最尤推定値の獨立性及びその自由度の關係に就いて(2)

坂元, 平八
統計數理研究所

出版情報：統計数理研究. 2 (2), pp.24-27, 1949-01-20. Research Association of Statistical Sciences
バージョン：
権利関係：

が群の性質

$$T_lT_k=T_{l+k}\quad (l,\ k>0)$$

があつて，これが一パラメーター群に擴張され，可測な流れを作るばあいを考える。

定理 8. "例5において，保測變換系 $\{T_l;\ l>0\}$ がエルゴード的であるための十分條件として

(i) T_1 がエルゴード的で，μ' が $(0,\ \infty)$ 上の Lebesgue 測度に對して絶對連續であるばあい

(ii) T_1 が廣義混合型のばあい（μ' は任意）

(ii) のばあいには $\{T_l\}$ は廣義混合型系をなす"。

（證明） 安西廣忠氏の定理（紙上談話會誌）によれば，T_1 がエルゴード的であれば，高々可附番個の l を除いて T_l はすべてエルゴード的となり．T_1 が廣義混合型であれば，すべての l に對して T_l は廣義混合型となる。この結果を §2 の定理にあてはめればよい。

定理8は實際の定常過程にあてはめて考えると，面白いことであるように思われる。

彷徨エルゴード定理の擴張及び應用に關して，更に適當な機會に述べたいと思うが，今回はこれまでにとめておく。

文　　獻

E Hopf [1], Ergodentheorie (Ergebnisse), Springer, Berlin, (1927).

吉田耕作 [1], エルゴード諸定理，數物會誌，15卷1號 (1939).

S. Saks [1], Theory of the integral. Warsaw, (1937).

最尤推定値の獨立性及びその自由度の關係について (2)

坂　元　平　八

統計數理研究所

（昭和 22 年 12 月 20 日受理）

(IV) 最尤推定値の獨定性及びその自由度の關係に就て（一般の場合）

次の樣な有意性檢定は正規回歸の理論でよく起る問題である $(y_\alpha | x_{1\alpha},\ x_{2\alpha},\ \cdots\cdots,\ x_{K\alpha}),\ \alpha=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n>k$ を分布法則が $N\left(\sum_{p=1}^{K} a_p x_p,\ \sigma^2\right)$ なる母集團から取られた大いさ n の標本とするる。此の時 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_r$ が如何なる値をとるに關らず $a_{r+1},\ a_{r+2},\ \cdots\cdots,\ a_K$ $(r<K)$ が夫々ある特定の値 $a_{r+1}^0,\ a_{r+2}^0,\ \cdots\cdots,\ a_K^0$ なる値を取るや否やといふ假說を檢定したい場合である。この場合も第三節の如く

$$\mathfrak{Y}=X\mathfrak{A}+\mathfrak{Z}$$

で示され，$\mathfrak{Y}$ は同時分布法則が

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathfrak{Y}-X\mathfrak{A})^2\right\} d\mathfrak{Y}$$

で與へられる母集團よりの標本値と考へられる。今尤度函數を

$$P(\mathfrak{Y}|\mathfrak{A},\ \sigma^2)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathfrak{Y}-X\mathfrak{A})^2\right\}$$

と置く事にする。こゝに $\mathfrak{A}=(a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_K)$ とする。Ω を $\sigma^2>0,\ -\infty<a_p<\infty,\ p=1,2\cdots\cdots,K$ なる $(K+1)$ 次元の母數空間とし ω を $a_{r+1}=a_{r+1}^0,\ a_{r+2}=a_{r+2}^0,\ \cdots\cdots,\ a_K=a_K^0$ なる $(K-r+1)$ 次元の Ω の部分空間であるとする。然る時 H_0 が檢定すべき假說であるとすれば H_0 は眞の母數が Ω 空間の部分空間 ω の中に横はるといふ假說になる。H_0 を檢定する爲の尤度比 λ は

$$\lambda=\frac{\max_\omega P(\mathfrak{Y}|\mathfrak{A},\ \sigma^2)}{\max_\Omega P(\mathfrak{Y}|\mathfrak{A},\ \sigma^2)}$$

で與へられる。今 λ の値を求めるに第三節と同樣にして先づ最初に Ω 空間で $P(\mathfrak{Y}|\mathfrak{A},\ \sigma^2)$ が最大になる母數 $\mathfrak{A}$ 及び $\hat{\sigma}_\Omega^2$ を計算すると

$$\mathfrak{A}=(X'X)^{-1}X'\mathfrak{Y},\quad \hat{\mathfrak{A}}-\mathfrak{A}=(X'X)^{-1}X'\mathfrak{Z},$$

$$\hat{\sigma}^2_\Omega=\frac{1}{n}\{(E-X(X'X)^{-1}X)\mathfrak{Z},\ \mathfrak{Z}\}\quad である。$$

これより $P(\mathfrak{Y}|\mathfrak{A},\ \hat{\sigma}^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_\Omega}\right)^n e^{-\frac{n}{2}}$ を得る。

亦同樣に ω 空間で $P(\mathfrak{Y}|\mathfrak{A},\ \sigma^2)$ が最大になる母

數 $\hat{\mathfrak{A}}_1^*=(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots\cdots, \hat{a}_r)$, $\hat{\sigma}_\omega^2$ を次の様な手順で求める。

今 $\mathfrak{A}=(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$, $X=(X_1, X_2)$ と置く

但し

$$\mathfrak{A}_1=(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_r),\ \mathfrak{A}_2^0=(a_{r+1}^0, a_{r+2}^0, \cdots\cdots, a_K^0)$$

$$X_1=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}\cdots\cdots x_{1r} \\ x_{21} & x_{22}\cdots\cdots x_{2r} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_{n1} & x_{n2}\cdots\cdots x_{nr} \end{pmatrix} \qquad X_2=\begin{pmatrix} x_{1r+1}\cdots\cdots x_{1K} \\ x_{2r+1}\cdots\cdots x_{2K} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{nr+1}\cdots\cdots x_{nK} \end{pmatrix}$$

とする。然る時, $\mathfrak{Y}=(X_1, X_2)(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2^0)+\mathfrak{Z}$

$$=(X_1\mathfrak{A}_1+X_2\mathfrak{A}_2^0)+\mathfrak{Z}$$

依てこの關係から $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_r$ 及び σ^2 の最尤推定値 $\hat{\mathfrak{A}}_1^*$, $\hat{\sigma}_\omega^2$ を求めるには次の方程式を解けばよい。

$$X_1'\{\mathfrak{Y}-(X_1\hat{\mathfrak{A}}_1^*+X_2\mathfrak{A}_2^0)\}=0$$

$$\hat{\sigma}_\omega^2=\frac{1}{n}\{\mathfrak{A}-X_1\hat{\mathfrak{A}}_1^*-X_2\mathfrak{A}_2^0\}^2 \quad \text{である。}$$

これを解くと

$$\hat{\mathfrak{A}}_1^*=(X_1'X_1)^{-1}X_1'(\mathfrak{Y}-X_2\mathfrak{A}_2^0)$$

これより

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1^*-\mathfrak{A}_1&=(X_1'X_1)^{-1}X_1'\{(X_1\mathfrak{A}_1+X_2\mathfrak{A}_2^0+\mathfrak{Z})\\&\qquad -X_2\mathfrak{A}_2^0\}-\mathfrak{A}_1\\&=(X_1'X_1)^{-1}X_1'\mathfrak{Z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\omega^2&=\frac{1}{n}\{\mathfrak{Y}-X_1\mathfrak{A}_1^*-X_2\mathfrak{A}_2^0\}^2\\&=\frac{1}{n}\{X_1\mathfrak{A}_1+X_2\mathfrak{A}_2^0+\mathfrak{Z}-X_1\mathfrak{A}_1^*-X_2\mathfrak{A}_2^0\}^2\\&=\frac{1}{n}\{\mathfrak{Z}-X_1(\hat{\mathfrak{A}}_1^*-\mathfrak{A}_1)\}^2\\&=\frac{1}{n}\{\mathfrak{Z}-X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'\mathfrak{Z}\}^2\\&=\frac{1}{n}\{(E-X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1')\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}\}\end{aligned}$$

此の $\hat{\mathfrak{A}}_1^*$, $\hat{\sigma}_\omega^2$ を $P(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{A}, \sigma^2)$ に代入すると

$$\max_\omega P(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{A}, \sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_\omega^2}}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}} \quad \text{を得る。}$$

從つて $\qquad \lambda=\left(\dfrac{\hat{\sigma}_\Omega^2}{\hat{\sigma}_\omega^2}\right)^{n/2}$

扨 $\qquad q_1=\dfrac{n\hat{\sigma}_\Omega^2}{\sigma^2}, \qquad q_2=\dfrac{n(\hat{\sigma}_\omega^2-\hat{\sigma}_{\Omega}^2)}{\sigma^2}$ と置くと

$$\lambda=\left(\frac{q_1}{q_2+q_1}\right)^{n/2}=\left(\frac{1}{1+q_2/q_1}\right)^{n/2} \quad \text{である。}$$

此處に $q_2\geqq 0$ なることは明らかである。以下若し假設 H_0 が眞であれば q_1 と q_2 は獨立で夫々自由度 $n-r$, $K-r$ の χ^2 分布に從ふことを示さう。先づ $\hat{\sigma}_\Omega^2$ 及び $\hat{\mathfrak{A}}-\mathfrak{A}$ は第三節に於ける (1) から (5) までの性質をそのまゝ滿足する事は云ふまでもなからう。亦 $\hat{\sigma}_\omega^2$ 及び $\hat{\mathfrak{A}}_1^*-\mathfrak{A}_1$に就いては殆んど同樣な事が云はれる。たゞ $\hat{\mathfrak{A}}_1^*-\mathfrak{A}_1$ の分散行列は $(X_1'X_1)^{-1}\sigma^2$ で與へられ $(X_1'X_1)$ の階數は r で與へられるから $\{X_1(\mathfrak{A}_1^*-\mathfrak{A}_1)\}^2/\sigma^2$ は自由度 r の χ^2 分布をなし, $n\hat{\sigma}_\omega^2/\sigma^2$ は自由度 $n-r$ の χ^2 分布に從ふことが云へる。

扨 $q_1=n\hat{\sigma}^2{}_\Omega/\sigma^2$ と $q_2=n(\hat{\sigma}^2{}_\omega-\hat{\sigma}_\Omega^2)/\sigma^2$ の獨立性を證明しよう。

先づ $X'(\mathfrak{Y}-X\hat{\mathfrak{A}})=0$ であるから, $X'\{\mathfrak{Z}-X(\hat{\mathfrak{A}}-\mathfrak{A}), =X'(E-X(X'X)^{-1}X')\mathfrak{Z}\}=0$ が成立する。從つて $X'(E-X(X'X)^{-1}X')=0$ なることが云へる。これより $X_1'(E-X(X'X)^{-1}X')=0$ が成立する。故に $X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'=X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X(X'X)^{-1}X'$, 此の關係式を用いれば q_1 の係數行列が $(E-X(X'X)^{-1}X')$, q_2 の係數行列が $\{X(X'X)^{-1}X'-X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'\}$ で與へられるから

$$\begin{aligned}&\{X(X'X)^{-1}X'-X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'\}\\&\qquad\times(E-X(X'X)^{-1}X')\\&=X(X'X)^{-1}X'-X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X'\\&\qquad -X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'\\&\qquad -X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X(X'X)^{-1}X'=0\end{aligned}$$

故に [定理 I] に依て q_1 と q_2 は獨立である。亦 q_1 は自由度 $(n-k)$ の χ^2 分布をなし, 亦 $q_1+q_2=n\hat{\sigma}_\omega^2$ は自由度 $(n-r)$ の χ^2 分布をなすから [定理 III] に依り q_2 は自由度 $(n-r)-(n-k)=k-r$ の χ^2 分布をなす事を知る。

最後に特に $X_2'X_1=0$ならば $X'X=(X_1, X_2)'(X_1, X_2)$

$$=\begin{pmatrix}X_1'X_1 & X_1'X_2\\ X_2'X_1 & X_2'X_2\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c}X_1'X_1 & 0\\ 0 & X_2'X_2\end{array}\right) \quad \text{であるから}$$

$\hat{\mathfrak{A}}-\mathfrak{A}$ の分散行列は

$$(X'X)^{-1}=\left(\begin{array}{c|c}(X_1'X_1)^{-1} & 0\\ 0 & (X_2'X_2)^{-1}\end{array}\right)$$

從つて $\hat{\mathfrak{A}}_1-\mathfrak{A}_1$ と $\hat{\mathfrak{A}}_2-\mathfrak{A}_2$ とは獨立である。亦

$$\begin{aligned}&X(X'X)^{-1}X'\\&=\begin{pmatrix}X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' & 0\\ 0 & X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'\end{pmatrix}\end{aligned}$$

これより $\hat{\mathfrak{A}}_1^*-\hat{\mathfrak{A}}_1=\mathfrak{A}_1-\hat{\mathfrak{A}}_1$ なる事が云はれ $\hat{\mathfrak{A}}_1^*-\mathfrak{A}_1$ と $\hat{\mathfrak{A}}_2-\mathfrak{A}_2$ とが獨立なる事が云はれる。

V. 實驗計畫法に於ける判定條件

本節に於ては Wilks の著書の p. 171—173 に於て取扱はれてゐる一般的な判定條件について論じよう。次の檢定法は亂塊法, ラテン方格法等に於てよく起る問題で多くは此の形式の檢定に持つて行く事が出來る。

今 $(y_\alpha\ x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, \cdots\cdots, x_{K\alpha})$, $\alpha=1, 2, \cdots\cdots, n>K$ を分布法則が $N\left(\sum_{p=1}^{K} a_p x_p, \sigma^2\right)$ なる母集から取れる大いさ n の標本とする。この場合假設 H_0 は次の様に云へる。

$$\Omega:\begin{cases} -\infty<a_p<\infty,\ \sigma^2>0\ p=1, 2, \cdots\cdots, K \\ a_p \text{ は次の様な } r_1 \text{ 個の獨立な條件に依て條件づけられてゐる。} \\ \sum_{p=1}^{K} C_{p\mu}a_p=0,\ \mu=1, 2, \cdots\cdots r_1<K \end{cases}$$

$$\omega:\begin{cases} \text{上の母數空間 } \Omega \text{ の中で次の樣な } r_2 \text{ 個の獨立な條件式に依て條件づけられる。} \\ \sum_{p=1}^{K} C_{p\nu}a_p,\ \nu=1, 2, \cdots\cdots r_2,\ r_1<r_2<K \end{cases}$$

今 $\mathfrak{A}=(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_K)$

$$C_1=\begin{pmatrix} C_{11}\cdots\cdots C_{K1} \\ C_{12}\cdots\cdots C_{K2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{1r_1}\cdots\cdots C_{Kr_1} \end{pmatrix}\quad C_2=\begin{pmatrix} C_{1,r_1+1}\cdots C_{K,r_1+1} \\ C_{1,r_1+2}\cdots C_{K,r_1+2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{1,r_2}\cdots\cdots C_{K,r_2} \end{pmatrix}$$

と置けば上の條件式は次の樣に書ける。

$$C_1\mathfrak{A}=0,\qquad C_2\mathfrak{A}=0$$

更に適當な行列

$$C_3=\begin{pmatrix} C_{1,r_2+1}\cdots\cdots\cdots C_{K,r_2+1} \\ C_{1,r_2+2}\cdots\cdots\cdots C_{K,r_2+2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{1K}\cdots\cdots\cdots\cdots C_{KK} \end{pmatrix}$$

を選んで新なる特異でない行列

$$C=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

を考へることが出來る。今 $C\mathfrak{A}=\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}'=(a_1', a_2', \cdots\cdots, a_K')$ と置くと $\mathfrak{A}=C^{-1}\mathfrak{A}'$ であるから $\mathfrak{Y}=X\mathfrak{A}+\mathfrak{Z}$ なる關係式は $\mathfrak{Y}=XC^{-1}\mathfrak{A}'+\mathfrak{Z}$ なる形に書ける。從つて $XC^{-1}=X'$ と置くと $\mathfrak{Y}=X'\mathfrak{A}'+\mathfrak{Z}$ である。こゝに

$$X'=\begin{pmatrix} x_{11}'\cdots\cdots\cdots x_{1K}' \\ x_{21}'\cdots\cdots\cdots x_{2K}' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n1}'\cdots\cdots x_{nK}' \end{pmatrix}$$

今 $\mathfrak{A}''=(a'_{r_1+1}, a'_{r_1+2}, \cdots\cdots, a_K')$,

$$X''=\begin{pmatrix} x'_{1\,r_1+1}\cdots\cdots\cdots x_{1K}' \\ x'_{2\,r_1+1}\cdots\cdots\cdots x_{2K}' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x'_{n\,r_1+1}\cdots\cdots x_{nK}' \end{pmatrix}$$ と置くと

$\mathfrak{Y}=X''\mathfrak{A}''+\mathfrak{Z}$ なる形になり第四節と全く同じ形である。從つて此形式の下に假設 H_0 は次の樣な形に書ける。

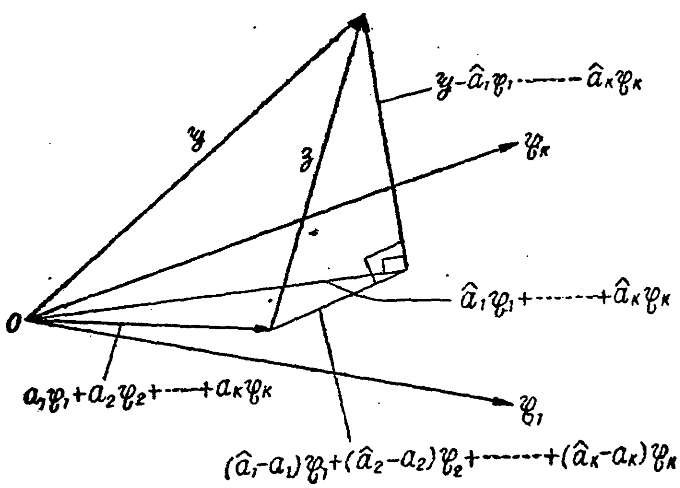
Ω: $-\infty<a_p'<\infty$, $\sigma^2>0$, $p=r_1+1, \cdots\cdots, K$

ω: 母數空間 Ω の中で $a'_{r_1+1}=\cdots\cdots=a'_{r_2}=0$ が成立する部分空間

故に此の假設は第四節の場合と全く同樣に取扱へる。

VI. 幾何學的解釋

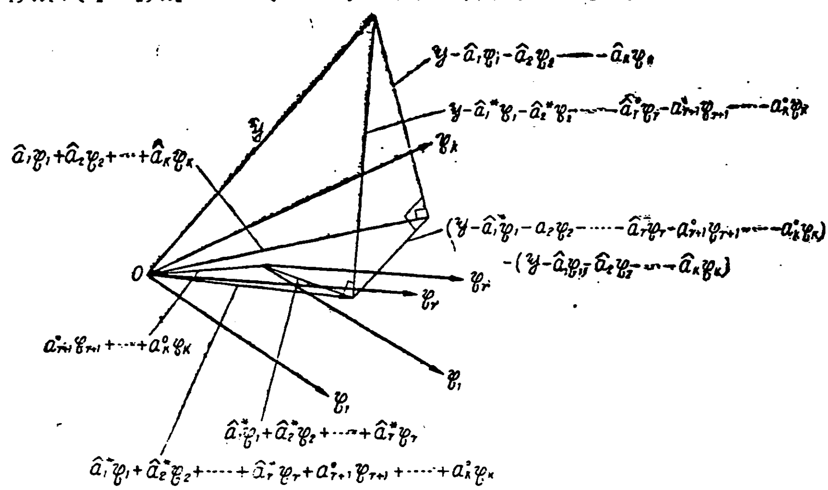
第三節の最初に述べた關係式は $\mathfrak{X}_i=(x_{1i}, x_{2i}, \cdots\cdots, x_{ni})$, $i=1, 2, \cdots\cdots, K$ と置くと次の樣な形にも書け



る。$\mathfrak{Y}=a_1\mathfrak{X}_1+a_2\mathfrak{X}_2+\cdots\cdots+a_K\mathfrak{X}_K+\mathfrak{Z}$。この時最尤推定値を求めることは幾何學的に解釋すると $\mathfrak{Y}=(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$ なる點より原點を通過する $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{X}_K$ が作る線形空間に垂線を下した場合垂線の足に對する $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{X}_K$ の係數 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots\cdots, \hat{a}_K$ を決める事に相當する。亦 $\hat{\sigma}^2$ はこの垂線の距離

$(\mathfrak{Y}-\hat{a}_1\mathfrak{X}_1-\hat{a}_2\mathfrak{X}_2\cdots\cdots\cdots\cdots\hat{a}_K\mathfrak{X}_K)^2$ に相當する。圖示すれば下圖の如くになる。

從つて $\{(\hat{a}_1-\hat{a}_1)\mathfrak{X}_1+(\hat{a}_2-a_2)\mathfrak{X}_2+\cdots\cdots+(\hat{a}_K-a_K)\times\mathfrak{X}_K\}^2$ と $\{\mathfrak{Y}-\hat{a}_1\mathfrak{X}_1-\cdots\cdots-\hat{a}_K\mathfrak{X}_K\}^2$ の獨立性は $(\hat{a}_1-a_1)\mathfrak{X}_1+(\hat{a}_2-a_2)\mathfrak{X}_2+\cdots\cdots+(\hat{a}_K-a_K)\mathfrak{X}_K$ なるベクトルと $(\mathfrak{Y}-\hat{a}_1\mathfrak{X}_1-\hat{a}_2\mathfrak{X}_2-\cdots\cdots-\hat{a}_K\mathfrak{X}_K)$ なるベクトルの直交性に相當する。これは以上の理論から容易に證明出來る。亦 $\{(\hat{a}_1-a_1)\mathfrak{X}_1+(\hat{a}_2-a_2)\mathfrak{X}_2+\cdots\cdots+(\hat{a}_K-a_K)\mathfrak{X}_K\}^2$ の自由度は $\dim\{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{X}_K\}$ に等しい。亦第三節の $\hat{\sigma}_\Omega^2$ と $\hat{\sigma}_\omega^2-\hat{\sigma}_\Omega^2$ の獨立性は幾何學の三垂線の定理に相當する。此を圖で解釋すれば下圖の如くである。



Ω なる條件の下で最尤推定値を求める事は $\mathfrak{Y}$ なる點より原點を通る $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{X}_K$ が作る線形空間に垂線を下した場合垂線の足に對する $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{X}_K$ の係數 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots\cdots, \hat{a}_K$ を決める事に相當する。亦 $\hat{\sigma}^{\Omega 2}$ はこの垂線の距離 $(\mathfrak{Y}-\hat{a}_1\mathfrak{X}_1-\hat{a}_2\mathfrak{X}_2-\cdots\cdots-\hat{a}_K\mathfrak{X}^K)^2$ に相當する。同樣に ω なる條件の下で最尤推定値を決める事は $\mathfrak{Y}$ より $a^0{}_{r+1}\mathfrak{X}_{r+1}+\cdots\cdots\cdots+a^0{}_K\mathfrak{X}_K$ なる點を通る $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{X}_r$ が作る線形空間に垂線を下した場合，垂線の足に對する $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \cdots, \mathfrak{X}_r$ の係數 $\hat{a}_1{}^*, \hat{a}_2{}^*, \cdots\cdots, \hat{a}_r{}^*$ を決める事に相當し，$\hat{\sigma}_\omega{}^2$ はこの垂線の距離 $(\mathfrak{Y}-\hat{a}_1{}^*\mathfrak{X}_1-\hat{a}_2{}^*\mathfrak{X}_2-\cdots\cdots-\hat{a}_r{}^*\mathfrak{X}_r-a_{r+1}\mathfrak{X}^0{}_{+1}-\cdots\cdots-a^0{}_K\mathfrak{X}_K)^2$ に相當する。

亦 $q_1=(\mathfrak{Y}-{}_1\mathfrak{X}_1-\hat{a}_2\mathfrak{X}_2-\cdots\cdots-\hat{a}_K\mathfrak{X}_K)^2$ と

$$q_2=(\mathfrak{Y}\hat{a}_1{}^*\mathfrak{X}_1-\hat{a}_2{}^*\mathfrak{X}_2-\cdots\cdots-\hat{a}_r{}^*\mathfrak{X}_r-a^0{}_{r+1}\mathfrak{X}_{r+1}-\cdots\cdots-a^0{}_K\mathfrak{X}_K)^2-(\mathfrak{Y}-\hat{a}_1\mathfrak{X}_1-{}^2\mathfrak{X}_2-\cdots\cdots-\hat{a}_K\mathfrak{X}_K)^2$$

との獨立性は $(\mathfrak{Y}-\hat{a}_1\mathfrak{X}_1-\hat{a}_2\mathfrak{X}_2-\cdots\cdots-\hat{a}_K\mathfrak{X}_K)$ なるベクトルと

$$(\mathfrak{Y}-\hat{a}_1{}^*\mathfrak{X}_1-\hat{a}_2{}^*\mathfrak{X}_2-\cdots\cdots-\hat{a}_r{}^*\mathfrak{X}_r-a^0{}_{r+1}\mathfrak{X}_{r+1}-\cdots-a^0{}_K\mathfrak{X}_K)-(\mathfrak{Y}-\hat{a}_1\mathfrak{A}_1-\hat{a}_2\mathfrak{X}_2-\cdots-\hat{a}_K\mathfrak{X}_K)$$

なるベクトルの直交性に相當することは如上の議論により明らかである。この直交性はこの n 次元空間の部分空間 $\{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{X}_K, \mathfrak{Y}\}$ に於ける三垂線の定理により容易に證明される。亦 q_1, q_2 の自由度は幾何學的に解釋すると夫々 $n-\dim\{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{X}_K\}$, $\dim\{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \cdots\cdots. \mathfrak{X}\}_K-\dim\{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{X}_r\}$ に等しいことも見易いことであらう。（以上）