彷徨エルゴード定理について(1)

河田, 敬義
東京文理科大學數學教室

出版情報：統計数理研究. 2 (1), pp.31-33, 1948-05-10. Research Association of Statistical Sciences

寄　書

彷徨エルゴード定理について (1)

河　田　敬　義

東京文理科大學數學教室

(昭和 21 年 5 月數學會年會講演　昭和 22 年 12 月 20 日受理)

S. M. Ulam と J. von Neumann は最近の Bulletin of the American Mathematical Society, 51 (1945) の Abstract において，通常のエルゴード定理より一歩進んだ "Random ergodic Theorem" について報告している。これは純粹理論としてばかりでなく，定常確率過程等と關聯して，實際の統計學に對しても意味の深い内容を持つものと思われる。上記論文は數行の Abstract で定理の嚴密な條件も擧げてなく，又全く證明を缺いているので，以下にこれらを組立て，且つその應用について若干述べたいと思う。

まず通常のエルゴード定理を述べよう。今ある集合 X に對して測度 m が定義されて，特に $m(X)=1$ とする。なお X の X の上への保測變換 T が定義されているとき，"測度 m に對する任意の可積分函數 $f(x)$ に對して，極限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(T^i x)=f^*(x)$

が殆んどすべての $x\in X$ に對して存在する" というのが G. D. Birkhoff の定理である。"若しも保測變換 T に對して不變な集合 $E\subset X$, 即ち $TE=E$ なる E は必ず $m(E)=0$ 又は 1 であるという性質があれば，$f^*(x)$ は常數であつて，その値は

(2) $\int f(x)m(dx)$

に等しい" ことが導かれる。これが時間平均と相空間における平均の一致を示す關係である。これらの證明は E. Hopf [1], 吉田 [1] 等を參照されたい。

さて彷徨エルゴード定理として上記報告に述べてある定理は，次の如きものである。今度は X 上の二つの保測變換 T_0, T_1 が與えられているとする。別に區間 $[0,1]$ の二進法展開

(3) $k=0\cdot k_1k_2\cdots\cdots k_n\cdots\cdots$

$(k\in[0,1],\ k_n=0$ 又は $1.)$

の集合を考える。そのとき

定理 1° "X 上の任意の實可積分函數 $f(x)$ を取ると，殆んどすべての $k\in[0,1]$ に對して ある實可積分函數 $F_k(x)$ が定まり

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{f(T_{k(1)}x)+f(T_{k(2)}T_{k(1)}x)+\cdots\cdots$

$+f(T_{k(n)}T_{k(n-1)}\cdots\cdots T_{k(1)}x)\}=F_k(x)$

が X 上の殆んどすべての x に對して成立つ。"

定理 2° "若しも保測變換 T_0, T_1 の兩者に共通な不變集合 E, 即ち

$$T_0E=T_1E=E$$

なる集合 E は必ず

$$m(E)=0 \text{ 又は } 1$$

であるという性質があれば，(4) において $F_k(x)$ は一定の常數 c で，その値は

(5) $c=\int_X f(x)m(dx)$

によつて與えられる。"

特に $T_0=T_1$ ならば，前にあげた通常のエルゴード定理である。これは次に見るように更に一般にされるのであつて，その應用については §3 で若干見ることにして，まず定理の證明にとりかかろう。

§1.

初めに必要な定義を與えておく。

(I) 測度空間 $X(\mathbf{B},m)$ によつて，集合 X と，X の部分集合の作る Borel 集合族 $\mathbf{B}$ と，$\mathbf{B}$ の上で定義された $m(X)=1$ である測度とを合せて考えたものとする。

(II) 別の測度空間 $L(\mathbf{B}',\mu')$ があつて，各々の

$l \in L$ に對して，l をパラメーターとして

(6) T_l, $(l \in L)$

が (I) の測度空間における保測變換を與えるものとする。即ち T_l は X の X の上への一對一變換で，任意の $E \in \mathbf{B}$ に對して $T_l E \in \mathbf{B}$, $T_l^{-1} E \in \mathbf{B}$ で，

$$m(E) = m(T_l E)$$

を滿足するものとする。

(III) (6) の保測變換の全體

$$\{T_l;\ l \in L\}$$

が**可測系**であるとは，X と L との直積集合

(7) $X' = X \otimes L = \{(x, l);\ x \in X,\ l \in L\}$

における直積測度

(8) $\mu'' = m \times \mu'$

を考えるとき，任意の $A \in \mathbf{B}$ に對して，X' の部分集合

(9) $\{(x, l);\ T_l^{\epsilon} x \in A\}$, $\epsilon = \pm 1$

が μ'' 可測集合となることをいう。

(IV) $\{T_l;\ l \in L\}$ が**エルゴード系**であるとは，$A \in \mathbf{B}$ に對して

(10) $\mu'[(A \times L) \ominus \{(T_l x, l);\ x \in A, l \in L\}] = 0$

ならば

$$m(A) = 0,\ \text{又は}\ 1$$

となることをいう。ここに一般に

$$A \ominus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

を表すものとする。

これらの例については § 3 で述べる。定理 1°, 2° のばあいは

$$L = \{0, 1\}$$

と，L が二元よりなるばあいで，(10) の條件は定理 2° の條件と一致する。

さて定理 1° は次の樣に擴張される。

今測度空間 $X(\mathbf{B}, m)$ の上の保測變換 $\{T_l;\ l \in L\}$ が可測系であるとする。別に (II) の測度空間と同型な測度空間 L_n:

(11) $L_n(\mathbf{B}_n, \mu_n) \cong L(\mathbf{B}', \mu')$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$$

の無限直積空間 $K(\mathbf{B}_\infty, \mu)$:

(12) $K = \prod_{-\infty}^{\infty} \otimes L_n$, $\mu = \prod_{-\infty}^{\infty} \mu_n$

を考える。K の元 k は

(13) $k = (\cdots\cdots, k_{-1}, k_0, k_1, \cdots\cdots, k_n, \cdots\cdots)$

$$k_n \in L_n$$

と表される。このとき k の第 n 成分を

(14) $k_n = (k)_n$, $k \in K$

で表す。

定理 1. "上記條件の下に，X の上の任意の實可積分函數 $f(x)$ を與えると，殆んどすべての $k \in K$ に對して，實可積分函數 $F_k(x)$ が定まり

(15) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \{f(T_{k(1)} x) + f(T_{k(2)} T_{k(1)} x) + \cdots\cdots$

$$+ f(T_{k(n)} T_{k(n-1)} \cdots\cdots T_{k(1)} x)\} = F_k(x)$$

が殆んどすべての $x \in X$ に對して成立つ。"

注意 後に定理 3 において $F(x)$ は (殆んどすべての k に對して) k に無關係な函數であることが證明される。

(證明)。次の諸段階に分ける。

(イ) 初めに X と K との直積空間

(16) $X^* = X \otimes K = X \otimes \prod_{-\infty}^{+\infty} \otimes L_n$

を考え，その直積測度を

(17) $m^* = m \times \mu = m \times \prod_{-\infty}^{+\infty} \mu_i$

と表す。又 K 上の保測變換 S をその成分 (14) によつて

(18) $(Sk)_n = (k)_{n+1}$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots),\ k \in K$$

によつて定義する。即ち (13) において，成分を一つづつ左へずらしたものとする。この K 上の保測變換 S と X 上の保測變換の可測系 $T_l (l \in L)$ とを合せて

(19) $\begin{cases} x^* = (x, k),\ x \in X,\ k \in K \text{ に對して} \\ T^* x^* = (T_{k(1)} x, Sk),\ x^* \in X^* \end{cases}$

と定義すればは，T^* は X^* を X^* の上に一對一に寫像する。即ち

(20) $T^*(x, k) = (\bar{x}, \bar{k})$

ならしめるためには

(21) $k = S^{-1} \bar{k}$, $x = T_{k(1)}^{-1} \bar{x} = T_{\bar{k}(0)}^{-1} \bar{x}$

とおけばよいからである。

(ロ) T^* は X^* 上可測且つ保測變換であることを證明する。初めに X^* の基本集合 (elementary set) E^*:

(22) $\begin{cases} E^* = A \otimes (\prod_{n \neq n(j)} \otimes L_n) \otimes (\prod_{j=1}^{h} \otimes M_j) \\ A \in \mathbf{B},\ M_j \in \mathbf{B}_{n(j)},\ j = 1, \cdots\cdots, h \end{cases}$

に對して考える。今 $n_1 = 1$ とすれば

(23) $\begin{cases} T^* E^* = A^* \otimes (\prod_{n \neq n(j)} \otimes L_{n-1}) \otimes (\prod_{j=2}^{h} \otimes M_j) \\ M_j \in \mathbf{B}_{n(j)-1},\ j = 2, \cdots\cdots, h, \\ A^* = \{(x, l);\ T_l^{-1} x \in A,\ l \in M_1\} \subset X \otimes L_1 \end{cases}$

である。故に (9) により $T^* E^*$ が m^* 可測となる。X^* 上 m^* 可測集合の集り $\mathbf{B}^*$ は E^* を含む最小の

Borel 集合族として定められるから，從つて又 $\mathbf{B}^*$ は E^* の作る集合體を含む最小の正規集合族として特徴附けられるから (Saks [1] 參照)，一般の $\mathbf{B}^*$ に屬する集合 B^* に對しても $T^*B^* \in \mathbf{B}^*$ となることが證明される。T^{*-1} の可測性も (20), (21) により，(19) を用いて全く同樣にして證明される。

次に T^* が保測變換であることも，全く同一に，基本集合 E^* に對して

$$m^*(E^*)=m^*(T^*E^*)$$

となることを見れば十分である。(22) に對して

$$m^*(E^*)=m(A)\cdot\prod_{j=1}^{h}\mu'(M_j)$$

であり，他方 T^*E^* に對しては Fubini の定理を用いれば

$$\begin{aligned}m^*(T^*E^*)&=\prod_{j=2}^{h}\mu'(M_j)\times(m\times\mu')(A^*)\\&=\prod_{j=2}^{h}\mu'(M_j)\cdot\int_{M_1}m(T_lA)\mu'(dl)\\&=\prod_{2}^{h}\mu'(M_j)\cdot m(A)\mu'(M_1)\\&=m^*(E^*)\end{aligned}$$

となるからである。

(ハ) T^* が X^* 上の保測變換であるから，$f^*(x^*)=f(x)$ とおけば，f^* は X^* 上 m^* 可積分函數であるから，G. D. Birkhoff のエルゴード定理によつて，ある m^* 可積分函數 $F(x^*)$ に對して

$$(24)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f^*(T^{*i}x^*)=F(x^*)$$

が X^* 上殆んどすべての x^* に對して存在する。從つて Fubini の定理によつて，殆んどすべての $k\in K$ に對して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f^*(T^{*i}x^*)=F_k(x)$$

が，殆んどすべての x に對して存在する。一方 $F(x^*)$ は m^* 可積分であるから，殆んどすべての k に對して $F_k(x)$ は m 可積分となる。これを組合せて，定理 1 が證明せられた。(未完)

引 用 文 獻

E. Hopf [1], Ergodentheorie (Ergebnisse), Julius Springer, Berlin, 1937.

吉田耕作 [1], エルゴード諸定理, 數物會誌, 15卷 1 號 (1939).

S. Saks [1], Theory of integral. Warsaw, 1937.

或 Order Statistic の問題に就いて

小 川 潤 次 郎

統計數理研究所

(昭和 22 年 12 月 1 日日本統計學會講演 昭和 22 年 12 月 20 日受理)

増山元三郎氏よりペニシリンを精製するカビの菌を見出す問題に關聯して，次の如き問題を提出されたことがある。即ち

ある母集團 (勿論これは連續な密度函數を有するとする) より先づ第一の無作意標本 Σ_1: $X_1<X_2<\cdots\cdots<X_n$ を抽出し，その最小値 X_1，最大値 X_n とする。次に前の標本と獨立に，第二の無作意標本 Σ_2: $X_1'<X_2'<\cdots\cdots<X'_N$ を抽出し，その最小値 X_1'，最大値 X'_N とするとき，$X_N'-X_n$ の分布如何。

此問題は例へば母集團を正規母集團と假定すれば X_n 及び X'_N の分布は分つて居り，從つてその疊み込みとして X'_N-X_n の分布函數は出る筈であるが一般にはそれは未知なる母數に關係し，又その分布函數を陽に求めることは困難なので次の如く Order Statistic の問題に轉化して考へることにする。即ち

Σ_2 の最大値 X'_N が Σ_1 の最大値 X_n を越える確率如何。

問題をこのやうに轉化すれば，その答は母集團の分布とは無關係に簡單になる。又例へば，工科方面の問題でピアノ線の強度試驗[1]等の問題では，強度の平均値よりは，實際に幾つかの試驗片を試驗して，その結果得られた知識をより有效に用ひる必要がある。それには母集團の即ち考察の對象となるピアノ線全長の最小強度がどの位になるか，又は實際の試驗から得られた最大，最小強度の間に全ピアノ線の何パーセントが含まれるであらうかと云ふ風に考へるのがより合理的であらう。

以下の方法は，このやうな問題に對する一つの ap-