

有限多變母集團から抽出する場合の變異性の測度について

増山, 元三郎

東京大學醫學部物療内科教室 | 中央氣象臺氣象研究所衛生氣象研究室

<https://hdl.handle.net/2324/12929>

出版情報：統計数理研究. 2 (3), pp. 53-54, 1949-09-30. 統計科学研究会
バージョン：
権利関係：



賃金に対する割合 R_i を第8表に示す。

以上で大體資料の分析をおえた。この分析結果に基づいて最も合理的な科學的標本抽出法を企畫して行こう。

こゝで算出した C_w, C_s, C は 22 年 11 月の製造工業部門についての數字であつて、これは別紙(次號掲載)の如き細かい産業分類別に算出すれば一層等質性が保たれるものと思えるから更に小さい値が出るも

のと期待される。併し吾々の調査目的には安全の爲に C_w, C_s, C を過大評價する方が危險が少ないし、又標本調査に使用するためには大凡の見當程度の數字で十分なのであるから産業分類別の詳細な計算は省略することにした。これで具體的資料についての必要な分析が大體出来たので次に新しい標本調査方法の企畫に移ろう。(次號へつづく)

有限多變母集團から抽出する場合の 變異性の測度について

増 山 元 三 郎

東京大學醫學部物療内科教室

(昭和 23 年 5 月 29 日・日本數學會講演)
(昭和 24 年 1 月 21 日 受理)

§ 1. 緒 言

一定の費用の下に、標本調査し一つの變量の母數を推定しようとする場合には、この母數の推定量の母分散を最小になるように計畫を立てる事は、マルコフ・チェビシェフの定理を考えに入れるなら、合理的なものと思われる。ところが大抵の調査では、1回の調査で二つ又はそれ以上の項目について調べるので、有限多變量母集團として抽出法を考えねばならない。

多變量母集團でもマルコフ・チェビシェフの定理を擴張して使う事ができる。³⁾ 定理そのものは、一變量の時の母分散を、對應する行列に置き換え、大小關係を二次形式の正定符號、負定符號で定義すればよいし、この對應は幾何學的意味を持つ。しかし乍ら一次元の場合と異り、任意の二つの行列を採つた時、必ずしもこのような定符號二次形式を用いて大小關係を定義することができない點に問題がある。以下一變量の場合の母標準偏差 $\sigma(X)$ の持つ性質を調べ、この性質の保存されるように多變量に擴張することを問題としよう。

§ 2. 變異の測定

有限母集團では、變量 X の母標準偏差 $\sigma(X)$ は次の性質を持つている。

I. X の採るすべての實數値に對し $\sigma(X)$ は實數で負となることはない。

II. $\sigma(X) = 0$ は $X = 0$ を意味する。

III. $\sigma(tX) = t\sigma(X)$, 但し $t \geq 0$ 。

IV. $\sigma(X+Y) \leq \sigma(X) + \sigma(Y)$ 。

V. $\sigma(-X) = \sigma(X)$ 。

ここで $E(X) = 0$ と假定し、 $\sigma(X) \equiv [E X^2]^{1/2}$ と置いた。以上の性質を持つ函数はミンコフスキーの支持函数¹⁾で、支持函数では X が變量でなく變數であり、更に $\sigma(X)$ が引數 X の連續函数であることが要請されている。

以上の性質は、われわれの場合 X が變量であることを考えに入れて、次の二通りの擴張を思い附かせる。

第1の擴張は k 變量 $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ に對して

$$(1) \quad \sigma(X_1, X_2, \dots, X_k) \equiv \varphi(X_1, X_2, \dots, X_k)$$

とすることで、 φ は任意のミンコフスキーの支持函数に適當な期待量記號 $E(\quad)$ を用いたものである。例えば、

$$(2) \quad \varphi_p(X_1, X_2, \dots, X_k) = \left(\sum_{\alpha=1}^k E |X_\alpha|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

これは母平均の周りの p 次の絶対積率 $E(|X - \bar{x}|^p)$ の和で変異性を統制することに相當する。 $p=2$ の場合は

$$(3) \quad \sigma^2 = \left\{ \sum_{a=1}^k E(X_a^2) \right\}^{1/2} = \{tr. V(X)\}^{1/2}$$

即ち母分散行列 $V(X)$ の跡で統制することになる。

第2の擴張は、母分散行列 $V(X)$ の特有根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ を用いる方法で、

$$(4) \quad \sigma(X_1, X_2, \dots, X_k) = \phi(\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \dots, \lambda_k^{1/2})$$

と置き、 ϕ は任意のミンコフスキーの支持函数とする。これは J. フォン・ノイマンの行列空間の測度化 $|V|_p$ に對應するものである。²⁾ 例えば

$$(5) \quad \phi_p(\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \dots, \lambda_k^{1/2}) = \left(\sum_{a=1}^k |\lambda_a^{1/2}|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$p=2$ の場合は、前の定義と一致する。 $p \rightarrow \infty$ とすると、

$$(6) \quad \lim \phi_p = \max. (\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \dots, \lambda_k^{1/2})$$

即ち特有根の最大のもので統制する方法が得られる。

實際にはこれらの一つを選ぶには、更に他の原則を採用しなければならない。

§ 3. 結 び

一変量の場合の公式を多変量に擴張することは、上の方法を用いるなら容易である。特別の場合には、一変量での正負關係を正定符號、負定符號に擴張すれば

上のような支持函数を用いないで済む。

實際には重みを表す行列 W を用い、

$$\sigma^2 = tr. \{WV(X)\}$$

とする方が好ましいこともある。又以上の方法を變異係数に擴張することも考えられる。これらを用いた多変量の場合の層別化の理論等は將來の研究に俟たい。

(1) T. Bonnesen & W. Feuchel: Theorie der konvexen Körper, Erg. d. Math., J. Springer, Berlin, 1934.

(2) J. v. Neumann: Some matrix inequalities and metrization of matrix space. Bull. l'inst. math. mech. l'univ. Kouybycheff, Tomsk, vol. 1 (1937), 286-300.

(3) M. Masuyama: The Bienaymé-Tchebycheff inequality for Hermitic tensors. Proc. Phys.-math. Soc. Japan, vol. 24 (1942), 409-411.

追 記

$\sigma(X)$ の擴張を考える場合、

*VI. X, Y が相互に獨立なら、

$$\sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$$

という性質の保存が好ましい。これは $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ の母分散行列の跡に依つて満足されているが、一般の支持函数では必ずしも満足されない。勿論母分散行列の行列式ではこのような性質は一般に見られない。

相關する正規確率變數の統計量 に關する分布函数について

内 田 良 男

統計数理研究所
(昭和23年1月12日受理)

1. 緒 言

* 例の確率變數 X_i ($i=1, 2, \dots, n$) が夫々相等しい

正規母集團 $N(a, \sigma^2)$ に屬し且つ相互に獨立なときは、

統計量 $\chi^2 = \sum_{i=1}^n \{(X_i - a)/\sigma\}^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布