彷徨エルゴード定理について(2)

河田, 敬義
東京文理科大學數學教室

出版情報：統計数理研究. 2 (2), pp.20-24, 1949-01-20. Research Association of Statistical Sciences
バージョン：
権利関係：

寄　　書

彷徨エルゴード定理について (2)

河　田　敬　義
東京文理大數學教室

(昭和 21 年 5 月數學會年會講演　昭和 22 年 12 月 20 日受理)

§ 2.

定理 2' の擴張として

定理 2. "定理 1 において $\{T_l; l\in L\}$ がエルゴード系であれば,

(25)　$F_k(x)=$常數$=c=\int_X f(x)m(dx)$

となる"。

(證明) これも數段階に分ける。

(イ) 定理 1 の證明において, T^* がエルゴード的となること, 即ち

(26)　$T^*E_0^*=E_0^*,\quad E^*\subset X^*$

ならば

(27)　$m^*(E_0^*)=0$, 又は 1

となることを證明すれば,

(28)　$F(x^*)=\int_{X^*}f^*(x^*)m^*(dx^*)$

$=\int_X f(x)m(dx)=c$

が成立つ。よつてこのことを證明すればよい。

(ロ) 今 (26) なる E_0^* に對して, 任意に $\varepsilon>0$ を與えると

(29)　$m^*(E_0^*\ominus E^*)>\varepsilon$

を滿足する筒集合で, しかも (22) の如き基本集合の有限和集合となる E^* が存在する。筒集合 E^* は, その特性函數 f^*:

(30)　$E^*=\{x^*; f^*(x^*)=1\}$, ($f^*(x^*)=0$ 又は 1)

が有限個の成分にしか關係しないこと:

(31)　$f^*(x^*)=f^*(x, k_{-m}, k_{-m+1}, \cdots, k_0, k_1, \cdots, k_m)$

と表されることによつて特徴附けられる。

さて (29) に T^* 又は T^{*-1} を施すと, (26) により

(29')　$m^*(E_0^*\ominus T^{*n}E^*)<\varepsilon$

$m^*(E_0^*\ominus T^{*-m}E^*)<\varepsilon$

を滿足する。故に又

$E_1^*=T^{*n}E^*,\quad E_2^*=T^{*-m}E^*$

に對して

(32)　$m^*(E_1^*\ominus E_2^*)<2\varepsilon$

及び

(32')　$m^*(E_0^*\ominus(E_1^*\frown E_2^*))<3\varepsilon$

となることが分る。

以上のことから

(33)　$E_0^*\doteq A\times K,\quad A\subset X$

となることが導かれたならば, エルゴード系の定義により, (26) より

(34)　$m(A)=0$ 又は 1,

從つて

$m^*(E_0^*)=0$ 又は 1

となるから證明が了つたことになる。故に (33) となることを證明すればよい。

(ハ) T^*E^* の特性函數を f_1^* とすれば

(35)　$f_1^*(x^*)=f^*(T^{*-1}x^*)$

である。故に (18), (21), (31) によつて f_1^* は x, k_0 の他に $k_{-m}, \cdots, k_m$ の番號の一つずれたものにのみ關係する。

$f^*_{+1}(x^*)=f_1^*(x, k_0, k_{-m-1}, \cdots, k_{m-1})$

となる。同様に $E_1^*=T^{*n}E^*$ の特性函數は f_m^* は

(36)　$f_m^*(x^*)=f^*(T^{*-m}x^*)$

$=f_m^*(x, k_0, k_{-1}, k_{-2}, \cdots, k_{-2m})$

となることが分る。他方 $T^{*-1}E^*$ の特性函數 f^*_{-1} は (19) により x, k_1 の他に, $k_{-m}, \cdots, k_m$ の番號が逆の方向にずれたものにのみ關係する。即ち

$f^*_{-1}(x^*)=f^*(T^*x^*)=f^*_{-1}(x, k_1, k_{-m+1}, \cdots, k_{m+1})$.

故に又 $E_2^*=T^{*-m}E^*$ の特性函数 f^*_{-m} は

(37) $$f^*_{-m}(x^*)=f^*(T^{*m}x^*)=f^*_{-m}(x,k_1,k_2,\cdots,k_{2m})$$

となることが分る。

(ニ) 今無限直積空間 K を二つの成分に分けて

(38) $$K_1=\prod_{n=1}^{+\infty}\otimes L_n,\quad K_2=\prod_{n=-\infty}^{0}\otimes L_n,$$
$$\mu^{(1)}=\prod_{n=1}^{+\infty}\mu_n,\quad \mu^{(2)}=\prod_{n=-\infty}^{0}\mu_n,$$
$$K=K_1\otimes K_2,\quad \mu=\mu^{(1)}\times\mu^{(2)}$$

とする。これと X との直積を考えて

(39) $$\begin{cases} X_1^*=X\otimes K_1, & X_2^*=X\otimes K_2,\\ m_1^*=m\times\mu^{(1)}, & m_2^*=m\times\mu^{(2)}\end{cases}$$

とおく。今 X_i^* の上の L^2 に属する函数を K_i の上の正規直交系

(40) $$p_0^{(i)}(k^{(i)})\equiv 1,\ p_1^{(i)}(k^{(i)}),\ p_2^{(i)},\ \cdots \quad (i=1,2)$$

により展開すると，その係数は x の函数となる。これを $f^*_{\pm m}(x^*)$ に適用すれば

(41) $$\begin{aligned} f_{-m}^*(x^*)&=f_{-m}^*(x_1^*)=g_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)p_n^{(1)}(k^{(1)}),\\ f_m^*(x^*)&=f_m^*(x_2^*)=h_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}h_n(x)p_n^{(2)}(k^{(2)})\end{aligned}$$

と展開される。こゝで x をとめて考えれば，K_i 上の直交系の性質により

(42) $$\begin{aligned} \int_K f_{-m}^*(x^*)\mu(dk)&=\int_{K_1}f_{-m}^*(x_1^*)\mu^{(1)}(dk^{(1)})=g_0(x)\\ \int_K f_m^*(x)\mu(dk)&=\int_{K_2}f_m^*(x_2^*)\mu^{(2)}(dk^{(2)})=h_0(x)\end{aligned}$$

となる，又直積空間 $K=K_1\otimes K_2$ に關して

$$\int_K p_i^{(1)}(k)p_j^{(2)}(k)\mu(dk)=\int_{K_1}p_i^{(1)}(k^{(1)})\mu^{(1)}(dk^{(1)})\times\int_{K_2}p_j^{(2)}(k^{(2)})\mu^{(2)}(dk^{(2)})=\begin{cases}1 & (i=j=0)\\ 0 & (\text{其の他})\end{cases}$$

であるから，

(43) $$\int_K f_{-m}^*(x^*)f_m^*(x^*)\mu(dk)=g_0(x)h_0(x)$$

となる。

(ホ) 又 E_0^* の特性函数を $C_0^*(x^*)$ とすれば，

$$f_0(x)=\int_K C_0^*(x^*)\mu(dk)$$

は $X^*=X\otimes K$ において，$E_0^*\subset X^*$ の x=常數による截口の μ 測度である。(42), (43) は夫 E_1^*, E_2^*, $E_1^*\cap E_2^*$ の x=常數による截口の μ 測度にほかならない。(32), (30) によれば

(44) $$\begin{cases}\int_X|f_0(x)-g_0(x)|m(dx)\leqq m^*(E_0^*\ominus E_1^*)<\varepsilon,\\ \int_X|f_0(x)-h_0(x)|m(dx)\leqq m^*(E_0^*\ominus E_2^*)<\varepsilon,\\ \int_X|f_0(x)-g_0(x)h_0(x)|m(dx)\\ \qquad\leqq m^*(E_0^*\ominus(E_1^*\cap E_2^*))<3\varepsilon\end{cases}$$

となる。今

(45) $$\begin{cases} r_0(x)=f_0(x)-g_0(x),\\ \rho_0(x)=f_0(x)-h_0(x)\end{cases}$$

とおけば，(44) の上の二式より

(46) $$\begin{cases}\int_X|r_0(x)|m(dx)<\varepsilon,\\ \int_X|\rho_0(x)|m(dx)<\varepsilon\end{cases}$$

である。一方 f_0, g_0, h_0 は夫々截口の μ 測度であるから，その値は $[0,1]$ に屬する。故に

$$|r_0(x)|\leqq 1,\quad |\rho_0(x)|\leqq 1$$

でもある。これから

(46) $$\begin{cases} f_0-g_0h_0=f_0-(f_0-r_0)(f_0-\rho_0)\\ \qquad=(f_0-f_0^2)+f_0(r_0+\rho_0)-r_0\rho_0,\\ \int_X|f_0-g_0h_0|m(dx)<3\varepsilon\end{cases}$$

とにより

$$\begin{aligned}&\int_X|f_0(x)-f_0^2(x)|m(dx)\\ &\leqq\int_X|f_0-g_0h_0|m(dx)+\int_X|(r_0+\rho_0)|m(dx)+\int_X|r_0\rho_0|m(dx)\\ &\leqq 3\varepsilon+\int_X(|r_0|+|\rho_0|+|r_0\rho_0|)m(dx)\leqq 6\varepsilon\end{aligned}$$

となる。ε は任意に與えた正數であるから

$$\int_X|f_0(x)-f_0^2(x)|m(dx)=0$$

即ち

$$f_0(x)=f_0^2(x)$$

が殆んどすべての $x\in X$ に對して成立たねばならない。即ち $f_0(x)=0$ 又は 1 が殆んどすべての x に對して成立ち，

$$A=\{x;\ f_0(x)=1\}$$

とすれば，求める (33) 式が證明された。

定理 3. "必ずしもエルゴード系でない一般の $\{T_l;\ l\in L\}$ に對して，X^* 上の保測變換 T^* に對する不變集合 E^* は

$$(47)\quad \begin{cases} E^* \fallingdotseq A \times K & (A \subset X) \\ T_l A \fallingdotseq A & (\text{殆んどすべての } l \text{ で}) \end{cases}$$

の形に表される。同じく一般に T^* の不變函數 $f^*(x^*)$:

$$(48)\quad f^*(T^*x^*) = f^*(x^*)$$

は必ず

$$(49)\quad \begin{cases} f^*(x) \fallingdotseq f^*(x) \\ f^*(T_l x) \fallingdotseq f^*(x) & (\text{殆んどすべての } l \text{ で}) \end{cases}$$

と表される"。

この事から，一般に T^* の固有値を求めることができる。

定理 4. "(19) によつて定義された X^* の上の保測變換 T^* の固有值 a に對する固有函數 $f_a^*(x^*)$ は

$$(50)\quad \begin{cases} f_a^*(x^*) = f_a^*(x), \\ f_a^*(T_l x) \fallingdotseq \exp(2\pi i a) \cdot f_a(x) \end{cases}$$

(殆んどすべての $l \in L$ に對して)

と表される。逆に (50) なる $f_a^*(x^*)$ は

$$(51)\quad f_a^*(T^*x^*) \fallingdotseq \exp(2\pi i a) f_a^*(x^*)$$

を滿足する"。

(證明) 今

$$(52)\quad I = [0, 1)$$

を半開半閉區間として，そこでの保測變換

$$(53)\quad T_a{}^0 b \equiv b - a \pmod{1},\ b \in I$$

を考える。

これから直積空間

$$(54)\quad \begin{cases} Y^* = X^* \otimes I, \\ Y^* \ni y^* = (x^*, b), \quad x^* \in X^*, \quad b \in I \end{cases}$$

の上の直積保測變換

$$(55)\quad U_a^*(x^*, b) = (T^*x^*,\ T_a{}^0 b)$$

を定義する。若しも或る函數 $f_a^*(x^*)$ が (51) を滿足するならば

$$(56)\quad F_a^*(y) = f_a^*(x^*) \cdot \exp(2\pi i b)$$

は

$$(57)\quad U_a^* F_a^*(y^*) \fallingdotseq F^*(y^*)$$

を滿足する。又逆に (57) の成立つ $F_a^*(y^*)$ があつたとすれば

$$(58)\quad f_a^*(x) = \int_0^1 \exp(-2\pi i b) F_a^*(x^*, b) db$$

とおけば

$$f_a^*(T^*x^*)$$
$$= \int_0^1 \exp(-2\pi i b) F_a^*(T^*{}_{x^*}, b-a) d(b-a)$$
$$= \exp(2\pi i a) \int_0^1 \exp(-2\pi i b) F_a^*(x^*, b) db$$
$$= \exp(2\pi i a) f_a^*(x^*)$$

となり，(51) を滿足する。故に T^* の固有函數を求める問題は Y^* 上の U_a^* に關する不變函數を求める問題に歸着する。

一方 (54), (55) と同樣に

$$(59)\quad \begin{cases} Y = X \otimes I, \quad Y \ni y = (x, b), \\ U_{a,l}(x, b) = (T_l x,\ T_a{}^0 b) \end{cases}$$

として，これから更に

$$(60)\quad \begin{cases} Y^* = Y \otimes K, \\ U_a^*(y, k) = (U_{a,t(k)} y,\ Sk) \end{cases}$$

を定理 1. と同樣に作れば，丁度 (54), (55) におけると同一のものが得られる。

故に (51) なる $f_a^*(x^*)$ が存在したならば，(56) により (57) となる $F_a^*(y^*)$ が存在し，前定理系によつて

$$(61)\quad \begin{cases} F_a^*(y^*) = F_a^*(y) \\ F_a^*(U_{a,l}(y)) \fallingdotseq F_a^*(y) \end{cases}$$

(殆んどすべての $l \in L$ に對して)

の形になる。故に (58) と同じく

$$(62)\quad f_a(x) = \int_0^1 \exp(-2\pi i b) F_a^*(x, b) db$$

とおけば

$$f_a(T_l x) = \exp(2\pi i a) f_a(x)$$

(殆んどすべての $l \in L$ に對して，)

となる。(55) と (62) とを合せれば

$$f_a^*(x^*) \fallingdotseq f_a^*(x)$$

となり，この $f_a^*(x)$ が (50) の性質を持つことになる。これで證明の前半が了る。逆の部分は直ちに分る。

定理 4. の應用として

定理 5. "X^* 上の保測變換 T^* に對して常數以外に固有函數が存在しないための必要十分條件は

$$(63)\quad f_a(T_l x) \fallingdotseq \exp(2\pi i a) f_a(x)$$

が殆んどすべての l に關して同時に成立つのは

$$(64)\quad a = 0, \quad f_a(x) \fallingdotseq \text{常數}$$

のばあいに限ることである"。

T^* が廣義混合型なるとき，$\{T_l;\ l \in L\}$ が廣義混合型であるという。

この定理は如何なる條件の下に廣義混合型になるかを示している。よつて Fubini の定理を用いて，Hopf の定理を變形して (Hopf [1] 參照)

定理 6. "定理 5 の條件が成立つならば，殆んどすべての $k \in K$ に對して (k に無關係な) 密度 1 の自然數列 $\{r_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{(\ )\leq n} 1=1$$

を選んで，任意の $A,B\subset X$ ($A,B\in\mathfrak{B}$) に對して

(65) $\lim_{n\to\infty} m(A\frown T_{k(n)}\cdot T_{k(n-1)}\cdots T_{k(1)}B)$

$$=m(A)\cdot m(B)$$

が成立つ。又はこれと同値な關係

(66) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|m(A\frown T_{k(n)}T_{k(n-1)}\cdots T_{k(1)}B)$

$$-m(A)m(B)|^2=0$$

が成立つ。又はこれらと同値な

(67) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\exp(2\pi i j a)f(T_{k(j)}T_{k(j-1)}\cdots T_{k(1)}x)$.

$$=\begin{cases}0, & a\neq 0\\ \int_X f(x)m(dx), & a=0\end{cases}$$

が成立つ"。

又これから直ちに分るように

定理 7. "μ' 測度の正なる集合に屬する l に對して，T_l が X 上の實義混合型保測變換ならば，定理 6. の條件が成立ち，(65)，(66)，(67) が成立つ"。

§ 3.

以上の結果の簡單な應用例について述べよう。

例 1. $L=\{0, 1\}$，T_0 と T_1 と二つ丈のばあいは，初めに擧げたばあいで，定理 1°，2° は夫々定理 1,2 の特別なばあいである。このばあいには，$L=\{0, 1\}$ において，集合 $\{0\}$，$\{1\}$ の μ' 測度は夫々 1/2 であるのだが，これを夫々 p, q ($p+q=1$) としてもよい。そのときは [0, 1] の數の二進法展開に對して與えられる測度が通常の Lebesgue 測度でなく，これと互に特異な關係にあるものとなる。

例 2. $L=\{1, 2, \cdots, h\}$，$\mu'(i)=p_i>0$，

$$\Sigma_{i=1}^{h} p_i=1$$

であるときは，$T_1, \cdots, T_h$ なる h 個の X 上の保測變換が與えられたばあいで，$\{T_1, \cdots, T_h\}$ が可測系であることは，各 T_i が可測でさえあれば當然成立する。これがエルゴード系であるためには，各 T_i に共通な不變函數は常數以外にないことであり，實義混合型系であるためには，各 T_i に共通な同一固有値に對する固有函數が存在しないことが必要十分である。特にある一つの T_i が夫々 X 上のエルゴード的保測變換又は實義混合型保測變換であれば，$\{T_1, \cdots, T_h\}$ が夫々エルゴード型及び實義混合型となる。このばあいにも $p_i>0$ であれば定理の形は同一である。

例 3. 例 1 で $T_0=I$ (恒等變換) と $T_2=T$ とを考える。T がエルゴード的又は實義混合型であるに從つて $\{I, T\}$ なる系は又夫々エルゴード的又は實義混合型系となる。一般に

$$k=(\cdots,\overset{(1)}{0},0,\cdots,0,1,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0,1,0,\cdots)$$

であるときは

$$\begin{cases}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f(T_{k(i)}T_{k(i-1)}\cdots T_{k(1)}x)=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{r}n_j f(T^j x)\\ N=\sum_{j=1}^{r}n_j\end{cases}$$

と表される。

$$p(0)=p,\quad p(1)=q=1-p$$

とすれば $\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ なる値を夫々

$$p(n)=qp^{n-1}\quad (n=1, 2, \cdots)$$

なる確率でとる確率變數 n に對して，n_j ($j=0,1,2,\cdots$) が獨立試行であるものと見做して

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{r}n_i f(T^i x)}{\sum_{i=0}^{r}n_i}=\bar{F}_k(x)$$

の存在を主張するのが定理 1 である。このばあいは然し乍ら既に知られた結果である。

例 4. (角谷氏の與えたもの)

$$X=\{x_1, x_2\},\quad m(x_1)=m(x_2)=1/2,$$

$$T_0=I,\quad T_1^2=I,\quad T_1x_1=x_2,\quad T_1x_2=x_1$$

なる特別なばあいを考える。例えば

$$k=(\cdots,\overset{(1)}{0},1,0,0,1,\cdots)$$

に對して，

$$\begin{cases}T_{k(1)}x_1=x_1,\ T_{k(2)}T_{k(1)}x_1=x_2,\\ \qquad T_{k(3)}T_{k(2)}T_{k(1)}x_1=x_2,\ \cdots\\ T_{k(1)}x_2=x_2,\ T_{k(2)}T_{k(1)}x_2=x_1,\\ \qquad T_{k(3)}T_{k(2)}T_{k(1)}x_2=x_1,\ \cdots\end{cases}$$

であるから，$f(x_1)=1$，$f(x_2)=0$ なる f に對して

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(A_{k(i)}T_{k(i-1)}\cdots T_{k(1)}x)$$

は二進數列 k に對する x_2 の相對頻度を表している。よつてこのばあいには彷徨エルゴード定理は通常のエルゴード定理になつてしまう。

中野秀五郎氏は例 1，例 2 等のばあいに，定理 1 の"殆んどすべての k に對して"が"すべての k に對して"と直し得ないかとの問題を提出されたが，この角谷氏の例は，そのことが一般には成立たないことを示すものである。

例 5. $L=(0, \infty)$ 上で μ' が定義され，保測變換

が群の性質

$$T_lT_k=T_{l+k} \quad (l,\ k>0)$$

があつて，これが一パラメーター群に擴張され，可測な流れを作るばあいを考える。

定理 8. "例5において，保測變換系 $\{T_l;\ l>0\}$ がエルゴード的であるための十分條件として

(i) T_1 がエルゴード的で，μ' が $(0,\ \infty)$ 上の Lebesgue 測度に對して絶對連續であるばあい

(ii) T_1 が廣義混合型のばあい（μ' は任意）

(ii) のばあいには $\{T_l\}$ は廣義混合型系をなす"。

（證明） 安西廣忠氏の定理（紙上談話會誌）によれば，T_1 がエルゴード的であれば，高々可附番個の l を除いて T_l はすべてエルゴード的となり．T_1 が廣義混合型であれば，すべての l に對して T_l は廣義混合型となる。この結果を §2の定理にあてはめればよい。

定理8は實際の定常過程にあてはめて考えると，面白いことであるように思われる。

彷徨エルゴード定理の擴張及び應用に關して，更に適當な機會に述べたいと思うが，今回はこれまでにとめておく。

文　　献

E Hopf [1], Ergodentheorie (Ergebnisse), Springer, Berlin, (1927).

吉田耕作 [1], エルゴード諸定理，數物會誌，15卷 1號 (1939).

S. Saks [1], Theory of the integral. Warsaw, (1937).

最尤推定値の獨立性及びその自由度の關係について (2)

坂　元　平　八

統計數理研究所

（昭和 22 年 12 月 20 日受理）

(IV) 最尤推定値の獨立性及びその自由度の關係に就て（一般の場合）

次の樣な有意性檢定は正規回歸の理論でよく起る問題である $(y_\alpha \mid x_{1\alpha},\ x_{2\alpha},\ \cdots\cdots,\ x_{K\alpha})$, $\alpha=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n>k$ を分布法則が $N\left(\sum_{p=1}^{K} a_p x_p,\ \sigma^2\right)$ なる母集團から取られた大いさ n の標本とするる。此の時 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_r$ が如何なる値をとるに關らず $a_{r+1},\ a_{r+2},\ \cdots\cdots,\ a_K$ $(r<K)$ が夫々ある特定の値 $a_{r+1}^0,\ a_{r+2}^0,\ \cdots\cdots,\ a_K^0$ なる値を取るや否やといふ假說を檢定したい場合である。この場合も第三節の如く

$$\mathfrak{Y}=X\mathfrak{A}+\mathfrak{Z}$$

で示され，$\mathfrak{Y}$ は同時分布法則が

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathfrak{Y}-X\mathfrak{A})^2\right\} d\mathfrak{Y}$$

で與へられる母集團よりの標本値と考へられる。今尤度函數を

$$P(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{A},\ \sigma^2)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathfrak{Y}-X\mathfrak{A})^2\right\}$$

と置く事にする。こゝに $\mathfrak{A}=(a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_K)$ とする。Ω を $\sigma^2>0$, $-\infty<a_p<\infty$, $p=1, 2\cdots\cdots, K$ なる $(K+1)$ 次元の母數空間とし ω を $a_{r+1}=a_{r+1}^0$, $a_{r+2}=a_{r+2}^0$, $\cdots\cdots$, $a_K=a_K^0$ なる $(K-r+1)$ 次元の Ω の部分空間であるとする。然る時 H_0 が檢定すべき假說であるとすれば H_0 は眞の母數が Ω 空間の部分空間 ω の中に横はるといふ假說になる。H_0 を檢定する爲の尤度比 λ は

$$\lambda=\frac{\max_\omega P(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{A},\ \sigma^2)}{\max_\Omega P(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{A},\ \sigma^2)}$$

で與へられる。今 λ の値を求めるに第三節と同樣にして先づ最初に Ω 空間で $P(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{A},\ \sigma^2)$ が最大になる母數 $\mathfrak{A}$ 及び $\hat{\sigma}_\Omega^2$ を計算すると

$$\mathfrak{A}=(X'X)^{-1}X'\mathfrak{Y},\quad \hat{\mathfrak{A}}-\mathfrak{A}=(X'X)^{-1}X'\mathfrak{Z},$$

$$\hat{\sigma}^2_\Omega=\frac{1}{n}\{(E-X(X'X)^{-1}X')\mathfrak{Z},\ \mathfrak{Z}\} \quad \text{である。}$$

これより $P(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{A},\ \hat{\sigma}^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\hat{\sigma}_\Omega}\right)^n e^{-\frac{n}{2}}$ を得る。

亦同樣に ω 空間で $P(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{A},\ \sigma^2)$ が最大になる母