外力に動搖があるときの強制振動

宇野, 利雄
東京都立女子専門學校

出版情報：統計数理研究. 2 (1), pp.40-42, 1948-05-10. Research Association of Statistical Sciences

3) R. A. Fisher: Proc. Camb. Phil. Soc., 22 (1925), 700-725.

4) A. Wald: Ann. Math. Statist., 11 (1940) 284-300.

5) 古屋茂: 統計數理研究, 1 (1942), 124-144

A method of location by theodolic observations at N points

by

Motosaburo Masuyama

Hygieno meteorological Research Laboratory, Central Meteorological Observatory, Tokyo. Institute of Physical Therapy of Internal Medicine, Tokyo University. Institute of Statistical Mathematics.

A method of location of a point P [c. f. (1)] in space by theodolitic observations e_0 at N points, $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_N$, is developed here, utilizing the method of maximum likelihood (R.A. Fisher) and W. E. Deming's idea of least squares. Weights of observations are given as tensers W_i.

The estimated correction v for the approximate position vector R_0 [c. f. (4)] is given by (26), as a linear function of "excess vectors" F_{0i} [c. f. 5)] with tensor coefficients $(\Sigma K_i)^{-1}\cdot K_i$ where K_i are defined by (24).

外力に動搖があるときの强制振動

宇　野　利　雄

東京都立女子專門學校

(昭和 22 年 12 月 20 日受理)

强制振動の方程式

(1)　$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+(n^2+p^2)x=F(t)$

に於て，外力 $F(t)$ は殆ど週期的ではあるが，その週期に若干の動搖があり，平均の値の前後にいくらかづつ不同を生ずるといふ場合を次の樣な模型によつて考へて見る。

完全に週期的であれば $F(t)=Ae^{ikt}$ の如く置くことが出來るが，上記の樣な場合は外力を記述する時間の「あゆみ」にブラウン運動型不規則性が加はるものと考へ

(2)　$F(t)=A\exp\{ik(t+\xi_t)\}$

の如くおいて見る。こゝに ξ_t はブラウン運動の項を示し，ξ_t が ξ_t と $\xi_t+d\xi_t$ との間にあると同時に，$s>t$ なる s につき ξ_s が ξ_s と $\xi_s+d\xi_s$ の間にある確率が

(3)　$\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{t(s-t)}}\exp\left\{-\frac{\xi_t^2}{t}-\frac{(\xi_s-\xi_t)^2}{s-t}\right\}d\xi_t d\xi_s$

で與へられるとする。

上のようにきめた函數 $F(t)$ の特徴を知る爲に

$$F(t)\overline{F(t+s)}=|A|^2\exp\{-iks+ik(\xi_t-\xi_{t+s})\}$$

を考へて見る。これの期望値は (3) から

$$\frac{|A|^2e^{-iks}}{2\pi\sigma^2\sqrt{ts}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{ik(\xi_t-\xi_{t+s})-\frac{\xi_t^2}{2\sigma^2t}-\frac{(\xi_{t+s}-\xi_t)^2}{2\sigma^2s}\right\}d\xi_t d\xi_{t+s}$$

即ち

(4)　$E[F(t)\overline{F(t+s)}]=|A|^2e^{-iks}e^{-\frac{\sigma^2k^2}{2}s}$

なる事が知られる (但し $s>0$ とした。$s<0$ のときはこれの共軛値)。

次にこれの時間平均

$$\varphi_T(s)=\frac{1}{T}\int_0^T F(t)\overline{F(t+s)}dt$$

を考へて見る。s を固定したとき $\varphi_T(s)$ は T をパラメータとした一つの確率變數であるが，$T\to\infty$ のとき $\varphi_T(s)$ が一つのきまつた確率變數に平均收斂する事が示される。即ち

$$E[|\varphi_T(s)-\varphi_U(s)|^2]=E[\varphi_T(s)\overline{\varphi_T(s)}]+E[\varphi_U(s)\overline{\varphi_U(s)}]-E[\varphi_T(s)\overline{\varphi_U(s)}]-E[\varphi_U(s)\overline{\varphi_T(s)}]$$

を考へる。右邊にある $\varphi_T(s)\overline{\varphi_U(s)}$ の如き形式のものを計算するに

$$\varphi_T(s)\overline{\varphi_U(s)}=\frac{|A|^4}{TU}\int_0^T e^{ik(\xi_t-\xi_{t+s})}dt\cdot\int_0^U e^{-ik(\xi_u-\xi_{u+s})}du$$
$$=\frac{|A|^4}{TU}\int_0^T\int_0^U e^{ik(\xi_t-\xi_{t+s}-\xi_u+\xi_{u+s})}dtdu.$$

従つて

$$E[\varphi_T(s)\overline{\varphi_U(s)}]=\frac{|A|^4}{TU}\int_0^T\int_0^U E\{e^{ik(\xi_t-\xi_{t+s}-\xi_u+\xi_{u+s})}\}dtdu$$

であるが，(3) から

$$E[\exp\{ik(\xi_t-\xi_{t+s}-\xi_u+\xi_{u+s})\}]$$
$$(5)\quad =\begin{cases} e^{-\sigma^2k^2 s} \;\ldots\ldots |u-t|\geqq s \text{ のとき}\\ e^{-\sigma^2k^2|u-t|} \;\ldots |u-t|<s \text{ のとき}\end{cases}$$

であるから，これを代入して

$$(6)\quad E[\varphi_T(s)\overline{\varphi_U(s)}]=|A|^4e^{-\sigma^2k^2s}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

が得られる ($U>T$とした) これにより $T\to\infty, U\to\infty$ のとき $E[|\varphi_T(s)-\varphi_U(s)|^2]\to0$ が結論される。即ち

$$(7)\quad \varphi(s)=\underset{T\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{T}\int_0^T F(t)\overline{F(t+s)}dt$$

に相當する確率變數が存在し，その期望値は(4)から明かに

$$(8)\quad E[\varphi(s)]=|A|^2e^{-iks}e^{-\frac{\sigma^2k^2}{2}s}$$

である。

以上の如き $F(t)$ が右邊にある場合の (1) の解を考へよう。まづ通例の積分法に從つて

$$(9)\quad x=\frac{1}{p}\int_0^t F(t_1)e^{-n(t-t_1)}\sin p(t-t_1)dt_1$$

であるが，これによつて與へられる $x(t)$ が如何なる特徴を有するかを前述の $F(t)$ をしらべたときと同じ方法でしらべて見る。

まづこれの $x(t)\overline{x(t+s)}$ を作る

$$(10)\quad x(t)\overline{x(t+s)}=\frac{e^{-2nt}}{p^2}\int_0^t\int_0^{t+s}F(t_1)\overline{F(u_1)}\cdot e^{n(t_1+u_1-s)}\sin p(t-t_1)\sin p(t+s-u_1)dt_1du_1$$

(4) により

$$E[F(t_1)\overline{F(u_1)}]=|A|^2e^{-ik(u_1-t_1)}e^{-\frac{\sigma^2k^2}{2}|u_1-t_1|}$$

であるから，これを代入して計算し

$$(11)\quad E[x(t)\overline{x(t+s)}]=\alpha(s)+O(e^{-nt}).$$

こゝに

$$(12)\quad \alpha(s)=\frac{|A|^2}{8}\frac{\sigma^2k^2}{(n-ik-ip)^2+\frac{\sigma^4k^4}{4}}\frac{p^2-ipn}{n(n^2+p^2)}\cdot e^{-ns+ips}$$
$$+\frac{|A|^2}{8}\frac{\sigma^2k^2}{(n-ik+ip)^2+\frac{\sigma^4k^4}{4}}\frac{p^2+ipn}{n(n^2+p^2)}e^{-ns-ips}$$
$$+\frac{|A|^2p^2}{\left\{\left(n-\frac{\sigma^2k^2}{2}-ik\right)^2+p^2\right\}\left\{\left(n+\frac{\sigma^2k^2}{2}+ik\right)^2+p^2\right\}}\cdot e^{-\left(\frac{\sigma^2k^2}{2}+ik\right)s}$$

である。但し $s\geqq0$ とした。 $s<0$ のときは $\alpha(-s)=\alpha(s)$ による。

次に時間平均

$$\psi_T(s)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\overline{x(t+s)}dt$$

につき前の場合と同様の手つゞきを行ふに，やゝ複雑ではあるが前の場合と同様の計算を經て

$$E[\psi_T(s)\overline{\psi_U(s)}]=|\alpha(s)|^2+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

なるが如き結果が得られ，之により

$$\lim_{T,U\to\infty}E[|\psi_T(s)-\psi_U(s)|^2]=0$$

即ち

$$(13)\quad \psi(s)=\underset{T\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\overline{x(t+s)}dt$$

の如き $\psi(s)$ の存在が認められる。

(11) により

$$(14)\quad E[\psi(s)]=\alpha(s)$$

なる事は明か。但し $\alpha(s)$ は (12) により定義される s の函數である。

$x(t)$ の振動の分析を行ふには，$E[\psi(s)]$ のフーリエ變換

$$(15)\quad N(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}E[\psi(s)]e^{is\nu}ds$$

を求めて $N(\nu)d\nu$ が振動數 ν に對するスペクトル密度であると考へてよろしからう。(12) による $\alpha(s)$ を代入して實際に (15) の計算を遂行すると

$$(16)\quad N(\nu)=\frac{|A|^2\sigma^2k^2}{2\{n^2+(p-\nu)^2\}\{n^2+(p+\nu)^2\}\left\{\frac{\sigma^4k^4}{4}+(k-\nu)^2\right\}}$$

が得られる。但し $\sigma=0$ のときは $\int_{-\infty}^{\nu}dN(\nu)$ が $\nu=k$ に於いてのみ跳躍を有する階段函數となる。

(16) については若干有意義な解釋が可能である。σ, n 等が小く，p 及び $k\pm p$ に比し省略可能であると

すれば $\nu=k$ の附近では (16) は大略

$$(17)\qquad N(k)\fallingdotseq\frac{2|A|^2}{(p^2-k^2)^2\sigma^2k^2}$$

$\nu=\pm p$ の附近では

$$(18)\qquad N(\pm p)\fallingdotseq\frac{|A|^2}{4p^2(k\pm p)^2}\frac{\sigma^2k^2}{2n^2}$$

となり，且それぞれがほゞ $N(\nu)$ の極大の位置を與へる。σ が n に比し小いときは $N(\pm p)$ は $N(k)$ に比し小（特に σ 0 ならば $N(\pm p)$ は 0 である)，σ が n に比し大なれば $N(\pm p)$ は $N(k)$ に比し大となる。即ち外力週期の平均値 $\frac{2\pi}{k}$ と固有週期 $\frac{2\pi}{p}$ とが食ひちがつてゐるとき，外力に絶對に動搖がなく $\sigma=0$ であれば固有振動は誘起されないが，これに動搖があれば固有振動が誘起され，且その動搖が大きいほど，大きくあらはれる事が分る。

定常正規多重 Markoff 過程

小　河　原　正　巳

中央氣象臺氣象研究所

§1. 緒　言

$\{x(k,\omega)\}$ を定常正規確率系列とするとき，それが單純 Markoff 系列なるための必要十分條件はその自己相關係數が $\rho(k)=\alpha^k$, $|\alpha|\leqq 1$, なる形をもつことであることが伊藤氏 [1] によつて證明され，このときの確率系列の形が與えられ，更に確率過程に對してもこれに對應する定理が證明された。本稿ではこれ等の定理を多重 Markoff 系列（過程）の場合に擴張する。以下，定常正規確率系列（過程）$\{x(t,\omega)\}$ に於て $E(x(t,\omega))=0$, $E(x^2(t,\omega))=1$ と假定する。これは一般性を失うものではない。

§2. 確率系列の場合

定理 1. 定常正規確率系列 $\{x(k,\omega)\}$, $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots)$, が正常[1]な h 重 Markoff 系列[2]である

---

1) 正規確率過程（系列）$\{x(t,\omega)\}$ が正常であるとは，任意の n 及び任意の時點 $t_1<t_2<\cdots\cdots<t_n$ に對し $\{x(t_i,\omega),\ i=1,2,\cdots\cdots,n\}$ なる n 次元確率變數の分布函數が

$$\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{x_n}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}A_n^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{1\ldots n}a_{ij}^{(n)}x_ix_j\right)dx_1\cdots dx_n$$

但し A_n 及び $a_{ij}^{(n)}$ は $t_1,\cdots\cdots,t_n$ の函數で

$A_n=|a_{ij}^{(n)}|>0$, $a_{ij}^{(n)}=a_{ij}^{(n)}$（即ち $\Sigma a_{ji}^{(n)}x_ix_j$ は正値二次形式）なる如く書き表わされることをいう。或る $t_1<t_2<\cdots\cdots<t_n$ に對し $A_n=|a_{ij}^{(n)}|=0$ となるとき確率過程は特異であるという（河田 [3] を參照。特に定常正規確率系列 $\{x(k,\omega)\}$ が正常のときは，その自己相關係數を $\rho_l=E\{x(k,\omega)x(k-l,\omega)\}$ $(l=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots,\ \rho_{-l}=\rho_l)$ とすれば，$t_i=k+i$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ に對し

$$(a_{ij}^{(n)})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \rho & \cdots\cdots\rho_{n-1}\\ \rho_1 & 1 & \cdots\cdots\rho_{n-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \cdots\cdots\ 1\end{pmatrix}.$$

となり，この行列の行列式は正である。逆にこの行列式が（任意の n に對し）正のときは確率系列は正常である。定常正規確率系列が特異なるための必要十分條件は或る h に對し

$$\rho_k+a_1\rho_{k-1}+\cdots\cdots+a_h\rho_{k-h}=0,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$$

なることである（H. Wold [2] を參照)。

2) 確率過程（系列）$\{x(t,\omega)\}$ に於て，任意の時點 $t_{k-n}<\cdots\cdots<t_{k-1}<t_k$ に對し，$x(t_{k-l},\omega)=\xi_{k-l}$ $(l=1,2,\cdots\cdots,n)$ を與えたときの $x(t_k,\omega)$ の條件附確率法則が $x(t_{k-l},\omega)=\xi_{k-l}$ $(l=1,2,\cdots\cdots h,\ h<n)$ を與えたときの條件附確率法則に（確率1を以て）等しい如き最小の正整數 h が存在するとき，その確率過程（系列）を **h 重 Markoff 過程（系列）** という。特に $h=1$ のときは單純 Markoff 過程（系列）という。$\{x(k,\omega)\}$ が h 重 Markoff 系列のときは任意の L に對し $x(k,\omega)$ と $x(k-l,\omega)$ $(l>L)$ の相關係數に 0 でないものが必ずあるが，$x(k-l,\omega)$ $(l=1,2,\cdots\cdots,n)$ に對する $x(k,\omega)$ と $x(k-n-1,\omega)$ との偏相關係數は $n\geqq h$ に對しすべて 0 である。又 $x(k,\omega)$ と $x(k-l,\omega)$ $(l=1,2,\cdots\cdots,n)$ との重相關係數は $n\geqq h$ に對しては一定である。