最尤推定値の獨立性及びその自由度の關係に就いて(1)

坂元, 平八
統計數理研究所

出版情報：統計数理研究. 2 (1), pp.36-38, 1948-05-10. Research Association of Statistical Sciences

最尤推定値の獨立性及びその自由度の關係に就いて (1)

坂 元 平 八

統計數理研究所

(昭和 22 年 12 月 20 日受理)

目 次

I. 序論 筆者は本論文で Wilks の著書[1] の第八節以下に於て正規回歸理論と題して論じられてゐる特に重要な一殊に實驗計畫法等に於てしばしば取り扱はれる一型の回歸理論について起る標本論及び統計的假説檢定の問題を筆者が以前に發表した[2] 統計量の獨立性の判定條件の立場より論じようと思ふ。吾々が數理統計學の諸分野，特に諸々の實驗計畫法に於て取扱ふ諸種の統計量の獨立性及びその自由度の基本的構造を最尤法による推定値との關連に於て把握することは數理統計理論の本質の解明に資する事多大であると信ずる。筆者は本論文に於て普通の正規回歸理論について論じ，他の機會に於て本論文に於ける $\widehat{\sigma^2}$ に對應して $\widehat{V}$ なる場合つまり Wilks の著書の最後の章で取り扱はれてゐる多變量解析の場合について論じたいと思ふ。亦伊藤氏の報知高の獨立性に關する研究[3] と統計量の獨立性との關係についても論じたいと思ふ。標本分析法に關する數理統計學上の諸問題は要約すれば次の樣な問題を取り扱ふ事に歸着する。

今 Y を平均値 $\sum_{p=1}^{k} a_p x_p$, 標準偏差 σ の正規分布法則に從ふ確率變數と考へる。これを記號的に云ひ換へて確率變數 Y は $N(\sum_{p=1}^{k} a_p x_p, \sigma^2)$ なる分布法則に從ふと云ふ。こゝに $x_1, x_2, \cdots\cdots x_k$ は固定變量 (fixed variates) である。然る時大いさ n の標本は $(y_\alpha, x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, \cdots\cdots, x_{k\alpha})$: $\alpha=1,2,\cdots\cdots,n$ なる n 組の値から成立つてゐる。こゝに $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ は夫々相互に獨立な確率變數 $Y_1, Y_2, \cdots\cdots, Y_n$ (Y_α は $N(\sum_1^k a_p x_{p\alpha}, \sigma^2)$ なる分布法則に從ふ) の實現値であると考へられる。但し $x_{p\alpha}$ ($p=1, 2, \cdots\cdots, k$; $\alpha=1,2,\cdots\cdots,n$) は固定變量であつて確率變數ではない。吾々は標本から $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_p$ 及び σ^2 の値を推定する問題及び $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_p$ に關する若干の統計的假説の檢定に關する問題を考察することになる。

II. 一次形式統計量の標準偏差及び相關係數とその係數ベクトル空間との對應關係について

今一つの大いさ n の標本値 $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ があるとし，それの分布法則に關しては分散行列が V で與へられてあると假定する (必ずしも正規分布とは限らぬ) こゝに V は對稱行列である。仮 $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ をベクトル記號 $\mathfrak{Y}$ で表せば $\mathfrak{Z}=V^{-1/2}\mathfrak{Y}$ の分散行列は E (E は單位行列) で與へられることになる。但し $\mathfrak{Z}=(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n)$ である。今二つの一次形式統計量を $\theta_1=(\mathfrak{A}, \mathfrak{Y})$, $\theta_2=(\mathfrak{B}, \mathfrak{Y})$ で與へられたとする。但し $\mathfrak{A}=(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$, $\mathfrak{B}=(b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n)$.

然るとき θ_1, θ_2 の標準偏差は容易に計算されて夫々 $\sigma_1^2=(V\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$, $\sigma_2^2=(V\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ で與へられる。亦 θ_1 と θ_2 の相關係數 ρ_{12} も容易に計算されて

$$\rho_{12}=\frac{(V\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}{(V\mathfrak{A}, \mathfrak{A})^{1/2}(V\mathfrak{B}, \mathfrak{B})^{1/2}}$$ なることを知る。亦

θ_1 と θ_2 との相關量は $(V\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ で與へられる。

若し $\mathfrak{Y}$ の分散行列が E で與へられゝば

$$\sigma_1^2=(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}),\quad \sigma_2^2=(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}),$$

$$\rho_{12}=\frac{(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})^{1/2}(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})^{1/2}}$$

で與へられるから θ_1, θ_2 の標準偏差及び相關係數は夫々 θ_1, θ_2 に對應する係數空間のベクトルの絶對値及びそのなす角の餘弦に相當する。又特に $\mathfrak{Y}$ が正規母集團からの標本である場合には $\rho_{12}=0$ であれば獨立であることが云はれる。これは筆者の統計量の獨立性に關する定理の一部分である。以下の理論の展開の準備知識として次の諸定理を證明なしに述べる。

〔定理 I〕[2] 統計量 $\theta_1=(B_1\mathfrak{Y},\mathfrak{Y})$, $\theta_2=(B_2\mathfrak{Y},\mathfrak{Y})$, ……, $\theta_r=(B_r\mathfrak{Y},\mathfrak{Y})$, $\varphi_1=(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{Y})$, $\varphi_2=(\mathfrak{A}_2,\mathfrak{Y})$, ……, 及び $\varphi_s=(\mathfrak{A}_s,\mathfrak{Y})$ を分布法則が同時分布法則 $(2\pi)^{-\frac{1}{2}n}|V|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(V^{-1}\mathfrak{Y},\mathfrak{Y})\right\}$ で與へられる母集團からの標本値 $\mathfrak{Y}=(y_1,y_2,\cdots\cdots,y_n)$ から作つた $(r+s)$ 個の統計量とする。然るとき $\theta_1,\theta_2,\cdots\cdots,\theta_r$, $\varphi_1,\varphi_2,\cdots\cdots,\varphi_s$ が相互に獨立なる爲の必要充分條件は

$$B_iVB_j=0\ (i\neq j;\ i=1,2,\cdots\cdots,r;\ j=1,2,\cdots\cdots,r)$$

$$B_iV\mathfrak{A}_k=0\ (i=1,2,\cdots\cdots,r;\ k=1,2,\cdots\cdots,s)$$

$$(V\mathfrak{A}_i,\mathfrak{A}_k)=0\ (i\neq k;\ i=1,2,\cdots\cdots,r;\ k=1,2,\cdots\cdots,s)$$

が成立することである。

〔定理 II〕[1] 定理 I に於ける $\theta_i=(B_i\mathfrak{Y},\mathfrak{Y})$ が自由度 m_i の χ^2 分布をなす爲の必要充分條件は $B_iVB_i=B_i$ で行列 B_i の階數が m_i であることである。

〔定理 III〕[2] 若し $\chi_1^2,\chi_2^2,\cdots\cdots\chi_k^2$ が相互に獨立な夫々自由度 $m_1,m_2,\cdots\cdots,m_k$ の χ^2 分布法則に從ふとすれば $\sum_{i=1}^{k}\chi_i^2$ は自由度 $\sum_{i=1}^{k}m_i$ の χ^2 分布に從ふ。

III. 最尤推定値の獨立性及びその自由度の關係について（特殊な場合）

$(y_\alpha, x_{1\alpha}, x_{2\alpha},\cdots\cdots,x_{k\alpha})$, $\alpha=1,2,\cdots\cdots$, $n>k$ を分布法則が $N(\sum_{p=1}^{k}a_px_p,\sigma^2)$ なる母集團から取れる大いさ n の標本とする。つまり云ひ換へれば

$$y_1=a_1x_{11}+a_2x_{12}+\cdots\cdots+a_kx_{1k}+z_1$$
$$y_2=a_1x_{21}+a_2x_{22}+\cdots\cdots+a_kx_{2k}+z_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n=a_1x_{n1}+a_2x_{n2}+\cdots\cdots+a_kx_{nk}+z_n$$

で $z_1,z_2,\cdots\cdots,z_n$ は同時分布法則が

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i^2}{2\sigma^2}}dz_1\cdots\cdots dz_n$$

で與へられる母集團からの一つの標本値と考へられるとするベクトル及び行列の記號を用ひて $\mathfrak{Y}=(y_1,y_2,\cdots\cdots,y_n)$, $\mathfrak{Z}=(z_1,z_2,\cdots\cdots z_n)$, $\mathfrak{A}=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_k)$

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}\cdots\cdots x_{1k} \\ x_{21} & x_{22}\cdots\cdots x_{2k} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ x_{n1} & x_{n2}\cdots\cdots x_{nk} \end{pmatrix}$$

と置けば，上の n 個の關係式は次の關係式で示される。

$$\mathfrak{Y}=X\mathfrak{A}+\mathfrak{Z}$$

依て $\mathfrak{Y}$ は同時分布法則が

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\exp\left\{-\frac{(\mathfrak{Y}-X\mathfrak{A})^2}{2\sigma^2}\right\}d\mathfrak{Y}$$

である母集團よりの一つの標本値と考へられる。依つてこの關係から $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_k$ 及び σ^2 の最も推定値 $\hat{\mathfrak{A}}=(\hat{a}_1,\hat{a}_2,\cdots\cdots,\hat{a}_k)$, $\hat{\sigma^2}$ を求めるには次の方程式を解けばよい。

$$X'(\mathfrak{Y}-X\hat{\mathfrak{A}})=0$$

$$\hat{\sigma^2}=\frac{1}{n}(\mathfrak{Y}-X\hat{\mathfrak{A}})^2$$

此を解くと $\hat{\mathfrak{A}}=(X'X)^{-1}X'\mathfrak{Y}$（但し $X'X$ の階數は X の階數と同じく k で從つて $(X'X)^{-1}$ が存在することは容易に分る）。これより

$$\hat{\mathfrak{A}}-\mathfrak{A}=(X'X)^{-1}X'(X\mathfrak{A}+\mathfrak{Z})-\mathfrak{A}=(X'X)^{-1}X'\mathfrak{Z}$$

$$\hat{\sigma^2}=\frac{1}{n}(\mathfrak{Y}-X\hat{\mathfrak{A}})^2=\frac{1}{n}\{X\mathfrak{A}+\mathfrak{Z}-X\hat{\mathfrak{A}}\}^2$$
$$=\frac{1}{n}\{\mathfrak{Z}-X(\hat{\mathfrak{A}}-\mathfrak{A})\}^2$$
$$=\frac{1}{n}\{\mathfrak{Z}-(X(X'X)^{-1}X')\mathfrak{Z}\}^2$$
$$=\frac{1}{n}\{(E-X(X'X)^{-1}X')\mathfrak{Z},\mathfrak{Z}\}$$

なることを知る。

(1) 先づ $\hat{\sigma^2}$ と $\hat{\mathfrak{A}}-\mathfrak{A}$ とは獨立である。何となれば

$$\{E-X(X'X)^{-1}X'\}\{(X'X)^{-1}X'\}'$$
$$=(E-X(X'X)^{-1}X')X(X'X)^{-1}$$
$$=X(X'X)^{-1}-X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}=0$$

であるから〔定理 I〕により明らかである。

(2) 亦 $\hat{\sigma^2}$ と $\{X(\hat{\mathfrak{A}}-\mathfrak{A})\}^2=\{X(X'X)^{-1}X'\mathfrak{Z},\mathfrak{Z}\}$ とは獨立である。何となれば

$$\{E-X(X'X)^{-1}X'\}X(X'X)^{-1}X'$$
$$=X(X'X)^{-1}X'-X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X'=0$$

であるから

(3) $\hat{\mathfrak{A}}-\mathfrak{A}$ の分散行列は第二節から容易に $(X'X)^{-1}X'\{(X'X)^{-1}X'\}'\sigma^2=(X'X)^{-1}\sigma^2$ で與へられる即ち $\hat{\mathfrak{A}}-\mathfrak{A}$ は分散行列が $(X'X)^{-1}\sigma^2$ で平均値が 0 になる正規分布になると考へられる。

(4) $\{X(\hat{\mathfrak{A}}-\mathfrak{A})\}^2$ は亦 $\{X'X(\hat{\mathfrak{A}}-\mathfrak{A}),(\hat{\mathfrak{A}}-\mathfrak{A})\}$ なる形に書け，$\hat{\mathfrak{A}}-\mathfrak{A}$ の分散行列は $(X'X)^{-1}\sigma^2$ で與へられるから

$$\frac{(X'X)}{\sigma^2}(X'X)^{-1}\sigma^2\frac{(X'X)}{\sigma^2}=\frac{(X'X)}{\sigma^2}$$

で $(X'X)$ の階數は k であるから $q_2=\frac{\{X(\hat{\mathfrak{A}}-\mathfrak{A})\}^2}{\sigma^2}$ は〔定理 II〕により自由度 k の χ^2 分布をなす。亦〔定理 III〕により $q_1=\frac{n\hat{\sigma^2}}{\sigma^2}$ は自由度 $(n-k)$ の χ^2 分布をなすことを知る。亦 $\frac{1}{\sigma^2}(\mathfrak{Y}-X\mathfrak{A})^2=q_1+q_2$ な

ることは明らかである。

(5) 亦 $\mathfrak{X}_1=(x_{11}, x_{21}, \cdots\cdots x_{n1})$

$\mathfrak{X}_2=(x_{12}, x_{22}, \cdots\cdots, x_{n2}), \cdots\cdots\cdots\cdots$

$\mathfrak{X}_k=(x_{1k}, x_{2k}\ \cdots\cdots, x_{nk})$ と置く時此等のベクトルが直交すれば，つまり $\mathfrak{C}_i\perp\mathfrak{C}_j\ (i\neq j)$ であれば $\hat{a}_1-a_1$, $\hat{a}_2-a_2, \cdots\cdots, \hat{a}_k-a_k$ は相互に獨立である。これは $\hat{\mathfrak{A}}-\mathfrak{A}$ の分散行列が

$$\begin{pmatrix} (\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_1) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & (\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_2) & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & (\mathfrak{X}_k\mathfrak{X}_k) \end{pmatrix}^{-1} \sigma^2$$

で與へられることにより容易に云へる。以上の諸關係を利用すれば $\mathfrak{A}$ の信頼限界を適當にスチューデント分布を用ひることにより決める事が出來るし，亦 σ^2 の信頼限界は q_1 を用ゐる事に依て決められる。亦 $\mathfrak{A}$ のすべて或ひはその一部分例へば $\mathfrak{A}_1=(a_1, a_2, \cdots\cdots a_r, 0, \cdots\cdots, 0)$ の信頼區域も上述の諸關係を考慮すれば適當にスネデッサーの F 分布を取ることによつて決められる。(未完)

引 用 文 獻

1) Wilks: Mathematical Slatistics, 1937, 157-270.

2) 坂元平八: 統計量の獨立性について。統計數理研究所講究錄第 1 卷第 9 號 (昭和 19 年)。

小川潤次郎: 二次形式統計量の獨立性に就いて。同講究錄第 2 卷第 5 號 (昭和 21 年)

A. T. Craig: Note on the independence of certain quadratic forms. Annsls of Math. Stat., Vol. 14 (1943) 195-197.

3) 伊藤清: 報知高。同講究錄第 3 卷第 10, 11 號 (昭和 22 年)

經緯儀に依る N 點觀測から空間の一點を推定する方法

増 山 元 三 郎

中央氣象臺氣象研究所，東京大學物理内科教室，統計數理研究所

(昭和 22 年 12 月 20 日受理)

空間の一點 P の位置を，必ずしも同一水平面上にはない N 箇の點 $A_i\ (i=1, 2, \cdots\cdots, N)$ に備え附けられた經緯儀を用ひて推定する問題を考えよう。氣象界では $N=2$ 又は 3 の場合が用いられているが，震源や音源等の推定にも同じ方式が使えるので，一般に $N\geqq 2$ とにした。以下 "$\equiv$" は定義式を表すものと約束する。

原點を O とし，

$$(1)\quad \begin{aligned} &P\equiv O+\boldsymbol{R},\ A_i\equiv P+\boldsymbol{A}_i, \\ &P\equiv A_i+r_i\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_i^2\equiv 1, \end{aligned}$$

と置く。r_i ($r\neq 0$) は觀測地點 A_i から P 迄の眞の距離を表す。直接測れるのは，$\boldsymbol{e}_i$ に對應する變量ベクトル $\boldsymbol{e}_{0i}$ だけである。玆に $\boldsymbol{e}_{0i}$ は

$$(2)\quad \begin{aligned} &E(\boldsymbol{e}_{0i})\equiv\boldsymbol{e}_i, \\ &E\{(\boldsymbol{e}_{0i}-\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_{0i}-\boldsymbol{e}_i)\}\equiv\boldsymbol{V}_i \end{aligned}$$

で與えられる正規型分布をするものとする。[1),4]

$$(3)\quad \boldsymbol{F}_i\equiv\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A}_i-r_i\boldsymbol{e}_i=0,$$

と置こう。

次に $\boldsymbol{R}, r_i$ の近似量を適當な方法で推定しこれ等を $\boldsymbol{R}_0, r_{0i}$ とし，

$$(4)\quad \boldsymbol{R}_0\equiv\boldsymbol{R}+\boldsymbol{v},\ r_{0i}\equiv r_i+u_i,\ \boldsymbol{e}_{0i}\equiv\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{d}_i$$

と置く。このうち $\boldsymbol{v}$ と u_i とは母集團で定まつている量で未知ではあるが，變量ではない。$|\boldsymbol{v}|, |\boldsymbol{d}_i|, u_i$ の自乘，積又は夫以上の高次の量は省略できるものとすると

$$(5)\quad \begin{aligned} \boldsymbol{F}_{0i}&\equiv\boldsymbol{R}_0-\boldsymbol{A}_i-r_{0i}\boldsymbol{e}_{0i} \\ &=(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{v})-\boldsymbol{A}_i-(r_i+u_i)(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{d}_i) \\ &=\boldsymbol{v}-u_i\boldsymbol{e}_i-r_i\boldsymbol{d}_i \end{aligned}$$ [2)1]

この式の左邊は零になるとは限らないが，實測から計算できる量である。同樣にして

$$1+2G_{0i}\equiv\boldsymbol{e}_{0i}^2=(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{d}_i)^2=1+2\boldsymbol{d}_i\cdot\boldsymbol{e}_i,$$

$$(6)\quad \therefore\ G_{0i}=\boldsymbol{d}_i\cdot\boldsymbol{e}_i$$

$\boldsymbol{V}_i^{-1}$ に比例するテンソル

$$(7)\quad \boldsymbol{W}_i\equiv\sigma^2\boldsymbol{V}_i^{-1}$$

を重みテンソルと呼ぼう。σ^2 は單なる比例常數で，適當に選んでよい。$\boldsymbol{W}_i$ は定義から對稱である。

1) 從つていつでも $\boldsymbol{e}_{0i}^2=1$ とは限らない。

2) 一般には $\boldsymbol{F}_{0i}$ を $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{d}_i, u_i$ の函數として Taylor 級數に展開して利用すればよい。$\boldsymbol{F}_i$ が未知母數に關して線型でないなら，$\boldsymbol{F}_{0i}$ では未知量の係數は一定とは限らない。