散亂媒質中の粒子の擴散 : 偶然累加量の確率分布

久保, 亮五
東京大學理學部物理學教室

出版情報：統計数理研究. 3 (1/2), pp.23-32, 1949-12-20. Research Association of Statistical Sciences

散亂媒質中の粒子の擴散

——偶然累加量の確率分布——

久　保　亮　五

東京大學理學部物理學教室

(昭和 24 年 7 月 7 日 受 理)

§ 1.　序

物質中を中性子が擴散してゆくとき，中性子は原子核と衝突してそのエネルギーを失い，且つその運動方向を變えてゆく。我々が知りたいのは，或る中性子源からでた中性子が，媒質の一點において，如何なるエネルギー，運動方向の分布をもつか，或はまた特定の媒質の形に對し，それから逸出する中性子が如何なる分布をもつか，などという問題である。この種の問題では，特に中性子の平均自由行路が長いために，またエネルギー分布を同時に問題とするために，單なる擴散方程式による解以上の知識が要求されるのである。これは，中性子遲緩の問題として有名であつて，Fermi[1]，Ornstein-Uhlenbeck[2]等がかなり以前に論じたところであるが，戰時中，原子力の研究に關連してアメリカにおいて詳細な理論的研究が進められた。

筆者は數年前，マルコフ鎖に伴う偶然累加量の確率分布を取扱う方法を述べ[3]，一次元的物質の統計力學にこれを適用し[4]，更に中性子遲緩の問題をこの觀點から論じた[5]。その後 Marshak[6] による綜合報告を見るに及んで，筆者の結果の大部分がこれと一致していることを知つたので，今まで特に印刷には附することをしなかつた。

しかしこの種の問題は多數の類例をもち，確率論の問題として少なからぬ興味をもつと思われるので，こゝに，Marshak の論文とは多少異る觀點から論じてみたいと思う。最初に一般的な議論をなし，その應用乃至擴張として中性子遲緩の問題を論じよう。なお，嚴密な數學的證明を期することは筆者の苦手なので，この點において頗る不充分なことをあらかじめお斷りしておきたい。讀者諸氏の御教示を願わしく思うところである。

§ 2.　マルコフ過程に伴う偶然累加量

一樣なマルコフ型の確率過程を考えよう。簡單のため，以下では個々の事象は離散的な標識 x で表示されるものとする。最初の事象が x_0 であるとき，$n+1$ 個の繼起事象の系列

$$x_0, x_1, \cdots\cdots x_n = \{x\}_n \tag{1}$$

が現れる確率が，

$$P_r(x_0, x_1, \cdots\cdots x_n) = p(x_0, x_1)\,p(x_1 x_2)\cdots \cdots p(x_{n-1}, x_n) \tag{2}$$

で與えられるものとする。即ち，事象 x が起つた後，引續いて x' の現れる確率が $p(x, x')$ である。このようなマルコフ鎖の一般的な理論はさておいて，こゝに次の問題を考える。

引續いて起る事象，x, x' によつて決定される或る量 $f_i(x, x')$ $(i=1, \cdots k)$ があるとする。f_i は特に x' のみによつて決定される場合をも含む。系列 (1) によつて定まる量

$$F_i(n) = f_i(x_0 x_1) + f_i(x_1 x_2) + \cdots + f_i(x_{n-1}, x_n) \tag{3}$$

は，このマルコフ型確率過程に伴う偶然量であつて，要素的な偶然量 $f_i(x, x')$ の累加量である。我々の問題は，このような偶然量 $F_i(n)$ の確率分布，できればそれらの相関をふくむ完全な同時的分布を求めることである。

特に系列 (1) の各要素が互は獨立，即ち $p(x,$

x') が x によらず，また $f_i(x, x')$ が x' のみの函数，という場合は，單なる獨立な偶然量の和の確率分布を求めることであつて，よく知られている。これに對し，こゝの問題では，各要素が獨立でないところに複雜性があるわけである。

(2) において，$x_1, \cdots x_{n-1}$ の如何を問わず，單に x_0 と x_n との關係，即ち第0番に x_0 が起つたことが既知であるとき，n 番目に x が起る確率 $P_n(x_0|x)$ を問題にすれば，これは明かに

$$P_n(x_0|x) = \sum_{x'} P_{n-1}(x_0|x')p(x', x) \tag{4}$$

なる關係をみたす。今，x_0 が既知として，第 n 番目に x が起り，且つ偶然累加量 $F_i(n)(i=1, \cdots\cdot\kappa)$ がそれぞれ F_i なる値をもつている，という確率を

$$P_n(x_0|x; F_1 \cdots F_k) = P_n(x_0|x, \{F_i\}) \tag{5}$$

と記せば (4) に對應して

$$P_n(x_0|x; \{F_i\}) = \sum_{x'} P_{n-1}(x_0|x', \{F_i - f_i(x', x)\})p(x', x) \tag{6}$$

なる關係が得られる。この基礎方程式を解けば (5) が得られ，それから任意の部分的確率が求められる。

(6) を解くためには，母函數の方法によるのが最も系統的である。まず

$$\sum_{F_1}\cdots\sum_{F_k} P_n(x_0|x, \{F_i\})\exp\{-\sum y_i F_i\} = Q_n(x_0|x, \{y_i\}) \tag{7}$$

なる Laplace 變換を導入する。これは複素平面 y_i の各々について適當な範圍において收斂するものと假定する。この範圍は實際に Q_n が得られるとともに決定される。また

$$R_\lambda(x_0|x, \{y_i\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} Q_n(x_0|x, \{y_i\}) \tag{8}$$

なる母函數を定義する。これらの函數に對して，(6) から，

$$Q_n(x_0|x, \{y_i\}) = \sum_{x'} Q_{n-1}(x_0|x'; \{y_i\})\exp\{-\sum_i y_i f_i(x', x)\} \times p(x', x) \tag{9}$$

$$\lambda\{R_\lambda(x_0|x, \{y_i\}) - Q_0\} = \sum_{x'} R_\lambda(x_0|x, \{y_i\})\exp\{-\sum_i y_i f_i(x', x)\} \times p(x', x) \tag{10}$$

なる方程式が得られる。こゝに，

$$Q_0(x, \{y_i\}) = \delta_{xx_0}\exp\{-\sum' y_i f_i\} \tag{11}$$

但し，δ_{xx_0} は $x = x_0$ のときにのみ1，$x \neq x_0$ ならば0（x が連續的なときには Dirac の δ 函數でおきかえねばならない），また $\sum' y_i f_i$ は，$f_i(x', x)$ のうち x のみできまるような種類の量についての和を表わすと約束する。(同様に $\sum''$ は x', x の兩方によつてきまる種類の量についての和としよう。)

今，
$$\left.\begin{aligned} &\exp\{-\sum' y_i f_i\} = A(x) \\ &\exp\{-\sum'' y_i f_i\}p(x'x) = B(x', x) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

とおく。A, B は $y_1 \cdots y_k$ をパラメーターとして含んでいることに注意する。更に $Q_n(x_0|x; \{y_i\})$，$R_\lambda(x_0|x, \{y_i\})$ を x_0, x 成分にもつ行列と考え，これを單に Q_n，R_λ と記せば，(9), (10) は

$$Q_n = Q_{n-1}BA \tag{9$'$}$$

$$\lambda(R_\lambda - A) = R_\lambda BA \tag{10$'$}$$

また，(11) は

$$Q_0 = A \tag{11$'$}$$

と記される。こゝに A は (12) によつて與えられた要素をもつ對角行列である。

以下，最も普通に現れる場合として，$p(x'x)$，及び f_i のうち本當に x と x' とに關係する量はすべて x, x' に關して對稱的であるとしよう。(對稱的でないとしても，以下の議論は僅かの變更によつて用いられる。) この假定のもとに，行列 B は對稱となる。こゝに，固有値方程式

$$\varphi_\alpha BA = \lambda_\alpha \varphi_\alpha \tag{13}$$

を考えれば，固有ベクトル φ_α は直交關係

$$\sum_x \frac{\varphi_\alpha(x)\varphi_\beta(x)}{A(x)} = \delta_{\alpha\beta} \tag{14}$$

をみたすので，

$$(BA)_{xx'} = \sum_\alpha \lambda_\alpha \varphi_\alpha(x)\varphi_\alpha(x')/A(x)$$

なる展開が成立つ。これから直ちに (9)$'$, (10)$'$ の解として，

$$
\left.\begin{aligned}
Q_n(x_0|x;\{y_i\}) &= \sum_\alpha \lambda_\alpha^n \varphi_\alpha(x_0)\varphi_\alpha(x) \\
R_\lambda(x_0|x;\{y_i\}) &= \sum_\alpha \frac{\lambda}{\lambda-\lambda_\alpha}\varphi_\alpha(x_0)\varphi_\alpha(x)
\end{aligned}\right\} \tag{15}
$$

が得られる。

従つてわれわれの問題の中心は (13) なる固有値問題にあることになる。λ_α 及び φ_α は，$y_1,\cdots,y_k$ をパラメーターとして含んでいる。これらが完全に求められれば母函數が知れ，更に問題の確率は，

$$
P_n(x_0|x;\{F\}) = \int\cdots\int Q_n(x_0|x;\{y_i\}) \exp(\textstyle\sum y_j F_j) \prod_{j=1}^{k} \frac{dy_j}{2\pi i} \tag{16}
$$

なる逆變換によつて計算されよう。この積分は y_j の各複素平面において，もともとの Laplace 變換が收斂するような領域即ち Q_n が正則である範圍において虚數軸に平行な有線上について行われる。この積分路は必要に應じて最も計算しやすい形に適當に變更される。漸近値を得るためには，鞍點法が用いられるし，また，可能な場合には被積分函數の極のまわりの留數，或は枝點をつゝむ路上の積分等に歸せられる。

特に，$n\to\infty$ の漸近解を求めるならば，(15) における絶對値最大の固有値 λ_m だけが知れればよい。即ち，

$$
Q_n(x_0|x;\{y_i\}) \to \lambda_m^n \sum_m \varphi_m(x_0)\varphi_m(x) \tag{17}
$$

こゝに φ_m は λ_m に屬する固有函數を意味する。逆變換 (16) を鞍點法で評價すれば，

$$
P_n(x_0|x;\{F\}) \to \frac{(2\pi)^{\frac{k}{2}}}{\left[n\det\left(\frac{\partial^2\log\lambda_m}{\partial y_j \partial y_l}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} e^{n\log\lambda_m+\Sigma y_j F_j} \{\sum_m \varphi_m(x_0)\varphi_m(x)\} \tag{18}
$$

を得る。但しこゝに y_j は $F_1,\cdots,F_k$ の函數として

$$
n\frac{\partial\log\lambda_m}{\partial y_j}+F_j=0 \tag{19}
$$

なる方程式によつて定義されたものとする。最後の固有函數の中にふくまれる $y_1,\cdots,y_k$ も同樣である。

x_0 と x との確率的な關係はこの最後の項だけで支配される。従つて λ_m が縮退していない限り，x_0 と x との相關は $n\to\infty$ において全く消失する。これはマルコフの定理にほかならない。このとき，固有函數 $\varphi_m(x)$ は，そこに含まれる $y_1,\cdots,y_k$ を通じて，偶然累加量 F_j と x との相關を與えることに注目すべきであろう。これは F_j が指定されているときの x の分布，例えば粒子源からある距離において觀測される粒子の方向分布などを與えるものである。固有値問題として考える一つの利點はこゝにある。

固有値問題を解くことは一般には必ずしも容易なことではない。しかし，例えば，y_i のいくつかを 0 としたときの解が知れるならば，それらのパラメーターに關して行列をべき級數に展開し，攝動法によつて母函數を求めることが可能である。この方法によれば，F_j の分布の能率を逐次，系統的に求めてゆくことができる。これらの 2 次の能率までの計算を行えば，勿論，極限としての正規分布が決定される。

以上に述べた方法は，適當な變更により，統計力學の問題，醉歩の問題，次に述べる粒子の擴散の問題，或は放射性崩壊等，種々の場合に適用される。他の應用については筆者の論文，その他を參照して頂くこととし，具體的に以下，中性子遲緩の問題を考えてみよう。このとき本節の方法がそのまゝでは不足な場合があつて，幾分の擴張を要する。本節の議論との對應は必ずしも一々これを擧げない。讀者の明察に待つこととする。

§ 3. 中性子遲緩の問題：基礎方程式

こゝで特に中性子遲緩の問題を考えるが，その一般的な性格は，中性子に限らず，他の粒子，或は輻射線の散亂等にも共通である。

源からあるエネルギー E_0 をもつ中性子が發射され，周圍の物質中の原子核と衝突し，エネ

ルギーを失い，或はその核に捕獲される。中性子の質量を1として，原子核の質量を M とする。中性子と原子核の衝突は，両者の重心系において等方的であつて，古典力學的な粒子衝突として取扱つて差支えない。重心系における散亂角を $\bar{\gamma}$，觀測座標系における中性子のエネルギーを衝突の前後にそれぞれ E', E とすれば

$$E/E'=1-\frac{2M}{(M+1)^2}(1-\cos\bar{\gamma}) \tag{20}$$

となることは初等的な計算からすぐわかる。觀測座標系における散亂角 γ は

$$\cos\gamma=(1+M\cdot\cos\bar{\gamma})(1+2M\cdot\cos\bar{\gamma}+M^2)^{-1/2} \tag{21}$$

で與えられる。從つて原子核 M との彈性的衝突において γ と $\gamma+d\gamma$ の間の角をもつて散亂される確率は

$$\frac{1}{2}d\cos\bar{\gamma}=\frac{1}{2}\frac{d\cos\bar{\gamma}}{d\cos\gamma}d\cos\gamma$$
$$=\Phi(\cos\gamma)d\cos\gamma \tag{23}$$

によつて與えられる。エネルギー E の代りに

$$E=E_0e^{-x} \tag{24}$$

で定義された x をエネルギー・パラメーターとして用いれば，上述の衝突により x は

$$e^{x'-x}=1-\frac{2M}{(M+1)^2}(1-\cos\bar{\gamma}) \tag{20'}$$

によつて定められる變化を受ける。

媒質中に種々の原子核が存在する場合も取扱われるが，特に簡單のため，以下原子核は唯1種であるとし，中性子に對するその散亂及び捕獲の斷面積を σ_s, σ_c とおく。これらは一般には E, 從つて x の函数である。單位體積中の原子核の数を n とすれば，散亂及び捕獲に對する平均自由行路は

$$l_s=(n\sigma_s)^{-1},\quad l_c=(n\sigma_c)^{-1}$$

で與えられる。中性子が飛行距離 l と $l+dl$ の間において散亂を受ける確率は

$$\exp\{-n(\sigma_s+\sigma_c)l\}\times n\sigma_s dl \tag{25}$$

となる。或はこれを時間的にみれば，自由な飛行時間 Δt と $\Delta t+d\Delta t$ の間において散亂される確率として

$$\exp(-\Delta t/\tau)\frac{d\Delta t}{\tau_s}=fe^{-\Delta t/\tau}\frac{d\Delta t}{\tau} \tag{26}$$

を得る。こゝに

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\tau}=nv(\sigma_s+\sigma_c),\quad \frac{1}{\tau_s}=nv\sigma_s\\&\tau v=l,\quad \tau_s v=l_s\\&f=\frac{\sigma_s}{\sigma_s+\sigma_c}=\frac{l}{l_s}\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

(v は中性子の速さ）である。

點狀の源から $t=0$ に出發した中性子が，n 回目の衝突を $(t, t+dt)$, $(r, r+dr)$, $(x, x+dx)$ なる時間，位置エネルギーにおいて行い，速度方向 e (e は單位ベクトル）の附近の立體角素片 de に散亂される確率を

$$P_n(x,r,t;e)dxdrdtde$$

とおけば，

$$P_n(x,r,t,e)=\iint\limits_{\Delta t=0}^{t}P_{n-1}(x',r-v'e'\Delta t,t-\Delta t,e')$$
$$\times\Phi(\cos\gamma)de'e^{-\Delta t/\tau'}f'd\Delta t/\tau' \tag{28}$$

なる方程式が成立つ。こゝに v', τ', f' はエネルギー・パラメーター x' に對する v,τ 及び f の値，γ は $e'\to e$ の散亂角，即ち $\gamma=\angle(e'e)$ を意味する。特に源からの出發自身を第0回の衝突とみて，

$$P_0(x,r,t;e)=\delta(x)\delta(r)\delta(t)\phi_0(e) \tag{29}$$

とおく。こゝに δ は Dirac の δ 函数，$\phi_0(e)$ は源から出發する中性子の方向分布を表わす。即ち，われわれは粒子の毎回の衝突をマルコフ過程の要素とし，x, r, t をそれに伴う偶然量，$x-x'$, $\Delta r=v'e'\Delta t$, Δt の累加量とみたのである。

§2の一般論に從い，まず r, 及び t に對する Laplace 變換

$$\mathfrak{P}_n(x,k,s,e)$$
$$=\int_0^\infty dt\iiint_{-\infty}^{\infty}drP_n(x,r,t,e)\exp(-kr-st) \tag{30}$$

を定義する。考える r の範圍に何等制限がない場合，即ち無限にひろがつた媒質中の原點に點

狀の源があるとすれば，(23) は容易に

$$\mathfrak{P}_n(x,k,s,e)=\int\mathfrak{P}_{n-1}(x',k,s;e')\frac{\Phi(\cos\gamma)f'}{1+s\tau'+l'(k,e')}de' \tag{31}$$

に變換される。こゝに $l'=v'\tau'$，及び τ'，f' は一般には x' の函數である。また (29) からは，

$$\mathfrak{P}_0(x,k,s,e)=\delta(x)\phi_0(e) \tag{32}$$

衝突の回數 n を問題にしなければ，

$$P(x,r,t;e)dt=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x,r,t;e)dt \tag{33}$$

は dt なる時間のうちに，x，r の附近でともかく衝突を起し，e 方向の附近に散亂される確率密度を與える。これを變換した函數を (30) にならい $\mathfrak{P}$ とおけば，これは

$$\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_0=\int\mathfrak{P}(x',k,s;e')\frac{\Phi(\cos\gamma)f'}{1+s\tau'+l'(ke')}de' \tag{34}$$

をみたす。

こゝに用いられた函數 P_n は，物理的に重要な他の確率函數の基礎をなしている。P_n の代りに n 回の衝突を經た中性子が時刻 t に，變數 x，r，e の附近の素片に存在する確率を問えば，それは

$$\begin{aligned}&\overline{P}_n(x,r,e;t)dxdrde\\&=\int_0^t P_n(x,r-ve\Delta t,t-\Delta t;e)e^{-\Delta t/\tau}d\Delta t dxdrde\end{aligned} \tag{35}$$

で與えられることは明らかであろう。もし衝突數を問題にせず，單に時刻 t における分布を問うならば，

$$\overline{P}(x,r,e,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{P}_n(x,r,e,t) \tag{36}$$

がその確率密度である。源から單位時間に q 個の粒子が發射されつゞけているときの定常分布は

$$N_n(x,r,e)=q\int_0^{\infty}\overline{P}_n(x,r,e,t)dt \tag{37}$$

$$N(x,r,e)=\sum_{n=0}^{\infty}N_n(x,r,e) \tag{38}$$

によつて表わされる。また，出發後，時刻 t，位置 r において，x と $x+dx$ の間のエネルギー・パラメーター及び方向 de をもつ流れは

$$J(x,r,e,t)dxde=v\overline{P}(x,r,e,t)dxde \tag{39}$$

で與えられる。

これらの函數に對して (28) もしくは (29) から導かれる $P=\sum P_n$ に對する方程式と同次の式を導くことは容易である。例えば (36) に對しては

$$\begin{aligned}\overline{P}-\overline{P}_0=&\iint\overline{P}(x',r-ve\Delta t,e',t-\Delta t)\\&\Phi(\cos\gamma)de'(f'/\tau')e^{-\Delta t/\tau}d\Delta t\end{aligned}$$

$$\overline{P}_0=\delta(x)\delta(r-vet)\phi_0(e)e^{-t/\tau} \tag{40}$$

が得られる。

變換 (30) に對應する變換により

$$\left.\begin{aligned}&\mathfrak{P}_n(x,k,e;s)=\frac{\tau}{1+s\tau+l(ke)}\mathfrak{P}_n(x,k,s,e),\\&\mathfrak{N}_n(x,k,e)=q\overline{\mathfrak{P}}_n(x,k,e;0)\\&\qquad=\frac{q\tau}{1+l(ke)}\mathfrak{P}_n(x,k,0;e)\\&\mathfrak{J}(x,k,e\cdot s)=\frac{l}{1+s\tau+l(ke)}\mathfrak{P}(x,k,s;e)\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

等を得る。これらに對する方程式は (40) 等，或は (31)，(34) から與えられる。例えば，

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{P}}-\overline{\mathfrak{P}}_0=&\frac{\tau}{1+s\tau+l(ke)}\int\overline{\mathfrak{P}}(x',k,s;e')\\&\Phi(\cos\gamma)(f'/\tau')de'\end{aligned} \tag{42}$$

などとなる。(42) は微分積分方程式，

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\overline{P}}{\partial t}+ve\,\mathrm{grad}_r\overline{P}\\&=-\frac{\overline{P}}{\tau}+\int\overline{P}(x',r,e',t)\Phi(\cos\gamma)(f'/\tau')de'\end{aligned} \tag{43}$$

$$\overline{P}(x,r,e;0)=\delta(x)\delta(r)\phi_0(e)$$

(r の變域は $-\infty$ から ∞) と全く同等である。(43)は普通に用いられる微分形の輸送方程式に他ならない。逆に (40) から (42) を直接に導出することも容易である。(40) は (43) の積分形で，r の變域に境界がある場合にはいわゆる Milne の方程式と稱せられるものを與えるのである[3]。

無限にひろがつた媒質中の問題に限れば，結局(31) 又は (34) をとけばよい。これから$\mathfrak{P}_n$，或は $\mathfrak{P}$ なる函数が求められれば，必要な他の分布函数は (41) によつて定められる。

§ 4. 一般的な解法

(34) を解くために (41) の定義に従い

$$\mathfrak{P}(x,k,s,e)=(1+s\tau+l(ke))\overline{\mathfrak{P}}(x,k,s,e)/\tau \qquad (44)$$

を代入すれば

$$(1+s\tau+l(ke))\frac{\overline{\mathfrak{P}}}{\tau}=\delta(x)\phi_0(e)+\int\overline{\mathfrak{P}}(x',k,s,e')\Phi(\cos\gamma)(f'/\tau')de' \qquad (45)$$

となる。こゝに (20′) により

$$\Delta x(\gamma)=x-x'=\log\left\{1-\frac{2M}{(M+1)^2}(1-\cos\gamma)\right\} \qquad (46)$$

は γ の函数であつて，γ の變化に伴い，0 から $2\log\dfrac{M+1}{M-1}$ までの値をとる。$M\gg1$ ならば右邊の積分を展開して，Fokker-Planck 型の微分方程式で近似することも可能であるが，こゝではなるべく一般的に考えてみよう。そのため

$$\Psi(y,k,s,e)=\int_0^\infty e^{-yx}\overline{\mathfrak{P}}(x,k,s;e)\frac{1}{\tau}dx \qquad (47)$$

なる變換を行う。一般に Laplace 變換に對し，

$$\mathfrak{L}f=\int_0^\infty e^{-yx}f(x)dx,\quad \mathfrak{L}g=\int_0^\infty e^{-yx}g(x)dx$$

なるとき

$$\mathfrak{L}f*\mathfrak{L}g=\int_0^\infty e^{-yx}f(x)g(x)dx \qquad (48)$$

と記すことにしよう。これはよく知られた convolution の逆である。特に $g=c=$常數ならば

$$\mathfrak{L}f*\mathfrak{L}c=\mathfrak{L}f*\frac{c}{y}=c\mathfrak{L}f \qquad (49)$$

である。この記法を用い，(47)によつて(45)を變換すれば，

$$(1+s\mathfrak{L}\tau^*+(ke)\mathfrak{L}l^*)\Psi(y,k,s,e)=\phi_0(e)+\mathfrak{L}f^*\int\Psi(y,k,s;e)e^{-y\Delta x(\gamma)}\Phi(\cos\gamma)de' \qquad (50)$$

となる。こゝに

$$\mathfrak{L}\tau=\int_0^\infty e^{-yx}\tau(x)dx,\quad \mathfrak{L}l=\int_0^\infty e^{-yx}l(x)dx,\quad \mathfrak{L}f=\int_0^\infty e^{-yx}f(x)dx \qquad (51)$$

である。次にベクトル k を軸として，Ψ を e の函数として，球面調和函数に展開する。即ち

$$\Psi(y,k,s,e)=\sum_0^\infty\psi_{jm}P_j^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \qquad (52)$$

また，積分變換の核を

$$\left.\begin{aligned}&e^{-y\Delta x(\gamma)}\Phi(\cos\gamma)=\sum_0^\infty\frac{2j+1}{4\pi}C_j(y)P_j(\cos\gamma)\\&C_j(y)=\iint e^{-y\Delta x(\gamma)}\Phi(\cos\gamma)P_j(\cos\gamma)d\omega\end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

と展開すれば，(50) は，

$$\begin{aligned}&(1+s\mathfrak{L}\tau^*)\psi_{jm}\\&\quad+k\mathfrak{L}l^*\left(\frac{j-m+1}{2j+3}\psi_{j+1,m}+\frac{j+m}{2j-1}\psi_{j-1,m}\right)\\&=\phi^0_{jm}+\mathfrak{L}f^*\{\psi_{jm}C_j\}\\&\quad j=0,1,2,\cdots,\ m=-j,-j+1,\cdots,+j\end{aligned} \qquad (54)$$

となる。こゝに ϕ^0_{jm} は最初の粒子方向分布 $\phi_0(e)$ の展開係數である。

τ，又は l，及び f を x の任意の函数として (50) 又は (54) を解くことは極めて困難である。これがともかく正確に或は近似的に解かれる場合について次に述べよう。

§ 5. a. エネルギー分布

$k=0$，とおけば，空間的分布を問題にしないことになる。このとき (54) は異る j, m について分離され，特に

$$(1+s\mathfrak{L}\tau^*)\psi_{00}=1+\mathfrak{L}f^*(C_0\psi_{00}) \qquad (55)$$

の解 $\psi_{00}(y,o,s)$ が源から出た粒子の時刻と，エネルギーの關係を與える。更に $s=0$ とおいた方程式

$$\psi_{00}=1+\mathfrak{L}f^*(C_0\psi_{00}) \qquad (55')$$

は，(41) により定常的なエネルギー分布

$$\int \mathfrak{N}(x,0,e)\,de=N(x)$$

に對する母函數に關係する。$f(x)=\text{const}=f$ ならば (55′) の解は直ちに求められる。即ち (46)，(53) から

$$G_0(y)=\int e^{-y\Delta x}\Phi(\cos\gamma)\,d\omega=\frac{1-p^{1+y}}{(1-p)(1+y)} \tag{56}$$

但し

$$p=\left(\frac{M-1}{M+1}\right)^2$$

となるから，

$$\varphi_{00}=\frac{1}{1-f\dfrac{1-p^{1+y}}{(1-p)(1+y)}} \tag{57}$$

従つて，(41)から，定常的なエネルギー分布函數として，

$$N(x)=q\tau\,\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{xy}}{1-f\dfrac{(1-p^{1+y})}{(1-p)(1+y)}}\,dy \tag{58}$$

を得る。$p=0$ ならば，被積分函數は $1+(f/1+y-f)$ となり，$y=-(1-f)$ を極にもつ。$p\neq 0$ 且つ $f=1$ なるときには，$y=0$ 及び $\Re y<0$ の範圍に無限個の極（但し $y=-1$ は極でない）をもつ。(58)の積分路は，これらの極の右側に位する虚數軸に平行な直線，或は，これらすべての極を包む曲線とおくことができる。このようにして，計算はすべての極のまわりの留數の計算となる。$p\neq 0$ のときは實際上，すべての留數を決定することは面倒である。$x\to\infty$ の漸近値は，最も右側の一つの極で決定される。$f=1$ のときは $y=0$ における留數から直ちに

$$N(x)\to q\tau/\{1+(p\log p/1-p)\} \tag{59}$$

を得る。反對に x が小さいときの様子は

$$\left\{1-\frac{f(1-p^{1+y})}{(1-p)(1+y)}\right\}^{-1}$$
$$=\left\{1-\frac{f}{(1-p)(1+y)}\right\}^{-1}\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n f^n p^{n(1+y)}}{(1-f)^n\left(1+y-\dfrac{1}{1-p}\right)^n}$$

なる展開において，$y=-1$ の周りの留數計算を行うことによつて容易に求められる*。(N/x) は x が $\log 1/p$ の整數倍に等しいところで不連續的な變化を伴い，波打ちながら速かに漸近値に近づく。

散亂物質が種々の原子核の混合である場合にも，f が一定なる限り同樣に取扱われる。f が一定でない場合には，$p=0$，即ち水素原子核による遅緩の場合にのみ正確な解が容易に知れるが，その他の場合では，f が x とともにゆつくり變るか，或は極めて速かに變るかに從つて，適當な近似的方法が用いられる。特に $f\propto 1/v$（v 速度）の場合は Placzek[9] によつて取扱われている。これらの問題には，これ以上立入ることはやめよう。

§ 5. b. 空間的分布（平均自由行路一定）

時刻を問わず，定常的分布だけを問題とすれば，(50) において，$s=0$ とおけばよい。しかしそれでも，f 及び l が任意の函數であつては一般的な解法は困難である。まず $f=1$，即ち捕獲がないものとし，更に l もエネルギーに無關係であるとしよう。このとき (50) は，

$$\{1+l(ke)\}\Psi=\phi_0(e)+\int\Psi(y,k,0,e')e^{-y\Delta x(\gamma)}\Phi(\cos\gamma)\,de' \tag{60}$$

となる。

これに關連する固有値問題は，

$$\lambda_a\{1+l(ke)\}\psi_a(e)=\int\psi_a(e')e^{-y\Delta x(\gamma)}\Phi(\cos\gamma)\,de' \tag{61}$$

である。この固有函數系によつて，(60) の解は

$$\Psi(y,k,0;e)=\sum_a\frac{\psi_a(e)}{1-\lambda_a}\int\psi_a(e')\phi_0(e')\,de' \tag{62}$$

で與えられる。この形は特に $x\to\infty$ のときの漸近的な樣子をみるのに便利であることに注目すべきであろう。即ち，$x\to\infty$ における性質は

* この方法は Placzek の用いたものよりも簡明である。[5]

Tauber の定理により，$y\to 0$ の附近の様子できまる。(61) を (54) と同じく展開した形でかけば，

$$\psi_{\alpha jm}+kl\left\{\frac{j-m+1}{2j+3}\psi_{\alpha,j+1,m}+\frac{j+m}{2j-1}\psi_{\alpha,j-1,m}\right\}=\frac{C_j(y)}{\lambda_\alpha}\psi_{\alpha,j,m} \qquad (63)$$

この固有値 λ_α は k の函數であつて，$k=0$ では $\lambda_j=C_j(y)$ は $2j+1$ 重に縮退し，k の増加とともにこれが分れてゆく，(53) から，$\Re y\geqq 0$ に對して，

$$|C_j(y)|\leqq\int e^{-\Re y\Delta x}\Phi(\cos\gamma)P_j(\cos\gamma)d\omega$$
$$\leqq\int\Phi(\cos\gamma)P_j(\cos\gamma)d\omega$$
$$<\int\Phi(\cos\gamma)d\omega=1.$$

また

$$C_0(0)=1,\quad |C_0(y)|<1(\Re y>0)$$

であるから，$k\sim 0$ に對して，(62) の右邊の各項の $\lambda_\alpha-1$ の零點はすべて $\Re y<0$ の側にあり，虚數軸に最も近いものは，λ_0 に關するものである。即ち，$x\to\infty$ の様子をきめるものは，C_0 に對應する單一の固有値 λ_0 であることがわかる。これは Markoff の定理に相當する。從つて，$x\to\infty$ の漸近的な様子は，λ_0 を y 及び k の函數として知ればわかるであろう。これが知れたものとすれば，(47)，(62) から，

$$\frac{\mathfrak{P}}{\tau}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{yx}dy}{1-\lambda_0}\psi_0(y,k;e)\int\psi_0(y,k,e')\phi_0(e')de' \qquad (64)$$

の積分は $\lambda_0(y,k)=1$ の解

$$y=F(k) \qquad (65)$$

のまわりの留数計算として

$$\frac{\mathfrak{P}}{\tau}=\frac{e^{xF(k)}}{-\left[\frac{d\lambda_0}{dy}\right]_{Fy=F}}\psi_0(F,k,e)\int\psi_0(F,k,e')\phi_0(e')de' \qquad (66)$$

となる。これを e について積分してしまえば，粒子の方向分布を問題にしないで，エネルギーと位置の關係を與える式が得られる。

(66)の主要な項はその指數函數であつて，分布は殆んどこれて決定されてしまう。これは微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x}P(x,r)=F(V)P \qquad (56)$$

と等價である。即ち，我々の粒子擴張の問題は，x の充分大きな範圍に限れば，擴散型の方程式 (66) で記述される。これは，基礎方程式(例えば (40)) から Fokker-Planck の式を導き出すことに當る。實際には (63) から，$\lambda_0(0)=C_0(0)=1$ とし，λ_0 を k に關して展開し，逐次的に解いてゆくことができる。F は實は k^2 のべき級數，從つて (66) の右邊は $V^2=\Delta$ の級數となる。實例についての計算はこゝにはあげない。

一定の x に對し，$\exp\{xF(k)\}$ は空間分布に對する能率生成函數の主要項であつて，$F(k)$ の展開の2次までをとれば，正規分布が得られることは勿論である。その正當な範圍は

$$r\lesssim\sqrt{x}\,l$$

の程度のところであつて，より大きな r より小さな x に對する分布には，次以下の展開項がきいてくる。

このような方法，特に (66) の如き微分方程式による方法を "age theory" という。[6] エネルギー・パラメーター x が擴散方程式の時間 t に對應し，中性子の "age" を表わすものだからである。

x の小さな範圍を取扱うためには $|y|$ の大きい場合の (60) の解が必要であるが，これを求めることはむつかしい。しかし，$\Re y$ が大きいとすれば，(60) の積分の中の $\mathfrak{P}$ を，e に近い e' に對して展開し，(60) を (Fokker-Planck の式と同様な) 微分方程式で近似することができるであろうが，こゝでは述べない。

任意の x に對し，分布

$$N(x,r)=\int N(x,r,e)de$$

の r に關する低次の能率を正確に求めることが

可能であることは注目に値しよう。このためには (54) から得られる式

$$\psi_j/G_j=\phi_j{}^0-kl\left(\frac{j+1}{2j+3}\psi_{j+1}+\frac{j}{2j-1}\psi_{j-1}\right)$$

但し，$G_j=(1-C_j)^{-1}$

によつて，ψ_0 も k に關する展開式として逐次的に解けばよい。卽ち

$$\psi_0=\phi_0{}^0G_0-\frac{kl}{3}\phi_1{}^0G_0G_1$$
$$+k^2l^2G_0\left\{\frac{2}{15}\phi_2{}^0G_1G_2+\frac{1}{3}\phi_0{}^0G_1G_0\right\}+$$
$$+(\text{以下略}) \qquad (69)$$

が得られる。もつと高次まで求めることも容易であるがこゝには記さない。$\phi_0{}^0=1$ であつて，この第1項は §5a に論じたエネルギー分布を與える。一般に

$$\psi_0=\sum M_nk^n$$

とおけば r の k 方向に對する成分の n 乘の平均は

$$\langle r_k{}^n\rangle\doteqdot\frac{n!}{2\pi i}\int M_ne^{yx}dy\Big/\frac{1}{2\pi i}\int M_0e^{yx}dy$$

によつて計算される。旣に述べたように $y=0$ では $(1-C_0)^{-1}$ だけが極をもち，$(1-C_n)^{-1}$ $(n\geqq1)$ は $\Re y<0$ にだけ極をもつので，(69) の展開式のうち x とともに增す主要な項は，$(1-C_0)^{-1}$ の何乘かを含むものだけであり，その他は e^{-ax} 或は $e^{-ax}\sin bx$, $e^{-ax}\cos bx$ なる因數をもつ項として現れ，x の小さいところだけで重要である。

§5. c. 自由行路がエネルギーとともに變る場合

式 (50) において l が一定であつても，t に關する分布まで求めようとすれば更に困難に逢着する。また定常分布のみを問題にしても，l 或は f が x による場合も完全な解は容易に得られない。しかし，前節の終りに述べたように，一定の x に對する空間分布，或は t の分布の能率だけを問題にするならば，f が一定である限りは少くも低次の能率は系統的に求められる。

例えば定常分布だけを問題にしよう。(54) で $s=0$ とおくと，($m=0$ なる添字を略して)

$$\psi_j/G_j=\phi^0{}_j+{}_k\mathfrak{L}l*\left(\frac{j+1}{2j+3}\psi_{j-1}+\frac{j}{2j-1}\psi_{j-1}\right)$$

これを (69) の場合と同様に逐次的に（形式的に）解いてゆけば

$$\psi_0=\phi_0{}^0G_0+{}_kG_0\mathfrak{L}l*\frac{\phi_1{}^0}{3}G_1+k^2G_0\mathfrak{L}l*$$
$$\left[\frac{2}{15}\phi_2{}^0G_1\mathfrak{L}l*G_2+\frac{\phi_0{}^0}{3}G_1\mathfrak{L}l*G_0\right]+\cdots\cdot$$

等が求められる。こゝで (43) の定義，及び convolution に對する周知の式

$$(\mathfrak{L}f)(\mathfrak{L}g)=\int_0^\infty e^{-yx}dx\int_0^x f(x-x')g(x')dx'$$

を用いれば，こゝに得られた $\mathfrak{L}$ 函數に對する逆變換は $l(x)$ を含んだ多重積分の和として得られる。

水の中での中性子遅緩において，與えられた x に對する空間分布の2次の能率はこの方法で容易に求められる。これは以前，Fermi[1] が初等的に求めたものであるが，發表されている彼の公式は誤つていることに注意しておく。[5)6)]

§6. むすび

大體，豫定の紙數もつきたのでこゝに筆をおくにあたつて，尙，二三附加えておかねばならない。以上，§2 で述べた一般的な考察の具體的な一例として粒子の擴散の問題を取扱つた。ここの考え方は，Marshak の論文に對して，統一的な立場から問題の性質を明かにする點において，意味があるものと思う。こゝでは散亂媒質に境界が存在しない場合についてのみ論じた。その場合にのみ，マルコフ過程に伴う累加現象という考えが適用されるからである。しかし，それでも l, 及び f が x による場合には，もはや一様なマルコフ過程としては考えられないので勢い取扱いは制限されてくる。時間と位置とを含む分布函數の場合には，これは避けられない困難であつて，滿足な方法は見出されて

いない。

媒質に境界が存在する場合は，實際には極めて重要てある。これもまた，通常一様なマルコフ過程という範囲に入らない。エネルギー，時間，を問題にせず，且つ l を一定とみなして，位置と方向分布だけを取扱う問題は，Milne の問題として知られ，半無限の場合には Hopf, Winer-Hopf の美しい理論があり，[8] その他の場合にも，興味ある結果か最近得られている。[10] また，エネルギーと位置との分布は，§5bにふれた "age theory" の型の取扱いがかなりに進められている。[6]

この種の問題の完全な解決は一般に甚だ困難であるが，數學的にも興味ある問題を含んでいるのではないかと筆者は考えるのてある。數學者からの御助言をいたゞければ非常に幸いである。なお，こゝに論じたような問題はしばしば意外なところに類題をもつている。そのような場合，相當に複雑でも，分布の低次の能率くらいはこゝの方法によつて容易に求められることに重ねて注意しておこう。

文　獻

1.) Fermi　*Ricerca Scient* 7, (2), 13, (1936)
2) Ornstein and Uhlenbeck . *Physica* 4, 478 (1937).
3) 久保亮五　數物例會講演 (1943)
4.) 久保亮五　物性論研究 1, 1 (1943), *J Phys. Soc.* 2 47, 84 (1947), 同, 3 119 (1948), 尙 Wannier　*Rev. Mod Phys* 17, 50 (1945), Onsager　*Phys. Rev.* 65, 117 (1944) を參照。
5.) 久保亮五　日本物理學會第會講演 (1947年5月)
6.) Marshak　*Rev. Mod Phys* 19, 185(1947)
7.) Doetsch . Laplace-Transformation
8.) E Hopf　Mathematical Problems of Radiative Equilibrium
9) Placzek . *Phys Rev* 69, 423 (1946)
10.) Placzek and Seidel　*Phys Rev* 72, 550 (1947), Placzek, : 同 72, 556 (1947), Mark · 同, 72, 558 (1947) Le Caine 同, 72, 564 (1947).

その他の文獻は 6) を參照。

確率分布函數列について

河　田　龍　夫

東京工業大學數學教室

(昭和24年5月3日受理)

確率分布函數列の收斂性，その極限分布の性質等について論ずるのが本稿の目的であるが，Fourier 解析の方法て統一的に議論する。筆者は前に "フーリエ解析と確率論" (中文館發行, 1947) で同樣な問題を論じたが，その後得られた結果について述べようと思う。角返氏の助言があり，又大部分の結果は宇田川氏と筆者との協同研究によるものである。§1 ては，單調函數列又は分布函數列の收斂性について論ずる。分布函數列に關しては，P. Lévy の連續定理が中心的な役割をすることはよく知られているが，これに關して色々の注意をあたえる。§5 では §1 における定理の應用として，一二の既知定理の別證を示す。尙 §3 て特性函數の平均値 $\mathfrak{M}\{f\}$ (f: 特性函數, $\mathfrak{M}(f)=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt\right\}$) に關する基本事項を示し，その應用を論ずる。特に變數の和の極限分布の連續性を研究する。最後に §4 において弱い意味での純粹定理の證明を行う。