma}^{(i)} b_{\beta\delta}^{(i)} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\sum_{i=\tau}^n \left(\sum_{\gamma, \delta=1}^k v^{\tau} b_{\alpha\gamma}^{(i)} b_{\alpha\delta}^{(i)} \right) \cdot E\{X_{\beta}^{(1)}(t)X_{\beta}^{(1)}(t)\} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \rightarrow 0 \quad (\tau \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

故に $E\{X^{(1)}(t)X^{(1)}(t-\tau)\} \rightarrow 0$, ($\tau \rightarrow \infty$). 従つて $\rho(X^{(1)}(t), X^{(1)}(t-\tau)) \rightarrow 0$, ($\tau \rightarrow \infty$). 故に $X^{(1)}(t)$ は不連続スペクトルを持たない。(即ち逆数スペクトルだけをもつ)。

第9段 $X^{(2)}(t)$ は特異確率系列である。

證明 一般に $E\{X'X\}$ を $\|X\|^2$ とかけば, 第2段により, 任意の $\epsilon > 0$ に対し n を十分大きく選び, $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$ を適當にとれば

$$\begin{aligned} \kappa^2 &\leq \|X(t) + A^{(1)}X(t-1) + \dots + A^{(n)}X(t-n)\|^2 \\ &< \kappa^2 + \epsilon, \quad \text{但し } \kappa^2 = \sum_{\alpha=1}^k \kappa_{\alpha}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故に } \kappa^2 &\leq \|X^{(1)}(t) + A^{(1)}X^{(1)}(t-1) + \dots \\ &\quad + A^{(n)}X^{(1)}(t-n)\|^2 \\ &\quad + \|X^{(2)}(t) + A^{(1)}X^{(2)}(t-1) + \dots \end{aligned}$$

$$\dots + A^{(n)}X^{(2)}(t-n) \|\leq \kappa^2 +$$

しかるに如何なる $D^{(1)}, \dots, D^{(m)}$ に対して

$$\|Y(t) + D^{(1)}Y(t-1) + \dots + D^{(m)}Y(t-m)\| \geq \|Y(t)\| = \kappa^2.$$

故に $\|X^{(1)}(t) + A^{(1)}X^{(1)}(t-1) + \dots$

$$\begin{aligned} & \dots + A^{(n)}X^{(1)}(t-n) \| \\ & = \lim_{m \rightarrow \infty} \|X^{(1)}(m, t) + A^{(1)}X^{(1)}(m, t-1) + \dots \\ & \dots + A^{(m)}X^{(1)}(m, t-m)\| \\ & = \lim_{m \rightarrow \infty} \|Y(t) + D^{(1)}Y(t-1) + \dots \\ & \dots + D^{(m+n)}Y(t-m-n)\| \geq \kappa^2 \end{aligned}$$

故に $0 < \|X^{(2)}(t) + A^{(1)}X^{(2)}(t-1) + \dots$

$$\dots + A^{(n)}X^{(2)}(t-n) \| < \kappa$$

故に $X^{(2)}(t) + A^{(1)}X^{(2)}(t-1) + A^{(2)}X^{(2)}(t-2) + \dots = 0$

(証明終)

系 2.1. $K_{\alpha^2} = \kappa_{\alpha^2} + \sum_{i=1}^n (\sum_{\beta \in B} b_{\alpha\beta}^{(i)} b_{\alpha\beta}^{(i)}, v^{\beta\beta'})$ とおけ

ば、一般に $0 \leq K_{\alpha^2} \leq 1$. 特に $K_{\alpha^2} = 1$ ($\alpha = 1, 2, \dots, k$) ならば $X(t) \equiv X^{(1)}(t)$, $X^{(2)}(t) \equiv 0$, $\kappa_{\alpha^2} = 1$ ($\alpha = 1, 2, \dots, k$) なら $X(t) \equiv Y(t)$, $\kappa_{\alpha^2} = 0$ ($\alpha = 1, 2, \dots, k$) ならば $X(t) \equiv X^{(2)}(t)$, $X^{(1)}(t) \equiv 0$.

証明 $K_{\alpha^2} = E\{(X_{\alpha}^{(1)}(t))^2\}$ から明か.

系 2.2. $\kappa_{\alpha^2} > 0$, $\alpha = 1, 2, \dots, j$, $\kappa_{\beta^2} = 0$, $\beta = j+1, \dots, k$ のときは $B^{(i)}$ は矩形行列となるが, $X^{(1)}(t)$, $X^{(2)}(t)$ は一般には k 次元である。(この場合にも二三の修飾により定理の証明はそのまゝ成立つ。

系 2.3. $X(t)$ が特異確率系列なるためには $\kappa_{\alpha} = 0$ ($\alpha = 1, 2, \dots, k$) なることが必要且十分である。

系 2.4. κ_{α^2} の少くとも 1 つが 0 でなければ, $X(t) \equiv X^{(1)}(t)$, $X^{(2)}(t) \equiv 0$ となり得る。

証明 k 次元の $X(t)$ が $r (\geq 1)$ 次元の $Y(t-i)$ ($i = 0, 1, \dots, n (rn \geq k)$) によつて表わされ得るからである。

§ 4. ベクトル時系列の解析法と外挿公式

ベクトル時系列

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}, \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

が與えられたとき、これを定常化するには各成分について行えばよい。但し、こゝに定常時系列とは定常確率系列の標本と考えられる時系列をいう。定常化された時系列に含まれる特異成分(ベクトル振幅関数)を検出するには各成分のコログラムによる。

($\gamma_{\tau}^{\alpha\beta} \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty$)。異なる成分間のコログラム $\gamma_{\tau}^{\alpha\beta}$ に減衰しない周期性が現われるときは、それは $x_{\alpha}(t)$ と $x_{\beta}(t)$ とに共通な周波数である。(§ 2 を参照)。特異成分の分離は各成分についてペリオドグラムの方法による。

(1) 系列相関行列が $R_{\tau} = (\gamma_{\tau}^{\alpha\beta}) \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow \infty$) 且し $R_{\tau} \neq 0$ ($\tau > \tau_0$) なるときは母関数系列として

$$X(t) + A^{(1)}X(t-1) + \dots + A^{(h)}X(t-h) = Y(t) \quad (4.2)$$

を想定することができる。

$$R_{\tau} + A^{(1)}R_{\tau-1} + \dots + A^{(h)}R_{\tau-h} = 0, \quad (\tau = 1, 2, \dots, h) \quad (4.3)$$

を解いて $A^{(i)}$ を求め

$$P_{\tau} + A^{(1)}P_{\tau-1} + \dots + A^{(h)}P_{\tau-h} = 0, \quad (\tau = h+1, \dots) \quad (4.4)$$

但し $P_{\tau} = R_{\tau}$ ($\tau = 1, 2, \dots, h$), を解いて標本誤差の範囲内で $P_{\tau} = R_{\tau}$ ($\tau = h+1, \dots$) となるように最初の h を定める。と

$$X(t) = Y(t) + B^{(1)}Y(t-1) + \dots \quad (4.5)$$

とから $B^{(i)}$ を求めべき方程式

$$B^{(i)} + A^{(1)}B^{(i-1)} + \dots + A^{(h)}B^{(i-h)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots),$$

但し $B^{(0)} = I$, $B^{(-i)} = 0$, ($i > 0$)

を得る。 $Y(t-i)$ の標本値 $y(t-i)$ は (4.2) から求められ、外挿値は条件付確率変数

$$\begin{aligned} X^{(e)}(t+s) &= Y(t+s) + B^{(1)}Y(t+s-1) + \dots \\ & \dots + B^{(r-1)}Y(t+1) \\ & \dots + B^{(s)}y(t) + B^{(s+1)}y(t-1) + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

の平均値

$$\begin{aligned} F_s &= E\{X^{(e)}(t+s)\} = B^{(s)}y(t) + B^{(s+1)}y(t-1) + \dots \\ & = -A^{(1)}F_{s-1} - A^{(2)}F_{s-2} - \dots \\ & \dots - A^{(s-1)}F_1 - A^{(s)}x(t) - A^{(s+1)}x(t-1) - \dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

で與えられる。(4.7) の分散行列は

$$(\mu_s^{\alpha\beta}) = \left(\sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j=0}^k b_{i\alpha}^{(j)} b_{i\beta}^{(j)} v^{\alpha\beta} \right), \quad (4.9)$$

$x_{\alpha}(t)$ の分散を s_{α^2} とすれば

$$v^{\alpha\beta} = \sum_{i,j=0}^k \sum_{\mu,\nu=1}^k a_{i\mu}^{(\alpha)} a_{j\nu}^{(\beta)} s_{\mu\nu} s_{j\nu} \quad (4.10)$$

重相関係数による外挿方式、例へば

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} 0 & a_{1i}^{(1)} & a_{1i}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t-i) \\ X_2(t-i) \\ X_3(t-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ Y_3(t) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

は明かに (4.2) の特別の場合である。

(2) $R \equiv (\tau > h)$ とみなされる場合には

$$X(t) = Y(t) + B^{(1)}Y(t-1) + \dots + B^{(h)}Y(t-h) \quad (4.12)$$

を採用する。

$$\begin{aligned} E\{X(t)X'(t-i)\} \\ = B^{(1)}(E\{YY'\}) + B^{(1+i)}(E\{YY'\})B^{(1)^i} + \dots \\ + B^{(h)}(E\{YY'\})B^{(h-i)} \quad (i=0, 1, 2, \dots, h) \end{aligned} \quad (4.13)$$

から未知数 $B^{(i)} (i=1, 2, \dots, h)$ 及び $E\{YY'\}$ を求めることができる。 $A^{(i)}$ は

$$A^{(i)} + B^{(1)}A^{(i-1)} + \dots + B^{(h)}A^{(i-h)} = 0 \quad (i=1, 2, \dots) \quad (4.14)$$

但し $A^{(0)} = I, A^{(i)} = 0 (i > 0)$, から求められる。以下 (1) の場合と同様にして外挿も行われる。

文献及び註

- 1) H Cramér On the theory of Stationary Random Processes, *Ann. Math.* 41(1940).
- 2) J.L. Doob The Elementary Gaussian Process, *Ann. Math. Stat.* 15 (1944).
- 3) G. Maruyama The Harmonic Analysis of Stationary Stochastic Processes, 九大理学部研究報告 (1947).
- 4) H. Wold A Study in the Analysis of Stationary Time Series (1938).
- 5) 小河原正巳: 次元の異なるベクトル確率変数の相関係数について, 数学第1巻第3號(1948).
- 6) Doob のいう $M(1)$ 過程に相當するもの。
- 7) 日本応用力學會編, 應用統計學, 第7章(近刊)。

逐次抜取検査方式の一例

——棄却域を設けない場合——

森 口 繁 一

東京大学第一工学部應用数学教室
(昭和24年5月14日受理)

§1. まえがき 編集部から、急いで何か書くようにと頼まれたので、ちょうど手許にあった1つの例題を述べて、ご参考に供し、またご教示を得ることとしたい。問題はある製品の抜取検査である。検査された品物は良品と不良品に分けられる(いわゆる“屬性試験”)。いままでの経験によると、仕切の不良率は10%ぐらいが普通であり、ときたま30%ぐらいのものも出るという。そして30%以上の不良率をもつ仕切は取引きしたくないのだそうである。ところで現在のこの品物の検査は1種の2回抜取検査方式を用いて行うことになっている。これを新しい逐次抜取検査方式に改めるにはどうすればよいか? それがわれわれに與えられた問題である。

§2. 現行の検査方式 現行の方式は大體次ぎの通りである:—(1) まず5個を抜き取つて試験し、それが全部良品ならば仕切を合格とする。(2) いまの5個

のうちに不良品があれば、さらに30個を抜き取つて試験する。その30個のうち不良品が1個以下ならば仕切を合格とする。(3) いまの30個のなかの不良品が2個以上あれば、全数検査を行う。

検査中に発見された不良品の處置については明確な記述がないが、多分すべて良品ととりかえるのであろう。そして仕切は結局つねに採擇されるので、本来の意味での生産者危険は0であるといわねばならない。消費者危険というものも、本来の意味では考えにくい。しかし、もしも全数検査を受けることなく採擇される確率 L_p を仕切不良率 p に対して置換するならば、それはある意味において検査方式の特性を表わすものと見られよう。(この曲線を“OC曲線”と呼ぼう。)

われわれの場合、 $L_p = (1-p)^5 + \{1 - (1-p)^5\} \{ (1-p)^{30} + 30p(1-p)^{29} \}$ で、OC曲線は第2圖の路線のようになる。ここで注意すべきは、 $p_1 = 0.10$ に対