確率分布函數列について

河田, 龍夫
東京工業大學數學教室

出版情報：統計数理研究. 3 (1/2), pp.32-41, 1949-12-20. Research Association of Statistical Sciences

いない。

媒質に境界が存在する場合は，實際には極めて重要である。これもまた，通常一様なマルコフ過程という範囲に入らない。エネルギー，時間，を問題にせず，且つ l を一定とみなして，位置と方向分布だけを取扱う問題は，Milne の問題として知られ，半無限の場合には Hopf, Winer-Hopf の美しい理論があり，[8] その他の場合にも，興味ある結果が最近得られている。[10] また，エネルギーと位置との分布は，§5bにふれた "age theory" の型の取扱いがかなりに進められている。[6]

この種の問題の完全な解決は一般に甚だ困難であるが，數學的にも興味ある問題を含んでいるのではないかと筆者は考えるのである。數學者からの御助言をいたゞければ非常に幸いである。なお，こゝに論じたような問題はしばしば意外なところに類題をもつている。そのような場合，相當に複雑でも，分布の低次の能率くらいはこゝの方法によつて容易に求められることに重ねて注意しておこう。

文　獻

1.) Fermi *Ricerca Scient* 7, (2), 13, (1936)
2) Ornstein and Uhlenbeck . *Physica* 4, 478 (1937).
3) 久保亮五　數物例會講演 (1943)
4.) 久保亮五　物性論研究 1, 1 (1943), *J Phys. Soc.* 2 47, 84 (1947), 同, 3 119 (1948), 尙 Wannier *Rev. Mod Phys* 17, 50 (1945), Onsager *Phys. Rev.* 65, 117 (1944) を參照。
5.) 久保亮五　日本物理學會第會講演 (1947年5月)
6.) Marshak *Rev. Mod Phys* 19, 185(1947)
7.) Doetsch . Laplace-Transformation
8.) E Hopf Mathematical Problems of Radiative Equilibrium
9) Placzek . *Phys Rev* 69, 423 (1946)
10.) Placzek and Seidel *Phys Rev* 72, 550 (1947), Placzek, : 同 72, 556 (1947), Mark · 同, 72, 558 (1947) Le Caine 同, 72, 564 (1947).

その他の文獻は 6) を參照。

確率分布函數列について

河　田　龍　夫

東京工業大學數學教室

(昭和24年5月3日受理)

確率分布函數列の收斂性，その極限分布の性質等について論ずるのが本稿の目的であるが，Fourier 解析の方法で統一的に議論する。筆者は前に "フーリエ解析と確率論" (中文館發行，1947) で同様な問題を論じたが，その後得られた結果について述べようと思う。角谷氏の助言があり，又大部分の結果は宇田川氏と筆者との協同研究によるものである。§1 では，單調函數列又は分布函數列の收斂性について論ずる。分布函數列に關しては，P. Lévy の連續定理が中心的な役割をすることはよく知られているが，これに關して色々の注意をあたえる。§5 では §1 における定理の應用として，一二の既知定理の別證を示す。尙 §3 で特性函數の平均値 $\mathfrak{M}\{f\}$ (f: 特性函數, $\mathfrak{M}(f)=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)dt\right\}$) に關する基本事項を示し，その應用を論ずる。特に變數の和の極限分布の連續性を研究する。最後に §4 において弱い意味での純粹定理の證明を行う。

§ 1. 單調函數列或いは分布函數列の收斂

$F_n(x)$ を單調增加函數としその Fourier-Stieltjes 變換を

$$f_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}dF_n(x) \qquad (1.1)$$

とおく。なお $F_n(x)$ の不連續點では

$$F_n(x)=\frac{1}{2}\{F_n(x+0)+F_n(x-0)\} \quad (1.2)$$

と規約する。先ず次の定理を示そう。これはS. Bochner に負う。この證明は魚返氏によつて筆者に示されたものである。

定理 1. $F_n(x)$ の全變分が一樣に有界で，卽ち

$$\int_{-\infty}^{\infty}dF_n(x)\leq M \quad (M\text{ は }n\text{ に無關係な常數}) \qquad (1.3)$$

で，その Fourier-Stieltjes 變換 $f_n(t)$ が $f(t)$ に殆んどすべての t で收斂するとする。そうすると

(i) $F_n(x)-F_n(0)$ は一つの單調增加函數 $F(x)$ に收斂する。$F(x)$ も有界變分で

$$\text{(ii)}\quad f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}dF(x) \qquad (1.4)$$

が殆んどすべての t で成立する。なお

$$\text{(iii)}\quad F(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\frac{1-e^{ixt}}{it}f(t)\,dt \qquad (1.5)$$

が成立する。

證明. この證明は魚返氏によつてあたえられた。(1.1) の兩邊を積分して

$$\int_0^t f(u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF_n(x). \qquad (1.6)$$

今あたえられた任意の正數 ε に對して $A\geq M/2\varepsilon$ とえらぶ。Helley の選擇定理により $\{F_{nK}(x)\}$ なる部分列が存在して，$F_{nK}(x)\to F(x)$（すべての x で）が成立し，（このような單調增加函數 $F(x)$ がある）又

$$\int_{-A}^{A}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF_{nK}(x)\to\int_{-A}^{A}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF(x). \qquad (1.7)$$

さて

$$|f_n(u)|\leq\int_{-\infty}^{\infty}dF_n(x)\leq M$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t f_n(u)\,du=\int_0^t f(u)\,du. \qquad (1.8)$$

又

$$\left|\int_A^{\infty}+\int_{-\infty}^{-A}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF_n(x)\right|$$

$$\leq 2\left(\int_A^{\infty}+\int_{-\infty}^{-A}\frac{dF_n(x)}{|x|}\right)\leq\frac{2}{A}\int_{-\infty}^{\infty}dF_n(x)\leq\varepsilon. \qquad (1.9)$$

故に (1.7)，(1.8) 及び (1.9) より

$$\left|\int_0^t f(u)\,du-\int_{-A}^{A}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF(x)\right|<\varepsilon$$

こゝで $A\to\infty$ として

$$\int_0^t f(u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF(x)$$

兩邊を t で微分すると，右邊の微係數は $\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}dF(x)$ となり，左邊の導函數は殆んどすべての t で $f(t)$ に一致する。故にこの $F(x)$ に對して

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}dF(x).$$

これから反轉公式 (1.5) の成立することは通常の成書にある通り證明される（例えば筆者著フーリエ解析と確率論 § 13）。卽ち $F(x)$ は $f(t)$ から一意に定まる。今 $F_n(x)$ から任意の數列をぬきだしても，適當な部分列 $F_{nK'}(x)$ をその中から選んで $F_{nK'}(x)-F_{nK'}(0)\to F(x)$ とすることができる。よつて (i) が示された。(1.4)，(1.5) の成立することも上の證明に含まれている。

上に掲げた證明と同樣に Lévy 連續定理を少し擴張された形で示すことができる。

$F_n(x)$ を分布函數とする。この Fourier-Stieltjes 變換 $f_n(t)$ は特性函數といわれる。

定理 2. 分布函數 $F_n(x)$ の特性函數 $f_n(t)$ が $n\to\infty$ のとき，一つの函數 $f(t)$ に殆んどすべての t で收斂し，この $f(t)$ は $t=0$ で連續で

$f(0)=1$ であるとする。そうすると $F_n(x)$ は一つの分数函数 $F(x)$ に收斂する。且つ $f(t)$ は $F(x)$ の特性函数に恒等的に等しい。

證明. 定理1から $F_n(x)\to F(x)$ で

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}dF(x) \quad \text{(殆んどすべての } t \text{ で)} \tag{1.10}$$

なる單調増加函数 $F(x)$ がある。而も一意である。吾々は $F(+\infty)-F(-\infty)=1$ の成立することを證明すればよい。

$t_m\to 0$ なる数列をとり，而も $t=t_m$ で (1.16) が成立するとする。

$$f(t_m)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt_m}dF(x).$$

$t_m\to 0$ とすると左邊は $f(0)$ に收斂し，假定からこの値は1に等しい。故に

$$1=\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ivt_m}dF(x).$$

$\int dF(x)<\infty$ であるから $t_m\to 0$ のとき右邊で lim を積分の中に入れることができる。故に

$$=\int_{-\infty}^{\infty} dF(x).$$

即ち $F(+\infty)-F(-\infty)=1$. 故に吾々の定理が證明された。

$\sigma_n(x)$ を分布函数とし，その結合函数を $\sigma_1(x)*\sigma_2(x)*\cdots\cdots*\sigma_n(x)=F_n(x)$ とする。$\sigma_n(x)$ の特性函数を $\varphi_n(t)$ とすると $F_n(x)$ の特性函数は $\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)\cdots\cdot\varphi_n(t)=f_n(t)$ である。上の定理から $f_n(t)$ が殆んどすべての點で $f(t)$ に收斂し，$f(t)$ が $t=0$ で連續で $f(0)=1$ ならば，$F_n(x)$ が一つの分布函数 $F(x)$ に收斂するが，實は吾々の場合には $f(t)$ に關する條件は不必要であることを示そう。

定理3. $f_n(t)=\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)\cdots\varphi_n(t)$ が $n\to\infty$ のとき，殆んどすべての t で一つの函数 $f(t)$ に收斂し，$f(t)$ は殆んどすべての點では0でないとする。(正則度の t の集合で0でないとする) そうすると $\sigma_1*\sigma_2*\cdots\cdots*\sigma_n=F_n$ は $n\to\infty$ のとき一つの分布函数 $F(x)$ に收斂する。從って(Lévy 連續定理から) 實は $f_n(t)$ は任意の有限區間で $F(x)$ の特性函数 ($f(t)$ に殆んどすべての點で等しい) に一様に收斂する。

證明. 假定から $\prod_{K=1}^{n}|\varphi_K(t)|$ が正測度の集合で無限乘積として收斂する。即ちその極限が0でない。故に正測度の集合 E で

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{n}^{\infty}|\varphi_K(t)|=1. \tag{1.11}$$

更に定理1から

$$\prod_{K=n}^{\infty}\varphi_K(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}dG_n(x) \tag{1.12}$$

が殆んどすべての t で成立するような單調増加函数 $G_n(x)$ が存在する。(1.12) が $n=1, 2, \cdot$ で成立する如き集合も $(-\infty,\ \infty)$ から0測定の集合を除いた集合である。今この集合に屬し，且つ E の一點 t_0 をとる。(1.11) から任意の $\varepsilon(>0)$ に對して n_0 が存在する。

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt_0}dG_{n_0}(x)\right|\geqq 1-\varepsilon$$

故に $G_{n_0}(+\infty)-G_{n_0}(-\infty)\geqq 1-\varepsilon.$

故に $A=A(\varepsilon, n_0)$ を選んで

$$G_{n_0}(A)-G_{n_0}(-A)\geqq 1-2\varepsilon \tag{1.13}$$

とすることができる。

$$\prod_{k=1}^{\infty}\varphi_K(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}dG(x)$$

が殆んどすべての t で成立する如き單調増加函数 $G(x)$ が定理1から存在する。他方

$$\begin{aligned}\prod_{K=1}^{\infty}\varphi_k(t)&=\prod_{K=1}^{n_0-1}\varphi_K(t)\cdot\prod_{K=n_0}^{\infty}\varphi_K(t)\\ &=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}dF_{n_0}(x)\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}dG_{n_0}(x)\\ &=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}d[F_{n_0}(x)*G_{n_0}(x)].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{故に}\quad G(x)&=F_{n_0}(x)*G_{n_0}(x)\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}F_{n_0}(x-u)d_uG_{n_0}(u)\\ &\geqq\int_{-A}^{A}F_{n_0}(x-u)d_uG_{n_0}(u).\end{aligned}$$

今 $F_{n_0}(B)\geqq 1-\varepsilon$ なる如く B をとり x を $A+B$ より大とすると

$$\geqq F_{n_0}(B)\int_{-A}^{A}dG_{n_0}(u)\geqq(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)>1-3\varepsilon.$$

故に $x\to\infty$ として $G(+\infty)>1-3\varepsilon$. ε は任意であるから $G(+\infty)=1$.

又

$$G(x)=\int_{-A}^{A}F_{n_0}(x-u)\,dG_{n_0}(u)+\int_{A}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-A} \tag{1.14}$$

でこの右辺の第2，3項は

$$\leqq\int_{A}^{\infty}dG_{n_0}(x)+\int_{-\infty}^{-A}dG_{n_0}(x)$$

$$=1-G_{n_0}(A)+G_{n_0}(-A)<2\varepsilon \quad ((1.13)\text{ から})$$

今 $F_{n_0}(-C)<\varepsilon$ なる如く C をとり $x<-A-C$ とすると

$$G(x)<F_{n_0}(x+A)\int_{-A}^{A}dG_{n_0}(u)+2\varepsilon$$
$$<F_{n_0}(x+A)+2\varepsilon<F_{n_0}(-C)+2\varepsilon$$
$$<3\varepsilon.$$

これから $G(-\infty)=0$. 故に $G(x)$ は一つの分布函数である。よつて $\prod_{1}^{\infty}\varphi_K(t)=f(t)$ は殆んどすべての點で分布函数 $G(x)$ の特性函数に等しい。即ち定理2から吾々の定理が得られる。

§ 2. 一二の既知定理の別證

前節の定理を應用して，既知定理の簡單な別證をあたえる。今確率變数 X の特性函数を $f(t)$ とするとき

$$C(h)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}|f(t)|^2\frac{\sin^2 ht}{ht^2}dt,\ h>0, \tag{2.1}$$

又は

$$\varphi(h)=h\int_0^{\infty}e^{-ht}|f(t)|^2dt,\ h>0. \tag{2.2}$$

を X の平均濃度函数という。(もつと一般な核を用いてもよい。例えば國澤清典：確率論における極限定理（中文館發行，1949）参照)こゝでは何れをとつて考えても同じであるから (2.1) を用いて議論する。次の定理はよく知られている。（筆者，フーリエ解析と確率論参照）

定理 4. $\{X_n\}$ を獨立な確率變数とし，$\sum_{K=n+1}^{m}X_K$ の平均濃度函数を $C_{n,m}(h)$ とする。そうすると

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}C_{n,m}(h)=C(h) \tag{2.3}$$

は恒等的に0か又は1である。

この定理はこれと同等な事實を P. Lévy が證明し，筆者がこの形で證明をあたえた。後少し簡單な證明を 1948 年5月の数學會例會で示したが，更に簡單な證明を本節であたえよう。

$$C_{n,m}(h)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}|f_{n+1}(t)\cdots f_m(t)|^2\frac{\sin^2 ht}{ht^2}dt \tag{2.3}$$

であるから (2.3) の $C(h)$ の定義されることは明らかである。こゝに $f_n(t)$ は X_n の特性函数である。今

$$\lim_{m\to\infty}|f_{n+1}(t)\cdots f_m(t)|^2=\alpha_n(t)$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(t)=\alpha(t)$$

とすると無限乘積の性質から $\alpha(t)$ の値は各々の t について1か0である。定理1により（注意参照）

$$\alpha_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dG_n(x)$$

$$\alpha(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dG(x)$$

が殆んどすべての t に對して成立するような單調增加函数 $G_n(x)$，$G(x)$ が存在する。(2.3) により

$$C(h)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\alpha(t)\frac{\sin^2 ht}{ht^2}dt. \tag{2.4}$$

もし $\alpha(t)$ が殆んどすべての點で0ならば，明らかに $C(h)$ は恒等的に0に等しい。又正測度の集合 E があつて $t\in E$ で $\alpha(t)=1$ とすると $t_0\in E$ で

$$\alpha(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it_0x}dG(x)$$

な t_0 があり，$\alpha(t_0)=1$ から

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{it_0x}dG(x)=1$$

故に

$$1=\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{it_0x}dG(x)\right|\leqq\int_{-\infty}^{\infty}dG(x)\leqq1$$

から $G(\infty)-G(-\infty)=1$. 故に $G(x)$ は分布

函数で $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dG(x)=1$ が正測度の集合で成立するから $G(x)$ は單位分布函数となり恒等的に1になる。卽ち $\alpha(t)$ は殆んどすべての t に對して1となり從つて $C(h)=1$ が恒等的に成立する。

定理 5. **定理4で $C(h)=1$ のときは適當な常數 a_n をとつて $\sum(X_n-a_n)$ を法則收斂さすことができる。又 $C(h)=0$ のときはどんな a_n をとつても $\sum(X_n-a_n)$ は法則收斂させることができない。**

この定理の第二の部分は明らかである。卽ち $C(h)=0$ のときは $\alpha(t)$ が殆んどすべての點で0となる場合で從つて $\Pi f_n(t)$ が殆んどすべての t で0へ發散する。故にどんな a_n をとつても $\Pi f_n(t)e^{ia_nt}$ は0へ殆んどすべての t で發散するからである。$C(h)\equiv1$ のときは $\Pi|f_n(t)|^2$ が正測度の t の集合で收斂する。$|f_n(t)|^2$ は X_n を對稱化した變數（卽ち X_n' を X_n と同じ分布をもつ獨立な確率變数とするとき，$Y_n=X_n-X_n'$ を X_n を對稱化した變數という）の特性函數である。故に定理3から $\sum Y_n$ が法則收斂する。これから $\sum(X_n-a_n)$ の法則收斂することは a_n として X_n の median をとれば容易に示される。（通常の如く）。

次に確率變數の級數の項の順序變更に關する一定理の證明を示そう。無限結合函數の言葉で述べる。

定理 6. **$\{\sigma_n(x)\}$ を分布函数列で $\sigma_1(x)*\sigma_2(x)*\cdots=F(x)$ が收斂するとする。$\sigma_{n1}(x)*\sigma_{n2}(x)*\cdots=G(x)$ を上の無限結合の結合の順序を交換したもので收斂するとする。そうすると**

$$G(x)=F(x-\alpha) \tag{2.5}$$

なる常數 α が存在する。

$\sigma_n(x)$ に對應する特性函數を $f_n(t)$ とする。$F(x)$, $G(x)$ に對するものを夫々 $f(t)$, $g(t)$ とする。$\sigma_{n1}(x), \sigma_{n2}(x), \cdots, \sigma_{,K}(x)$ が $\sigma_1(x)\cdots,\sigma_{m(K)}(x)$ の中に含まれるとすると

$$\prod_{i=1}^{m(k)} f_i(t)=\prod_{i=1}^{k} f_{n_i}(t)\ h_k(t) \tag{2.6}$$

となり $h_k(t)$ もまた一つの特性函数である。これから

$$\left|\prod_{i=1}^{m(k)} f_i(t)\right|^2 \leqq \left|\prod_{i=1}^{k} f_{n_i}(t)\right|^2$$

$k\to\infty$ として

$$|f(t)|^2 \leqq |g(t)|^2 \tag{2.7}$$

が得られる。全く同樣に

$$|g(t)|^2 \leqq |f(t)|^2 \tag{2.8}$$

が得られ，從つて

$$|f(t)|^2=|g(t)|^2 \tag{2.9}$$

が成立する。$f(0)=g(0)=1$ であるから $|t|<a$ で $|f(t)|>0$, $|g(t)|>0$ とする。そうすると明らかに $h_K(t)\to h(t)$, $(|t|<a)$ である。且つ

$$f(t)=g(t)h(t), \quad (|t|\leq a) \tag{2.10}$$

が成立する。(2.9) から

$$|h(t)|=1, \quad (|t|<a) \tag{2.11}$$

が成立する。さて $h_K(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}dH_K(x)$ とすると，よく知られた方法で (Cramér, Random variables anp its probability distributions, 1937, p. 31) 適當な部分列 $H_{nK}(t)$ をとつて $H_{,K}(x)\to H(x)$ とすることができる。こゝに $H(x)$ は一つの分布函数である。從つて $h_{nK}(t)$ が $H(x)$ の特性函數 $h^*(t)$ に任意の有限區間で一樣收斂する。且つ $h^*(t)=h(t)$ が $|t|<a$ で成立する。(2.11) から $|h^*(t)|=1$ $(|t|<a)$ で從つてよく知られた事實によつて $h^*(t)=e^{i\alpha t}$ なる常數 α がある。而も $-\infty<t<\infty$ で $f(t)=g(t)h^*(t)$ であるから

$$f(t)=g(t)e^{i\alpha t} \quad (-\infty<t<\infty)$$

となり。これは (2.5) に同等である。

§ 3. 連續な無限結合函數

$F(x)$ を一つの分布函數としその特性函數を $f(t)$ とする。$F(x)$ の不連續點（點スペクトル）を x_ν $(\nu=0,1,2\cdots)$ とし，x_ν における $F(x)$ の saltus を p_ν とする。そうすると

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt=\mathfrak{M}(|f|^2) \qquad (3.1)$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}p_\nu^2$$

であることはよく知られている。これから $F(x)$ が連續であるための必要充分な條件は

$$\mathfrak{M}(|f|^2)=0 \qquad (3.2)$$

であたえられる。又

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)e^{i\xi t}dt=\mathfrak{M}_t(f(t)e^{i\xi t}) \quad (3.3)$$
$$=F(\xi+0)-F(\xi-0)$$

もよく知られている。なお以上の事は $F(x)$ が有界な單調増加函數であつてもよい。先ず簡單な次の定理から始める。

定理 7. $\{F_n(x)\}$ を分布函數列とし $n\to\infty$ のとき連續な分布函數に收斂すれば

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}(|f_n|^2)=0 \qquad (3.4)$$

證明. $F_n(x)$ の點スペクトルの集合を $x_\nu^{(n)}$ $(\nu=0,1,2\cdots\cdots)$ とし對應する $F_n(x)$ の saltus を $p_\nu^{(n)}$ とする。(3.4) を證明するには，$\sum_\nu(p_\nu^{(n)})^2\to0$ $(n\to\infty)$ を云えばよい。もし

$$\sum_\nu(p_\nu^{(n)})^2>\varepsilon \qquad (3.5)$$

が $n=n_1,n_2,\cdots\cdots$ に對して成立すれば

$$p_{\nu K}^{(n_K)}\geqq\varepsilon \qquad (3.6)$$

なる ν_K がある。何となればすべての ν に對して $p_\nu^{(n_K)}<\varepsilon$ ならば

$$\sum_\nu(p_\nu^{(n)})^2\leqq\max_\nu p_\nu^{(n_K)}\sum_\nu p_\nu^{(n_K)}$$
$$\leqq\max_\nu p_\nu^{(n_K)}<\varepsilon$$

で (3.5) に反するから，今 $\{x_{\nu K}^{(n_K)}\}$ から部分列 $\{x_{\mu K}^{(m_K)}\}$ をとり出し $x_{\mu K}^{(m_K)}\to\xi$ とする。

ξ が有限とすれば $k>k_0(\delta)$ で $\xi-\delta<x_{\mu K}^{(m_K)}<\xi+\delta$ (δ は任意に小) $F_n(x)\to F(x)$ と $F(x)$ を連續とする。

$$F(\xi+\delta)-F(\xi-\delta)$$
$$=\lim_{k\to\infty}[F_{\mu K}(\xi+\delta)-F_{\mu K}(\xi-\delta)]$$
$$\geqq\varlimsup_{k\to\infty}p_{\mu K}^{(m_K)}\geqq\varepsilon$$

$\delta\to0$ として $F(\xi+0)-F(\xi-0)\geqq\varepsilon$. 卽ち $F(x)$ が連續なることに反する。

次に $\xi=+\infty$ とする。卽ち $x_{\mu K}^{(m_K)}\to\infty$ とする。そうすると (3.6) は

$$F_{mK}(x_{\mu K}^{(m_K)}+0)-F_{mK}(x_{\mu K}^{(m_K)}-0)\geqq\varepsilon$$

を意味し，從つて

$$F_{mK}(x_{\mu K}^{(m_K)}-0)\leqq1-\varepsilon$$

$x_{\mu K}^{(m_K)}\to\infty$ であるから任意の定まつた x に對して

$$F_{mK}(x)\leqq1-\varepsilon.$$

$k\to\infty$ として $F(x)\leqq1-\varepsilon$. $x\to\infty$ として $F(+\infty)\leqq1-\varepsilon$. これは $F(x)$ が分布函數であるということに反する。

$\xi=-\infty$ のときも同様である。

定理 7 の逆は必ずしも成立しない。これは容易である。しかし $\{\sigma_K(x)\}$ を分布函數列としたとき $F_n(x)=\sigma_1(x)*\cdots*\sigma_n(x)$ のときは逆も成立することが示される。卽ち

定理 8. $F_n(x)=\sigma_1(x)*\cdots*\sigma_n(x)$ ($\sigma_\nu(x)$ は分布函數) とし $F_n(x)$ は一つの分布函数 $F(x)$ に收斂するとする。そのとき $F(x)$ が連續であるための必要充分な條件は $\mathfrak{M}(|f_n|^2)\to0$ なることである。こゝに $f_n(t)$ は $F_n(x)$ の特性函數である。

證明. $\mathfrak{M}(|f_n|^2)\to0$ が充分條件なることを示せばよい。$\sigma_k(x)$ の特性函數を $\varphi_k(t)$ とすると $f_n(t)=\prod_1^n\varphi_K(t)$ で $f_n(t)$ は $F(x)$ の特性函數 $f(t)$ に任意の有限區間で一様に收斂する。卽ち $f(t)=\prod_1^\infty\varphi_k(t)$. $|\varphi_k(t)|\leqq1$ であるから

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f_n(t)|^2dt=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\prod_1^n\varphi_k(t)\right|^2dt$$
$$\geqq\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt.$$

故に $T\to\infty$ として

$$\mathfrak{M}(|f_n|^2)\geqq\mathfrak{M}(|f|^2).$$

$n\to\infty$ として左邊が 0 へ收斂するから $\mathfrak{M}(|f|^2)=0$. よつて證せられた。

定理 9. $F_n(x)=\sigma_1(x)*\cdots*\sigma_n(x)$ が一つの分布函数 $F(x)$ に收斂し，$F_n(x)$，$F(x)$ の特性函數を夫々 $f_n(t)$，$f(t)$ とすれば

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}(|f_n|^2)=\mathfrak{M}(|f|^2) \qquad (3.7)$$

これを證明するまえに次の事實を注意しておこう。

補助定理 1. $f(t)$ を特性函数とし對應する平均濃度函数を

$$C(h)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty |f(t)|^2\frac{\sin^2 ht}{ht^2}dt \qquad (3.8)$$

とすると

(i) $C(h)$ は h の單調增加函數である。

(ii) $\lim_{h\to\infty}C(h)=1$,

(iii) $\lim_{h\to 0}C(h)=\mathfrak{M}(|f|^2)$.

これはよく知られている。(筆者，フーリエ解析と確率論參照)

定理9を示そう。$\sigma_k(x)$ の特性函数を $\varphi_K(t)$ とすると

$$f_n(t)=\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)\cdots\varphi_n(t)$$

で f_n に對する平均濃度函數を $C(h,f_n)$ とすると，明らかに補助定理 (i) 及び $f(t)=\prod_1^\infty f_n(t)$ とするとき $|f|^2\leqq|f_1\cdots f_n|^2$ であることから

$$C(h;f_n)\geqq\mathfrak{M}(|f_n|^2)\geqq\mathfrak{M}(|f|^2) \qquad (3.9)$$

$n\to\infty$ として $C(h;f_n)\to C(h;f)\,(h>0)$ に注意すると

$$C(h;f)\geqq\overline{\lim}\,\mathfrak{M}(|f_n|^2)\geqq\underline{\lim}\,\mathfrak{M}(|f_n|^2)\geqq\mathfrak{M}(|f|^2).$$

任意の $h>0$ に對して成立するから $h\to0$ として補助定理の (iii) から

$$\mathfrak{M}(|f|^2)\geqq\overline{\lim}\,\mathfrak{M}(|f_n|^2)\geqq\underline{\lim}\,\mathfrak{M}(|f_n|^2)\geqq\mathfrak{M}(|f|^2).$$

よつて證せられた。

定理 10. $f_1(t),\cdots f_n(t)$ を n 個の特性函數とすると

$$\mathfrak{M}(f_1\cdot f_2\cdots f_n|^2)\geqq\mathfrak{M}(|f_1|^2)\cdot\mathfrak{M}(|f_2|^2)\cdots\mathfrak{M}(f_n|^2). \qquad (3.10)$$

證明. $n=2$ のときを證明すればよい。f_1, f_2 を夫々分布函數 $F_1(x)$, $F_2(x)$ に對する特性函數とする。$F_K(x)*F_K(x)=\widetilde{F}_K(x)$ (對稱化した分布函數) の特性函數は $|f_K(t)|^2$ で，その原點における saltus が $\mathfrak{M}(|f_K|^2)$ に等しい。今 $\widetilde{F}_K(x)$ の點スペクトルを $x_\nu^{(K)}(\nu=0,1,2\cdots)$ とし $x_0^{(K)}=0$ とする。$x_\nu^{(K)}$ に對する $\widetilde{F}_K(x)$ の saltus を $p_\nu^{(K)}(\nu=0,1,\cdots\cdots)$ とする。

$$|f_K|^2=\sum_{\nu=0}^\infty p_\nu^{(K)}e^{ix_\nu^{(K)}t}+\int_{-\infty}^\infty e^{ixt}dG_K(x) \qquad (3.11)$$

とかける。こゝに $G_k(x)$ は連續な有界な單調增加函數である。

$$\mathfrak{M}(|f_1f_2|^2)=\mathfrak{M}\Big(\sum_{\mu=0}^\infty p_\mu^{(1)}e^{ix_\mu^{(1)}t}\cdot\sum_{\nu=0}^\infty p_\nu^{(2)}e^{ix_\nu^{(2)}t}\Big)$$

$$=\mathfrak{M}\Big(\sum_{\mu,\nu=0}^\infty p_\mu^{(1)}p_\nu^{(2)}e^{i(x_\mu^{(1)}+x_\nu^{(2)})t}\Big).$$

$\lambda\neq0$ で $\mathfrak{M}(e^{i\lambda t})=0$ であるから

$$=\sum_{x_\mu^{(1)}+x_\nu^{(2)}=0}p_\mu^{(1)}p_\nu^{(2)}\geqq p_0^{(1)}p_0^{(2)}$$

$$=\mathfrak{M}(|f_1|^2)\mathfrak{M}(|f_2|^2).$$

よつて證明された。

分布函數 $F_K(x)$ の特性函數が $f_k(t)$ であるとする。$F_k(x)$ の點スペクトルを $x_\nu^{(k)}(\nu=0,1,\cdots\cdots)$ とする。$M^{(k)}$ を $\sum\alpha_\nu x_\nu^{(k)}$ なる形の數の集合とする。($\sum$ は有限個の和を表わし，α_ν は整數) 即ち $x_\nu^{(k)}$ から作られた Module が $M^{(k)}$ である。$Z_k\in M^{(k)}$ で $Z_1+Z_2+\cdots\cdots+Z_n=0$ ならば常に $Z_1=\cdots\cdots=Z_{pn}=0$ なるとき module $M^{(k)}(=1,2\cdots\cdots n)k$ は一次的に獨立であるといわれる。

定理 11. $M^{(k)}$ が一次的獨立ならば

$$\mathfrak{M}(|f_1\cdots f_n|^2)=\mathfrak{M}(|f_1|^2)\cdots\mathfrak{M}(|f_n|^2). \qquad (3.12)$$

證明. $F_k(x)$ の點スペクトル $x_\nu^{(k)}$ における saltus が $p_\nu^{(k)}$ であるとき，

$$\mathfrak{M}(|f_1\cdots f_n|^2)=\mathfrak{M}\Big|\sum_\lambda p_\lambda^{(1)}e^{ix_\nu^{(1)}t}\cdot\sum_\mu p_\mu^{(2)}e^{ix_\mu^{(2)}t}\cdots\sum_\nu p_\nu^{(n)}e^{ix_\nu^{(n)}t}\Big|^2$$

$$=\mathfrak{M}\Big|\sum_{\lambda,\mu,\cdots\nu}p_\lambda^{(1)}\cdots p_\nu^{(n)}e^{i(x_\lambda^{(1)}+\cdots+x_\nu^{(n)})t}\Big|$$

$$=\sum_K\Big(\sum_{x_\lambda^{(1)}+\cdots+x_\nu^{(n)}=y_K}p_\lambda^{(1)}\cdots p_\nu^{(n)}\Big)^2.$$

こゝに外側の $\sum$ は $x_\lambda^{(1)}+\cdots+x_\nu^{(n)}=y_k$ なる如きすべての y_k の値に對して和をとることを意

味する。$M^{(K)}$ が一次的に獨立であるから，y_λ が $x_\lambda^{(1)}+\cdots+x_\nu^{(n)}$ の形の二通りに表わされることがないから上式は

$$=\sum_{\lambda,\mu,}\sum_{\nu}(p_\lambda^{(1)}\cdots p_\nu^{(n)})^2=\sum_\lambda(p_\lambda^{(1)})^2\cdots\sum_\nu(p_\nu^{(n)})^2$$

$$=\mathfrak{M}(|f_1|^2)\cdots\mathfrak{M}(|f_n|^2).$$

次に無限結合函数の連續性に關する事實として，P. Lévy の定理がある。今分布函数 $F_k(x)$ の點スペクトルにおける saltus を $p_\nu^{(k)}$ とし，$\max_\nu p_\nu^{(k)}=p^{(k)}$ とおく。

定理 12. **$F_1(x)*F_2(x)*\cdots$ が一つの分布函数 $F(x)$ に收斂するとき，$F(x)$ が連續であるための必要充分な條件は**

$$\prod_{k=1}^{\infty}p^{(k)} \tag{3.13}$$

が 0 へ發散することである。

吾々はこれと同等な次の定理を以上の定理を用いて證明する。

定理 13. **分布函数 $F_K(x)$ の特性函数を $f_K(t)$ とする，$F_1(x)*\cdots*F_n(x)$ が $n\to\infty$ のとき一つの分布函数 $F(x)$ に收斂するとする。そうすると $F(x)$ が連續であるための必要充分な條件は**

$$\prod_{k=1}^{\infty}\mathfrak{M}(|f_K|^2) \tag{3.14}$$

が 0 へ發散することである。

これと定理 11 とが同等であることは

$$\mathfrak{M}(f_K|^2)=\sum(p_\nu^{(k)})^2\leq p^{(k)}\sum p_\nu^{(k)}\leq p^{(k)},$$

$$(p^{(k)})^2\leqq\sum(p_\nu^{(k)})^2=\mathfrak{M}(|f_k|^2)$$

より明らかである。

この證明のため次の事實を用いる。

補助定理 2. **$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots$ を單調に 0 でない値に收斂する數列とする。もし $F_1(x)*F_2(x)*\cdots\cdots$ が收斂すれば，$F_1\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)*F_2\left(\frac{x}{\alpha_2}\right)*\cdots\cdots$ も亦收斂する。**

X_K を分布函数 $F_k(x)$ をもつ獨立な確率變數とすると假定から $\sum X_k$ が收斂し(確率 1 で)，このことから $\sum\alpha_K X_k$ の收斂することが知られてこれから吾々の結果が得られる。$\sum\alpha_K X_k$ の收斂することは

$$\sum_{k=n}^{m}\alpha_k X_k=\alpha_n R_n-\sum_{K=n}^{m-1}\triangle\alpha_K\cdot R_{K-1}-\alpha_m R_{m+1} \tag{3.15}$$

$(R_n=\sum_{k=n}^{\infty}X_k)$ から R_n が確率 1 で 0 へ收斂し，右邊の第 2 項は ($|R_K|<M$ とすると) 絶對値で $M\sum\triangle\alpha_K=M|\alpha_n-\alpha_{m-1}|(\to 0)$ をこえないからである。

定理 13 の證明を行う。今 $F(x)$ が連續とする。そうすると定理 8 から $\mathfrak{M}(|f_1\cdots f_n|^2)\to 0$ 故に定理 9 により $\prod_1^n\mathfrak{M}(|f_K|^2)\to 0.$

次に (3.14) が 0 へ發散するとする。定理 11 の記號を用いて module $M^{(k)}$ を考える。$M^{(k)}$ の要素の數は可附番である。故に $Z_1\epsilon M^{(1)},\cdots\cdots,Z_n\epsilon M^{(n)}$ なるすべては 0 でない $Z_1,\cdots\cdots,Z_n$ に對して

$$\alpha_1 Z_1+\cdots\cdots+\alpha_n Z_n=0$$

なる $(\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_n)$ は n 次元空間 R_n で零測度の集合を作る。よつて $\alpha_1^{(n)}Z_1+\cdots+\alpha_n^{(n)}Z_n\neq 0$ がすべての $Z_K\epsilon M^{(k)}$ $(k=1,2,\cdot n)$ で成立する如き $(\alpha_1^{(n)},\cdots\alpha_n^{(n)})$ がある。なお $n==1,2\cdots\cdots$ に對して $(C\alpha_1^{(n)}\cdots C\alpha_n^{(n)})$ もまた同様な性質をもつこと明らかであるから

$$\alpha_K^{(n)}=a_K a_{K+1}\cdots a_n$$

の形にとることができる。但し a_r は $a_1a_2a_3\cdots\cdots=C(\neq 0)$ $(a_r>1)$ なる如き正數列とする。今 $b_K=\prod_{i=K}^{\infty}a_i$ とすると $b_K=\alpha_K^{(n)}\cdot\prod_{n+1}^{\infty}a_i$ であるから $(b_1,\cdots\cdots b_n)$ も上の $\alpha_K^{(n)}$ と同様な性質をもつ。從つて $F_1\left(\frac{x}{b_1}\right),\cdots\cdots,F_n\left(\frac{x}{b_n}\right)$ の點スペクトルから作る module は一次的に獨立である。n は任意でよいから $F_1\left(\frac{x}{b_1}\right)$, $F_2\left(\frac{x}{b_2}\right)$, $\cdots\cdots$ に對應する任意の有限個のかような module は一次的に獨立である。補助定理により

$$G(x)=F_1\left(\frac{x}{b_1}\right)*F_2\left(\frac{x}{b_2}\right)*\cdots$$

は收斂で $G(x)$ の特性函數は $f_1(b_1t)f_2(b_2t)\cdots\cdots$ であるから

$\mathfrak{M}(|f_1(b_1t)f_2(b_2t)\cdots|^2)$

$\leq\mathfrak{M}(|f_1(b_1t)\cdots f_n(b_nt)|^2)$

これは定理10により

$=\mathfrak{M}(f_1(b_1t)|^2)\cdots\mathfrak{M}(|f_n(b_nt)|^2)$

で，一般に $\mathfrak{M}(|f(at)|^2)=\mathfrak{M}(|f(t)|^2)$ は $\mathfrak{M}$ の定義により明らかであるから

$=\mathfrak{M}(|f_1|^2)\cdots\mathfrak{M}(|f_n|^2)\to 0$ (假定から)

故に G は連續である。(定理8)

さて $b_1>b_2>\cdots\to 1$ であるが今元々 $a_i=a_{ip}$ $\Pi a_{ip}=C_p$ とし $C_p\to 1$ なるようにとれば

$$b_{1,p}>b_{2,p}>\cdots\to 1$$

且つ $b_{\cdot,p}\to 1$ である。$(p\to\infty)$

さて今 $Y_p=\sum_{n=1}^{\infty}b_{np}X_n$ とおけば

$$Y_p-Y_q=\sum_{n=1}^{\infty}(b_{np}-b_{nq})X_n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\triangle(b_{np}-b_{nq})\cdot S_n\quad(S_n=\sum_1^n X_K)$$

で $\triangle(b_{np}-b_{nq})<0$ なるようにとつておけば(可能)，確率 η を除いて (η は任意)

$$|Y_p-Y_q|\leq M(b_{1q}-b_{1p})\leq M(1-b_{1p})<\varepsilon,\quad (p<q). \qquad (3.16)$$

こゝに p を充分大とし $1-b_{1p}<\frac{\varepsilon}{M}$ とした。又確率 η を除いて $|S_K|\leq M$ $(K=1,2\cdots)$ とした。今 (3.16) の成立するような p をとる。これは明らかに q に無關係である。そうすると

$$P(x-\delta<Y_q<x+\delta)$$
$$=P(x-\delta<Y_q<x-\delta,\ |Y_p-Y_q|>\varepsilon)$$
$$+P(x-\delta<Y_q<x-\delta,\ |Y_p-Y_q|<\varepsilon)$$
$$\leq P(|Y_p-Y_q|>\varepsilon)$$
$$+P(x-\delta-\varepsilon<Y_p<x+\delta+\varepsilon)$$
$$\leq\eta+P(x-\delta-\varepsilon<Y_p<x+\delta+\varepsilon).$$

Y_p の分布函数が連續であるから任意の x に對して，δ, ε を充分小さくとれば，右辺の第2項は如何程でも小となる。故に

$$P(x-\delta<Y_q<x+\delta)<2\eta$$

とすることができる。$q\to\infty$ として $Y_q\to\sum X$ であるから (3.15) から容易である)

$$\therefore\quad P(x-\delta<\sum X<x+\delta)\leq 2\eta$$

即ち $\sum X$ は連續な分布函数をもつ。

§ 4. 純不連續分布函数列

次の定理を證明する。實は Pure theorem よりも弱い定理であるが，前節の諸種の定理の應用として證明をあたえよう。

定理 13. $F_n(x)$ を分布函数列とし，その Lebesgue 分解を

$$F_n(x)=\alpha_nG_n(x)+\beta_nH_n(x) \qquad (4.1)$$

とする。こゝに $G_n(x)$ は純不連續分布函数，$H_n(x)$ は連續な分布函数で，$\alpha_n+\beta_n=1$. 今 $F_1(x)*F_2(x)*\cdots$ が一つの分布函数 $F(x)$ に收斂するとし，$F(x)$ の Lebesgue 分解を

$$F(x)=\alpha G(x)+\beta H(x) \qquad (4.2)$$

とする。$G(x)$, $H(x)$ は夫々純不連續，連續分布函数である。そうするともし $\alpha>0$ ならば

$$\prod_1^{\infty}\alpha_n=\alpha \qquad (4.3)$$

$$G_1(x)*G_2(x)*\cdots=G(x) \qquad (4.4)$$

である。

證明．今 $F_1*\cdots*F_n=F^{(n)}(x)$, $G_1*\cdots*G_n=G^{(n)}(x)$, とし，$F_n(x)$, $F^{(n)}$, $F(x)$, $G_n(x)$, $G^{(n)}(x)$, $G(x)$, $H(x)$ の特性函数を夫々 $f_n(t)$, $f_{(n)}(t)$, $f(t)$, $g_n(t)$, $g_{(n)}(t)$, $g(t)$, $h(t)$ とする。$F^{(n)}(x)$ を分解すると，その純不連續部分 $G^{(n)}(x)$ になることは容易にわかる。即ち

$$F^{(n)}(x)=a_nG^{(n)}(x)+b_nu_n(x) \qquad (4.5)$$

($u_n(x)$ は連續)，今適當な $\{n\}$ の部分列 $\{n_K\}$ をとつて，選擇定理から $a_{n_K}\to a^*$, $G^{(n)}(x)\to G^*(x)$, $b_{n_K}\to\beta^*$, $u_{n_K}(x)\to H^*(x)$ とすることができる。$F^{(n_K)}(x)\to F(x)$ であるから (4.5) から

$$\mathfrak{M}(|f_{(n)}(t)|^2)=a_{n_K}{}^2\mathfrak{M}(|g_{(n)}|^2)$$

で，從つて定理8により $n_K\to\infty$ として $(n=n_K$ ととつて)

$$\mathfrak{M}(|f|^2)=\alpha^{*2}\mathfrak{M}(|g^*|^2) \qquad (4.6)$$

(g^* は G^* の特性函数)。又

$$H^*(x)=\gamma_1\Phi_1(x)+\gamma_2\Phi_2(x)$$

(Φ_2：連續，Φ_1：純不連續) とすると (4.5) から

$$F(x)=\alpha^*G^*(x)+\beta^*(\gamma_1\Phi_1(x)+\gamma_2\Phi_2(x)) \tag{4.7}$$

さて今 G^* が純不連続としよう。

$$\mathfrak{M}(|f|^2)=\mathfrak{M}(|\alpha^*g^*+\beta^*\gamma_1\varphi_1|^2)$$

(こゝに φ_1 は Φ の特性函数) でこれは，もし $\gamma_1>0$ ならば實際に

$$\mathfrak{M}(|\alpha^*g^*|^2)=\alpha^{*2}\mathfrak{M}(|g|^{*2})$$

より大となる。これは (4.6) に反する。故に $\gamma_1=0$. 卽ち $H^*(x)$ は連續である。Lebesgue 分解は一意であるから (4.7) から

$$\alpha=\alpha^*,\quad G(x)=G^*(x)$$

となり $\alpha>0$ から

$$F_1(x)*F_2(x)*=F(x)$$

を得る。又 $\alpha=\Pi\alpha_K$ は明らかである。

次に $G^*(x)$ が事實純不連續であることを示そう。これには $G_n(x)$ が純不連續で，$G_1*G_2*\cdots\cdots=G$ としたとき，もし G が不連續部分をもてば，G は實は純不連續であることを示せばよい。今

$$G=(G_1*\cdots\cdots*G_n)*(G_{n+1}*\cdots\cdots)$$
$$=G^{(n)}(x)*V_n(x)$$

とし G_K の特性函数を $g_k(t)$ とすると，G が連續でないから定理 12 により

$$\prod_{K=1}^{\infty}\mathfrak{M}(|g_K|^2)$$

は收斂する。故に n を充分大きくとれば

$$\prod_{k=n+1}^{\infty}\mathfrak{M}(g_K|^2)>1-\varepsilon,\quad n=n(\varepsilon).$$

もし $V_n(x)$ が連續部分をもてば

$$V_n(x)=c_nV_{n,1}(x)+d_nV_{n,2}(x)$$

なる分解を考えると，($V_{r,1}$ は不連續部分，$V_{n,2}$ は連續部分)

$$G(x)=a_nG^{(n)}(x)*V_n^{(1)}(x)$$
$$+b_nG^{(n)}(x)*V_n^{(2)}(x).$$

この右邊の第 1 項は $G^{(n)}$ が純不連續であるから又純不連續，第 2 項は連續で，而もこの分解は一意であるから

$$G(x)=aS(x)+bT(x)$$

を G の Lebesgue 分解とすると

$$a=a_n.$$

卽ち a_n は n に無關係である。假に $b>0$ とすると $a<1$ である。今 ε を $a^2<1-\varepsilon$ としておく。そして $G^{(n)}$, V_n の特性函数を $g_{(n)}(t)$, $v(t)$ とすると

$$\mathfrak{M}(|g|^2)=m(|g_{(n)}(t)\cdot v_n(t)|^2)$$
$$\geqq\mathfrak{M}(g_{(n)}|^2)\mathfrak{M}(|v_n|^2) \tag{4.8}$$

(定理 9 から). 又 $V_n^{(1)}$ の特性函数を $v_n^{(1)}$ とすると

$$\mathfrak{M}(|g_{(n)}v_n|^2)=a^2\mathfrak{M}(|g_{(n)}v_n^{(1)}|^2) \tag{4.9}$$

で (4.8) の右邊は更に

$$\geqq\mathfrak{M}(|g_{(n)}|^2)\prod_{n+1}^{\infty}\mathfrak{M}(g_K|^2)$$
$$\geqq(1-\varepsilon)\mathfrak{M}(|g_{(n)}|^2) \tag{4.10}$$

又 $\mathfrak{M}(g_{(n)}v_n^{(1)}|^2)\leqq\mathfrak{M}(g_n|^2)$ であるから(4.9), (4.10) から

$$a^2>1-\varepsilon \tag{4.11}$$

となる。$\mathfrak{M}(|g_n|^2)\neq0$ とので一般性を失わぬことは云う迄もない。(4.11)は矛盾である。依つて證明された。

最後にこの定理から次の事實 (純粋定理の特別の場合) が得られる。

定理 14. $F_n(x)$ を純不連續な分布函数とし

$$F_1(x)*F_2(x)*\cdots\cdots=F(x)$$

とすると ($F(x)$ は分布函数 $F(x)$ は純不連續であるか又は連續である。

前の定理で $\alpha_n=0$ であるから (4.2) で $\alpha>0$ とすれば (4.4) から $F(x)$ は純不連續となり，(必然的に $\alpha=1$), $\alpha=0$ ならば $F(x)$ は連續である。依つて證明された。