模型時系列の作成

小河原，正巳
中央氣象臺氣象研究所

出版情報：統計数理研究. 2 (2), pp.28-30, 1949-01-20. Research Association of Statistical Sciences
バージョン：
権利関係：

模型時系列の作成

小河原正巳

中央氣象臺氣象研究所

(昭和 22 年 12 月 20 日受理)

確率過程を母集團とする標本論の研究の一つの資料として，模型時系列を作成して見た。平均値，分散及び自己相關係數によつて確率法則が完全に決定されるために，正規分布法則を選んだ。順序として先づ獨立な定常的正規確率系列を母集團にもつと考えられる純過疑的時系列を作り，これに種々の相關を導入して，各種の定常的時系列を作成した。

(a) 純過疑的時系列

Fisher-Yates の random numbers の表に於て，例へば 03 47 43 73 56 を 0.0347437356 と考へると，その表の數は (0, 1) 上の矩形分布を母集團にもつ標本と考へられる。これを平均値 0，分散 1 なる正規母集團からの標本に變換するために，上記の如き 0 と 1 との間の數を p_k とし，これに對し，正規分布の表により

$$\text{(A)}\quad p_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y_k^*} e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\quad k=1,2,\cdots\cdots$$

なる y_k^* を對應させる。この $\{y_k^*\}$ が平均値 0，分散 1 なる獨立な定常的正規確率系列の標本である。

(b) 單純 Markoff 系列[1)]

ρ_k が正常な定常正規單純 Markoff 系列 $\{x_k\}$ の自己相關係數なるための條件は

$$\text{(1)}\quad \rho_k+a_1\rho_{k-1}=0 \quad \text{即ち}\quad \rho_k=(-a_1)^k,$$
$$k=1,2,\cdots\cdots,\quad \rho_0=1$$

$$\text{(2)}\quad |a_1|<1$$

この a_1 に對して

$$\text{(3)}\quad x_k+a_1x_{k-1}=y_k$$

こゝに y_k は定常正規純過疑的系列で，x_k の主分布の平均値が 0 分散が 1 なるときは，y_k もその平均値は 0 で，分散は (1) と (3) から

$$\text{(4)}\quad E(y_k^2)=1+a_1\rho_1$$

故に前述の $\{y_k^*\}$ を使へば $\{y_k\}$ の標本系列は

$$\text{(5)}\quad y_k=\sqrt{1+a_1\rho_1}\,y_k^*$$

で與えられる。從つて $\{x_k\}$ の標本系列は

$$\text{(6)}\quad x_k=\sqrt{1+a_1\rho_1}\,y_k^*-a_1x_{k-1},\quad k=1,2,\cdots\cdots$$

によつて計算される。但し初期値 x_0 は任意に與えてよいが，最も probable な値としては $x_0=0$.

例：$\rho_1=0.6$ とすれば (1) から $a_1=-0.6$. 從つて (6) は

$$\text{(B)}\quad x_k=0.8\,y_k^*+0.6\,x_{k-1},\quad k=1,2,\cdots\cdots,\quad x_0=0$$

これは正の持續性をもつ變動を表はす。

(c) 2 重 Markoff 系列[2)]

この場合に (1) 乃至 (6) に相當する式は，

$$\text{(7)}\quad \rho_k+a_1\rho_{k-1}+a_2\rho_{k-2}=0,\quad k=1,2,\cdots\cdots,\quad \rho_0=1$$

(8) $z^2+a_1z+a_2=0$ の二根は單位圓內にある。

$$\text{(9)}\quad x_k+a_1x_{k-1}+a_2x_{k-2}=y_k$$

$$\text{(10)}\quad E(y_k^2)=1+a_1\rho_1+a_2\rho_2$$

$$\text{(11)}\quad y_k=\sqrt{1+a_1\rho_1+a_2\rho_2}\,y_k^*$$

$$\text{(12)}\quad x_k=\sqrt{1+a_1\rho_1+a_2\rho_2}\,y_k^*-a_1x_{k-1}-a_2x_{k-2}$$
$$k=1,2,\cdots\cdots,\quad x_{-1}=x_0=0$$

例：$\rho_1=0.5$, $\rho_2=-0.3$ とすれば (7) の最初の二式

$$\begin{cases}\rho_1+a_1+a_2\rho_1=0\\ \rho_2+a_1\rho_1+a_2=0\end{cases}$$

を解いて

$$a_1=-0.87,\quad a_2=0.73$$

これは (8) を滿足する。これに對し (12) は

$$\text{(C)}\quad x_k=0.59\,y_k^*+0.87\,x_{k-1}-0.73\,x_{k-2}$$
$$k=1,2,\cdots\cdots,\quad x_{-1}=x_0=0$$

---

1) この (b) と次の (c) に關しては引用文獻 [1] 及び [2] を參照。

2) 一般に定常正規 n 重 Markoff 系列 $\{x_k\}$ に於て $x_{k-1}, x_{k-2}, \cdots\cdots, x_{k-n}$ を與えたときの x_k の條件付確率法則は

$$f^*(x_k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\Delta_{00}}{\Delta}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_{00}}{\Delta}\right)\times\left\{x_k+\left(\frac{\Delta_{01}}{\Delta_{00}}x_{k-1}+\cdots\cdots+\frac{\Delta_{0n}}{\Delta_{00}}x_{k-n}\right)\right\}^2\right]$$

こゝに $\Delta=|\rho_{|i-j|}|$, $i,j=1,2,\cdots\cdots,n+1$, $\Delta_{0\alpha}$ は Δ に於ける $(1,\alpha+1)$ 要素の餘因子。

(12) 式に於て $a_i=\Delta_{0i}/\Delta_{00}$,

$$\sqrt{1+a_1\rho_1+\cdots+a_n\rho_n}=\sqrt{\Delta/\Delta_{00}}$$

一根に自由振動

(13) $x_k+a_1x_{k-1}+a_2x_{k-2}=0$

は，(8) の實根に對しては持續性を示し，虚根に對しては週期性を現はす。後者の場合に $\sqrt{a_2}$ は振幅の減衰比を表わし，週期 $T=2\pi/\lambda$ は $\cos\lambda=-\frac{a_1}{2}/\sqrt{a_2}$ から求められる。上の數値例では減衰比=0.86，週期 $T=6.03$ である。

(d) **潜在週期をもつ時系列**

潜在週期が一つの場合には

(14) $x_k=\alpha\cos(\lambda k-\gamma)+\beta y_k^*$

$E(x_k^2)=1$ であるから

(15) $$\frac{\alpha^2}{2}+\beta^2=1$$

これは正規確率系列ではない。

例： $\alpha=1$，$\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\lambda=\frac{2\pi}{6}$，$\gamma=\frac{2\pi}{6}$ とすると

(D) $x_k=\cos\frac{2\pi}{6}(k-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}y_k^*$，$k=1,2,\cdots\cdots$

この確率系列の自己相關係數は（確率過程として計算すると）エルゴード性により

$$\rho_k=E\left\{\left(\cos(\lambda t-\gamma)+\frac{1}{\sqrt{2}}y_t^*,\ \cos(\lambda(t+k)-\gamma)+\frac{1}{\sqrt{2}}y^*_{(t+k)}\right)\right\}$$

$$=E\{\cos(\lambda t-\gamma)\cos(\lambda(t+k)-\gamma)\},$$

（γ が確率變數）

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\cos(\lambda t-\gamma)\cos(\lambda(t+k)-\gamma)dt$$

$$=\frac{1}{2}\cos\lambda k$$

(e) **移動平均系列**

(16) $x_k=a_0y_k^*+a_1y^*_{k-1}+a_2y^*_{k-2}$

$E(x_k^2)=1$ であるためには

(17) $$a_0+a_1^2+a_2^2=1$$

例： 近似的に $a_0=\frac{24}{30}$，$a_1=r\frac{15}{30}$，$a_2=\frac{10}{30}$ とすれば

(E) $x_k=0.8\,y_k^*+0.5\,y^*_{k-1}+\frac{1}{3}y^*_{k-2}$

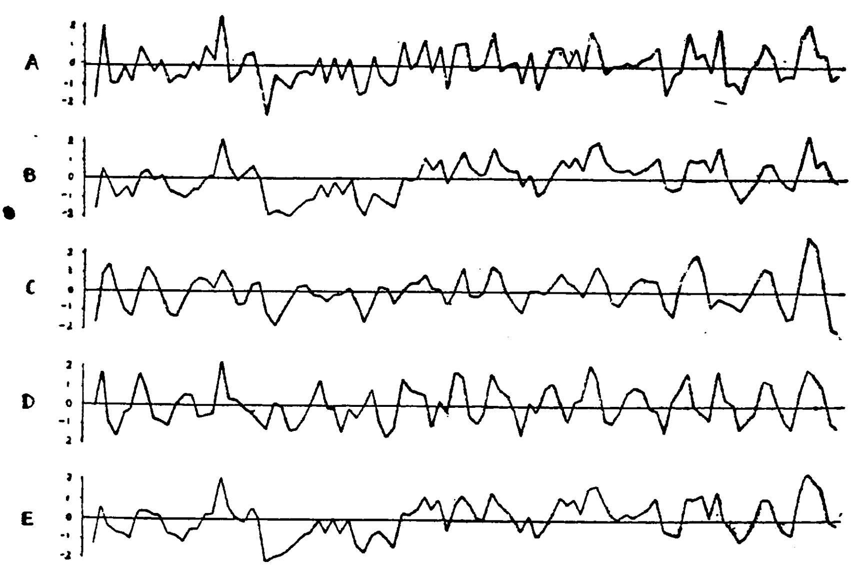
$k=1,2,\cdots\cdots$，$y_{-1}^*=y_0^*=0$

この場合の自己相關係數は

$\rho_1=0.57$，$\rho_2=0.27$，$\rho_k=0$ $(k\geqq 3)$

以上（A）～（E）の5種の模型時系列が夫々500項以上計算されている。次の圖は夫々の最初の100項をグラフにして示したものである。尚，(B)，(C) 及び (E) については50項おきに初期値を更新し，50項づつから成る獨立な時系列群も構成されている。これ等に基いた，時系列の標本論に關する實驗的考察は他日に讓る[3)]。

3) 本稿は文部省科學研究費による研究の一部である。



引用文献

[1] K. Ito, On the Normal Stationary Process with no Hysteresis, Proc. Imp. Acad., Vol. 20 (1944), p. 199.

[2] 小河原正已，定常正規多重 Markoff 過程，本誌第2巻第1號（昭和23年）42頁。

非心型 Langevin 氏確率方程式中の常數の圖式推定法とその臨床醫學的應用

増山元三郎

中央氣象臺氣象研究所衛生氣象研究室，統計數理研究所第三部

（昭和23年1月22日氣象研究所談話會講演，昭和23年1月28日受理）

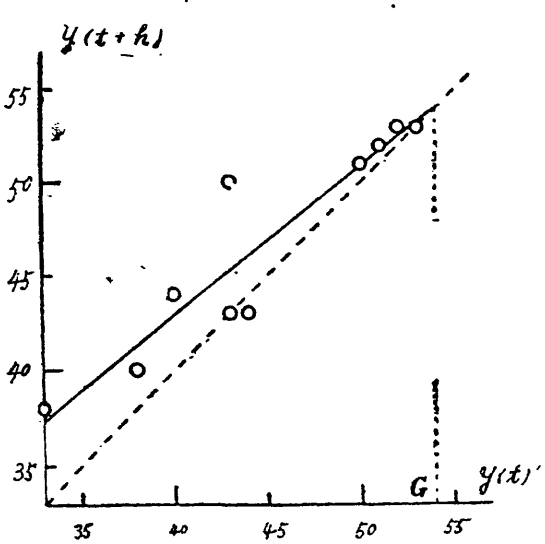
非心型 Langevin 氏確率方程式とは，$r(>0)$，G をある常數として

(1)　$du/dt=r(G-u)+A(t)$

で表されるものを指す。茲に $A(t)$ は不規則な變動を表すもので t を固定して平均すると零になるものである。即ち

(2)　$\overline{A(t)}=0$.

この形の式は Brown 運動の場合[1]，低氣壓の移動の場合[2] に既に應用されているが，著者は鐵劑による治療開始後の貧血患者の赤血球數，血色素量の増加（第1圖）がこの形であることを先年指摘した[3] 1)。又この式で t を時間以外の媒介變數とすれば，著者等の重層法による實驗公式[4]，補體價推定の場合の溶血曲線[5]（近似的に第2圖）及び X 線照射後の動物の累積死亡數（第3圖）もこの形になる。



第 1 圖

數學的に r，G をどういう風にして推定すればよいかの問題は今考えないで，逐次近似法の出發點となるような r，G の近似値を圖式解法で求める方法を述べよう。變動項の影響が少ければ，次に述べる近似解だけで實用上充分であらう。

（イ）の形式的な解はよく知れているように

(3)　$u(t)=G-Ce^{-rt}+e^{-rt}\int_0^t A(s)e^{rs}ds$

從つて

(4)　$u(0)=G-C$

今

(5)　$y(t)\equiv u(t)-u(0)$

と置くと，

(6)　$y(t)=C(1-e^{-rt})+e^{-rt}\int_0^t A(s)e^{rs}ds$

h を既知常數として (6) を確率定差方程式に改めよう。(6) から

(7)　$y(t+h)=C(1-e^{-r(t+h)})$

$$+e^{-r(t+h)}\int_0^{t+h} A(s)e^{rs}ds$$

1) 貧血の程度の甚しい場合には $dy/dt=A_1(G-y)+A_2(G-y)^2$ と2次の項迄必要なようである。この場合は Verhulst の算定曲線が得られ，逆數について定差[illegible]が利[illegible]できる。