基本的確率過程とその應用

丸山, 儀四郎
九州大學理學部数學教室

出版情報：統計数理研究. 2 (2), pp.1-11, 1949-01-20. Research Association of Statistical Sciences

論　述

基本的確率過程とその應用

丸　山　儀　四　郎

九州大學理學部數學教室

（昭和 23 年 3 月 1 日受理）

§1. 確率過程論の基礎

確率論の基礎づけに Mises の集團の理論，Kolmogoroff の抽象的方法がある。理論的にも應用上からも Kolmogoroff の方法に種々の利點があげられる。それは數理統計學における母集團，統計力學において相空間とそれに導入されたアプリオリな確率が夫々の出發點になる事などからも考えられよう。Kolmogoroff の方法は次の様なものである。

任意の抽象空間 Ω に Ω の部分集合より成り自身を含む完全加法族 F —— A, $B\in F$ ならば $\Omega - A\in O$, $E_i\in F$ ならば $\bigcup_i E_i\in F$ —— と F で定義された完全加法的集合函數 $P(E)$, $E\in\Omega$: 1° $0\leqq P(E)\leqq 1$ 2° $P(\Omega)=1$ 3° $E_i\cap E_j=0\ (i\neq j)$ ならば $P(\bigcup E_i)=\sum P(E_i)$ を結合して確率空間 (Ω, F, P) を構成する。一つの問題に對してその解決に適應した確率空間を構成する。Ω の個々の要素 ω は根源的事象，$P(E)$ が事象 E の確率である。いわゆる偶然量に對應して Ω の可測函數 $x(\omega)$——任意の k に對し $E_\omega(x(\omega)>k)\in F$——を考へる。

さて時間と共に變化する現象を統計的に研究しようとすれば時間をパラメーターとする偶然量を考えなければならない。この様な時間のパラメーターを含む確率變數 $x(t)=x(t,\omega)$ を確率過程とよぶ。そうして確率過程には $x(t)$ の時間的關連性を定める確率

(1.1)　$P(a_1<x(t_1)<b_1, \cdots, a_n<x(t_n)<b_n)$

が任意箇の時間 $t_1, t_2, \cdots t_n$, 任意の實數 a_1, b_1, … に對してむじゆんなく考えられていなければならない。t が整數値のみをとる場合は問題はないが t が連續した値 $-\infty<t<\infty$ をとる場合に次の様な困難が起る。個々の根源事象は實際の場合 t の變化につれて變る函數である。そこで例えば或 t の區間 I に於ける $x(t)$ の最大値 $U=\underset{t\in I}{\mathrm{l.u.b.}}\, x(t)$ の確率法則 $P(U\leqq x)$ に對しては非可附番事象の積 $\bigcap_{t\in I}\{x(t)\leqq x\}$ を考えなければならない。從つて例えば $x(t)$ が連續であるという様な事柄の確率を考える事が困難である。又 $x(t)$ の積分

(1.2)　$$\int_a^b x(t)dt$$

も特別な場合——例えば後に述べる定常過程の様なもの——を除いて考えることが困難になる。之等の難點を解決するため J. L. Doob は Kolmogoroff の前述の立場に立つて確率過程の基礎理論を作つた。そのやり方は大體次の様なものである。あらゆる實函數 $x(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ の作る空間を Ω^* とし豫め與えられてゐる確率 (1.1) によつて次の様な Ω^* の一種の區間

(1.3)　$a_1<x(t_1)<b_1, \cdots, a_n<x(t_n)<b_n$

に測度を與えると，Kolmogoroff の定理によれば之等區間に依つて定まる完全加法族 F^* に一意に測度を擴大し前述の 1°, 2°, 3° を滿足する様にする事が出來る。次に Ω^* の部分空間 Ω でその外測度 $\overline{P^*}(\Omega)=1$ をみたす様なものをとり $F=(E\,;\ E=E^*\Omega\,;\ E^*\varepsilon\Omega)$ とすれば F

は完全加法族で $P(E)=P^*(E^*)$ とおけばその上に確率 P が導入され，之が E^* のえらび方に關係しない事が證明される。かくして確率空間 (Ω, F, P) が定まる。之を確率過程と名づける 2]。

問題に依て始めに與えられているものは(1.1)であり，それに應じて種々の Ω のえらび方がある。この中でなるべく簡單な性質を持つた $x(t)$ の集合 Ω をとり，例えば U 或は (1.2) の積分が Ω の可測函數として定義出來るようにすることが望ましい。Ω の要素 $\omega=x(t)$ に解析的演算を行ふとき重要な性質の一つとして確率過程の可測性がある。それは次の様に定義する。

$x(t)$ は個々には t の函數で，その $t=\tau$ における値は Ω の要素 $\omega=x(\cdot)$ の $t=\tau$ における値 $x(\tau)$ であるから $x(\tau)=x(\tau,\omega)$ となり二變數 (τ,ω) の函數と考えられる。次に (t,ω) の空間 $\Omega\times T$ に測度を導入する。即ち任意の $E\in F$ 及び B-可測な T の集合 I の積集合 $E\times I$ の測度を $P(E)|I|$ ($|I|$ はルベツク測度) と定義しその測度をあらゆる $E\times I$ で定まる $\Omega\times T$ における完全加法族に擴大する。$x(t,\omega)$ が $\Omega\times T$ で定義された可測函數であるときに確率過程は可測であるという。

可測確率過程に Fubini の定理を適用すれば殆どすべての $x(t)$ が L-可測函數になる。然し (Ω^*, F^*, P^*) をそのまゝ確率空間にとれば如何なる場合にも可測過程にはならない事が說明される 2]。之が Ω^* の部分空間 Ω をとる一つの理由である。Doob は始めて可測になるための必要充分條件を與えたが，Kolmogoroff の與えた條件は簡單で便利である。この Kolmogoroff の定理に關連して Doob, Ambrose, 河田敬義氏の研究がある。Kolmogoroff の定理は次のように述べられる。

$\varepsilon>0$ は任意，h は t には關係しても ε には無關係な，しかも $t=0$ が密度 1 になつている様な t-集合の上で $h\to 0$ となるものとする。そのとき確率過程が可測なるための必要充分條件はほとんどすべての t に對し

$$P(|x(t+h)-x(t)|>\varepsilon)\to 0,\quad h\to 0.$$

が成立することである。

確率過程を定義するのに他に N. Wiener の方法がありそれが上記のものと同等である事，及兩者の關係が Doob-Ambrose によつて示される。

どの様な確率過程が重要であるかは，一つには實際に研究の對象となる現象をどの樣に數學的に形式化するかによつてきまる。例えば增殖，傳染，崩壞現象等を研究するとき，傳播過程，即ち時刻 t で起つた事象がその後の事象の生起を誘發或は抑制する樣な機構の確率過程が數學的モデルとして考へられる。又過去の狀態のうちで最近のものが強く將來に影響する樣な現象に對しては

$$P(x(t_1),\cdots,x(t_n);\ x(t)\leq x)=P(x(t_n);\ x(t)\leq x)$$

但し $t_1<t_2<\cdots<t_n<t$，n は任意．$P(x(t_1),\cdots,x(t_n);\ E)$ は $x(t_1),\cdots,x(t_n)$ を與えた場合の條件附確率，を滿足する確率過程．即ち Markoff 過程が一つの數學的モデルとして考えられる。Markoff 過程を系統的に研究する方法が Kolmogoroff によつて與えられた。

$P(x(s)=x;\ x(t)\leq y)=P(s,x;t,y)$，$(s<t)$ を遷移確率とよぶ，遷移確率系と時間の計り始めの分布が與えられておれば (1.1) の確率は定まる。遷移確率は次の形の微分方程式を滿足する。

$$\frac{\partial F(t,x;\tau,\xi)}{\partial t}+a(t,x)\frac{\partial^2 F(t,x;\tau,\xi)}{\partial x^2}+b(t,x)\frac{\partial F(t,x;\tau,\xi)}{\partial x}=0$$

W. Feller は，a, b が適當な條件を滿足するときこの方程式は單一の解をもち，遷移確率系が定まる事を證明した。W. Doeblin は上の Kolmogoroff の方程式から出發して $x(t)$ の行動について研究した。戰後に來た Mathematical Review によれば R. Fortet は同樣の方向に於てすぐれた研究を行つてゐるが詳細を知る事が出來ない。

伊藤清氏は全く別の立場に立つて Markoff 過程のすぐれた研究を行つた。遷移確率はいわ

ば狀態 $x(t)$ の移りゆく方向を與える量である。伊藤氏は此の様な性質の，然し確率變數として stochastic な微分を導入し，先に Wiener によつて考えられた積分を擴張して stochastic integral を導入し，stochastic differential equation の解として Markoff 過程を定め，それが與えられた遷移確率系を持つことを證明した。この様に Kolmogoroff, Feller の方法と違つて確率變數のみを取扱つていかうとする所に著しい特徴がある 5]。

傳播確率過程は始め G. Pólya, Eggenberger によつて研究された。此の方面の成果は餘り多く得られていない。最近すぐれた研究が北川敏男氏によつて行れた。北川氏 10] は組合せ，特性函數の方法から出發して種々の傳播機構とそれに對する興味ある極限法則を導き，地震の發生，傳染病の傳播の統計的研究への應用を示した。O. Lundberg は Kolmogoroff, Feller の方法，即ち遷移確率系の滿足する定差方程式によつて研究し，その結果を保險數學に應用した。

之等の確率過程と共に具體的研究の行われているものに定常過程がある。之はいわば平衡狀態におかれている現象のモデルと考へられる。定常過程とは (1.1) が任意の τ 及び n に對して

(1.4) $P(x(t_1+\tau), \cdots, x(t_n+\tau))=P(x(t_1), \cdots, x(t_n))$

を滿足するものである。以下主としてこの確率過程を中心として話を進めることにする。應用上はとくに二次能率の存在するときが重要である。此の場合平均値は t に無關係であるから一般性を失うことなく以下平均値 0, 二次能率 1 と假定する。一般には $x(t)$ は N 次元ベクトル $x(t)=(x_1(t), \cdots, x_N(t))$ である。そのとき $x_i(s)x_k(s+t)$ を (i, k) 要素とする行列を $x(s)\cdot x(s+t)$ とすれば之の平均値

(1.5) $R(t)=E(x(s)\cdot x(s+t))$

は s に關係しない。そして特に $R(t)$ が連續であるものが重要であるので以下 $R(t)$ は連續であるとする。以上の假定の下に Correlation Matrix $R(t)$ の特性は $N=1$ のとき A. Khintchine により，又一般の場合 H. Cramér によつて與えられた。以下話を簡單にするために $N=1$ のときを取扱う。Khintchine によれば correlation function $R(t)$ は t が連續パラメーターのとき

(1.6) $$R(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}dF(\lambda)$$

t が整數値をとるとき

(1.6′) $$R(n)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}dF(\lambda)$$

によつて與えられる。こゝに F は一つの分布函數（スペクトル分布）である。この表示は次の Bochner 及び數列の場合の類似の定理から導かれる。

連續函數 $f(t)$, $-\infty<t<\infty$, $f(0)=1$ が (1.6) の右邊の形に表わされるための必要充分條件は，有界區間の外で恒等的に 0 に等しい任意の可積分な $q(x)$ に對し

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int f(x-y)q(x)\overline{q(y)}dx\,dy\geqq 0$$

が成立することである。

この定理の簡單な證明は河田龍夫氏によつて與えられた。

(1.1) が正規法則であるような定常過程，即ち正規定常過程は更に特殊なものであるが，それに對して種々の結果が得られている。此の様なものが重要である理由は最近の Doob の論文に述べられている。

以下において重要な基礎的確率過程は differential stochastic process である。それは (1.1) が $t_1<\cdots<t_n$ に對して

(1.7) $$P(x(t_2)-x(t_1)<x_1, \cdots, x(t_n)-x(t_{n-1})<x_n) =\prod_{1}^{n} P(x(t_i)-x(t_{i-1})<x_i)$$

を滿足するもの，即ち相重らない t-區間での $x(t)$ の變化が獨立なものである。この様な確率過程は Bachelier, Khintchine, Kolmogoroff, Lévy により研究された。この場合適當な $m(t)$ をえらび $y(t)=x(t)-m(t)$ とおけば $y(t)$ は第一種不連續點を除き連續なる様に出來

る。特に $x(t)-x(s)$ が $N(0,|t-s|)$——$N(m,\sigma^2)$ は平均値 m, 標準偏差 σ の正規法則——に従うもの(homogeneous normal differential process=h. n. d. p.) は Brown 運動とよばれ Kolmogoroff, Lévy, Wiener 等により研究された。このとき $x(t)$ は確率 1 で連續函數になる。その連續の程度は $|x(t+h)-x(t)|=O(\sqrt{h\log h^{-1}})\,(h>0)$ となる。この様な $x(t)$ は到る所微分不可能になるのでそのまゝでは物理的な運動のモデルとして具合がわるいであろうが，この確率過程は伊藤氏の研究の示すように，又後になつても分る様に種々の確率過程の基礎になる。Wiener は次に述べるような別の形で h. n. d. p. を定義した。

a_0 は $N(0,2\pi)$, a_i, b_i は $N(0,\pi)\,(i=1,2,\cdots)$ に從ふ獨立變數とする。そのとき形式的 Fourier 級數

$$(1.8)\quad x(t)\sim\frac{t}{2}a_0+\sum_1^\infty\frac{a_n\cos nt+b_n\sin nt}{n}$$

と考えれば，固定された任意の t に對して右邊は確率 1 で收斂することはすぐ分る (Khintchine-Kolmogoroff) が，更に右邊の級數の和の部分列 $\{S_{2^n}(t)\}$ は確率 1 で一様收斂する事が證明されそれで $x(t)$ を定義すれば $x(t)$ は連續になり，(1.7) も容易に證明される。然し (1.8) は $x(t)$ の Fourier 級數になる事が證明出來る 11] ので前述の連續の度合が分つておるとすれば，$x(t)$ は收斂判定に關する Dini-Lipschitz の條件を滿足するので部分列のみならず $\{S_n(t)\}$ 自身一様收斂する。Wiener に從い $(0,2\pi)$ における differential process (1.8) を變換して $-\infty<t<\infty$ におけるそれを作る事も容易である。

§2. Differential process による積分，Wiener 積分

$x(t)$ を平均値 0 の differential process で $E\{(\xi(\tau)-\xi(0))^2\}<\infty$ とすれば

$$(2.1)\quad V(t_2)-V(t_1)=E\{(\xi(t_2)-\xi(t_1))^2\}$$

を滿足する單調函數 $V(t)$, $-\infty<t<\infty$, が定まる。そのとき

$$(2.2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)dV(t)<\infty$$

であるような任意の V-可測な $f(t)$ に對して

$$(2.3)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}f(t)d\xi(t)$$

が定義出來る。それにわ，互に重らない區間 $I_i=(a_i,b_i)\,(i=1,2,\cdots,m)$ で常數 c_i となり他で 0 であるような階段函數 $f(t)$ に對しては (2.3) を

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)d\xi(t)=\sum_{i=1}^{m}c_i(x(b_i)-x(a_i))$$

により定義し，一般の $f(t)$ に對してはこの様な階段函數の系列 $\{f_n(t)\}$ で $\|f_n-f\|\to0$ なるものをとれば $\{f_n(t)\}$ のえらび方に無關係に

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_n(t)d\xi(t)$$

は或確率變數に平均收斂する。この極限變數を以て (2.2) を定義する。$\xi(t)$ が h. n. d. p. のとき Wiener は $f\in L_2(-\pi,\pi)$ に對して (1.8) を利用して (2.3) (このときわ $-\infty$, ∞ の代りに $-\pi$, π とかく) を定義し $x(t)$ の或種の functional $F[x(\cdot)]$ の平均値

$$(2.4)\qquad \int_C F[\omega]P(d\omega),\quad \omega=x(\cdot)\in C$$

を計算する方法を示した。但し C は $x(t)$——確率過程の空間でその要素はすべて $(-\pi,\pi)$ の連續函數。(2.4) の形の積分を Wiener 積分とよぶ。最近 Cameron と Martin は數篇の論文で，Wiener 積分の研究を進めその値を計算する新しい方法を與え又或種の非線型積分方程式の解を Wiener 積分によつて表した。又 Kac は Wiener 積分を應用して確率論の極限定理を求めた。Cameron-Martin に從つて C は一般性を失ふことなく $x(0)=0$ である様なあらゆる連續函數 $x(t)$, $0\leqq t\leqq1$ の空間とし $x(t)-x(s)$ は $N(0,|s-t|/2)$ に從うものとする。次の定理が基本的である 1]。

$K(t,s)$, $0\leqq t\leqq1$, $0\leqq s\leqq1$ を或條件を滿足する核とし K の Fredholm 行列式

$$D=1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^1\cdots\int_0^1 \begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & \cdots & K(s_1,s_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K(s_k,s_1) & \cdots & K(s_k,s_k) \end{vmatrix} dx_1\cdots dx_k$$

は $D\neq 0$ であるとすると，Cを夫々自身に移す 1—1 變換 T:

$$y(t)=x(t)+\int_0^1 K(t,s)x(s)ds\,;x(\cdot),y(\cdot)\in C$$

が與えられる。そのとき C の任意の可測集合 S，可測函數 $F(\omega)$ に對して

$$\int_{TS}F(\omega)P(d\omega)=|D|\int_S \mathrm{F}[x(\cdot)+\int_0^1 K(\cdot,s)x(s)ds]\exp(-\Phi[\omega])P(d\omega),$$

$$\omega=x(\cdot)$$

但し $\Phi(\omega)$ は $K(t,s)$ から定まる可測函數。

$$\Phi(\omega)=\int_0^1\left[\frac{d}{dt}\int_0^1 K(t,s)x(s)ds\right]^2 dt+2\int_0^1\left[\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}K(t,s)x(s)ds\right]dx(t)+\int_0^1 J(t)d\{x^2(t)\}$$

J は $K(t,s)$ から定まる或有界變分の函數。

この結果と Sturm-Liouville 型固有値問題とを應用して一般に次の形の積分

$$\int_C \exp\left(\lambda\int_0^1 p(t)x^2(t)dt\right)\times F\left[\int_0^1 g(t)x(t)dt\right]P(d\omega)$$

$$\omega=x(\cdot)\in C$$

を計算することが出來る，こゝで $p(t)$ は連續で $p(t)\geqq 0$，λ は實數値をとるパラメーター，$g(t)\in L^2(0,1)$ とする。それによるとたとえば

$$\int_C\exp\left(\lambda\int_0^1 x^2(t)e^{\alpha t}dt\right)P(d\omega)$$

$$=\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}\lambda^{1/4}e^{\alpha/4}}\left[Y_0'\left(\frac{2\lambda^{1/2}e^{\alpha/2}}{\alpha}\right)J_0\left(\frac{2\lambda^{1/2}}{\alpha}\right)-J_0'\left(\frac{2\lambda^{1/2}e^{\alpha/2}}{\alpha}\right)Y_0\left(\frac{2\lambda^{1/2}}{\alpha}\right)\right]^{-1/2}$$

一般に $\xi(t)$ が h. n. d. p. で $x(t)-x(s)$ が $N(0,|t-s|)$ に従えば，f，$g\in L_2$のとき

(2.5)　$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)d\xi(t),\quad \int_{-\infty}^{\infty}g(t)d\xi(t)$$

の同時分布は分散行列が

(2.6)　$$\begin{pmatrix} \|f\|^2 & (f,g) \\ (f,g) & \|g\|^2 \end{pmatrix}$$

で與えられる正規法則である。

Khintchine-Kolmogoroff によれば，任意の分布函數 $F(\lambda)$ をスペクトル分布とする正規定常過程が存在する。定常數列に對しても同樣のことが成立する。

この定理の別證明が伊藤氏 1] によつて與えられている。又 (2.3) の積分と (2.5) (2.6) に類似の關係からも證明出來る 2]。$\xi(t)$ を $(-\infty,\infty)$ における h. n. d. p.，T^t は $L^2(-\infty,\infty)$ のユニタリー作用素の群で $T^{t+s}=T^tT^s$，I を單位作用素として $T^h\to I(h\to 0)$ を滿足するものとするとき，$f\in L^2$ に對して

(2.7)　$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}T^t f\cdots$$

で定義される確率過程の性質は Wienerによつて論ぜられた。このものは容易に分るように定常正規であり，そのスペクトル分布は T^t のスペクトル表示から求まる。Wiener の得た結果の一部は後に述べる樣な，正規定常過程に關して成立つ混合性に關する定理から容易に出てくる。以上のことから次の事が問題となる。即ち正規定常過程は常に T^t を用いて (2.7) の樣に表わされるかと言うことである。正規で $E\{(x(t+h)-x(t))^2\}\to 0,\ h\to 0$ であるような確率過程は一般に一つの Hilbert 空間の曲線と考えられる。この考えを用いて次の事が證明される 2]。

上の意味で連續な正規確率過 $x(t)$ に對して h. n. d. p. $\xi(t)$ と $K(t,s)$ が定まり次のように表示される：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s)d\xi(s)$$

特に $x(t)$ が定常ならば T^t によつて $K(t,s)=T^tf(s)$，$f(s)\in L_2(-\infty,\infty)$ と書く事が出來，(2.7) の表示が得られる。

$\mathrm{T}^tf(s)=f(s+t)$ のときわ，f の Fourier 變

換え g とすれば $F(\lambda)$ は

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}|g(u)|^2du \tag{2.8}$$

で與えられる。卽ち $F(\lambda)$ は絕對連續となる。逆に $F(\lambda)$ が絕對連續なものは (2.7) の表示において $T^tf(s)=f(s+t)$ が成つ樣にする事が出來ることも證明されよう。

Markoff 過程の場合は $R(t)=e^{-k|t|}$ $(k\geqq 0)$ となる。そうして伊藤氏によれば次の樣に表示される。

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}\sqrt{2k}\,e^{-k(t-s)}d\xi(s). \tag{2.9}$$

卽ちこの場合 f を

$$f(s)=\begin{cases}\sqrt{2k}\,e^{-ks} & (s\geqq 0)\\ 0 & s<0\end{cases}$$

と定義すれば (2.9) は

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}-f(s+t)d\xi(-s)$$

となり上に述べた表示が成立つ。

§3. 定常過程のスペクトル表示とエルゴード性 6] 11]

正規定常過程は (2.3) の積分を用いてスペクトル表示出來る。確率過程が正規でなくても (2.3) の積分を少し廣くすれば矢張り同樣の表示が成立つ。この表示は Doob によれば戰時中 H. Cramér によつても求められている。Cramér の證明はこゝに述べるものとは異るようである。

$\xi(t,\lambda)$, $x(t,\lambda)$ 等を次の式で定義する。

$$\xi(t,\lambda)=\underset{\substack{(\omega)\\ A\to\infty}}{\mathrm{l.i.m.}}\ \pi^{-1}\int_{-A}^{A}x(t+s,\omega)\frac{\sin\lambda s}{s}ds,$$

$$\xi_c(t,\lambda)=\underset{\substack{(\omega)\\ A\to\infty}}{\mathrm{l.i.m.}}\ \pi^{-1}\int_{-A}^{A}x(t+s,\omega)\frac{\cos\lambda s-1}{s}ds,$$

$$x(t,\lambda)=\begin{cases}\xi(t,\lambda+0), & \lambda\neq 0,\\ 0 & \lambda=0,\end{cases}$$

又 ξ_c から全く同樣に $x_c(t,\lambda)$ を定義する。そうすれば

$$x(t,\lambda+0)-x(t,\lambda-0)=A_\lambda\cos\lambda t+B_\lambda\sin\lambda t$$

又 x_c に對しても同樣の關係が成立つ。$x(t,\lambda+0)$ 等は $x(t,\lambda)$ が λ に關し differential process になる事によつて $\lambda\to+0$ のときの極限變數として定まる。A_λ, B_λ は Fourier 係數

$$A_\lambda=2\underset{t}{M}[x(t)\cos\lambda t], \tag{3.1}$$
$$B_\lambda=2\underset{t}{M}[x(t)\sin\lambda t].$$

$\underset{t}{M}$ は時間平均

$$\underset{t}{M}[\cdot]=\lim_{T\to\infty}T^{-1}\int_0^T\cdot\,dt.$$

かくして得られた $x(t,\lambda)$, $x_c(t,\lambda)$ によつて $x(t)$ は

$$x(t)=\int_0^\infty\cos\lambda t\,d_\lambda x(0,\lambda)-\int_0^\infty\sin\lambda t\,d_\lambda x_c(0,\lambda)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}dS(0,\lambda), \tag{3.2}$$
$$2S(t,\lambda)=x(t,\lambda)-ix_c(t,\lambda)$$

で與えられる。同樣の表示は t が整數値パラメーターのときも成立つ。

A を $F(\lambda)$ の 0 でない不連續點の全體とすれば, Slutsky 14] によれば

$$x_1(t)\sim\frac{1}{2}A_0+\sum_{\lambda\in A}(A_\lambda\cos\lambda t+B_\lambda\sin\lambda t),$$
$$x(t)=x_1(t)+y(t)$$

とおけば $F(\lambda)$ の純不連續部分(階段函數)と連續部分とをスペクトル分布にもつ $x_1(t)$ と $y(t)$ とに分解される。一般に $F(\lambda)$ を幾つかの單調增加函數の和に分ければそれに對應して $x(t)$ も分解することが出來るが, この樣な分解の中で Lebesgue 分解 $F=F_1+F_2+F_3$ (F_1, F_2, F_3 は夫々段函數, 特異函數, 絕對連續函數) に對應して F_i をスペクトル分布にもつ樣な定常過程 $x_i(t)$ によつて $x(t)$ を分けたもの:

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$$

は後に述べるエルゴード (i), (ii) 性から見てはつきりした意味を持つてゐる。

$x(t)$ とエルゴード定理との關係は例えば正規過程の場合 (2.7) の表示が可能なことによつても明かであるが一般に次の樣に考えられる 1]。

§1. に述べた確率過程 $x(t)$ の空間 Ω に於て變換

$$T^s\omega=x(s+t),\quad \omega=x(t)\in\Omega.$$

によつて Ω の可集測合 E の測度は不變 $P(T^sE)=P(E)$ ((1.4) の關係により) になる。$F(\omega)$ が Ω で可積分であれば確率 1 で

$M[F(x(t))]$ が存在する。此の邊の嚴密な證明は Doob によつて與えられている。確率變數列 $\cdots x_{-1}, x_0, x_1, \cdots$ の各 x_i が同じ法則に從う獨立なものであれば之は一種の定常過程で $F(\lambda)$ は, $F(\lambda)=0$ $(\lambda\leqq-\pi)$, $=(\lambda/2\pi)+(1/2)$ $(-\pi<\lambda<\pi)$, $=1$ $(\lambda\geqq\pi)$ で與えられる。この場合 Doob が證明した所によると $\{x_n\}$ は强混合型になる。一般の場合に於ては正規確率過程の場合にエルゴード性に關して精しい結果が得られる 6] 11]。それを次の樣に述べることが出來る。

$x(t)$ を正規定常過程とすれば (i) $x(t)$ が弱混合型であるための必要充分な條件は $F(\lambda)$ が連續になる事である。(ii) $x(t)$ が强混合型になるための必要充分な條件は $R(t)\to 0$, $t\to\infty$, が成立することである。

そうして測度可遷性(metrical transitivity)と弱混合性は正規過程の場合一致することが證明される。混合性の確率論的意味は次の通りである。例えば强混合性に對して考える。この場合任意の $t_1<t_2<\cdots<t_n<t$ に對して, $x(t_1)$, $x(t_2)$, $\cdots$, $x(t_n)$ を與えた場合 $x(t)$ の條件附確率法則

(3.4) $$F(x(t_1),\cdots,x(t_n);\ x(t)\leqq x)$$
$$=P(x(t_1),\cdots,x(t_n);\ x(t)\leqq x)$$

は $N(-c_1(t)x(t_1)-c_2(t)x(t_2)-\cdots-c_n(t)x(t_n);\ \sigma^2(t))$ になり, 容易に計算される樣に

$$c_i(t)=A_i(t)/A,\quad A=|R(t_i-t_j)|$$
$$i,j=1,2,\cdots n.$$

$A_i(t)$ は一般に次の樣な形をしている。

$$A_i(t)=\begin{vmatrix} R(t-t_1) & \cdots & \cdots \\ R(t-t_2) & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \\ R(t-t_n) & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$\sigma^2(t)$ は次の樣になる

$$\sigma^2(t)=B(t)/A$$

$$B(t)=\begin{vmatrix} 1 & R(t-t_1) & \cdots & \cdots & R(t-t_n) \\ R(t-t_1) & 1 & \cdots & \cdots & R(t_1-t_n) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ R(t-t_n) & R(t_n-t_1) & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Riemann-Lebesgue の定理によつて $R(t)\to 0$, $t\to\infty$, であるから $t\to\infty$ のとき, $c_i(t)\to 0$, $B(t)\to A$, 從つて

$$F(x(t_1),\ x(t_2),\ \cdots,\ x(t_n);\ x)$$
$$\to(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{x} e^{-(1/2)u^2}du,$$
$$t\to\infty.$$

即ち始めに値 $x(t_1)$, $\cdots$, $x(t_n)$ を如何に指定しても時間が經てば $x(t)$ の分布はそのアプリオリな分布に近づく。

正規確率過程が絶對連續な場合は河田氏の論文 9]に論ぜられている。一般の定常過程が絶對連續なるための必要充分條件は Slutsky が與えた。それは $F(\lambda)$ が

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 dF(\lambda)<\infty$$

を滿足することである。$F(\lambda)$ が更に或 $\varepsilon>0$ に對して

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\varepsilon|\lambda|}dF(\lambda)<\infty$$

を滿足しておれば $x(t)$ はすべての t に於て正則になる。

Slutsky, Romanovsky によればパラメーター t が整數値をとる場合, 定常過程の系列 $\{x_n(t)\}$ に於て $\{R_n(t)\}$ が $n\to\infty$ のとき或條件を滿足すれば $x_n(t)$ は正弦曲線に近くなる事が示される (sinusoidal limit theorem)。この結果は $x_n(t)$ に對應する $F_n(\lambda)$ によつて述べかえれば, t が連續な場合も成立する形で一般化される。それは次の樣に述べられる。

$F_n(x)$ が $n\to\infty$ のとき $x=\lambda_k$ $(k=1,2,\cdots,m)$ で跳躍 δ_n を持つ階段函數に收斂すれば, 任意に固定した t に對して

$$P(|x_n(t)-\sum_{k=1}^{m}(A_{n,k}\cos\lambda_k t$$
$$+B_{n,k}\sin\lambda_k t)|>\delta)\to 0,$$
$$n\to\infty,$$
$$E(A^2_{n,k})=E(B^2_{n,k})=\delta_k^2.$$

Slutsky は與えられた獨立變數の移動平均によつてこの樣な $x_n(t)$ の例を與えた。獨立變數が誤差である樣な場合について考えれば上の結果は數値計算の誤差の取扱に於ても有効になり

はしないかと思われる。

§4. **Kolmogoroff の定理**　$t_1, t_2, \cdots, t_n$ における $x(s)$ の値 $x(t_1), \cdots, x(t_n)$ から $s=t$ における値 $x(t)$ を豫想する一つの方法として $\sigma_n^2=\sigma^2(t_1, \cdots, t_n; t)=E\left(\left(x(t)-\sum_{j=1}^{n} a_j x(t_j)\right)^2\right)$ を最小にする様な a_j^n によつて $S_n=S(t_1, \cdots, t_n; t)=\Sigma a_j^n x(t_j)$ を作る方法がある。t が整數値パラメーターの場合に H. Wold 15] にこの事に關聯した研究があるが, Kolmogoroff は次に述べる結果を得た。

(i) 内挿の場合　$S(\pm 1, \cdots, \pm n; 0) =\sum_{k=-n}^{n}{}' a_{n,k}x_k$ ($'$ は $k=0$ を除いて和をとることを意味する) を $x(s)$ に對する上の最小自乘法の意味での近似とすれば　$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sigma(\pm 1, \cdots, \pm n; 0)$ が存在して

$$(4.1)\qquad \sigma^2=\left(\pi^{-1}\int_0^\pi \frac{dx}{s(x)}\right)^{-1},\quad s(x)=F'(x)$$

但し (4.1) の ( ) 内が ∞ になるとき右邊は 0 を表わすとする。

(ii) 外挿の場合　$S(-n, -n+1, \cdots, -k; 0) =\sum_{i=k}^{n} a_{n,i}x(-i)$ を $x(0)$ に對する近似とすれば $\sigma_k=\lim \sigma(-n, -n+1, \cdots, -k; 0)$ が存在して

$$(4.2)\qquad \sigma_k^2=(1+b_1^2+\cdots+b_k^2) \times\exp\left(\pi^{-1}\int_0^\pi \log s(x)dx\right).$$

但し b_i は $\log s(x)\sim c_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots$ とするとき $\exp(1/2(a_1r+a_2r^2+\cdots))=1+b_1r+b_2r^2+\cdots$ によつて與えられるものとするし,

$$\int_0^\pi |\log s(x)|\,dx=\infty$$

のときわ (4.2) の右邊は 0 を表わすものとする。

(i) は坂元氏によつて證明されている。Mathematical Review によればその後 Kolmogoroff の證明が出たが, そこの紹介によつては證明の内容は不明である。(ii) は Fourier 級數論の F. 及 M. Riesz の定理と圓周上の直交多項式に關する結果を用いて證明出來る 11]。

§5. **具體的な確率過程の例**　(i) Brown 運動に關する古典的研究においては Langevin の方程式

$$(5.1)\qquad m\frac{du}{dt}=-fu+F(t),\quad u=dx/dt$$

が基本的である。但し u は粒子の速度, m は質量, f は抗力の常數, $F(t)$ はまわりから粒子におよぼす彷徨的外力とする。$F(t)$ に對して Uhlenbeck, Ornstein 等の設けた假定は $F(t_1)$, $F(t_2)$ の相關は $t_1=t_2$ のとき極めて大きく, $|t_1-t_2|^{-1}$ と共に急激に減少するというのである。此處でわ少し異つた考察を行つてみよう。それは $F(t)$ を h. n. d. p. の形式的微分と考えることに基いている 11]。h. n. d. p. は前述の様に微分不可能であるからこの様な考え方は嚴密にわあてはまらない。然し Uhlenbeck, Ornstein の假定から

$$(5.2)\qquad \xi(t)=\int_0^t m^{-1}F(s)ds$$

が h. n. d. p. になる事を證明する事は困難でわない。Doob もこの考えに基いて物理的問題を取扱つている。(5.1) を (5.2) によつて形式的に積分すれば

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-b(t-s)}d\xi(s)+o(1),\quad b=f/m,$$

$o(1)$ は $t\to\infty$ のとき o に近づく項。上の形によれば $u(t)$ の主要項は Markoff 過程になり, 强混合型であつて, 始めに $u(t)$ の値をどの様に指定しておいても $u(t)$ の分布はアプリオリなる分布に近づく。實際 (2.5), (2.6) を考慮しエネルギーの等分配則からの結果 4] $E((\xi(t)-\xi(s))^2)=2m^{-1}bkT(t-s), (t>s)$ を用いて $u(0)=u_0$ の初期條件の下に (5.1) をとき (2.5), (2.6) によれば

$$\begin{aligned}
P(u(o)&=u_0;\ u<u(t)<u+du)\\
&=\left(\frac{m}{2\pi kT(1-e^{-2bt})}\right)^{1/2}\\
&\quad\times\exp\left(-\frac{m}{2kT}\,\frac{(u-u_0e^{-bt})^2}{(1-e^{-2bt})}\right)du\\
&\to\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{mu^2}{2kT}\right)du\qquad t\to\infty.
\end{aligned}$$

即ち時間が經てば Maxwell の分布に近づく。

ii) 物理學，工學上重要な種々の彷徨現象の內，或時刻 t_0 より始つて偶發的な現象が引續いて起ると，それに伴つて或 $f(t)$ で表わされる反應が起り，それが加算されて時間 t に於て

$$(5.3)\qquad \theta_{t_0}(t)=\sum_{i=1}^{N} f(t-t_i)$$

の形で現われるものがある。但し t_i は現象の起る時刻。N は (t_0, t) における偶然現象の生起回數。今簡單のために $t_0=0$ とおき $(0, T)$ のみで現象が起るものとすれば (卽 $0\leqq t_i\leqq T$), N の平均値 $\overline{N}$ が大きく又 N が Poisson 分布に從っているとすれば，(5.3) は Kac-Hurwitz に從つて

$$(5.4)\qquad T^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty} B(\omega_k)(X_k \cos 2\pi\omega_k t + Y_k \sin 2\pi\omega_k t),\quad \omega_k=k/T$$

で表わされている。こゝに X_0 $X_1, \cdots$ は $N(0, 1)$ に從い獨立に分布するものとする 7]。此の様な Fourier 展開は Uhlenbeck, Goudsmit 等によつて利用されて來た。S. O. Rice は最近この展開を利用して無線工學の random noise の研究を行つた。Rice の原論文を見ることが出來ないのでこの興味ある論文の內容を充分に述べることが出來ないが Mathematical Review の紹介によれば $\theta(t)$ の根の平均値は $\pi^{-1}\{-R''(0)/R(0)\}^{1/2}$ ($R(t)$ は $\theta(t)$ の correlation function) である。又 $\theta(t)$ の一根が (t_1, t_1+dt_1) に他の一根が (t_2, t_2+dt_2) に存在する確率が計算され實驗との比較がなされている。實際問題に極めて重要な結果として $\theta(t)$ の根が指定された區間內にはいつて來ない確率が計算されている。

Kac によれば之等根の分布に關する結果は Littlewood-Offord の研究の一部を精密にした Kac 自身の次の定理の證明と同様にして導かれるという。

$X_0, X_1, \cdots, X_n$ を $N(0, 1/\sqrt{2})$ に從う獨立な確率變數とすれば代數方程式

$$X_0+X_1x+\cdots+X_nx^n=0$$

の根の數 N_n の平均値は

$$E(N_n) =4\pi^{-1}\int_0^1\frac{[1-n^2\{x^2(1-x^2)/(1-x^{2n})\}^2]}{1-x^2}dx$$

で與えられ，この積分の計算から $E(N_n)$ は漸近式

$$E(N_n)\sim(2/\pi)\log n,\quad n\to\infty$$

を滿足する 8]。

Kac の後に A. M. Peiser の研究があるが確率論的により進んだ結果には到達していない様に思われる。

(5.3) の様な $\theta(t)$ の平均値及標準偏差を計算する公式が古く N. R. Campbell によつて與えられており，後に E. N. Rowland 13] は shot effect の研究においてそれを擴張している。その際設ける假定では N (增幅器に於て眞空管の陰極から陽極にとぶ電子數) は相當らない時間々隔では獨立になり，その平均値が時間間隔に比例するので結局 Poisson 分布を假定していることになり，この事から後に述べるように $\theta(t)$ を differential process で積分表示すれば計算が簡單になる 11]。

この問題に於て興味あることは，より精密な近似を行うて結果をよくしようとすれば一種の傳播過程を取扱わなければならなくなる。Rowland 13] はその際の計算において省略を行つて $\overline{\theta^2}$ や或種の確率を計算してゐるが，省略を行つているため，得られた結果に含まれる常數の關係によつては $\overline{\theta^2}$ や確率が負になる。この種の傳播過程を含んだ現象は他にも數多く見られるが，それを一般的に解決する様な確率過程の理論はほとんど出來ていないように思われる。

(5.3) で與えられる彷徨現象を研究する一つの方法は前述の通りであるが (5.4) の形を用いないで次のようにして取扱つた方が便利な事もある。そうして實際現われる彷徨現象でわ $\theta(t)$ の原因になる偶然現象 (ショック) が異つた種類のものから成り，それに應じて異つた反應が加算される事が多い。それゆえ (5.3) を次の様

にやゝ一般化して考える。ショックの種類を區別する變數を $u, v, \cdots$ とし，區間 $(u, u+\Delta u; v, v+\Delta v; \cdots)$ に屬するショックが $(t, t+\Delta t)$ 内に起る回數（確率變數）を $\Delta_t\Delta_u\Delta_v\cdots\nu(t; u, v, \cdots)$ とし，之が $\Delta_t\Delta_u\Delta_v\cdots N(t; u, v, \cdots)$ を平均値とする Poisson 分布に從つており，$t, u, v\cdots$ の區間が相重らなければ，それに應ずる $\Delta_t\Delta_u\cdots\nu(t; u, \cdots)$ は互に獨立であるとする。この様にすれば $\nu(t; u, \cdots)$ はパラメーター $t, u, \cdots$ に關する一つの differential process（個々の函數 $\nu(t; u, \cdots)$ は階段函數）である。ショック $(u, v, \cdots)$ に應じて $f(t; u, \cdots)$ で表わされる反應が起るものとする。かくして t_0 から始まるこの様な偶發的ショックに伴つて加算された反應が t に於て示す値は (5.3) と同樣な和の形にかけるが，又それは ν を用いて

$$(5.5)\qquad \theta(t)=\int\cdots\int_{t_0}^{t} f(t-\tau; u, v, \cdots)\times d_t d_u d_v\cdots\nu(\tau; u, v, \cdots)$$

で與えられる。この積分は階段函數によるものであるからその存在については問題は起らない。又 $\int\cdots$ は $u, v, \cdots$ のすべての可能な値について積分する事を示す。こゝで充分時間が經た後に於ける狀態を知るには相對的に $t_0\to-\infty$ とし，t を固定して考えればよい。ショックが時間について均一のときは $\Delta_t\Delta_u\cdots N(t; u, \cdots)=\Delta_t\Delta_u\Delta_v\cdots N(u, v, \cdots)$ となり，$t_0\to-\infty$ のとき $\theta_{t_0}(t)$ は定常過程 $\theta(t)$ になる事が分る。又 ν に關する分布から $(\theta(t_1), \cdots, \theta(t_n))$ の特性函數は容易に計算される。そしてこの特性函數を利用して $\theta(t)$ が強混合型になる事が證明される。この事は (5.5) の $\theta(t)$ の物理的性質として重要である。實際しばしば $\theta(t)$ の平均の記號 $\overline{\theta(t)}$ が $E(\theta(t))$, $\underset{t}{M}(\theta(t))$ の中何れを表わしているかあいまいにされている事がある。實際には平均は實驗値によつて時間平均によらなければならないが　上の $\theta(t)$ の様に強混合型であれば $\underset{t}{M}[\theta(t)]=E(\theta(t))$ となる。J.M. Whittaker は shot effect の取扱において電子が短時間にかたまつて運ばれる場合に相當する Campbell の公式を出してあるが，この場合 f と N を特別な形にとれば (5.5) に含まれて來る事が分る。

實驗によれば稀薄な氣體中に鏡を吊すとそれに氣體分子が衝突して廻轉 $\theta(t)$ が記錄され，曲線 $\theta(t)$ は氣體の壓力 p に應じて異つているが鏡の廻轉による運轉エネルギーとポテンシヤルエネルギーに對して等分配則が成立し，p が小になれば $\theta(t)$ は單一周波數の正弦波に近くなり，それに時々亂れが加わる。

この現象の理論的證明は Fourier 展開 (5.4) を用いて，Uhlenbeck-Goudsmit によつて行われた。Fowler に從い Campbell の公式によるとすれば，この場合偶發的ショックは分子が鏡の面に衝突する事である。この衝突は鏡の面に於て衝突の起る場所と衝突分子のもつ運動量の鏡の面に直角な方向への成分との二つの變數によつて區別される。氣體が稀薄である事から第一の近似として ν は Poisson 分布に從うものと考えられる。かくして Uhlenbeck, Goudsmit に從い f の形を運動方程式から求め，N を Maxwell の分布から求め，(5.5) の表示を利用すれば，$\theta(t)$ の correlation function を計算することが出來る。之に $\theta(t)$ が強混合型なる事を考慮すれば時間平均の形でエネルギー等分配則が求まり，又前の sinusoidal limit theorem を用いれば p が減少するとき $\theta(t)$ が正弦波形に近くなる事も容易に分る。

Mathematical Review によれば Blanc-Lapière は shot effect に關聯した確率過程の研究を行いその一部は上に述べた一部の結果と本質的に同樣のものの様である。又 Blanc-Lapière 及 Fortet は linear filter に關して確率過程論を應用している。それによれば filter が $g(t)$ によつて

$$(5.6)\qquad x_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(u)g(t-u)du$$

の形で $x(t)$ から $x_1(t)$ に變る様な作用をすれば，(i) g の Fourier 變換を G とするとき $x_1(t)$ のスペクトル密度は $x(t)$ のそれに $|G|^2$ を乘じたものになり，$G(\lambda)$ が λ の或範圍で 0

になる様に η が與えられておれば $x(t)$ のその周波數に相當した部分が除かれる事になる。この様な考えを用いれば任意の $x(t)$ が小範圍の周波數から成るものゝ和に分解され，(ii) その各成分は局部的に正弦波に近似している 3]。

(i) は §2 に述べた事柄及その證明によつて明かである。(ii) は先に述べた sinusoidal limit theorem に他ならない。又以上の他に §2 に於て述べた T^t と $x(t)$ のスペクトルとの關係が得られているがそれが先に述べた様なものであるかどうか明かでない。他の論文に於て Blanc-Lapière, Fortet は前述 filter の理論で用いた方法を或種の確率過程に對して擴張している。

以上主として定常過程を中心として最近の論文の紹介を兼ねて，確率過程論の一部について述べてみたが，原論文を見る事が出來ず誤つて傳えられている點もあろうと思われる。又 S. Chandrasekhar, J. v. Neumann の天體の統計力學的研究，Khintchine の統計力學の基礎的部分の研究，N. Arley の Markoff 過程論とその Cosmic radiation えの應用，Doob の Markoff 過程に關する二つの論文及 Langevin の方程式に關する研究等がある。その中二三のものは日本に來ているが原論文が見られないので全然ふれられなかつた。

文　献

1] R. H. Cameron, W. T. Martin: *Transformation of Wiener integrals*…, Trans. A. M. S., 58 (1954).

2] J. L. Doob: *Stochastic process depending on a continuous parameter*, Trans. A. M. S., 42 (1937).

3] Blanc-Lapière, R. Fortet: *Sur la décomposition spectrale*…, C. R. Paris 25 (1946); *Résultats sur la decomposition spectrale*…, 同上.

4] R. H. Fowler: *Statistical Mechanics*, Cambridge, 1936.

5] 伊藤清: Markoff 過程を定める微分方程式，全國紙上談話會，244 (昭 17).

6] 伊藤清: *A kinetic theory of turbulence*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, No. 3 (1944).

7] M. Kac, H. Hurwitz: *Statistical analysis of certain types of random function*, Ann. Math. St., XV (1944).

8] M. Kac: *On the average number of roots*…, Bull. A. M. S. 49 (1943).

9] 河田敬義: 正規確率過程について，統計數理研究所講究錄，1 (昭 19).

10] 北川敏男; *The weakly contagious stochastic process*…; *The weakly contagious discrete st. process*, Mem. Fac. Science, Kyūsyū Im. Univ., 2 (1941).

11] 丸山儀四郎: 定常確率過程の調和解析，九大理學部研究報告，2 (昭 22); *The harmonic analysis of stationary st. processes* (未刊).

12] S. O. Rice: *Mathematical analysis of random noise I, II*, Bell. system. Tech. J., 23 (1944).

13] E. N. Rowland: *The theory of the mean square variation*…, Proc. Cambridge Phil. Soc., 32 (1936). *The theory of short effect II*, 同上 33 (1937).

14] E. Slutsky: *Sur les fonctions aléatoires presque périodiques*…, Acturalités 738 (1938).

15] H. Wold: *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, Uppsala, 1938.