

時間的に齊次なMarkoff過程

吉田, 耕作
名古屋大學理學部

<https://hdl.handle.net/2324/12925>

出版情報：統計数理研究. 2 (3), pp.37-40, 1949-09-30. 統計科学研究会
バージョン：
権利関係：



寄 書

時間的に齊次な Markoff 過程

古 田 耕 作

名古屋大學理學部

(昭和 23 年 5 月 14 日 受理)

§ 1. 序

“非壓縮な定常な流れ”の確率論的研究に於て Stone の定理—Hilbert 空間の unitary operators の one-parameter 群の表現定理——の果たした役割りに關しては既に周知であらう (Ergode 理論 II)。本稿に於ては、Stone の定理を Banach 空間 L の線型作用素 U_t の作る one-parameter 準群に擴張した表現定理¹⁾の應用として時間的に齊次な Markoff 過程の作用素論的取扱ひの一方方法を二つの具體例を擧げて述べて見たい。第一例は “infinitely divisible law” の作用素論的解釋とも云ふ可きものであり、第二例は所謂 “Fokker-Planck 方程式” の新しい積分法である。筆者と伊藤清博士との研究によれば上の表現定理の應用として “homogeneous compact space” の上の Brown 運動²⁾の取扱ひも可能であるが之は又の機會を期したい。

§ 2. 表現定理

複素 Banach 空間 L から L 内への線型作用素 U_t の系 $\{U_t\}, 0 \leq t < \infty$, が

$$(2.1) \quad U_t U_s = U_{t+s}, U_0 = I \text{ (恒等作用素)},$$

$$(2.2) \quad \sup \|U_t\| \leq 1,$$

(2.3) $\lim_{t \rightarrow t_0} U_t x = U_{t_0} x, 0 \leq t_0 < \infty$ (lim=strong limit) を満足する one-parameter 準群とする。このとき

$$(2.4) \quad \text{weak } \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(U_h - I)x = Ax$$

の存在する様な x の全體 D は L に於て稠密且つ

$$(2.4)' \quad \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(U_h - I)x = Ax$$

の存在する様な x の全體と一致する。differential

quotient operator (d.q.o.) A は、 D から L 内への加法的作用素で次の諸條件を満足する:

$$(2.5) \quad U_t x - x = \int_0^t U_s A x ds = \int_0^t A U_s x ds, x \in D$$

$$(2.6) \quad \begin{cases} n > 0 \text{ ならば逆作用素 } I_n = (I - n^{-1}A) \text{ が存在し} \\ \|I_n\| \leq 1, A I_n = n(I_n - I), \lim_{n \rightarrow \infty} A I_n x = A x \\ (x \in D) \end{cases}$$

$$(2.7) \quad I_n x = \int_0^\infty n \exp(-nt) U_t x dt, \lim_{n \rightarrow \infty} I_n x = x \\ (x \in L),$$

$$(2.8) \quad \begin{cases} U_t x = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(t A I_n) x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} A\right)^{-n} \\ x (x \in L) \text{ が } t \text{ の任意の有限區間で } t \text{ に関} \\ \text{して一様に成立つ。} \end{cases}$$

逆に A を L の稠密な線状部分空間から L 内への加法的作用素にして、全ての正整数 n に對して (2.6) が成立つとすれば、(2.1)–(2.5) を満足する one-parameter 準群 $\{U_t\}$ が唯一存在しそれは (2.8) で與へられる。

以上證明は終りの文献 1) の拙論を見られたい。

§ 3. 時間的に齊次な Markoff 過程の特徴付け。

L を “抽象 L -空間”²⁾とし各 $t \geq 0$ に對し

$$(3.1) \quad x \geq 0 \text{ ならば } U_t x \geq 0 \text{ 且つ } \|U_t x\| = \|x\|$$

と假定する。斯る U_t を “遷移作用素”と呼んでもよいであらう。(3.1) を満足する one-parameter 準群 $\{U_t\}$ を以て時間的に齊次な Markoff 過程の抽象と考へるこのとき明かに

$$(3.2) \quad \begin{cases} I_n = (I - n^{-1}A)^{-1} = \int_0^\infty n \exp(nt) U_t dt, \\ (n=1, 2, \dots), \text{ も亦た遷移作用素である。} \end{cases}$$

又逆に、充分大きな n に對して (3.2) が満足された

とすると,

$$U_t x = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(t A I_n) x = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(t n (I_n - I)) x \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-nt) \exp(t n I_n) x$$

が亦た遷移作用素になる。斯くして

“全ての時間的齊次な Markoff 過程 U_t を作るには、(2.6) と (3.2) とを満足する A の全てを決定すればよい” ことになった。

(2.6) と (3.2) とを満足する A の例。 $L = L_1(-\infty, \infty)$ とし従つて殆ど到る所 $x(s) \geq 0$ なることとして $x \geq 0$ を定義する。このとき加法的作用素 (3.3) $(Ax)(s) = \gamma x'(s)$ (γ = 實数 $\neq 0$),

$$= \sigma x''(s) \quad (\sigma > 0),$$

$$= \lambda(x(s-u) - x(s)) \quad (\lambda > 0, u \neq 0)$$

は (2.6) と (3.2) とを満足する。證明には次の3例を見ればよい。

例 1. 變数移動

(3.4) $(U_t x)(s) = x(t+s)$, $x(s) \in L_1(-\infty, \infty)$,
に對しては

$$y_n(s) = (I_n x)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} n \exp(n(s-k)) x(k) dk$$

従つて, $x(s)$ を連續とすれば,

$$y'_n(s) - n y_n(s) = n x(s),$$

従つて

$$(3.5) \quad (A I_n x)(s) = (A y_n)(s) = (n(I_n - I)x)(s) \\ = y'_n(s)$$

例 2. Gauss 變換

$$(3.6) \quad (U_t x)(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(s-k)^2}{t}\right) x(k) dk, \quad x(k) \in L_1(-\infty, \infty)$$

に對しては

$$y_n(s) = (I_n x)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(k) dk \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{\pi t} n \exp\left(-nt - \frac{(s-k)^2}{t}\right) dt \right) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} n |s-k|^2\right) x(k) dk$$

従つて, $x(s)$ を連續とすれば

$$y''_n(s) = 4 n y_n(s) - 4 n x(s)$$

従つて

$$(3.7) \quad (A I_n x)(s) = (A y_n)(s) \\ = (n(I_n - I)x) = 4^{-1} y''_n(s).$$

例 3. $\lambda > 0, u \neq 0$ とし Poisson 變換

$$(3.8) \quad (U_t x)(s) = \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} x(s - ku),$$

$$x(s) \in L_1(-\infty, \infty)$$

に對して

$$y_n(s) = (I_n x)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} n \exp(-n + \lambda t) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} x(s - ku) dt \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n \lambda^k}{(n + \lambda)^{k+1}} x(s - ku)$$

であるから, $n \rightarrow \infty$ とし

$$(3.9) \quad (A y_n)(s) = (n(I_n - I)x)(s) \rightarrow$$

$$(Ax)(s) = \lambda(x(s-u) - x(s)).$$

§ 4. Infinitely divisible law.

時間的にも亦空間的にも齊次な Markoff 過程即ち Infinitely divisible law に對する U_t は

$$(4.1) \quad (U_t x)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s-u) d_n F(t, u), \\ x(s) \in L_1(-\infty, \infty)$$

で與へられる譯である。ここに $F(t, u)$ は各 $t \geq 0$ に對して u に關して分布函數である。このとき $x(s)$ が d. q. o. A の定義領域 D に入つてゐると

$$(4.2) \quad (Ax)(s) = \text{strong-} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(s-u) d_n F(n^{-1}, u) - x(s) \right).$$

従つて Fourier 變換によつて, λ に關して一樣に

$$(4.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(i \lambda u) - 1) n d_n F(n^{-1}, u) \\ (\text{但し } X(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i \lambda s) x(s) ds)$$

が存在する。 D が $L_1(-\infty, \infty)$ で稠密であるから

$$(4.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(i \lambda u) - 1) d_n F(n^{-1}, u)$$

は, λ の任意有限區間で一樣に, 存在する。故に

$$(4.5) \quad G_n(u) = \int_0^u \frac{\pi^2}{1+u^2} d_n F(n^{-1}, u)$$

とおけば, Khintchine の論法³⁾によつて, 單調増加函數列 $\{G_n(u)\}$ の部分列 $\{G_{n'}(u)\}$ が存在して

$$(4.6) \quad \text{有界な } \lim_{n \rightarrow \infty} G_{n'}(u) = G(u) \text{ が存在し,}$$

$$(4.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|n| > 0} dG_{n'}(u) = 0 \quad (n' \text{ に關し一樣に}),$$

(4.8) 有限な $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^{-1} dG_{n'}(u) = \gamma$ が存在することがわかる。

故に $G(0) = 0$ により, $x'(s)$, $x''(s)$ が連続且つ $\epsilon L_1(-\infty, \infty)$ なる如き連続な $x(s) \in L_1(-\infty, \infty)$ に對し

$$(4.9) \quad \text{weak } \lim_{\epsilon \downarrow 0} (h^{-1}((U_\epsilon - I)x)(s)) = (Ax)(s) \\ = -\gamma x'(s) + \sigma x''(s) \\ + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|u| > \epsilon} \left(x(s+u) - x(s) + \frac{ux'(s)}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2} dG(u),$$

ここに

$$(4.10) \quad \sigma = \lim_{\epsilon \downarrow 0} (G(\epsilon) - G(-\epsilon)).$$

之れが Infinitely divisible law に對する P. Levy の表現の作用素論的表現である。逆に (4.9) が時間的且つ空間的に齊次な Markoff 過程の d, q, o, なることも證明し得るのであるが少々長くなるので省略する。

§ 5. Fokker-Planck 方程式の新積分法。

熱傳導や diffusion に關する確率論的な基本方程式としての Fokker-Planck 方程式

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial y(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial(a(s)y(s, t))}{\partial s} + \frac{\partial^2(b(s)y(s, t))}{\partial s^2} \\ 0 \leq t < \infty, \quad -\infty < s < \infty, \quad b(s) > 0 \end{cases}$$

を考へる。之が確率論的に解する爲の必充條件は, § 3 に示した如く, 加法的作用素 A:

$$(5.2) \quad (Ax)(s) = \frac{\partial(a(s)x(s))}{\partial s} + \frac{\partial^2(b(s)x(s))}{\partial s^2}$$

が $L_1(-\infty, \infty)$ に於て (2.6) と (3.2) とを満足することである。若し (5.2) を

$$(Ax)(s) = \delta(s)y(s) + \gamma(s)y'(s) + \frac{\beta(s)}{4}y''(s)$$

但し

$$(5.3) \quad \delta(s) = a'(s) + b'(s), \\ \gamma(s) = a(s) + 2b'(s), \quad \beta(s) = 4b(s)$$

と書いたとき, $\delta(s)$, $\gamma(s)$, $\beta(s)$ が $(-\infty, \infty)$ で有界且つ連続, また

$$(5.6) \quad \bar{s} = \int_0^s \frac{ds}{1+\beta(s)} \text{ が有限且つ} \\ \rightarrow \begin{cases} \infty, & s \rightarrow \infty \text{ のとき} \\ -\infty, & s \rightarrow -\infty \text{ のとき} \end{cases}$$

なりと假定すれば上の (2.6) 及び (3.2) の證明が可能である。以下その軌道丈けを述べる。

筋道 § 3 に於ける例 2 の示唆する如く

$$(5.7) \quad y_n(s) - n^{-1}(Ay_n)(s) = x(s)$$

の解 $y_n(s)$ は積分方程式

$$(5.8) \quad y_n(s) = \int_{-\infty}^{\infty} n \exp\left(-2\sqrt{n} \int_s^u \frac{du}{\beta(u)}\right) \\ \left(\frac{8\gamma(k) - \beta'(k)}{8n}\right) y'_n(k) + \\ \frac{\delta(k)}{n} y_n(k) + x(k) \frac{dk}{\beta(k)}$$

によつて與へられるであらう。(5.8) が實際に, 連続且つ $\int_{-\infty}^{\infty} |x(s)| ds < \infty$ なる $x(s) \in L_1(-\infty, \infty)$ に對して解 $y_n(s)$ を有することは, 逐次近似法

$$y_{n,1}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} n \exp\left(-2\sqrt{n} \int_s^u \frac{du}{\beta(u)}\right) \\ x(k) \frac{dk}{\beta(k)}, \\ y_{n,m}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} n \exp\left(-2\sqrt{n} \int_s^u \frac{du}{\beta(u)}\right) \\ \left(\frac{8\gamma(k) - \beta'(k)}{8n}\right) y'_{n,m-1}(k) + \\ \frac{\delta(k)}{n} y_{n,m-1}(k) \frac{dk}{\beta(k)}$$

を施してみると,

$$y_n(s) = \sum_{m=1}^{\infty} y_{n,m}(s)$$

が一様收斂し $\epsilon L_1(-\infty, \infty)$ 且つ (5.8) を満足することが簡単な不等式評價でわかるから, 明かである。然も同じ不等式計算で $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ も云へる。

次に n が充分大きいときは,

$$y(s) - n^{-1}(Ay)(s) \geq 0$$

から $y(s) \geq 0$ を得ることは $b(s) > 0$ により, 斯る $y(s)$ が負の極小値をもち得ないことからわかる。之から若し上の $x(s)$ が ≥ 0 ならば上の解 $y_n(s)$ はそ

の $\text{norm } \|y_n\| = \int_{-\infty}^{\infty} |y_n(s)| ds = \int_{-\infty}^{\infty} y_n(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} |x(s)| ds = \|x\|$ を満足することがわかる。このとき $\int_{-\infty}^{\infty} (Ay_n)(s) ds = [a(s)y_n(s)]_{-\infty}^{\infty} + [(b(s)y_n(s))']_{-\infty}^{\infty}$ であるからである。

以上綜合して適観且 $\int_{-\infty}^{\infty} x(s)ds < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} x(s)d\bar{s} < \infty$

なる如き $x(s)$ に対しては (5.7) が唯一つの解 $y_n(s)$ を有し、且つ $x(s) \geq 0$ ならば $y_n(s) \geq 0$ 然も $\|y_n\| = \|x\|$ なることがわかつた。のみならずまた $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ も云へたのであるが、上の如き $x(s)$ は $L_1(-\infty, \infty)$ に於て $L_1(-\infty, \infty)$ の norm の意味で稠密であるから、結局 (2.6), (3.2) の双方が證明されたことになる。(以上)

註 Fokker-Planck 方程式を熱傳導方程式と考へて取扱ふ W. Feller の方法りに比して上の方法の方が簡單である。即ち (2.6) と (3.2) さへ證明できれば (2.8) によつて解 U_i が得られるのであるから、時間變數を除いた非齊次 elliptic な方程式 (5.7) に

歸着されるからである。然も §3 の一般定理 (3.2) ((2.6) と結び付けた) の應用として計算を進めるのだから確率論的ではあるまいか。

引用文獻

- 1) 筆者：日本數學會誌3號に掲載される筈 (1947 年秋の日本數學會例會に報告したるもの)
- 2) S. Kakutani: Concrete representation of abstract L-spaces and the mean ergodic theorem, *Ann. of Math.*, 42 (1941).
- 3) A. Khintchine: Deduction nouvelle d'une formule de P. Levy, *Bullet. de l'université d'état a Moscow*, A. 1 (1937).
- 4) W. Feller: Zur Theorie der stochastischen Prozesses, *Math. Ann.*, 113 (1936).

多元分布と比評價

北川敏男 (統計数理研究所及九州大學)
 楠田丘 (勞働省)
 堤光臣 (教育研究所)

(昭和23年5月21日受理)

§1 まえがき 或る統計量 X の調査に際し、他の統計量 Y の調査結果を利用し、 X の推定或いは層別化に役立たせると云ふ方法は、實際上極めて重要である。例へば、(i) 理論的には Hurwitz, Hansen 等の有限母集團よりの抽出理論に於ける比評價の利用 (ii) J. Neyman の二重抽出法 (Double Sampling) の理論。 (iii) 我國に於ける實例としては、昭和22年度稻の作付實面積の推定。(こゝでは8月1日の申告面積が Y である。 Y に関しては悉皆調査を行ひ、 X に関しては全國的1萬9千筆の抽出調査である。)

この論文は、一般的研究の準備として始めた研究の報告である。

[1] 以上の様な諸問題に更に立入つて論ずるための理論的型式としての多次元分布導入の問題を論

ずる。

- (a) 多次元分布として何を導入すればよいかの問題
- (b) かくして導入された多次元分布に關する諸計量の計算。

[2] 比評價の問題の取扱ひに關する一般的構成を與へる。

[3] 將來の擴張方法に關しての見解の開陳。

§2 多次元分布の理論形式の選擇 [1] に關しては：

- (a) 一次元 Gibrat 分布を擴張して多次元, Gibrat 分布を作ることが一つの方法として考へられてよいといふことが我々の主張である。

Gibrat 分布といふのは、1931年 Gibrat によつて導入されたもので、周知の如く、その分布密度が、