解析的人口理論の一考察

菱沼, 従尹
厚生省衛生統計部計析課

出版情報：統計数理研究. 3 (1/2), pp.42-45, 1949-12-20. Research Association of Statistical Sciences

寄　書

解析的人口理論の一考察

菱　沼　従　尹

厚生省衛生統計部計析課

(昭和 24 年 3 月 31 日 受 理)

§1. はしがき

近頃人口問題が戦争中と異なつた意味において時の問題としてしきりに論議されるようになつた。

けだし國内の過剰人口の對策を如何にすべきかということは，敗戰という苛酷な經驗を味つた我國が當面すべき宿命的な課題である。その對策の樹立と實施は寸刻も忽せに出來ない緊急事であるとともに，その適否によつて民族の興亡が左右せられる重要事であるから，我國においても多数の人口學者達によつて各種の問題が研究論議されているが解析的理論の分野を取あげるものが少い。

解析的人口理論は，人口理論の重要な一部門であることはいうまでもない。にも拘わらずこの問題を取りあげる者が少いのは，或程度の数学的素養を必要とし，又他方數學的素養のある者にとつては，その理論の構成に實際の經驗に基ずいた或種の假設を必要とするからであつて，それは解析的人口理論の沿革史を辿り，どのような人々によつて發展せられたかをみれば容易に首肯されよう。

先ずオイラーの人口の幾何級数的増加の解析的研究にはじまつたこの理論は，チルメル等によつて繼承され，1907 年に至つて米國のロトカは安定人口の理論を樹立した。

ロトカより稍々遅れて 1911 年にボルトキウイッチも全く獨立に幾分違つた條件に基ずいて，ほゞ同一の問題に到達したのである。

ロトカはさらにこの命題の研究を續け 1925 年にダブリンと協力して安定的年齢構成と安定的自然増加率の計算に必要な公式を誘導して，その理論的結果を 1920 年の米國の人口に應用した所論を發表し，これに刺戟されて解析的人口理論の研究が廣く行われるようになつたのである。

一方オイラーの命題は一定の抵抗が作用する結果成立する人口發展の可能的な形態としてのロヂスチック法則にまで進んだのであつて，この分野の貢献者としては前述のロトカの外にユール，パール及びリード等をあげうるのである。

以上を通じてみても解析的人口理論の發展に寄與した人々は何れも極く少数の人口問題に興味を寄せたる數學者及び數學的素養をもつ生物學者に限定されている。

しかし安定人口の理論においては，死亡秩序及び出生率の不變を假定した場合の極限人口の問題であり，ロヂスチック法則の理論においては，人口を一つの有機的生體と考えて，その發展の生物學的説明を意圖したものであつて，時としては實際の人口もこのような理論構造に近い構造をもつという可能性を結論するにすぎない。

これらの命題がたとえ理論的に興味あることは否定しえないとしても，近き過去及び近き將來の人口の推移を問題とする限りにおいては，このような假設が滿足されることは稀であつて實際からは程遠いのである。即ち年々死亡率及び出生率は僅少ながらも變化する。そこでこのような實際に即し實際に適用しうる理論は出來ないであろうか。勿論これにはいくつかの假設を用意しなければならない。人口推移の形は時により國により千差萬別である。數種の假定に基ずいてすべての型に適合するような實驗公式を導くことは容易ではない。

それは古來典型的な死亡法則として稱さんをはくしているゴムパーツ，メーカムの法則にしても我が國においては高年齢にのみ適用しうる一事をもつてしても

十分である。

實際に人口推計に使用される資料は一定間隔をもつて定期的に調査せられる人口靜態統計の數字と毎年發表される人口動態統計の數字である。

問題は二つのセンサス年次間の性別年齢別人口の推計及び最近のセンサスに基ずいて若干年間の性別年齢別の將來人口の推計である。

この何れの場合においても總人口を比較的正確に把握することは何等かの方法によつて可能である。そうすれば問題は如何にしてこれを性別年齢別に配分するかに歸着する。又 Vital Statistician の最大の關心事は死亡統計にあることはいうまでもない。

Vital Statistician はその年の死亡統計の發表が完了すると先ず第一に粗死亡率 $\left(\frac{\text{死亡数}}{\text{總人口}}\times 1000\right)$ を計算する。

例えば我國において粗死亡率は，昭和10年は16.8であつたのが，昭和22年には14.7に減少し，さらに昭和23年には12.0に減少した。從つてこの2,3年の衛生狀態の改善は著しいという結論を與える類である。

粗死亡率の改善は當然壽命の延長をもたらす筈である。壽命を計測するには，通常平均餘命が用いられる。ところが平均餘命は生命表の完成をまつて始めて知りうる數値である。從來生命表の計算には相等の日時を要したのが普通であるから，生命表が完成するまで手をこまねいて待つよりほかはなかつたのである。

確に粗死亡率が低下すれば平均餘命は延長するのに違いない。換言すれば兩者の間には或種の函數關係が存在するのであるからその實驗的推計式が見出せないであろうか，即ち生命表の計算が完成した或 Census 年次の人口と粗死亡率を基にして，任意の時期において粗死亡率さえわかれば，その時の平均餘命を推計する實驗式が得られないであろうか。私はこのような各種の實際問題を處理する理論を展開することを試みたのである。

從來の解析的人口理論は殆んどすべて死亡率及び出生率に對して或種の假定を置くことから出發したのに對して私は死力 (Mortality Force) に着目してそこに一つの假定を設けることから出發したのである。勿論それ以外には何等の假定を設けなかつたのであるが陰に出生率の假定を含んでいることは見逃せない。

勿論假定の正否は，得られた結果が實際に適合するか否かによつて決定せられる。そこで私は，私の設けた假定の Control として最後に得られた平均餘命の推計式によることとして，第5回生命表及び昭和5年の Census の數字によつて昭和10年の平均餘命を推計して第6回生命表の平均餘命と比較してみた。私は最初全年齢をこみにした粗死亡率のみを基礎にして，廣範圍の年齢層に對して適合する結果がえられようとは考えなかつた。最も重要な年齢層である0歳の平均餘命の推計値がよく近似すれば十分であると考えたのであるが，結果は § 11 の示す通りかなり廣範圍な年齢層に對してよく適合することを知つたのである。このことは私の設けた假定がそれ程無理でないことを示している。

實驗公式の生命は，それが高尚な理論や巧妙な計算技術によつて誘導されることにあるのではなく，出來るだけ簡單直明な假定から出發してできるだけ實際に適合する結果をうることにある。

§ 2. 記號の說明

$l_x(t)$	:	t なる時期における	x 歳の人口
$L(t)$	:	〃	總人口
$d_x(t)$	:	〃	x 歳の死亡數
$q_x(t)$	:	〃	x 歳の死亡率
$\mu_x(t)$	:	〃	x 歳の死力
$D(t)$	:	〃	總死亡數
$Q(t)$	:	〃	粗死亡率
$e_x(t)$	:	〃	平均餘命

$$S(t)=\int_0^{\omega} x\,l_x(t)\,dx$$

$$S_x(t)=\int_x^{\omega} y\,l_y(t)\,dy$$

$$U(t)=\int_0^{\omega} x^2\,l_x(t)\,dx$$

$$U_x(t)=\int_x^{\omega} y^2\,l_y(t)\,dy$$

$$T(t)=\sum_{x=0}^{\omega}\left(x l_x(t)-(x+1)l_{x+1}(t)\right)$$

$$\alpha(t)=\frac{S(t)}{L(t)}$$

$$\beta(t)=\frac{T(t)}{L(t)}$$

§ 3. 死力に關する假設

死力に對して次の假設をおく

$$\mu_x(t)=\mu_x(0)-\frac{f(t)}{\lambda+x} \qquad \text{(H)}$$

ここに $f(t)$ は t に關し非減少の正値解析函数であつて，$f(0)=0$ とし，λ は十分大きな數であるとする。

すなわち死力は時の經過と共に改善さるべきものであり，しかもその改善の度合は年齢に逆比例するものと假定する。

§ 4. $l_x(t)$ と $l_x(0)$ との關係

死力に關しては

$$\mu_x(t)=-\frac{1}{l_x(t)}\frac{dl_x(t)}{dx} \qquad (1)$$

であるからこれを (H) に代入して

$$\frac{dl_x(t)}{l_x(t)}=\frac{dl_x(0)}{l_x(0)}+\frac{f(t)}{\lambda+x}dx$$

この微分方程式をといて

$$l_x(t)=Kl_x(0)(\lambda+x)^{f(t)}$$

K を決定するため，$t=0$ とおいて $K=1$ をうるから

$$l_x(t)=l_x(0)(\lambda+x)^{f(t)} \qquad \text{(F.1)}$$

或は

$$l_x(t)=\lambda^{f(t)}l_x(0)\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{f(t)} \qquad \text{(F.1')}$$

(F.1) 又は (F.1′) によつて，λ 及び $f(t)$ を知れば，任意の時期の年齢別人口を推計することができる。

§ 5. $L(t)$ と $L(0)$ との關係

$$L(t)=\int_0^\omega l_x(t)dx \qquad (2)$$

これに (F.1′) を代入すれば

$$L(t)=\lambda^{f(t)}\int_0^\omega\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{f(t)}l_x(0)dx$$

$$\doteqdot\lambda^{f(t)}\int_0^\omega\left(1+\frac{f(t)}{\lambda}x\right)l_x(0)dx\left(\frac{x}{\lambda}<1 \text{ であるとして}\right)$$

$$=\lambda^{f(t)}\left(\int_0^\omega l_x(0)dx+\frac{f(t)}{\lambda}\int_0^\omega xl_x(0)dx\right)$$

したがつて

$$L(t)=\lambda^{f(t)}\left(L(0)+\frac{f(t)}{\lambda}S(0)\right) \qquad \text{(F.2)}$$

(F.2) によつて λ, $f(t)$ 及び或時期の年齢別の人口構成を知れば，任意の時期の人口を推計することができる。

§ 6. $d_x(t)$ と $d_x(0)$ との關係

$$d_x(t)=l_x(t)-l_{x+1}(t) \qquad (3)$$

これに (F.1) を代入すれば

$$d_x(t)=\lambda^{f(t)}\left(l_x(0)\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{f(t)}-l_{x+1}(0)\left(1+\frac{x+1}{\lambda}\right)^{f(t)}\right)$$

$$\doteqdot\lambda^{f(t)}\left(l_x(0)\left(1+\frac{f(t)}{\lambda}x\right)-l_{x+1}(0)\left(1+\frac{f(t)}{\lambda}(x+1)\right)\right)$$

$$=\lambda^{f(t)}\left((l_x(0)-l_{x+1}(0))+\frac{f(t)}{\lambda}(xl_x(0)-(x+1)l_{x+1}(0))\right)$$

すなわち

$$d_x(t)=\lambda^{f(t)}\left(d_x(0)+\frac{f(t)}{\lambda}\left(xl_x(0)-(x+1)l_{x+1}(0)\right)\right) \qquad \text{(F.3)}$$

或は

$$d_x(t)=\lambda^{f(t)}\left(\left(1+\frac{f(t)}{\lambda}x\right)d_x(0)-\frac{f(t)}{\lambda}l_{x+1}(0)\right) \qquad \text{(F.3')}$$

(F.3) によつて λ, $f(t)$, $d_x(0)$, $l_x(0)$ 及び $l_{x+1}(0)$ を知れば，任意の時期の年齢別死亡數を推計することができる。

§ 7. $q_x(t)$ と $q_x(0)$ との關係

(F.3) の兩邊をそれぞれ (F.1′) の兩邊で割れば

$$q_x(t)=\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-f(t)}\left(q_x(0)+\frac{f(t)}{\lambda}(x-(x+1)(1-q_x(0)))\right)$$

$$=\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-f(t)}\left(q_x(0)+\frac{f(t)}{\lambda}(-1+(x+1)q_x(0))\right)$$

すなわち

$$q_x(t)=\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-f(t)}\left(q_x(0)\left(1+\frac{f(t)}{\lambda}(x+1)\right)-\frac{f(t)}{\lambda}\right) \qquad \text{(F.4)}$$

(F.4) によつて λ, $f(t)$ 及び $q_x(0)$ を知れば，任意の時期の年齢別死亡率を推計することができる。

(F.4) は 2 つの Census 年次の中間の年齢別人口を Life Table Method を用いて推計する場合に，各年次の死亡率を補正するのに役立つであろう。實際は粗死亡率が分れば (F.7) の示す通り λ 及び $f(t)$ の値

を個々に求める必要がなく $\dfrac{f(t)}{\lambda}$ の値が直ちに推計できるから (F.4) を活用することができる。

§8　$D(t)$ と $D(0)$ との関係

(F.3) を0歳から ω 歳まで加え合わすと

$$\sum_{x=0}^{\omega} d_x(t)=\lambda^{f(t)}\Big(\sum_{x=0}^{\omega} d_x(0)+\frac{f(t)}{\lambda}\sum_{x=0}^{\omega}\big(xl_x(0)-(x+1)l_{x+1}(0)\big)\Big)$$

すなわち

$$D(t)=\lambda^{f(t)}\Big(D(0)+\frac{f(t)}{\lambda}T(0)\Big) \qquad \text{(F.5)}$$

(F.5) によつて λ, $f(t)$, $D(0)$ 及び $T(0)$ を知れば，任意の時期の總死亡数を推計することができる。

§9.　$Q(t)$ と $Q(0)$ との関係

(F.5) の両邊をそれぞれ (F.2) の両邊で割れば

$$\frac{D(t)}{L(t)}=\frac{D(0)-\dfrac{f(t)}{\lambda}T(0)}{L(0)+\dfrac{f(t)}{\lambda}S(0)}$$

右邊の分母及び分子をそれぞれ $L(0)$ で割れば

$$Q(t)=\frac{Q(0)-\dfrac{f(t)}{\lambda}\beta(0)}{1+\dfrac{f(t)}{\lambda}\alpha(0)} \qquad \text{(F.6)}$$

$$\doteqdot\frac{Q(0)}{1+\dfrac{f(t)}{\lambda}\alpha(0)}\quad\left(\frac{f(t)}{\lambda}\beta(0)\ \text{は neglesible であるから}\right)$$

(F.6) から

$$\frac{f(t)}{\lambda}=\frac{Q(0)-Q(t)}{\alpha(0)Q(t)} \qquad \text{(F.7)}$$

(F.7) によつて，$Q(0)$，$Q(t)$ 及び $\alpha(0)$ を知れば $\dfrac{f(t)}{\lambda}$ を決定することができる。

λ 及び $f(t)$ の各々を推計する必要がある場合には (F.7) と (F.1′) において $x=0$ とおき即ち二つの時期の0歳人口を比較した値によつて決定すればよい。

§10.　$e_x(t)$ と $e_x(0)$ との関係

$$e_x(t)=\frac{1}{l_x(t)}\int_x^{\omega} l_y(t)\,dy \qquad (4)$$

これに (F.1′) を代入すれば

$$e_x(t)=\frac{1}{\left(1+\dfrac{x}{\lambda}\right)^{f(t)}l_x(0)}\int_x^{\omega}\left(1+\frac{y}{\lambda}\right)^{f(t)}l_y(0)\,dy$$

$$\doteqdot\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-f(t)}\frac{1}{l_x(0)}\int_x^{\omega}\left(1+\frac{f(t)}{\lambda}y\right)l_y(0)\,dy$$

$$=\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-f(t)}\left(e_x(0)+\frac{f(t)}{\lambda}\,\frac{S_x(0)}{l_x(0)}\right)$$

すなわち

$$e_x(t)=\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-f(t)}\left(e_x(0)+\frac{f(t)}{\lambda}\,\frac{S_x(0)}{l_x(0)}\right) \qquad \text{(F.8)}$$

(F.8) によつて $f(t)$, λ, $l_x(0)$, $S_x(0)$ 及び $e_x(0)$ を知れば，任意の時點の年齢別平均餘命を推計することができる。

實際に計算する場合には20歳位の年齢までは

$$e_x(t)=\left(1-\frac{f(t)}{\lambda}x\right)\left(e_x(0)+\frac{f(t)}{\lambda}\,\frac{S_x(0)}{l_x(0)}\right) \qquad \text{(F.8′)}$$

により，それ以上の年齢に對しては

$$e_x(t)=\left(1-\frac{f(t)}{\lambda}x+\frac{f(t)^2}{2\lambda^2}x^2\right)\left(e_x(0)+\frac{f(t)}{\lambda}\,\frac{S_x(0)}{l_x(0)}+\frac{f(t)^2}{2\lambda^2}\,\frac{U_x(0)}{l_x(0)}\right) \qquad \text{(F.8″)}$$

を用いると適合度がよいようである。(F.8′) 及び (F.8″) により (F.7) によつて $\dfrac{f(t)}{\lambda}$ を求めれば，λ 及び $f(t)$ の各々の値を求めなくても計算が出來る。

§11，第5回の生命表の平均餘命を基礎にして(F.8) によつて推計した昭和10年の平均餘命と第6回生命表の平均餘命との比較

年齢	男子 推計値	男子 第6回生命表平均餘命	男子 差	女子 推計値	女子 第6回生命表平均餘命	女子 差
0	47.07	46.92	+0.15	49.57	49.63	−0.06
5	53.77	52.22	+1.55	55.58	54.40	+1.18
10	49.22	48.25	+0.97	50.34	50.47	−0.13
15	44.66	43.85	+0.81	46.60	46.33	+0.27
20	40.91	40.41	+0.50	43.20	43.22	−0.02
25	37.72	37.35	+0.37	40.26	40.23	+0.03
30	33.87	33.89	−0.02	36.64	36.88	−0.24
35	29.92	30.10	−0.18	33.06	33.30	−0.24
40	26.02	26.22	−0.20	29.43	29.65	−0.22
45	22.21	22.43	−0.22	25.56	25.91	−0.35