河田龍夫著「フーリエ解析と確率論」

國澤, 清典
統計數理研究所

https://hdl.handle.net/2324/12913

出版情報：統計数理研究. 2 (1), pp.47-49, 1948-05-10. 統計科学研究会
バージョン：
権利関係：

批　評　紹　介

河田龍夫著　フーリエ解析と確率論

國　澤　清　典

統計數理研究所

本書はフーリエ解析を道具にして，確率論の色々の定理と解析學の諸事實との相互關係を明らかにするといつた方面の著者のこゝ二三年の研究成果を公にされたもので，全章を通じて數個の定理を除きことごとく定理の證明は從來より簡單にして奇麗な別證を示してあり，その腕の强靱さに先づ敬服させられる。フーリエ解析を道具にした著者のこの樣な研究態度については，序文でも述べている樣に，例へば P. Lévy の書物に見られる樣な確率論の定理の成立の必然性を示唆する樣な極めて直觀的な證明も必要であるが，純解析的な證明もそれによつて他の解析の分野との關係が明になつてくるとすれば，そこにもう一つ高い見地をつくる素因となり，この見地よりして定理の成立に最も自然的な證明を與へてくれるといつた意味の事を述べている。故に著書は取りあげる問題が變れば，それを研究するに最もふさわしい道具の發見に努めてやまない。確率論に於て旣に知られた定理は，その定理の發見者が使つた研究道具により得られたものであるから，定理の表現の仕方がその道具の使ふのに便利になる樣に述べてある。故に新しい道具により，その定理の別證をやつたり，擴張したりする場合は，その新しい道具にふさわしい樣な定理の表現に改める必要があると思ふ。今迄の習慣通りの形式に定理を述べる必要はない樣に思はれる。例へば，三級數定理の A. Kolmogoroff の定理の表現形式には A. Khintchine の equivalent series の道具を使ふに便利な樣に述べてある。この定理を平均濃度函數 (mean concentration function) を使つて證明するならば A. Kolmogoroff の表現形式では不便である事が痛切に感ぜられる。この事が端的に示されて興味深く感じるのは，第四章の函數の Fourier-Stieltjes 積分による表示である。著者，S. Bochner, A. Khintchine, H. Cramér はそれぞれ，とりあげる道具の異る爲に，函數の Fourier-Stieltjes 積分による表示形式が異つている。とりあげる道具の優劣さが特に目立つてくる。又筆者は旣に上に述べた樣にもう一つの高い見地から定理の成立に最も自然的な證明を見つけると云ふ樣な事を書いたが，著書の述べんとしている意圖の良くあらはれていると思へるのは，P. Lévy の連續定理である（第三章），特性函數の Fejér 積分を考へて，その收斂を問題にするならば，連續定理はその特別な場合になつて居り，P. Lévy の連續定理の自然さが目に見えてくる，その他この樣な例は至る所ある。以下各章にわたつてその紹介の大略を述べるが，著者の意圖とは全くかけはなれた事を述べる事を恐れる次第である。

第一章では特性函數の性質を述べてあり，特に面白いのは A. Khintchine の不等式から

$$\exp(-t^4),\ \exp(-t^{\alpha})\ (\alpha>2),\ \exp(-t^4-t^5),$$
$$2/\{\exp(t^k)+\exp(-t^k)\}\ k=2,3,\cdots\cdots,\ 1/(1+t^4)$$

の特性函數でない事が直に得られる事で（角谷博士の注意），これは M. Mathias, M. Kac の證明と比較して極めて簡單である。

第二章では先づ，特性函數が整函數の實軸上の値となつている場合を論じてある。即ち有界な確率變數の特性函數は指數型 (exponential type) の整函數であり，又逆に指數型の整函數である如き特性函數は有界な確率變數に對應する。更に分布函數が確率密度 $p(x)$ をもち，この $p(x)$ に就て $K\exp(-|x|^{1+\alpha})\leq p(x)\leq K'\exp(-|x|^{1+\alpha})$ (K, K' は常數，$\alpha>0$) が成立するならば簡單に積分の評價により對應する特性函數は $1+{}^1/\alpha$ の位數 (order) の整函數となる。即ち任意位數の特性函數が存在する。更に無限大位數を持つ特性函數も存在する。特に位數が有限で2より大な

る如き整函數の特性函數は Picard-Borel の除外點を持たない (J. Mascinkiewicz), これを使へば $\exp(a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_rz^r)$ ($r>2$) の次數 r で且零點がないから實軸上で特性函數になり得ない。この事實を使つて J. Marcinkiewicz は Math. Zeit, 44 (1939) で $X_1, X_2, \cdots\cdots$ を獨立な同じ分布 $V(x)$ をもつ確率變數としてすべての次數の絶對積率が存在している時，二つの級數 $\Sigma a_\nu X_\nu, \Sigma b_\nu X_\nu$ が收斂して同じ分布をもつならば $\{|a_\nu|\}, \{|b_\nu|\}$ は各項の順序のみの相異か，又は $V(x)$ は Gauss 分布をもつと云ふ事を證明しているが，これも應用例として紹介して貰ひ度かつた。次に整函數より，半平面 $Iz>0$ (Iz は z の虚數部分を表す) で正則な特性函數に移ると，對應する確率變數はどの樣になるかと云ふに，先づ矩形領域 $0\leq Iz\leq R$, $|Rz|\leq\Delta$ で正則な函數 $f(z)$ の $Iz\to0$ の時の $|Rz|<\Delta$ での極限函數として特性函數 $f(x)$ が示されるための必要で十分な條件は $f(x)$ の分布函數を $\sigma(x)$ とすれば $\exp(-rx)$ を $\sigma(x)$ で $(0,-\infty)$ の間積分したものが $r<R$ なる任意の r に對して存在する事である (J. Marcinkiewicz) この定理に於て $R\to\infty$ ならしめた時直觀的に考へて $x<0$ で $\sigma(x)=0$ を得るが，此の間の事情を著者は次の樣な面白い關係で明瞭ならしめた。即ち，特性函數 $f(z)$ が $Iz>0$ で正則で有界な函數の $Iz\to0$ ならしめた時の極限函數であるための必要十分な條件は $x<0$ で $\sigma(x)=0$ なる事である。此等の事實は何れも確率論で重要な定理として應用されている。(例へば J. Marcinkiewicz, Sur les fonctions independentes III, Fund. Math., 31.)

第三章では特性函數の Dirichlet 積分，Fejér 積分及び Poisson 積分につき論じている。先づ特性函數 $f(x)$ の Dirichlet 積分

$$D_\alpha f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha(t-x)}{t-x}f(t)dt$$

は Cauchy 積分 $\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}$ で存在して $D_\alpha f=\int_{-\alpha}^{\alpha}\exp(ixt)d\sigma(t)$ ($\sigma(x)$ は $f(t)$ の分布函數) が成立する事を著者は證明しているが，これは P. Lévy の反轉定理の一般化である點を注意すべきで，反轉定理は Corollary として直に出る。又上の定理により分布函數を有界な部分に區切る働をする事がわかるので，分布函數のスペクトル集合の有界性を論じるのに甚だ都合がよい。次に特性函數 $f(t)$ の Fejér 積分

$$F_\alpha f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\alpha(t-x)/2}{\alpha(t-x)^2/2}f(t)dt$$

を使つて，確率變數の數列 $\{X_n\}$ が一つの確率變數に法則收斂するための必要十分な條件を著者は與へている。既に述べたが P. Lévy の連續定理は極めてこの特別な場合である事がわかる。この事は特性函數の Poisson 積分

$$P(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(t)}{(t-x)^2+y^2}dt$$

についても同樣な條件を示す事が出來る。こゝで筆者が注意したい點は $D_\alpha f(0)$ で分布函數を有限の部分に區切り，$F_\alpha f(0)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(1-\frac{|x|}{\alpha}\right)d\sigma(x)$ で $\int_{-\alpha}^{\alpha}|x|d\sigma(x)$ の關係したものを得られるが，獨立確率變數の和の收斂を論じる場合には，これはかりでは十分でなく，$\int_{-\alpha}^{\alpha}x^2d\sigma(x)$ についても考へねばならなくなり，この點よりして都合のよいのは

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\alpha|t|)f(t)dt$$

であらうと思はれる。この積分についても考察して貰ひ度く思つた。

第四章では，既に述べた樣に函數の Fourier-Stieltjes 積分による表示について述べてある。こゝでは特性函數に限つて說明する。筆者は特性函數の分布函數が單調增加である點に注意して，$f(t)$ を $(-\infty,\infty)$ で定義された連續函數でそのとる値は複素數でよい。今 $|t|<R$ で $f_R(t)=f(t)$, $-\infty<t<\infty$ で $f_R(t)=f(t+2R)$ を作る。この Fourier 級數 $f_R(t)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}C_n(R)\exp(in\pi t/R)$, ($C_n(R)=1/2R\int_{-R}^{R}f(t)\exp(-in\pi t/R)dt$) を考へると，$f(0)=1$ で且つ $R_\nu\uparrow\infty$ なる正數列 $\{R_\nu\}$ が存在して $C_n(R_\nu)\geq0$ ($n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$) が各々の整數 ν に對して成立する如き連續函數，及び斯樣な連續函數の任意有限區間に於ける一樣收斂極限函數の全體が特性函數の全體と一致している事を證明し，S. Bohner の Positive definite function による場合，A. Khintchine の $L(-\infty,\infty)$ に屬す函數の相關函數による場合，及び H. Cramér の一種の mean concentration function に類似した方法による場合は何れも著書の定理を基礎にして容易に導入する事が出來る。

第五章では分布函數の滑かさについて述べてある。最初に分布函數の微分可能性，更に分布函數の正則性について述べてある。こゝで注意すべきは濃度函數，平均濃度函數は分布函數の滑らかさを示す尺度に用ひる事が出來る點を強調した點である。これは此等の函數が分布函數の重疊に對して減少する性質が原因と思はれるが，此の點詳細な說明が欲しい。

第六章で確率變數を項とする級數の收斂問題を論じている。これに關する多くの結果の中で，特に重要な Khintchine-Kolmogoroff の三級數定理と P. Lévy の極限濃度函數の理論について述べている。著者はこの後者の方を平均濃度函數を用ひて證明しているが，その證明の簡單にして明瞭な點は解析的方法がおさめた輝かしい成功の一つで，又平均濃度函數が，P. Lévy の濃度函數に比して使ひ易い事を示す良い例である。三級數定理に關しても Khintchine-Kolmogoroff の傳統に束縛されぬ證明を示して欲しかつた。

第七章では Bernoulli 重疊函數についてスペクトルの分布狀態，乃至滑かさについて詳論してある。A. Wintner の Bernoulli 重疊函數の Gauss 評價，任意の $c>0$ て對し $1-\sigma(x)=O(\exp(-cx^2))$ $(x\to+\infty)$，$\sigma(x)=O(\exp(-cx^2))$ $(x\to-\infty)$ が成立している事を證明してあり，更に Bernoulli 重疊函數の特性函數の $|t|\to\infty$ の時，そう勝手に早く 0 になる事は出來ないと云ふ A. Wintner, G. H. Hasdy の結果を紹介してある。A. Wintner の Bernoulli 重疊函數は $O(\exp(-\delta|t|^{2-\epsilon}))(\epsilon\searrow 0)$ になれる事を證明したが著者は更に精密な結果を出した。即ち $p(t)$ を $p(t)/t^3$ の $(0,\infty)$ での積分が有限である樣な任意の正の增加函數とするとその特性函數が $O(\exp(-p(|t|)))$ $(|t|\to\infty)$ なる如き Bernoulli 重疊函數が存在する。更に $p(t)/t^3$ の $(1,\infty)$ での積分が ∞ である場合に $O(\exp(-p(t)))$ になり得るか否かについても詳細に述べてある。

第八章では特性函數と分布函數の $\pm\infty$ に於ける滑かさについて論じてあり，N. Levinson, R. E. A. C. Paley-N. Wiener, A. E. Ingham 及び著者自身の結果が紹介されている。確率論の分解問題と此等の問題を巧に關聯せしめて，無限分解可能な法則の範圍內では確率法則の分解は一意的に定まると云ふ P. Lévy の結果に對して著者は分布函數の ∞ に於ける滑かさから，或程度の滑かさを持てば確率法則の分解は一意的に定まるを證明している。しかしこの著者の結果と P. Lévy の結果とは互にくいちがひがあり，何れがより一般であると云へない。これは今後に殘された興味ある確率論の問題の一つである。

以上で及ばずながらも大略を紹介したわけであるが，更に角に全章にわたつて，確率論，フーリエ解析を專攻する者にとつて，有益な道具が極めて豐富に提供されている事は，只に筆者ばかりでなく一般に數學を愛好される士にとつても又，此の上ない喜びとする所であらう。