九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

經緯儀に依るN點觀測から空間の一點を推定する方法

增山, 元三郎
東京大學物療内科教室 | 統計數理研究所 | 中央氣象臺氣象研究所

https://hdl.handle.net/2324/12910

出版情報：統計数理研究. 2 (1), pp.38-40, 1948-05-10. 統計科学研究会
バージョン：
権利関係：

KYUSHU UNIVERSITY

ることは明らかである。

(5)　亦 $\mathfrak{X}_1=(x_{11}, x_{21}, \cdots\cdots x_{n1})$

$\mathfrak{X}_2=(x_{12}, x_{22}, \cdots\cdots, x_{n2}), \cdots\cdots\cdots\cdots$

$\mathfrak{X}_k=(x_{1k}, x_{2k} \cdots\cdots, x_{nk})$ と置く時此等のベクトルが直交すれば，つまり $\mathfrak{X}_i \perp \mathfrak{X}_j\ (i \neq j)$ であれば $\hat{a}_1-a_1$, $\hat{a}_2-a$, $\cdots\cdots$, $\hat{a}_k-a_k$ は相互に獨立である。これは $\hat{\mathfrak{A}}-\mathfrak{A}$ の分散行列が

$$\begin{pmatrix} (\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_1) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & (\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_2) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & (\mathfrak{X}_k\mathfrak{X}_k) \end{pmatrix}^{-1} \sigma^2$$

で與へられることにより容易に云へる。以上の諸關係を利用すれば $\mathfrak{A}$ の信頼限界を適當にスチューデント分布を用ひることにより決める事が出来るし，亦 σ^2 の信頼限界は q_1 を用ゐる事に依て決められる。亦 $\mathfrak{A}$ のすべて或ひはその一部分例へば $\mathfrak{A}_r=(a_1, a_2, \cdots\cdots a_r, 0, \cdots\cdots, 0)$ の信頼區域も上述の諸關係を考慮すれば適當にスネデッサーの F 分布を取ることによつて決められる。(未完)

引　用　文　献

1) Wilks: Mathematical Slatistics, 1937, 157-270.

2) 坂元平八: 統計量の獨立性について。統計數理研究所講究録第 1 巻第 9 號 (昭和 19 年).

小川潤次郎: 二次形式統計量の獨立性に就いて。同講究録第 2 巻第 5 號 (昭和 21 年)

A. T. Craig: Note on the independence of certain quadratic forms. Annsls of Math. Stat., Vol. 14 (1943) 195-197.

3) 伊藤清: 報知高。同講究録第 3 巻第 10, 11 號 (昭和 22 年)

經緯儀に依る N 點觀測から空間の一點を推定する方法

增山元三郎

中央氣象臺氣象研究所，東京大學物療內科教室，統計數理研究所

(昭和 22 年 12 月 20 日受理)

空間の一點 P の位置を，必ずしも同一水平面上にはない N 箇の點 $A_i\ (i=1,2, \cdots\cdots, N)$ に備え附けられた經緯儀を用ひて推定する問題を考えよう。氣象界では $N=2$ 又は 3 の場合が用いられているが，震源や音源等の推定にも同じ方式が使えるので，一般に $N \geqq 2$ とにした。以下 "≡" は定義式を表すものと約束する。

原點を O とし，

(1)　$P \equiv O+\boldsymbol{R}$, $A_i \equiv P+\boldsymbol{A}_i$,
　　$P \equiv A_i+r_i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_i^2 \equiv 1$,

と置く。$r_i\ (r \neq 0)$ は觀測地點 A_i から P 迄の眞の距離を表す。直接測れるのは，$\boldsymbol{e}_i$ に對應する變量ベクトル $\boldsymbol{e}_{0i}$ だけである。玆に $\boldsymbol{e}_{0i}$ は

(2)　$E(\boldsymbol{e}_{0i}) \equiv \boldsymbol{e}_i$,
　　$E\{(\boldsymbol{e}_{0i}-\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_{0i}-\boldsymbol{e}_i)\} \equiv V_i$

で與えられる正規型分布をするものとする。[1),4)]

(3)　$\boldsymbol{F}_i \equiv \boldsymbol{R}-\boldsymbol{A}_i-r_i\boldsymbol{e}_i=0$,

と置こう。

次に $\boldsymbol{R}, r_i$ の近似量を適當な方法で推定しこれ等を $\boldsymbol{R}_0, r_{0i}$ とし，

(4)　$\boldsymbol{R}_0 \equiv \boldsymbol{R}+\boldsymbol{v}$, $r_{0i} \equiv r_i+u_i$, $\boldsymbol{e}_{0i} \equiv \boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{d}_i$

と置く。このうち $\boldsymbol{v}$ と u_i とは母集團で定まつている量で未知ではあるが，變量ではない。$|\boldsymbol{v}|, |\boldsymbol{d}_i|, u_i$ の自乘，積又は夫以上の高次の量は省略できるものとすると

(5)　$\boldsymbol{F}_{0i} \equiv \boldsymbol{R}_0-\boldsymbol{A}_i-r_{0i}\boldsymbol{e}_{0i}$
　　$=(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{v})-\boldsymbol{A}_i-(r_i+u_i)(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{d}_i)$
　　$=\boldsymbol{v}-u_i\boldsymbol{e}_i-r_i\boldsymbol{d}_i$ [2)]

この式の左邊は零になるとは限らないが，實測から計算できる量である。同樣にして

$$1+2G_{0i} \equiv \boldsymbol{e}_{0i}^2=(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{d}_i)^2=1+2\boldsymbol{d}_i \cdot \boldsymbol{e}_i,$$

(6)　$\therefore\ G_{0i}=\boldsymbol{d}_i \cdot \boldsymbol{e}_i$

V_i^{-1} に比例するテンソル

(7)　$W_i \equiv \sigma^2 V_i^{-1}$

を重みテンソルと呼ぼう。σ^2 は單なる比例常數で，適當に選んでよい。W_i は定義から對稱である。

---

1) 從つていつでも $\boldsymbol{e}_{0i}^2=1$ とは限らない。

2) 一般には $\boldsymbol{F}_{0i}$ を $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{d}_i, u_i$ の函數として Taylor 級數に展開して利用すればよい。$\boldsymbol{F}_i$ が未知母數に關して線型でないなら，$\boldsymbol{F}_{0i}$ では未知量の係數は一定とは限らない。

最尤法に依れば，最尤解[3)5)]は，(5),(6) の下に

(8) $S \equiv \Sigma \boldsymbol{d}_i \cdot \boldsymbol{W}_i \cdot \boldsymbol{d}_i$

を最小ならしめるものとして得られる。[2] 玆に Σ は觀測地點番號について，1 から N 迄加えることを表す。

未定係數 y_i 及び未定ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ を用い，(5), (6), (8) から

(9) $\delta S/2 = \Sigma \delta \boldsymbol{d}_i \cdot \boldsymbol{W}_i \cdot \boldsymbol{d}_i$,

(10) $\boldsymbol{e}_i \cdot \delta \boldsymbol{d}_i = 0$, $\times(-y_i)$

(11) $\delta \boldsymbol{v} - \boldsymbol{e}_i \delta u_i - r_i \delta \boldsymbol{d}_i = 0$ $\cdot \boldsymbol{x}_i$

以上 3 式から

(12) $\boldsymbol{W}_i \cdot \boldsymbol{d}_i - y_i \boldsymbol{e}_i - r_i \boldsymbol{x}_i = 0$

(13) $\Sigma \boldsymbol{x}_i = 0$,

(14) $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{x}_i = 0$.

(12) と (14) とから

(15) $y_i = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{W}_i \cdot \boldsymbol{d}_i$

(5) に $\boldsymbol{e}_i$ を掛けて，(6) を用い，

(16) $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{F}_{0i} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_i - u_i - r_i \boldsymbol{d}_i \cdot \boldsymbol{e}_i$
$= \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_i - u_i - r_i G_{0i}$

從つて

(17) $u_i = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_i - r_i G_{0i} - \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{F}_{0i}$,

(5) に代入して書き換えると，

(18) $r_i \boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{v} - u_i \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{F}_{0i}$
$= \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{F}_{0i} + \boldsymbol{F}_{0i} \cdot \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i + r_i G_{0i} \boldsymbol{e}_i$

(12) に (15) と (18) とを代入すると，$(r_i \neq 0)$

$$
\begin{aligned}
r_i^2 \boldsymbol{x}_i &= r_i \boldsymbol{W}_i \cdot \boldsymbol{d}_i - r_i y_i \boldsymbol{e}_i \\
&= r_i (\boldsymbol{W}_i \cdot \boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{W}_i \cdot \boldsymbol{d}_i) \\
&= r_i (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i) \cdot \boldsymbol{W}_i \cdot \boldsymbol{d}_i \qquad (19) \\
&= (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i) \cdot \boldsymbol{W}_i \cdot \{(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{F}_{0i}) + r_i G_{0i} \boldsymbol{e}_i\}
\end{aligned}
$$

$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i)$ も $\boldsymbol{W}_i$ も對稱で，

(20) $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i)^2 = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i)$,

(21) $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i) \cdot \boldsymbol{W}_i = \boldsymbol{W}_i - \boldsymbol{e}_i (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{W}_i)$
$= \boldsymbol{W}_i - (\boldsymbol{W}_i \cdot \boldsymbol{e}_i) \boldsymbol{e}_i$
$= \boldsymbol{W}_i \cdot (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i)$

だから

$$
\begin{aligned}
r_i^2 \boldsymbol{x}_i &= \boldsymbol{W}_i \cdot (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{F}_{0i}) + \boldsymbol{W}_i \cdot (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i) \cdot \boldsymbol{e}_i r_i G_{0i} \\
&= \boldsymbol{W}_i \cdot (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{F}_{0i}) + \boldsymbol{W}_i \cdot (\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_i) r_i G_{0i} \qquad (22) \\
&= \boldsymbol{W}_i \cdot (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{F}_{0i})
\end{aligned}
$$

從つて (13) から

(23) $\boldsymbol{v} \cdot \Sigma (\boldsymbol{W}_i / r_i^2) \cdot (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i)$
$= \Sigma (\boldsymbol{W}_i / r_i^2) \cdot (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i) \cdot \boldsymbol{F}_{0i}$.

(24) $(\boldsymbol{W}_i / r_i^2) \cdot (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i) \equiv \boldsymbol{K}_i$

と置くと，

(25) $\det |\Sigma \boldsymbol{K}_i| \neq 0$

なら，

(26) $\boldsymbol{v} = (\Sigma \boldsymbol{K}_i \cdot \boldsymbol{F}_{0i}) \cdot (\Sigma \boldsymbol{K}_i)^{-1}$

$\boldsymbol{v}$ は G_{0i} に依らない。實際には $\boldsymbol{K}_i$ の計算には近似量，標本量を代用する。

特に方向による觀測精度の差がないなら

(27) $\boldsymbol{V}_i \equiv \sigma^2 \boldsymbol{E}$

と置ける。

(28) $w_i \equiv \sigma^2 / \sigma_i^2$

とすると

(29) $\boldsymbol{v} = \{\Sigma (w_i / r_i^2)(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i) \cdot \boldsymbol{F}_{0i}\}$
$\cdot \{\Sigma (w_i / r_i^2)(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i)\}^{-1}$.

$\boldsymbol{v}$ に對する各點での寄與は w_i に比例し，r_i^2 に逆比例し，$\boldsymbol{F}_{0i} - (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{F}_{0i}) \boldsymbol{e}_i$ 即ちその點で $\boldsymbol{e}_i$ に垂直な平面への "過剩ベクトル" $\boldsymbol{F}_{0i}$ の正射影に向きをつけて考えたベクトルに比例することが分る。

推定量 $\boldsymbol{v}$ を用いて $\boldsymbol{R}' \equiv \boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{v}$ を求めれば，

(30) $|\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{A}_i| \equiv r_i'$

として，r_i の修正値 r_i が出るし，

(31) $\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{A}_i \equiv r_i' \boldsymbol{e}_i'$

から $\boldsymbol{e}_i$ の修正量 $\boldsymbol{e}_i'$ も求まる。修正値，修正量を出發點にして，必要ならもう一度同じ方式で推定を繰返す。この逐次近似の收斂性はもつと一般的な形で問題にされてゐるので玆に觸れない。[5]

特に $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_N$ 及び P が同一平面上にあるならば，ベクトルは總てこの平面内の二次元ベクトルとして取扱える。この時，この平面に垂直な單位ベクトルを $\boldsymbol{k}$ とし，

(32) $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}_i \equiv \boldsymbol{f}_i$

と置くならば，

(33) $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{f}_i \boldsymbol{f}_i$

だから，(29) 式は

$$\boldsymbol{v} = \{\Sigma (w_i / r_i^2) \boldsymbol{f}_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{F}_{0i}\} \cdot \{\Sigma (w_i / r_i^2) \boldsymbol{f}_i \boldsymbol{f}_i\}^{-1}$$

となる。これは $\boldsymbol{v}$ えの各觀測の寄與が，過剩ベクトル $\boldsymbol{F}_{0i}$ の $\boldsymbol{e}_i$ と垂直な方向 $\boldsymbol{f}_i$ えの正射影に向きをつけたベクトルに比例することを表している。

1) W. E. Deming: Phil. Mag., 11 (1931), 146-158; 17 (1935), 804-829; 19 (1935), 389-402. J. A. S. A., 33 (1938), 543.

2) R. A. Fisher: Metron, 5 (1926), No. 3, 90-104.

3] R. A. Fisher: Proc. Camb. Phil. Soc., 22 (1925), 700-725.

4] A. Wald: Ann. Math. Statist., 11 (1940) 284-300.

5] 古屋茂: 統計數理研究, 1 (1942), 124-144

A method of location by theodolic observations at N points

by

Motosaburo Masuyama

Hygieno meteorological Research Laboratory, Central Meteorological Observatory, Tokyo. Institute of Physical Therapy of Internal Medicine, Tokyo University. Institute of Statistical Mathematics.

A method of location of a point P [c. f. (1)] in space by theodolitic observations e_0 at N points, $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_N$, is developed here, utilizing the method of maximum likelihood (R.A. Fisher) and W. E. Deming's idea of least squares. Weights of observations are given as tensers W_i.

The estimated correction v for the approximate position vector R_0 [c. f. (4)] is given by (26), as a linear function of "excess vectors" F_{0i} [c. f. 5)] with tensor coefficients $(\Sigma K_i)^{-1} \cdot K_i$ where K_i are defined by (24).

外力に動搖があるときの强制振動

宇 野 利 雄

東京都立女子專門學校

(昭和 22 年 12 月 20 日受理)

强制振動の方程式

$$(1)\quad \frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+(n^2+p^2)x=F(t)$$

に於て，外力 $F(t)$ は殆ど週期的ではあるが，その週期に若干の動搖があり，平均の値の前後にいくらかづつ不同を生ずるといふ場合を次の樣な模型によつて考へて見る。

完全に週期的であれば $F(t)=Ae^{ikt}$ の如く置くことが出來るが，上記の樣な場合は外力を記述する時間の「あゆみ」にブラウン運動型不規則性が加はるものと考へ

$$(2)\quad F(t)=A\exp\{ik(t+\xi_t)\}$$

の如くおいて見る。こゝに ξ_t はブラウン運動の項を示し，ξ_t が ξ_t と $\xi_t+d\xi_t$ との間にあると同時に，$s>t$ なる s につき ξ_s が ξ_s と $\xi_s+d\xi_s$ の間にある確率が

$$(3)\quad \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{t(s-t)}}\exp\left\{-\frac{\xi_t^2}{t}-\frac{(\xi_s-\xi_t)^2}{s-t}\right\}d\xi_t d\xi_s$$

で與へられるとする。

上のようにきめた函數 $F(t)$ の特徴を知る爲に

$$F(t)\overline{F(t+s)}=|A|^2\exp\{-iks+ik(\xi_t-\xi_{t+s})\}$$

を考へて見る。これの期望値は (3) から

$$\frac{|A|^2e^{-iks}}{2\pi\sigma^2\sqrt{ts}}\int_0^\infty\int_0^\infty\exp\left\{ik(\xi_t-\xi_{t+s})-\frac{\xi_t^2}{2\sigma^2t}-\frac{(\xi_{t+s}-\xi_t)^2}{2\sigma^2s}\right\}d\xi_t d\xi_{t+s}$$

即ち

$$(4)\quad E[F(t)\overline{F(t+s)}]=|A|^2e^{-iks}e^{-\frac{\sigma^2k^2}{2}s}$$

なる事が知られる（但し $s>0$ とした。$s<0$ のときはこれの共軛値）。

次にこれの時間平均

$$\varphi_T(s)=\frac{1}{T}\int_0^T F(t)\overline{F(t+s)}dt$$

を考へて見る。s を固定したとき $\varphi_T(s)$ は T をパラメータとした一つの確率變數であるが，$T\to\infty$ のとき $\varphi_T(s)$ が一つのきまつた確率變數に平均收斂する事が示される。即ち