有限母集團からの抽出法

増山, 元三郎
中央氣象臺衛生氣象研究室 | 東京大學物療内科教室 | 統計數理研究所

出版情報：統計数理研究. 2 (1), pp.12-23, 1948-05-10. 統計科学研究会

終りに原稿を讀まれて批判を寄せられた増山元三郎博士に感謝の意を表したい。同氏の御注意により若干補筆するところがあつたことを附記したい。

有限母集團からの抽出法

増 山 元 三 郎

中央氣象臺衞生氣象研究室 東京大學物療內科教室 統計數理研究所

§1. 話の始めに

抽出法を紹介するには，靜觀的な記述の學問である古い統計學——それはその原語 Statistik＝"status（國家狀態）の學問"の名にふさわしい——と行動的な推測と計畫の學問である新しい推計學——stochastics＝"stochos（推測，目論見）の學問"——の區別から出發することが好ましが，兩者の歴史とその經濟的基盤については北川敏男教授の優れた解説があるので夫を參照されたい。[1)]

推計學では，特定の目印を持つ個體の總ての集りを母集團（Population）とゆう。個體といつても生物を指すとは限らない。ある一定の管理水準で作られた製品の一つ一つを指してもよい。又目印といつても一つとは限らない。日本人とゆう目印と男性という目印と滿 20 才とゆう目印を持つ個體（＝日本の壯丁）を考えてもよい。その母集團を形作る個體の幾つかを標本（sample）又は試料（字面はよいが，資料と同音で拙い）とゆう。標本中の個體の員數を**標本の大きさ**（size of sample）とゆう。推計學では標本を調べて，これを手掛りに母集團の特性を掴もうとする。知りたいのは母集團についての知識であるが，員數の無限な母集團では全數調査は不可能であり，有限な母集團では全數調査の結果得た法則は，法則性追求の點からみて，他に應用の途がない法則という點で意味が無い。

全數檢査の代表例として知られた國勢調査も，人口現象の時間的な一斷面の全數調査に過ぎないので，標本の全體を調べているに外ならないのである。資料が役立つか否かは，夫が行動の指針を與えるか否かに在る。どんなに完全な調査でも，その調査結果が分つた頃對象とした集團の質が變つてしまつていたのでは殆んど役立たない。

現實に調べられるのは標本で，しかも知りたいのは標本の知識そのものではなく，母集團の知識であるとすると，

1° どんな方法で推定すれば一番よいか？

2° その一番よい方法で推定した時，どの位の誤りを犯すか？（誤りを犯す確率を危險率（Level of significance）とゆう。）

3° 標本の大きさを一定とするなら，その標本をどう抽いたらよいか？

1） 北川敏男： 數理統計學，季刊大學，3～4 號，東京大學新聞社，1947.
北川敏男： 近代統計學の基盤，本誌．北川教授は推計學を R. A. Fisher 流の推測統計學といつていられる。イギリスの農學者 R. A. Fisher がその創始者だからである。

4° 母集團に關する假說を，標本の知識に基いて，取捨てするとしたら，その基準をどうきめたらよいか？

等々が推計學の中心問題になることは自ら明かであろう。[1]

以下では 3° を中心にして話を進めよう。等しく抽出するといつても，目的が母集團の特性を表す常數—母數 (Parameter) の大きさの推定にある場合と母數に關する假說の檢定にある場合とで多少異る。ここで紹介するのは主として抽出推定論の初步である。思想の紹介を主とするため，證明は拔きにして話を進めよう。

§2. 抽出法の二大別

今迄知られている抽出法は大分けすると，

1° 有意選出法　　2° 無作爲[2] 抽出法

となる。兩方とも母集團の一部分を一定の割合 r で抽く點は共通していて，量的な點だけからみれば差はないが，質的には全く異つている。兩者を比較する基準になるのは，I. 偏倚性，逆にいえば不偏性　II. 變異性，逆にいえば信憑性又は精度　III. 費用　であろう。費用の代りに調査日數や手數も考えられるが，適當に費用に還元して考えても本質的な差はない。この外，IV. 客觀性　V. 再現性　等も問題にしてよいであろう。

1° **有意選出法** (Purposive selection)　有意選出法とは，調査の對象になる目印と密接な關係にあると思われる對照 (Control) を幾つか選び，對照に關するこれ迄の知識を利用して，代表と思われる標本を選ぶ方法である。例えば東北地方の農村での榮養狀態の調査研究をやろうとする場合には，榮養狀態と密接な關係にあると思われる農業經營規模を對照に選び，規模の點で中位の村を選び，その村全體の榮養調査を行う方法である。對照は一つでなくてもよく，經營規模の外に人口密度も考えて，經營規模でも人口密度でも中位のものを選んでもよい。この際村の數は一つでなくてもよく，地域的に隣合つた村である必要もない。

有限母集團の成員の員數 N を**母集團の大きさ** (Size of population) といい，それから抽いた標本の大きさを n とすると，("≡" は定義式のいみ)

(2.1)　$$r \equiv n/N$$

を**抽出比** (Sampling ratio),

(2.2)　$$b \equiv 1/r = N/n$$

を**抽出間隔** (Sampling Interval) とゆう。有意選出法では抽出比は適當に勘できめる。

このやり方は，地域的調査では，調べる地域が纏つている點で便利であるが，その他の點では好ましくないのである。

先づ偏倚性の點を調べよう。**偏倚性** (Bias) とは母數 θ を標本から推定した値を T とした時，θ より T が過大又は過小となる傾きを指している。例えば日本で政黨支持率について輿論調査を行う場合，政治に明るいとゆう理由でインテリ層を代表にとるとしたら恐らく社會黨とか共產黨のような進步勢力を支持し，現實には政治意識の遲れた農民の大多數が反動勢力を支持していること

1) 增山：推測と計畫の科學，日本評論社，1948．大體の構成は，直觀，理論，實驗等々 → 母集團の型（＝構造）を想定する→假說を立てる→標本を抽く（計畫論，抽出推定論，抽出檢定論）→母數を推定する（推定論）→假說を檢定する（檢定論）→危險率の明らかな結論。となつている。直觀，實踐，分析，綜合の過程の中に，否定の否定の法則，量から質えの轉化の法則が巧みに利用されている。

2) 北川敎授は**達機化**或は**確率化**がよいとされ，佐藤良　郎敎授は**射倖的**といつていられるが，**確率化**とゆう方が本質的で徹底しているであろう。

が反映されないことになつてしまうから，偏倚を生ずることになる。又質問表郵送法で輿論調査を行つた場合を例とすると，返事の無いものを，集計から除くと，“返事を寄せない人”とゆう特定の層——闇ブローカーのように外出しがちな人とか，質問表に關心を持たぬ人とか，質問表の內容の分らない人，質問表に答えたくない人等々——が母集團に含まれていながら，これらの人達の意見が無視されてしまうことになつて，偏倚を生ずるのである。

有意選出法では，對照自身については母集團の平均を代表しているとしても，調査對象でも平均を代表しているかどうかは分らない缺點がある。[1] 先程の例では經營規模が中位なら榮養狀態も中位だとゆう客觀的な保證がないのである。榮養で中位だと思うから中位なのではなく，中位か否かは母集團自體で客觀的に定まつていることなのである。即ち有意選出法では偏倚性が無いとゆう客觀的な保證がないのである。

次に變異性について考えよう。變異性 (Variability) とは母數 θ とその推定値 T との平均としての喰違いの程度を表す。偏倚性は母數からの一方向きの外れであるが，變異性は同じ母數 θ を繰返し同じ方法で推定した時，得られる推定値の分布の幅を表すといつてよい。有意選出法では，變異性の客觀的な尺度を與えることができない。全く主觀に依る以外に見積りようがないのである。從つて假に全數調査の結果と一致したとしても偶然の一致でないとはいえない譯である。

三番目に費用の點ではどうか？ 問題が費した金額だけで解決のつくものでないこと，卽ち澤山の費用をかけた調査程いつでも正確とは限らないことは，今迄の日本での數多くの調査の實例に示されている。

では再現性 (Reproducibility) の點ではどうか？ 一般に有意選出法では一番よい代表と思われるものを意識的に選擇して取つているから，その標本から既得の知識と相容れない結果が現れても調査に誤りさえ無ければ再調査は意味がない (同じ結果が再び現れるだけだから)。よい代表と思つた標本に實際に偏倚がなければ，こんなことは起りうることであるが，一番よいと思つたものを選ぶ限り，再調査に依る再檢討の途がない。

以上のように母集團の特性を客觀的になるべく正しく知ろうとする見地からいえば，有意選出法は全く意味の無い，否むしろ誤つた結論を導くことの多い危險な方法なのである。このことは實際にも確められている。夫はイタリーの國勢調査の例である。[2] 集計が遲れている間に次の調査年度が來たので，止むを得ず抽出法で結果を求めることになり，どの方法がよいかを調べるため，當時既に集計のできていた農民に關する資料で抽出推定をやり全數檢査と比較してみたのである。用いたのは衆智を集めて代表と思われる標本を抽く有意選出法である。結果は大變な喰違いで有意選出法の當にならないことを示したのである。10 年以上も前のことである。日本でも 1945 年 11 月廣島市での國勢調査で H. Nisselson 氏と私とが實驗したことがある。全市民中 13 才から 60 才迄の働きうる人の割合いを推定したのであるが，有意選出法は實際の半分の値しか示さず，後に述べる層化抽出法では全數檢査の結果と 2% の差しか無かつた。

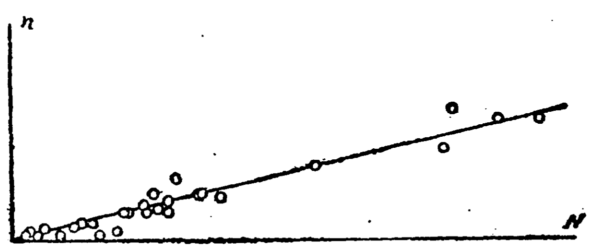
この專門家 (＝親方!) の主觀だけに依る抽出法は徒弟制の存在していた時代の方法の名殘りといつてよく，先進國では批判濟みの方法なので，今後使わないようにしたいものである。

2° 無作爲抽出法 (Random sampling) 無作爲抽出法は，主觀に依らないで，與えられた抽

---

1) 玆に平均といつたのは，必ずしも算術平均を指すものではない。母數の推定量として算術平均が適している場合は限られていて，分布曲線が左右對稱だとゆうだけでは不充分であり (Cauchy 分布の例)，左右對稱でなくても適していることさえある (指數分布の例)。

2) J. Neyman: Lectures and conferences on mathematical statistics, 1937.



第 1 圖 無作爲抽出法の實例
各課中の被驗者實數 N とその推定値 n（増山，鈴木 1947）

出比 r に相當する大きさ n の標本を抽く方法で，母集團のどの個體を抽くかを作意の無い客観的な方法に依つて行うものである。作意無しに抽くには，昔は骰子やトランプを用いたが，最近は**亂數表** (Rand m numbers) を利用する。[1] これは骰子やトランプでは偏倚を起し易いからである。亂數表は 0 から 1 迄の數がデタラメの順に並んでいる表で，數學的にいえば離散型矩形分布をなす數値である。[2] 次に有意抽出法と比較してみよう。

先づ偏倚性。無作爲ならば，どの個體も抽出される可能性を持つから，このどれが抽出されるかを確率論の問題として取扱うことができ，從つて調査する前に抽出方式自體に偏倚があるか否かを客觀的に調べることができる。このことは必ずしも偏倚の大きさ迄が分るとゆう意味ではない。

次に變異性の點ではどうか？ 無作爲抽出では，抽出方式が與えられるなら，客觀的に豫め變異の程度を推定できる。變異の程度は，**母平均平方誤差** (Population mean square error)

(2.3) $$E(T-\theta)^2 \equiv \text{M. S. E.}$$

卽ち n を固定して，同じ母集團から相互に獨立抽出を繰返した時，いい換えると，各回毎に抽出した個體は元え戻して，再び無作爲に抽くならば，推定値 T と母數 θ との差を各回毎に計算し，その平方を作り，全回を通じて平均をとつたもので測ったり，或いは又各回毎に求めた T の値の全體での平均を $E(T)$ とすると，**眞差** (True error) $\{T-E(T)\}$ の平方の全體での平均

(2.4) $$E\{T-E(T)\}^2 \equiv \sigma_T^2$$

卽ち T の母分散 (Population variance) で測つたりする。ところが

(2.5) $$\begin{aligned}\text{M. S. E.} &= E\{T-E(T)+E(T)-\theta\}^2 \\ &= E\{T-E(T)\}^2 + 2\{E(T)-\theta\}E\{T-E(T)\} + E\{E(T)-\theta\}^2 \\ &= \sigma_T^2 + \{E(T)-\theta\}^2\end{aligned}$$

で，$E(T)-\theta$ は偏倚を表しているから，平均平方誤差は母分散より偏倚の自乘だけ大きい譯である。實際の現象では，$E(T)$ が大きくなるにつれて，σ_T も大きくなることが多いので，相對誤差に相當して，T の**母變異係數** (Population coefficent of variation)

(2.6) $$C.V \equiv \sigma_T / E(T), \qquad (E(T) > 0)$$

で變異性を測ることもある。

例えば，母集團の大きさ N，標本の大きさ n，從つて抽出比 $r=n/N$ の場合，母集團である特性を持つ個體の割合を p とすると，標本中にその特性を持つ個體が k 箇含まれていたなら，無作爲抽出の場合には，母數 p の推定量 (k/n) では，[3]

(2.7) $$E(k/n) = p.$$

---

1) 邦書では統計科學研究會：統計數値表 I. 河出書房, 1943. が唯一のものである。同書では**任意標本數列**と呼んでいる。外國には L. H. C. Tippett: Random sampling numbers. 1927. がある。

2) 他の型に變換する方法は統計數値表 I. 解說を見よ．正規型の場合は W. A. Shewart: Economic control of quality of manufactured product. 1931, W. E. Deming: Statistical adjustment of data 1946. にある。

3) k/n は母數ではない。同一の母集團を對象にし，n を一定に保つても，k の値は標本毎に一般に異なる。

即ち k/n は p の不偏推定量 (Unbiased estimate) となつて，偏倚がないし，母分散は

(2.8)　　$E(k/n-p)^2=(N-n)p(1-p)/\{(N-1)n\}$

となる。[1] 當然期待されるように $N=n$ なら母分散は 0 であり，N が限りなく大きくなると，無限母集團についてよし知られた母分散の公式

(2.9)　　$p(1-p)/n$

が得られる。多くの場合 $N\gg1$ だから元の公式は

(2.10)　　$(1-r)p(1-p)/n$

と書いてもよい。

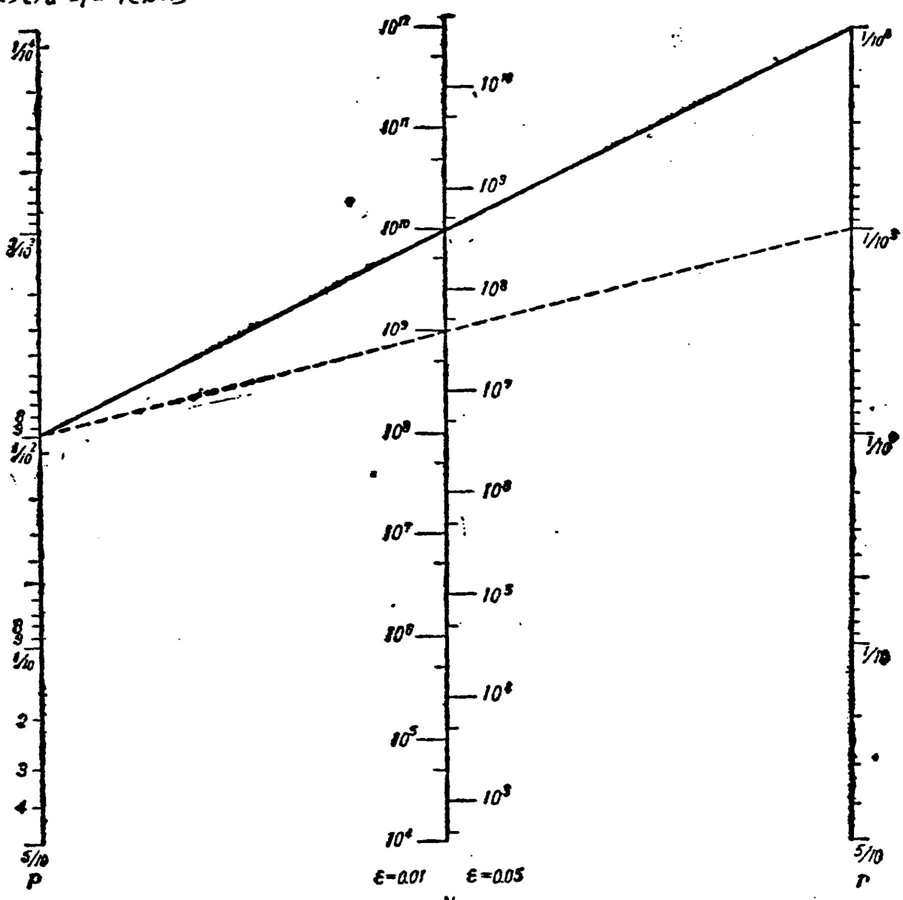
簡單なこの例で抽出比の定め方を述べて置こう。k/n の母變異係數を ε 以下に留めるには r は

(2.11)　　$\varepsilon^2\geqq\{(1-r)p(1-p)/n\}/p^2$

から定められる。[2] 兩邊に N を掛けて書き換えると，

(2.12)　　$N\varepsilon^2\geqq(1/r-1)(1/p-1)$

從つて例えば東京都で男女の性比 p を $\varepsilon=0.05$ 以下の精度で推定するには，$N=500,0000$ として，p は大凡 1/2 だから



1) S. S. Wilks: Mathematical statistics, 1944. p, 83.
河田龍夫その他 8 名: 數理統計學概論，學術圖書出版社，1947, 133 頁

2) 總理廳統計局研究部守岡隆氏の御教示に負う。

$$5000000\times 0.05^2 \geqq (1/r-1)(2-1)$$
$$r \geqq 1/12501$$

即ち大凡1萬2千5百分の1抽けばよいことが分る。[1] この場合 0.05 というのは**目標精度** (Aimed-at precision)であつて，實際は $p=1/2$ から喰違つているであろうから，實際檢査した上で得られる標本變異係數は 0.05 と異つたものになるのが一般である。後者は**實績精度** (Precision attained) と呼ばれている。$\varepsilon \leqq 0.05$ を目標としたから，現實にも $\varepsilon \leqq 0.05$ となつているとは限らないから，集計が濟んでから精度――逆にいえば變異性を調べ直さねばならない――。

この例にみるように抽出比從つて標本の大きさは，變異性と關係して定まり，一般に別々に決める譯にはいかない。なお抽出比 r をきめるには，p の大凡の値を見積つて使う以上，r は大きく見積つて置いた方が安全である。從つて今の例では大都會では $p>0.45$ と考えられるから，$p=0.45$ と置いて

$$12500 \geqq (1/r-1)(1/0.45-1)$$

から r は 1/10000 位と見積つておけば安全なことが分る。

第3に費用の點はどうか？ 單純な無作爲抽出による標本では，個體の名簿を作るための費用，抽出，集計の費用を含めて，標本の大きさ n に關係して來る。從つて費用 C を一定にするなら，n を一定にすることと看做せる。n が一定だとすると，抽出比がきまるから，結局精度がきまることになる。即ち C の大小は精度と關係し，夫自身の大小だけで抽出法のよい悪いがいえないことが分る。

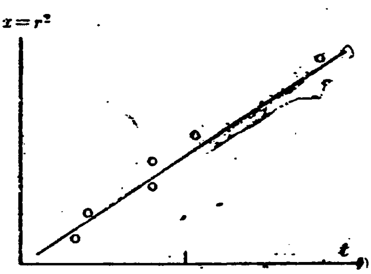
第4に客觀性の點は第1，第2に述べた通り，主觀的な“專門家判定”の餘地は少いのである。

第5に再現性。無作爲である以上，一般に標本は何回でも繰返して得られるので，疑わしい場合の再檢討ができる。

以上で有意選出法より無作爲抽出法が優れた進歩した方法であることが明らかになつたであろう。直觀的には“代表的”(Representative) と思われるものを選ぶ方がよいように思われるが，これは問題になるのは母集團の客觀的把握であることを忘れているからである。われわれは小數の親方に驅使される徒弟制の存在していた時代の統計學から，大量生產を許す時代の推計學に飛躍しなければならない。以下無作爲抽出法の幾つかを擧げて說明しよう。

§3. 地域抽出法 (Areal sampling)

人口現象作物の收量その他土地と關係のある現象の調査に利用される方法で，名簿又は臺帳の手許に無い時役立つ方法である。例えば爆撃の被害を調査する場合など，町會も配給所も燒けて手掛りにする名簿はない時利用できる。これは調査範圍を適當に細かく分け，小分けされた地域に番號をつけ，その番號を亂數表で抽き，抽かれた地域を隅なく調べ上げるのである。實際には地圖に座標 (x, y) を入れ，例えば地域が (21, 05) なら，2105 番と看做し，x も y も 100 以下の數なら，亂數表の數値を，4つづつ區切り，これを4桁の數と看做して抽出に利用すればよい。私はこの方式を廣島市に於ける最初の原子爆彈人的被害調査に應



第3圖　地域抽出法の實例
死亡率 x とその推定値 t
(増山，渡邊 1945)

1) 計算結果 r が 1/2 より著しく大きいなら，全部調べた方が手數がかからなくてよい。

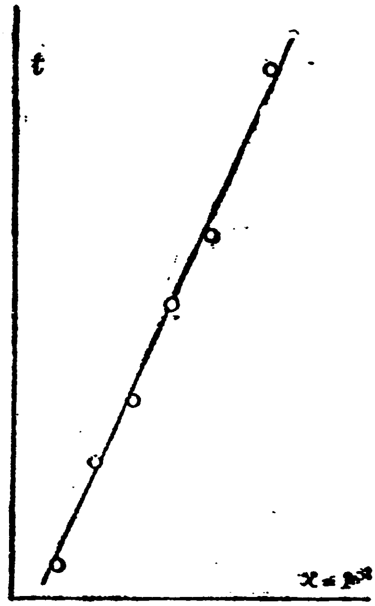
用して好結果を得た。[1]

§4. 層別抽出法[2] (Stratified sampling)

層別法とは，母集團を幾つかの組に分け，組の中はできるだけ均一に，組と組との間はできるだけ不均一になるようにする方式を指し，こうして分けた組のこと層（stratum）とゆう。

例えばある土地で所得の調査を行う場合を考えよう。話を分り易くする爲に，收入月1萬圓の人2名，月千圓の人が8名いたとする。この中から $r=1/5$ で，2名だけ抽出したとすると，この2名がいづれも1萬圓の收入の人であつたり，いづれも千圓の收入の人であつたりして，この母集團には他の收入の人もいることが標本に反映されないことになる。これを避けるには，1萬圓だけの層と，千圓だけの層とに先づ分け，各層から抽くことにすればよい。こうすれば各層から抽いた時標本中に現れる値の幅 R は 0 となり，從つて又層毎の推定を層全體に擴大しても誤りはない譯である。從つて又擴大した値を合成した推定量にも誤りはないことになる。

層別法を何を目安として行うかは，その調査對象によつて異り，層別の際には衆智を働かしてなるべく一様な層が得られるようにする。衆智を働かすといつても，各層内での抽出は無作爲にやるのだから，有意選出法のような缺點は無い。層別法が巧みに行われれば行われる程，推定量 T の變異性は小さくなるが，層別法が拙かつたとしても，層別しない場合より大きくなることは，實際上先づ無いといつてよい。即ち層別を行つた爲に反つて精度が惡くなることは先づ無いといつてよいのである。



第4圖　層別抽出法の實例
死亡率 x とその推定値 t
（増山，渡邊 1945）

層といつても必ずしも地理的な又は行政的な地域分類を指す譯ではなく，輿論調査の場合なら，學生層，勞働者層，農民層，商人層等々に分けてよいのである。即ち行政區分の點からいえば，地域をそこに住む人の職業に依つて細分し又は合併することになる。一應層別して調べた上，標本を基に差の檢定を行い，有意な差のない層は後で合併してよい。勿論合併するかしないかは推計學自體の問題でなく綜合判斷に依るべきで，推計學は細分した場合の危險率，合併した場合の危險率を與えるに過ぎない。

k 箇に層別した後，各層から抽く割合は

(4.1)　1°　　$n_1/N_1=n_2/N_2=\cdots\cdots=n_k/N_k=$ 一定

となるような比例抽出法 (Size proportionate sampling)

(4.2)　2°　　$n_1/N_1\propto\sigma_1,\ n_2/N_2\propto\sigma_2,\ \cdots\cdots,\ n_k/N_k\propto\sigma_k$

となるような J. Neyman の方法（σ_i^2 は層 i での一つの實測値の母分散）

(4.3)　3°　　$n_1/N_1\propto\sigma_1/\sqrt{c_1},\ n_2/N_2\propto\sigma_2/\sqrt{c_2},\ \cdots\cdots,\ n_k/N_k\propto\sigma_k/\sqrt{c_k}$

となるような W. E. Deming の方法（c_i は層 i での一個體當りの調査費用）

の 3 つが知られている。3° の方法は總費用

(4.4)　　$C\equiv c_1n_1+c_2n_2+\cdots\cdots+c_kn_k$

---

1) 日本學術研究會議及び日本數學會で發表 (1946).

2) 又は層化抽出法

一定の場合，推定量の母分散 V の最小となる方法で，[1] 各層での一個當りの調査費用が等しいなら，2° の方法に一致し，更に各層内での母分散が等しいなら，1° の方法に一致する。即ち 3°, 2°, 1° の順で一般に推定量母分散は大となるのである。私はこの方式を廣島市での第二回目の原子爆彈人的被害調査に利用し，最初に得た法則が，更に廣範圍に成立することを確めた。

若し方針を變えて

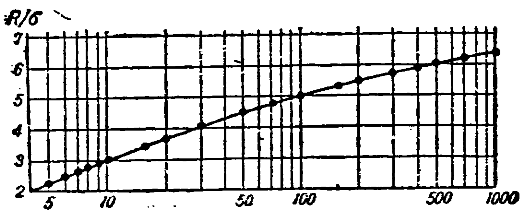
(4.5) $V=$一定, $C=$最小

としても同である。夫は Lagrange の未定係數を使えば，いづれも

(4.6) $V+\lambda C=$最小

の形となるからである。

この方式で 2° 又は 3° を用いるには，σ_i を知る必要があるが，これは豫備調査で少數例で推定して置けばよい。推定の方法はいろいろあるが，[2][3][4] 玆には標本中に現れる値の最大と最小との差——幅 (Range) といい，R で表す——と，標本の大きさ n とから推定する圖をあげて置こう。



第.5 圖 標本の大きさ n と幅 R から母標準偏差 σ を推定する圖表（正規型母集團）

この圖から，例えば $n=10$ の標本で幅 $R=63$ が得られたら，$n=10$ に對する R/σ の値は大凡 3 だから，

$$63/\sigma=3 \qquad \therefore \ \sigma=63/3=21$$

と推定できる譯である。この方法は大凡の値を與えるだけで，もつと精度のよい方法があることを附け加えて置こう。

§5. 集落抽出法 (Cluster sampling)

集落法の本質は，母集團を幾つかの組に分け，組の中をできるだけ不均一に，組の間をできるだけ均一にする點にある。即ち組の一つ一つが母集團の縮圖になるようにした上で，組を幾つか無作爲に抽いて標本とするのである。この時，組を集落 (Cluster) と名附ける。層別法と集落法とは組に分ける點は同じであるが，組内を均一にするか組間を均一にするかの點で異り，何れも實際の狀態を他の方向え抽象化したものである。このような方法が成功する例として一筆の田の米の收量の推定及び牛乳中の細菌數の推定を擧げて置きたい。坪刈の方から述べよう。

水田は一般に周邊效果を持ち中央より周邊が收量がよい。從つてこれ迄の對角線に繩を張り交點から兩側え畝を數え，一定番目の畝に沿うて，一坪に相當するだけの稻を刈るとゆうやり方は，大きい田程收量が低く見積られるとゆう不公平があつたのである。若し兩端の周邊效果の等しい畝を一

1) 正確にいえば，$N_i \geqq 1$ の條件の下で。この場合は單一の層からの抽出と異り，標本の大きさだけでは，變異性はきまらない。各層からどうとるかの問題があるからである。

2) E. S. Pearson (石田,北川譯): 大量生產管理と統計的方法，河出書房，1942.

3) 増山: 少數例の纒め方と實驗計畫の立て方，河出書房，1943, 1944, 1948.

4) 統計科學研究會: 統計數值表 (I)，河出書房，1943.

つの層 S_1 とし残り S_2 の畝を夫々中央で折半して，半分の畝を一つの集落と考えるなら，この S_2 では集落抽出法が有效となる。従つて S_1 と S_2 とで別の抽出方式を使つて推定した上，擴大合成すれば一筆の田全體の收量が，少くも今迄より公平に見積られることになると思われる。

牛乳の細菌検査は，従來は，罐全體をよくかき廻した後，一滴とつて調べていた。これは好氣性菌は上に，嫌氣性菌は下に，單一の菌は上に，塊を作つた菌は下に集まる傾きがあるからである。水平方向は一樣と考えられるから，いきなり罐全體をかき廻す代りに，鉛直に細長い管で上から下迄取り（＝集落），取出した分だけよくかき廻して一滴取る方が同じ手數に對して精度はよいと思われる。

§6 反復抽出法[1] (Multiple sampling)

一回抽出した後，更に母集團から繰返し抽出する方法で，最初の抽出比を r_1，次の抽出比を r_2 とすると，結局抽出比は

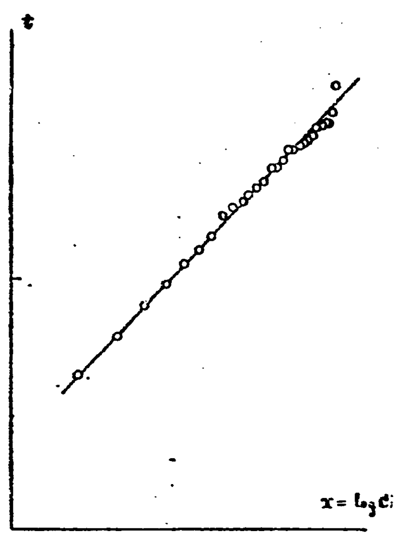
(6.1) $$\{N-(N-Nr_1)+r_2(N-Nr_1)\}/N=1-(1-r_1)(1-r_2)=r_1+r_2-r_1r_2$$

一回にこの比で抽いた時より，一般に得られる知識が豐富な點に特色がある。例えば一仕切内の電球の規格試驗を抽出法で行つたとしよう。抽出比が小さいなら，最初の標本中の個體が全部規格外れでも，それだけで發賣禁止にしないで，もう一度同じ仕切の中から抽出して，試驗を行い，前の結果と合せて判定を下す場合がこれに當る。この方法は大陸からアメリカえ渡つたA. Waldの手に依つて**逐次確率比法** (Sequential probability ratio test) とゆうすばらしい方法に發展している。[2] 抽出回數を何回と決めないで，抽出箇數を減らすやり方である。

§7 副次抽出法[3] (Sub ampling)

反復抽出法と同じ二回抽出するのであるが，二回目の抽出が，母集團でなくて第一回目に抽出された標本の中で行われる點が異る。例えば勞働力調査の場合，先づ層化を行い，次に層内で町とか村（適當に細分又は合併する）を**第一次單位** (Primary unit) として抽出し，抽出された町又は村で，**第二次單位** (Secondary unit) として世帶を採つて，更に世帶を抽出する方法である。この場合，一次抽出の時の抽出比を r_I，第2次抽出の時の抽出比を r_{II} とすると，母集團自體からいえば $r_I \times r_{II}$ の抽出比で抜いたことになる。第一次抽出單位が集落であるならば，この方法は一回限りの單一抽出法より抽出比が等しいなら，一般に精度はよい。

質問表郵送法による調査で不應答者があつた場合，その一部を更に抽出して，之を面接法その他で調べる場合はこの方式の一變種と看做せよう。標本の質的内容をその一部を抽出して再檢査する場合もこの特別な場合といえるであろう。日本では産米收穫高，[4] 勞働力，消費者價格の調査に



第6圖 副次抽出法の實例
支出 C の對數とその推定値 t
(杉山，崎野 1947)

1) F. Dodge and H. G. Roming: Sampling Inspection Tables, Single and Double Sampling, 1944.

2) 統計數理研究所講究錄, 2 (1947), 495, 569 に小川潤次郎，田中穂 兩氏の紹介がある。

3) 又は部分抽出法。

4) 農林省統計調査局： 昭和二十二年産米收穫高調査に使用する標本調査について，同局資料第2輯。

利用され始めている。

§8. 系統抽出法 (Systematic sampling)

面接法で調べる場合，亂數表で選んで同じ町内を飛び廻るのは，間違いを起し易い。抽出計畫がどんなに優秀でも，記入者が間違つて資料を送る危険の多い方式は，結果として面白くない。從つて調べる家の順番の分り易い方法が好ましい。系統抽出法は，個體を順にならべ，抽出間隔 (1/r) 毎に抽出していく方式である。なるべく無作爲化するために，最初の b 箇のどれを採るかを決める時だけ亂數表を用い，その後は系統的に抽出して行く。これを**無作爲スタート（着手）**(Random start) とゆう。私は第 2 回目の廣島市での調査にこれを用い能率をあげ，長崎市での原子爆彈人的被害調査にも用いて效果を擧げた。この方法は寄宿舎や寮のような周期性のある場合には偏倚を生じ易いので，抽出の際對照を置き，一應檢査してみる必要がある。例えば人口調査なら標本に現れた人の年齢構成，性別等々が母集團での割合と同じになるか否かである。勿論期待される割合と實際の割合との喰違いが偶然として起りうる程度なら問題ないが，偶然として起りにくい程度であつた時，調べ直して大きな喰違いの起つた理由がつきとめられない場合は，抽出の誤りと決める譯にはいかない。又幾つかの對照について喰違いが無いとゆうだけでは，偏倚が無いと積極的にいえないことを附加えて置こう。

§9. 確率比例抽出法 (Probability proportionate sampling)

これは層化した後に，層の中から集落を一つ抽出する場合の方式である。例えば勞働力調査を行う場合，ある層の中に A, B, C の 3 つの村があり，その中に夫々 5,3,2 の世帶を含んでいたとしよう。この場合，A, B, C のどれか一つを抽出する時 A, B, C の三枚のカードから一枚を抽いてきめる代りに，A, A, A, A, A; B, B, B; C, C の 10 枚のカードから一枚を亂數表で抽き，抽き出された村を調査する方法である。層化比例抽出法とは全く別物であるから注意を要する。この方式によると偏倚を生じない特色があるので，日本でも農林省統計局で作附面積の調査に今年から利用し始めている。

§10. 結　び

實際には以上の組合せ又は擴張が必要になるであらうし，實際收量の推定の場合には擴張が考えられるのである。

本題から少し外れるので本文中に觸れなかつたが，抽出方式の選擇や抽出比の決定には，種々の量の母分散を知る必要があるのに，封建時代の統計學の勢力の 20 世紀の今日なお強い日本では，こうした量は元より之を求める手掛りさえ與えられていない。從つて玆に紹介した進歩した方式を利用するには，分散分析法や共變分散法から始めねばならないのである。[1]

推計學は古い統計學と異り，後始末の學問ではない。，どんな資料に對しても有效な道具を提供している譯でもない。推計學はよく計畫された標本に對してのみその威力を發揮する。[2] 一定の方式に從いよく計畫されていれば，極めて少數例でも，有效な結論を得ることが少くないが，これは一つは少數例であればこそ質のよい資料が得られるせいである。推計學は少數例にしか役立たないのではないが，多數例では異質のものが混入する處れがあるので，多數の場合には層別を主張する

1) 拙著又は統計數値表參照。

2) 社會科學の分野で，推計學の應用の可能性に疑いを持つ人達の多くは，この“よく計畫された標本”の代りに今迄の資料を考えている。よく計畫された標本に對しては，社會科學の分野でも推計學が有效であることは，アメリカで實證されつつある。行政面から生れた統計學が，自然科學の洗禮を受けて，推計學となつて，社會學の分野え進出して來たのである。

のである。調査目的をきめるのは，推計學自體ではないが，目的を正しく追求するには，推計學者の計畫に從うべきである。抽出法には抽出法の歴史があり，その經濟的基盤があり，數理的根據がある。これらを無視して抽出法を形式的に用いるのは極めて危險である。今後日本でも廣く用いられると思われるだけに，抽出法の生い立ちについて R. A. Fisher の思想の進歩性について關係者の充分の研究を望みたい。

推計學は急速に發展しつつある學問であり，まだ自然科學又は社會科學の分野で日常起るあらゆる推計的問題を總て解決しうる迄には到つていない。[1] 併し"それだから推計學は役立たない"とゆう靜觀的態度は，"それだからこそ實踐を通じて一層完全なものに迄高めよう"とゆう行動的態度に改めねばならない。この主張の正否は，過去の歴史[2] 及び私達の實踐結果が定めて呉れるであろう。

文献（完全なものではない。不備は他日補いたい。）

1. W. G. Cochran. Sampling theory when the sampling units are of unequal sizes. J. A. S. A., 37 (1942), 199.
2. W. G. Cochran. Relative accuracy of systematic and stratified random samples for a certain class of populations. Ann. Math. Statist., 17 (1446), 164.
3. W. E. Deming and F. F. Stephan. On the interpretation of consuses as samples. J. A. S. A., 36 (1941), 45.
4. W. E. Deming. Opportunities in mathematical statistics, with special reference to sampling and quality control. Science, 97 (1943), 209.
5. W. E. Deming. On errors in surveys. Amer. Soc. Rev., 9 (1944), 359.
6. W. E. Deming. On training in sampling. J. A. S. A., 40 (1945), 307.
7. W. E. Deming and W. Simmons. On the design of a sample for dealer's inventories. J. A. S. A., 41 (1946), 16.
8. W. E. Deming. Allocation in stratified sampling. A lecture delivered at the Meeting in the Institute of Statistical Mathematics, 25 March 1947.
9. M. H. Hansen and W. N. Hurwitz. Relative efficiencies of various sampling units in population inquiries. J. A. S. A., 37 (1942), 89.
10. M. H. Hansen and W. N. Hurwitz. On the theory of sampling from finite populations. Ann. Math. Statist., 14 (1943), 333.
11. M. H. Hansen and W. E. Deming. On some census aids to sampling. J. A. S. A., 38 (1943), 353.
12. M. H. Hansen and W. N. Hurwitz. A new sample of the population. Estadistica (J. of the Inter American Statistical Institute). Sept. 1944.
13. M. H. Mansen and Ph. M. Hauser. Area sampling—some principles of sample design. Public Opinion Quarterly, Summer 1945, 183.
14. M. H. Hansen, W. N. Hurwitz and M. Gurney. Problems and methods of a sample survey of business. J. A. S. A., 41 (1946), 173.

---

1) 例えば，人口調査に，名簿がないため，配給所の登録を利用する場合，兩者の關係は單純な函數的でなくて，確率的なものが含まれる。この場合の抽出法の研究が無い。又一つの調査でいろいろのことを調べる時，一つの調査事項に對して最良の割當て (Allocation) は，他の事項に對しては最良ではない。こうした場合，綜合的に最良な標本の割當て方の研究が不充分である。

2) 例えば，近藤洋逸：數學思想史序說，三一書房，1947.

15. M. H. Hansen and W. N. Hurwitz. The problem of non-response in sample surveys. J. A.S.A., 41 (1946), 517.
16. Ph. M. Hauser. The use of sampling in the census. J.A.S.A., 36 (1941), 369.
17. Ph. M. Hauser and M. H. Hansen. On sampling in market surveys. J. of Marketing, 9 (1944), 26.
18. W. G. Madow and L. H. Madow. On the theory of systematic sampling. I. Ann. Math. Statist., 15 (1944), 1.
19. J. Neyman. Contribution to the theory of sampling human population. J.A.S.A., 33 (1938), 101.
20. J. Neyman. On the two different aspects of the representative method; A method of stratified sampling and the method of purposive selection. J. R. S. S., New series, 97 (1934), 558.
21. J. F. Reed and J. A. Rigney. Soil sampling from fields of uniform and nonuniform appearance and soil types. J. Amer. Soc. of Agronomy, 39 (1947), 26.
22. J. A. Rigney. Some statistical problems confronting horticultural investigators. Proc. Amer. Soc. for Horticult. Sci., 48 (1946), 351.
23. F. F. Stephan, W. E. Deming and M. H. Hansen. The sampling procedure of the 1940 population census. J. A. S. A., 35 (1940). 615.
24. B. J. Tepping, W. N. Hurwitz and W. E. Deming. On the efficiency of deep stratification in block sampling. J.A.S.A., 38 (1943), 93.
25. A. Wald. Sequential method of sampling for deciding between two courses of action. J.A.S.A., 40 (1945), No. 5.
26. A. Wald. Sequential tests of statistical hypotheses. Ann. Math. Statist., 16 (1945), No. 2.

統計力學の諸問題

原島　鮮

九州大學理學部

物質の性質をその原子的構成から理解しようとする試みで最初に取りあげられたのは，最も簡單な物質であるところの氣體についてであつて，19 世紀の中頃から，Clausius, Maxwell, Boltzmann 等によつて發展させられたものである。この理論では，古典力學に從つて運動し，互に衝突する非常に多くの分子についてこれを統計的に扱つて，氣體の分子の速度の分布狀態（速度成分の任意の微小區域に全體の分子のどれだけが入つているかの分布）がどのようなとき分子同志の衝突にもかゝわらず分布が變化しないかという問題を論じ，又氣體の狀態方程式（壓力，溫度，體積の關係）を導き，更に氣體の粘性，熱傳導，擴散等の所謂輸送現象を定量的に導こうとするものである。

氣體運動論は發展して，氣體のみでなく固體，液體の性質が原子乃至分子的構成をもとにして論