

経緯儀に依るN點觀測から空間の一點を推定する方法

増山, 元三郎

東京大學物療内科教室 | 統計数理研究所 | 中央氣象臺氣象研究所

<https://hdl.handle.net/2324/12910>

出版情報：統計数理研究. 2 (1), pp.38-40, 1948-05-10. 統計科学研究会
バージョン：
権利関係：



ることは明らかである。

$$(5) \text{ 亦 } \mathbf{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$$

$$\mathbf{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}), \dots$$

$$\mathbf{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}) \text{ と置く時此等のベクトルが}$$

直交すれば、つまり $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0$ ($i \neq j$) であれば $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_k$ は相互に独立である。これは $\hat{\mathbf{a}}_1 - \mathbf{a}_1$ の分散行列が

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & (\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k) \end{pmatrix}^{-1} \sigma^2$$

で與へられることにより容易に云へる。以上の諸関係を利用すれば $\hat{\mathbf{a}}_1$ の信頼限界を適當に学生化分布を用ひることにより決める事が出来るし、亦 σ^2

の信頼限界は q_1 を用ひる事に依て決められる。亦 $\hat{\mathbf{a}}_1$ のすべて或ひはその一部分例へば $\hat{a}_1 = (a_1, a_2, \dots, a_r, 0, \dots, 0)$ の信頼区域も上述の諸関係を考慮すれば適當に学生化分布の F 分布を取るることによつて決められる。(未完)

引用文献

- 1) Wilks: Mathematical Statistics, 1937, 157-270.
- 2) 坂元平八: 統計量の獨立性について。統計数理研究所講義録第1巻第9號(昭和19年)。
小川潤次郎: 二次形式統計量の獨立性に就いて。同講義録第2巻第5號(昭和21年)
- A. T. Craig: Note on the independence of certain quadratic forms. Annals of Math. Stat., Vol. 14 (1943) 195-197.
- 3) 伊藤清: 報知高。同講義録第3巻第10, 11號(昭和22年)

経緯儀に依る N 點觀測から空間の一點を推定する方法

増山元三郎

中央氣象臺氣象研究所, 東京大學物理内科教室, 統計数理研究所

(昭和22年12月20日受理)

空間の一點 P の位置を、必ずしも同一水平面上にない N 箇の點 A_i ($i=1, 2, \dots, N$) に備え附けられた経緯儀を用ひて推定する問題を考えよう。氣象界では $N=2$ 又は 3 の場合が用いられているが、震源や音源等の推定にも同じ方式が使えるので、一般に $N \geq 2$ とした。以下“ $\equiv$ ”は定義式を表すものと約束する。

原點を O とし、

$$(1) \quad P \equiv O + R, \quad A_i \equiv P + A_i,$$

$$P \equiv A_i + r_i e_i, \quad e_i^2 \equiv 1,$$

と置く。 r_i ($r \neq 0$) は觀測地點 A_i から P 迄の眞の距離を表す。直接測れるのは、 e_i に對應する變量ベクトル e_{0i} だけである。茲に e_{0i} は

$$(2) \quad E(e_{0i}) \equiv e_i,$$

$$E\{(e_{0i} - e_i)(e_{0i} - e_i)\} \equiv V_i$$

で與えられる正規型分布をするものとする。^{1), 2)}

$$(3) \quad F_i \equiv R - A_i - r_i e_i = 0,$$

と置く。

次に R, r_i の近似量を適當な方法で推定しこれ等を R_0, r_{0i} とし、

$$(4) \quad R_0 \equiv R + v, \quad r_{0i} \equiv r_i + u_i, \quad e_{0i} \equiv e_i + d_i$$

と置く。このうち v と u_i とは母集團で定まつてゐる量で未知ではあるが、變量ではない。 $|v|, |d_i|, |u_i|$ の自乗、積又は夫以上の高次の量は省略できるものとすると

$$F_{0i} \equiv R_0 - A_i - r_{0i} e_{0i}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} &= (R + v) - A_i - (r_i + u_i)(e_i + d_i) \\ &= v - u_i e_i - r_i d_i \end{aligned}$$

この式の左邊は零になるとは限らないが、實測から計算できる量である。同様にして

$$1 + 2G_{0i} \equiv e_{0i}^2 = (e_i + d_i)^2 = 1 + 2d_i \cdot e_i,$$

$$(6) \quad \therefore G_{0i} = d_i \cdot e_i$$

V_i^{-1} に比例するテンソル

$$(7) \quad W_i \equiv \sigma^2 V_i^{-1}$$

を重みテンソルと呼ぼう。 σ^2 は單なる比例常數で、適當に選んでよい。 W_i は定義から對稱である。

1) 従つていつでも $e_{0i}^2 = 1$ とは限らない。

2) 一般には F_{0i} を v, d_i, u_i の函數として Taylor 級數に展開して利用すればよい。 F_i が未知母數に關して線型でないなら、 F_{0i} では未知量の係數は一定とは限らない。

最尤法に依れば、最尤解²⁾は、(5)、(6) の下に

$$(8) \quad S \equiv \sum d_i \cdot W_i \cdot d_i$$

を最小ならしめるものとして得られる。²⁾ 茲に Σ は観測地点番號について、1 から N 迄加えることを表す。

未定係数 y_i 及び未定ベクトル x_i を用い、(5)、(6)、(8) から

$$(9) \quad \delta S/2 = \sum \delta d_i \cdot W_i \cdot d_i,$$

$$(10) \quad e_i \cdot \delta d_i = 0, \quad \times (-y_i)$$

$$(11) \quad \delta v - e_i \cdot \delta u_i - r_i \cdot \delta d_i = 0 \quad \cdot x_i$$

以上 3 式から

$$(12) \quad W_i \cdot d_i - y_i e_i - r_i x_i = 0$$

$$(13) \quad \Sigma x_i = 0,$$

$$(14) \quad e_i \cdot x_i = 0.$$

(12) と (14) とから

$$(15) \quad y_i = e_i \cdot W_i \cdot d_i$$

(5) に e_i を掛けて、(6) を用い、

$$(16) \quad e_i \cdot F_{0i} = v \cdot e_i - u_i - r_i d_i \cdot e_i \\ = v \cdot e_i - u_i - r_i G_{0i}$$

従つて

$$(17) \quad u_i = v \cdot e_i - r_i G_{0i} - e_i \cdot F_{0i},$$

(5) に代入して書き換えると、

$$(18) \quad r_i d_i = v - u_i e_i - F_{0i} \\ = v - v \cdot e_i e_i - F_{0i} + F_{0i} \cdot e_i e_i + r_i G_{0i} e_i$$

(12) に (15) と (18) とを代入すると、($r_i \neq 0$)

$$r_i^2 x_i = r_i W_i \cdot d_i - r_i y_i e_i \\ = r_i (W_i \cdot d_i - e_i e_i \cdot W_i \cdot d_i)$$

$$(19) \quad = r_i (E - e_i e_i) \cdot W_i \cdot d_i \\ = (E - e_i e_i) \cdot W_i \cdot (E - e_i e_i) \cdot (v \\ - F_{0i}) + r_i G_{0i} e_i \}$$

($E - e_i e_i$) も W_i も対稱で、

$$(20) \quad (E - e_i e_i) \cdot (E - e_i e_i) = (E - e_i e_i),$$

$$(21) \quad (E - e_i e_i) \cdot W_i = W_i - e_i (e_i \cdot W_i) \\ = W_i - (W_i \cdot e_i) e_i \\ = W_i \cdot (E - e_i e_i)$$

だから

$$r_i^2 x_i = W_i \cdot (E - e_i e_i) \cdot (v - F_{0i}) \\ + W_i \cdot (E - e_i e_i) \cdot e_i r_i G_{0i} \\ (22) \quad = W_i \cdot (E - e_i e_i) \cdot (v - F_{0i}) \\ + W_i \cdot (e_i - e_i) r_i G_{0i} \\ = W_i \cdot (E - e_i e_i) \cdot (v - F_{0i})$$

従つて (13) から

$$(23) \quad v \cdot \Sigma (W_i / r_i^2) \cdot (E - e_i e_i) \\ = \Sigma (W_i / r_i^2) \cdot (E - e_i e_i) \cdot F_{0i}$$

$$(24) \quad (W_i / r_i^2) \cdot (E - e_i e_i) \equiv K_i$$

と置くと、

$$(25) \quad \det |\Sigma K_i| \neq 0$$

なら、

$$(26) \quad v = (\Sigma K_i \cdot F_{0i}) \cdot (\Sigma K_i)^{-1}$$

v は G_{0i} に依らない。實際には K_i の計算には近似量、標本量を代用する。

特に方向による観測精度の差がないなら

$$(27) \quad V \equiv \sigma^2 E$$

と置ける。

$$(28) \quad w_i \equiv \sigma^2 / r_i^2$$

とすると

$$(29) \quad v = \{ \Sigma (w_i / r_i^2) (E - e_i e_i) \cdot F_{0i} \\ \cdot \{ \Sigma (w_i / r_i^2) (E - e_i e_i) \}^{-1}$$

v に対する各點での寄與は w_i に比例し、 r_i^2 に逆比例し、 $F_{0i} - (e_i \cdot F_{0i}) e_i$ 即ちその點で e_i に垂直な平面への“過剰ベクトル” F_{0i} の正射影に向きをつけて考えたベクトルに比例することが分る。

推定量 v を用いて $R' \equiv R_0 - v$ を求めれば、

$$(30) \quad |R' - A_i| \equiv r_i'$$

として、 r_i の修正値 r_i' が出るし、

$$(31) \quad R' - A_i \equiv r_i' e_i'$$

から e_i の修正量 e_i' も求まる。修正値、修正量を出発點にして、必要ならもう一度同じ方式で推定を繰返す。この逐次近似の收斂性はもつと一般的な形で問題にされてゐるので茲に觸れない。⁵⁾

特に $A_1, A_2, \dots, A_N$ 及び P が同一平面上にあるならば、ベクトルは總てこの平面内の二次元ベクトルとして取扱える。この時、この平面に垂直な單位ベクトルを k とし、

$$(32) \quad k \times e_i \equiv f_i$$

と置くならば、

$$(33) \quad E = e_i e_i + f_i f_i$$

だから、(29) 式は

$$v = \{ \Sigma (w_i / r_i^2) f_i f_i \cdot F_{0i} \} \cdot \{ \Sigma (w_i / r_i^2) f_i f_i \}^{-1}$$

となる。これは v への各観測の寄與が、過剰ベクトル F_{0i} の e_i と垂直な方向 f_i への正射影に向きをつけたベクトルに比例することを表している。

1) W. E. Deming: Phil. Mag., 11 (1931), 146-158; 17 (1935), 804-829; 19 (1935), 389-402. J.A.S.A., 33 (1938), 543.

2) R. A. Fisher: Metron, 5 (1926), No. 3, 90-104.

3) R. A. Fisher: Proc. Camb. Phil. Soc., 22 (1925), 700-725.

4) A. Wald: Ann. Math. Statist., 11 (1940) 284-300.

5) 古屋茂: 統計数理研究, 1 (1942), 124-144

A method of location by theodolite
observations at N points
by

Motosaburo Masuyama

Hygieno meteorological Research Laboratory,
Central Meteorological Observatory, Tokyo.
Institute of Physical Therapy of Internal
Medicine, Tokyo University. Institute of Sta-
tistical Mathematics.

A method of location of a point P [c. f. (1)] in space by theodolitic observations e_0 at N points, $A_1, A_2, \dots, A_N$, is developed here, utilizing the method of maximum likelihood (R.A. Fisher) and W. E. Deming's idea of least squares. Weights of observations are given as tensors W_i .

The estimated correction v for the approximate position vector R_0 [c. f. (4)] is given by (26), as a linear function of "excess vectors" F_{0i} [c. f. 5)] with tensor coefficients $(\Sigma K_i)^{-1} \cdot K_i$, where K_i are defined by (24).

外力に動揺があるときの強制振動

宇 野 利 雄

東京都立女子専門学校

(昭和 22 年 12 月 20 日受理)

強制振動の方程式

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + (n^2 + p^2)x = F(t)$$

に於て、外力 $F(t)$ は殆ど周期的ではあるが、その週期に若干の動揺があり、平均の値の前依にいくらかづつ不同を生ずるといふ場合を次の様な模型によつて考へて見る。

完全に週期的であれば $F(t) = Ae^{ikt}$ の如く置くことが出来るが、上記の様な場合は外力を記述する時間の「あゆみ」にブラウン運動型不規則性が加はるものと考へ

$$(2) \quad F(t) = A \exp\{ik(t + \xi_s)\}$$

の如くおいて見る。こゝにも ξ はブラウン運動の項を示し、 ξ_s が ξ_t と $\xi_t + d\xi_t$ との間にあると同時に、 $s > t$ なる s につき ξ_s が ξ_t と $\xi_t + d\xi_t$ の間にある確率が

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{t(s-t)}} \exp\left\{-\frac{\xi_t^2}{t} - \frac{(\xi_s - \xi_t)^2}{s-t}\right\} d\xi_t d\xi_s$$

で與へられるとする。

上のようにきめた函数 $F(t)$ の特徴を知る爲に

$$F(t)F(\overline{t+s}) = |A|^2 \exp\{-iks + ik(\xi_s - \xi_{t+s})\}$$

を考へて見る。これの期望値は (3) から

$$\frac{|A|^2 e^{-iks}}{2\pi\sigma^2\sqrt{ts}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\{ik(\xi_s - \xi_{t+s})\} \\ - \frac{\xi_t^2}{2\sigma^2 t} - \frac{(\xi_{t+s} - \xi_t)^2}{2\sigma^2 s} \} d\xi_t d\xi_{t+s}$$

即ち

$$(4) \quad E[F(t)F(\overline{t+s})] = |A|^2 e^{-iks} e^{-\frac{\sigma^2 k^2 s}{2}}$$

なる事が知られる (但し $s > 0$ とした。 $s < 0$ のときはこれの共役値)。

次にこれの時間平均

$$\varphi_T(s) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t)F(\overline{t+s}) dt$$

を考へて見る。 s を固定したとき $\varphi_T(s)$ は T をパラメータとした一つの確率変数であるが、 $T \rightarrow \infty$ のとき $\varphi_T(s)$ が一つのきまつた確率変数に平均収斂する事が示される。即ち