

ベクトル量の相關速度に就いて(Ⅱ)

増山, 元三郎
中央氣象臺調査課

<https://hdl.handle.net/2324/12898>

出版情報：統計数理研究. 1 (2), pp.105-113, 1942-03-15. 統計科学研究会
バージョン：
権利関係：



ベクトル量の相關測度に就いて (II)

會員 増山元三郎 (中央氣象臺調査課)

(昭和十六年八月卅日受理)

目 次

§ 10. 緒 論	§ 14. 偏相關係数
§ 11. 加算性相關係数の初等的意味	§ 15. 結 語
§ 12. 加算性相關係数の α -試験法	文 献 表 (II)
§ 13. 氣壓傾度から風を推算する實例	

§ 10. 緒 論

數物記事に何回かに渡つてベクトル量の相關測度に就いて發表しましたところ、⁵⁻¹⁵⁾ 實際家の方々から餘り抽象的に過ぎると云ふ非難と、數値例を發表せよと云ふ勧告とを頂きました。

相關測度の解析的性質を明かにする爲に或る程度の抽象化は止むを得ないと思ひますが、御會ひして話合つて見ると、實際家に了解して頂けない理由の主な一つは、寧ろテンソルの概念に關する部分の様に思はれます。夫でスカラーである加算性相關係数の性質のうち、不變論に觸れない部分だけを、成るべく初等的に説明する方法を考へて見ました。之を § 11 に述べようと思ひます。

應用例に就いては、第 I 報の終りに申しました通り、當時結果の試験法が明かでなかつたので、實例を述べても結果の信頼度が分らないと、結論を過信される虞れがあつたので、發表する氣になれませんでした。第 I 報の終りに附記した實例は、計算の様式を示すだけのものと御承知願ひます。この結果の數値が有意義かどうかの判定法は、§ 11 に述べます様に、加算性相關係数を標準形の相關テンソルから導きますと、之は Pearson の重相關係数の自乗の算術平均と等しくなりますので、この事實から Fisher の α -試験法に歸着させようと試みました。之を § 12 に述べます。

§ 13 は之に對する實例です。§ 14 は第 I 報の補遺とでも云つたらよいもので、ベクトル量の偏相關係数の公式を述べました。§ 13 の實例の計算中に氣附いたので、その次の節に書いた次第です。

時局柄、氣象界には資料の公表の出来ないものが多いことと、公表差支へないものでも、資料を處理する時間が不足なことの爲、數値例を此處に豊富に挙げ得ないのを残念に思ひます。

尙ほ記述の便宜上、文献及び各小節の番號は第 I 報と續けて置きます。

§ 11. 加算性相關係数の初等的意味 ¹⁶⁾

§ 7 で述べた様に加算性相關係数 (A.C.C.) r_M は、問題になるビベクトル系に特異でない線型變換を施しても値は變りません。従つて O.N.C. 系 (直交規律デカルト座標系) の成分の點から見て一番簡單と思はれる規準形の相關テンソルに就いて考へます。

O.N.C. 系でのビベクトル u_i の α -成分を $u_{i\alpha}$ と書くことにしますと、全規準化の條件から

$$(11.1) \quad \sum_{i=1}^N u_{i\alpha} u_{i\beta}^* = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n).$$

すると $[u_1, u_2]$ の O.N.C. 系での行列表現は

$$(11.2) \quad ([u_{1\alpha} u_{2\beta}]),$$

之は (11.1) の条件から

$$(11.3) \quad (r_P(u_{1\alpha}; u_{2\beta}))$$

と書き表せます。此處に r_P は Pearson の相関係数の式を複素数へ拡張したもので、次式で定義されるものです；

$$(11.4) \quad r_P(u_{1\alpha}; u_{2\beta}) = \frac{\sum u_{1\alpha} u_{2\beta}^*}{\sqrt{\sum u_{1\alpha} u_{1\alpha}^*} \sqrt{\sum u_{2\beta} u_{2\beta}^*}}.$$

この式を見ると r_P 夫自身は一般に複素量で §3 の要請 1° を満足しないことが分ります。我々の複素量の A.C.C. は $r_P(u_{1\alpha}; u_{2\beta}) r_P^*(u_{1\alpha}; u_{2\beta})$ に相当しますから、明かに實数です。第 I 報で Pearson の公式を其儘形式的に拡張しなかつた一つの理由は此處にあります。

元へ戻りませう。(11.3) の式を (7.6) に代入しますと、

$$(11.5) \quad (r_P(u_{1\alpha}; u_{2\beta})) (r_P(u_{1\alpha}; u_{2\beta}))^\dagger,$$

従つてこの行列の跡の n 分の 1 は

$$(11.6) \quad r_M(u_1; u_2) = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n r_P(u_{1\alpha}; u_{2\beta}) r_P^\dagger(u_{1\alpha}; u_{2\beta}).$$

以下説明の便宜上實ベクトルだけを考へます。すると上式は

$$= \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n r_P^2(u_{1\alpha}; u_{2\beta}).$$

ところが $\{u_{1\alpha}\}$ と $\{u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2n}\}$ との重相関係数を $R_P(u_{1\alpha}; u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2n})$ としますと、

$$(11.7) \quad R_P^2(u_{1\alpha}; u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2n}) = \sum_{\beta=1}^n r_P^2(u_{1\alpha}; u_{2\beta})$$

ですから、結局

$$(11.8) \quad r_M(u_1; u_2) = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n R_P^2(u_{1\alpha}; u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2n}).$$

一度重相関係数の形にしてしまへば、 u_2 の各成分が線型獨立でさへあれば、これ等の諸成分が (11.1) の直交規準化の条件を満たす必要はなく、又 u_1 の各成分は直交化されて居ることだけが必要で規準化されて居る必要はありません。従つて $r_M(u_1; u_2)$ の意味は——不變論に關する事項は除いて——(11.8) 式から推量出來ると云へませう。即ち

『 u_1 の直交軸に關する成分が御互ひに獨立なら、この各々の獨立成分と u_2 全成分との重相関係数を夫々求め、この自乗の算術平均を作れば、之は兩ベクトル系の加算性相関係數に等しい』のであります。此處に u_1 の直交成分と云つたのは、直交デカルト座標系での成分の意味で、之が獨立と云ふことは、相異なる成分についてはそのいづれの二つをとつても相関係數が零であると云ふ意味です。

(11.8) 式を r_M の算出に利用することは、一般に面倒で問題にならないと思ひますが、 $r_M=1$ とか $r_M=0$ とかの意味を説明するには便利でせう。 u_1 の直交成分が獨立でなければいけないことと、重相関係數の自乗の平均値を採る理由は、§3 の要請 7° に依るもので、之は普通の Fourier 係數論を利用して説明出來ます。¹⁷⁾ 尚ほ r_M の幾何學的説明は、規準形回歸テンソルを利用して出來ま

すが、餘り初等的とは思はれません.¹⁴⁾

§ 12. 加算性相関係数の z -試験法¹⁶⁾

前小節の結果から、A.C.C. の計算値が有意義か否かの試験法として Fisher の z -試験法が利用出来そうに思はれます。即ち回帰テンゾルを用ゐて計算したビベクトルの分散と、この計算したビベクトルと實測との差のビベクトルの分散との比を作り、之と正規分布をする母集団から全く勝手に二つ取り出した見本に於ける分散の比と比較して有意義かどうかを判定するわけです。

先づ我々の場合、回帰テンゾルを用ゐた近似ビベクトルは (6.5) から

$$\mathbf{h}(t) = \sum \mathbb{G}_k \cdot \mathbf{v}_k \quad \text{但し} \quad \mathbb{G}_k = [\mathbf{g}\mathbf{v}_k],$$

この分散テンゾルは

$$\begin{aligned} (12.2) \quad \frac{1}{N} [\mathbf{h}\mathbf{h}] &= \frac{1}{N} \sum [\mathbf{g}\mathbf{v}_k] \cdot [\mathbf{v}_k\mathbf{g}] \\ &= \frac{1}{N} \mathfrak{M}(\mathbf{g}; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m) \cdot [\mathbf{g}\mathbf{g}]. \end{aligned}$$

この分散を、この縮約したもので表す事にしますと、^{6, 9)} この分散の式に對する自由度は、O.N.C. 系での成分を數へれば明かな通り

$$(12.3) \quad \nu_1 = n(2mn - 1)$$

となります。

之に對し殘差は (7.18) 式の $\mathbf{r}$ ですから、この分散テンゾルは

$$\begin{aligned} (12.4) \quad \frac{1}{N} [\mathbf{r}\mathbf{r}] &= \frac{1}{N} \{[\mathbf{g}\mathbf{g}] - \sum [\mathbf{g}\mathbf{v}_k] \cdot [\mathbf{v}_k\mathbf{g}]\} \\ &= \frac{1}{N} \{\mathfrak{E} - \mathfrak{M}(\mathbf{g}; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)\} \cdot [\mathbf{g}\mathbf{g}]. \end{aligned}$$

従つてこの縮約したものの自由度は

$$(12.5) \quad \nu_2 = n(N - 2mn)$$

です。若し實ベクトルならば、自由度は少し變り

$$(12.6) \quad \nu_1 = n(mn - 1), \quad \nu_2 = n(N - mn).$$

之から Fisher の z の式は

$$(12.7) \quad z = \frac{1}{2} \log e^{\frac{\nu_2}{\nu_1}} \cdot \frac{\text{Sp. } \mathfrak{M} \cdot [\mathbf{g}\mathbf{g}]}{\text{Sp. } (\mathfrak{E} - \mathfrak{M}) \cdot [\mathbf{g}\mathbf{g}]}$$

となります。

一度重相関テンゾルの形にすれば、 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ が全直交規準系であるとの條件は不要で、之等が線型全獨立でさへあれば (12.7) 式を用ひてよいことになります。尙ほ、實際問題では $[\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}]$, $[\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}]$ を計算して (12.7) 式を利用する方が簡単です。

この試験法では分散の目安として分散テンゾルを縮約したもの、即ち分散テンゾルに對應する行列の跡を利用しましたから、 z -試験法で有意義と判定された場合は差支へありませんが、有意義でないと判定された場合、本當にそうかどうか疑問がある様に思ひます。夫は分散テンゾルを縮約したものは、各ビベクトルの絶対値だけの函数で、その空間分布状態のことは全く考慮しないからで

す。この缺點は分散テンソルの行列式を利用すれば幾分よくなるかも知れませんが、若しそうすると線型亞關聯の場合は必ず有意義と判定されます。この點更に研究を要する様に思ひます。

§13. 氣壓傾度から風を推算する實例

同一地點に於ける氣壓傾度 G と風 W との間には密接な關係があり、風速から氣壓傾度を推定したり、逆に氣壓傾度から風速を推定したりされて居ます。前者は例へば暴風警報を發する場合、後者は推算等壓線から上層流を推定する場合です。

此處には氣壓傾度から風を推算した例を挙げたいと思ひます、單位及び測定場所は省略し、實測數値を第4表に掲げて置きます。之から先づ §6 で定義した結合テンソル ϵ を計算します。此際 G の直交成分を求めなくても、一組の氣壓差を G の成分と見て計算してよいのです。 ϵ の行列は

$$(13.1) \quad \begin{pmatrix} -3.09 & -3.40 \\ 4.92 & 1.41 \end{pmatrix}$$

となります。計算の様式は第I報の終りに述べたものと全く同様ですが、たゞこの場合は偏差を用ゐる必要はありません。

一度 ϵ を統計的に定めた上は、この ϵ を用ゐて、實測した氣壓傾度 G から W の推算を行います。例へば第4表を再び利用して $i=1$ の場合を探りますと

$$(13.2) \quad \begin{pmatrix} -3.09 & -3.40 \\ 4.92 & 1.41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.1 \\ -28.1 \end{pmatrix}.$$

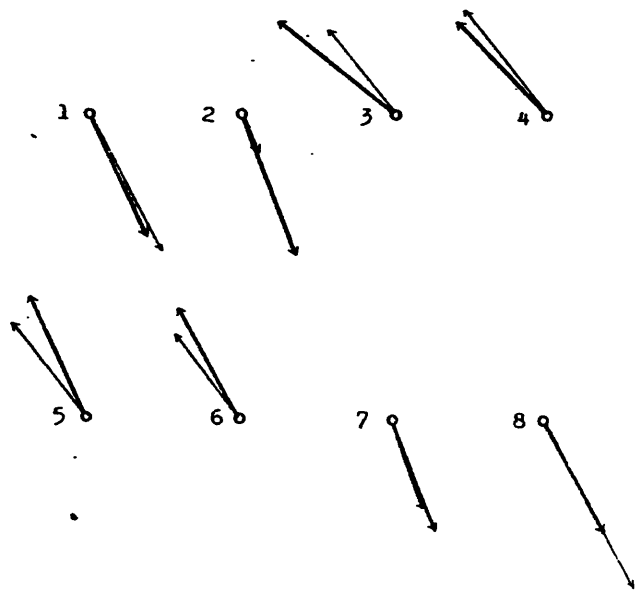
實測値は (-28) ですから可成り良く一致します。第4表の括弧内の數値が (13.2) と同様にして推算した値です。

實測値と計算値との比較を第1圖に示しました。太い方が實測した風です。

第4表

i	$G_1 \ G_2$	W_1	W_2
1	-6 1	12(15.1)	-24(-28.1)
2	-2 1	11(2.8)	-28(- 8.4)
3	3 -1	-23(-12.7)	18(16.2)
4	4 1	-18(-15.8)	18(21.1)
5	3 2	-12(-16.1)	23(17.6)
6	3 1	-14(-12.7)	22(16.2)
7	-4. 2	9(5.6)	-22(-16.9)
8	-7 1	12(18.2)	-22(-33.0)

第1圖



(13.2) の計算は乗算表と算盤を利用してもよく、又高い精度を要求しないなら、Massauの圖計算法を夫々二成分に對し利用しても良いと思ひます。之は勿論基線を直交させ原點を適當な位置に選び、結果が直ち

に圖上で合成出来る様にした方が直観的でよいでせう。この外 $\vec{v}$ の性質次第で適當な座標系を選擇して計算を簡単にすることも出来ます。

現在の風速風向の定量豫報位の精度でよいならば、各方向の單位氣壓傾度に対して、豫め風向風速を算出し、之を圖又は表にしておけば、夫々の方向に應じて定つた一定角の回轉と、方向毎に定まつた一定倍率の乗算で結果が得られ、前者は表又は圖から直ちに読み取れますから、後者の乗算を一度やれば結果が分ることに成ります。

この各方向毎に定まつた一定角の廻轉、一定倍率の乗算と云ふ操作は、この例では $\vec{v}$ の固有値が

$$(13.3) \quad \lambda_{\pm} = 3.46 (\cos 104^{\circ} \pm i \sin 104^{\circ})$$

で、共軛複素量となつて居るからです。即ち $\vec{v}$ は橢圓回轉で表現されるわけです。

λ に対する固有ビベクトルは

$$(13.4) \quad \begin{pmatrix} 1.00 \\ -1.16 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.99 \end{pmatrix}$$

に或る數を乗けたものになり、従つて $\vec{v}$ は (13.4) の實部及び虚部を夫々共軛軸とする橢圓で表されます。

この橢圓の離心率を求めて見ますと 0.95 位に成り、可成り扁平な橢圓であることがわかります。このことは風向を知つて等壓線の走向を推定する場合注意しなければいけない點です。それは若し離心率が極めて小さい (理想的には零) 場合に限つて、 G と W とのなす角が一定となる筈だからです。離心率の大きい場合には廣い意味での一定角 ($\theta = 104^{\circ}$) しか存在しません。¹⁵⁾ 従來は等壓線を引く場合 θ 一定角が存在するとして居りました。

この場合 G, W の A.C.C. を求めて見ますと

$$(3.15) \quad r_M(G; W) = 0.518$$

となります。この値が有意義かどうかを前小節に述べた方法で計算して見ますと、

$$(3.16) \quad z = 2.11$$

となります。 z -分布の表から $\nu_1 = 2, \nu_2 = 12$ に対する z を求めますと、0.1% の點で $z = 1.28$ です。従つてこの場合は有意義と判定してよいと思ひます。

この實例では G だけから W を推算しました。 G 及び氣温傾度 ∇T から W を推算すれば、もつとよい結果が得られそうです。實際計算して見ますと、期待する程よくはなりません。之は G と ∇T とが我々の意味で相關が大きい爲と思はれます。すると ∇T の影響を除いた場合の W と G との相關程度を知ることが問題になります。即ちベクトル量の偏相關の問題が起ります。

§14. 偏相關係數

一般にビベクトルの偏相關係數を定義するやり方は、スカラーの場合と同様ですが、この場合も A.C.C. の場合と同じくスカラーの場合の偏相關係數の自乗に相當するものを作る方が實用上便利です。方針が定まれば、陽な形を改めて求める必要はないと思はれますが、スカラーの場合の公式と似た式を導くには少し技巧を要しますので、一番簡単な例について之を示して置ませう。

$x_1(t), x_2(t)$ が共に $x_3(t)$ と相關關係のある場合

$$(14.1) \quad \mathbf{p}_i(t) = \mathbf{z}_i(t) - \mathfrak{Z}_B \cdot \mathbf{z}_3(t), \quad (i=1, 2)$$

と置き、未定テンソル $\mathfrak{Z}_B$ を §6 に述べたと同様に最小自乗法で定めますと、 $\{\mathbf{z}_3(t)\}$ の分散テンソルは特異でないとして

$$(14.2) \quad \mathbf{p}_i(t) = \mathbf{z}_i(t) - [\mathbf{z}_i \mathbf{z}_3] \cdot [\mathbf{z}_3 \mathbf{z}_3]^{-1} \cdot \mathbf{z}_3(t).$$

$\mathbf{p}_1(t)$ と $\mathbf{p}_2(t)$ との A.C.C. を求める $\{\mathbf{z}_1(t)\}, \{\mathbf{z}_2(t)\}$ 間の $\{\mathbf{z}_3(t)\}$ の線型寄與を除いた 加算性偏相関係数と呼びたいと思ひます。之を $r_{M12.3}$ で表します。

$$(14.3) \quad [\mathbf{p}_i \mathbf{p}_k] = [\mathbf{z}_i \mathbf{z}_k] - [\mathbf{z}_i \mathbf{z}_3] \cdot [\mathbf{z}_3 \mathbf{z}_3]^{-1} \cdot [\mathbf{z}_3 \mathbf{z}_k], \quad (i, k=1, 2)$$

ですから、今 $\{\mathbf{z}_i(t)\}$ の分散テンソルも特異でないとして

$$(14.4) \quad [\mathbf{z}_i \mathbf{z}_i]^{-1} = \mathfrak{E}_i^2, \quad (i=1, 2, 3)$$

なるエルミート正定値形に對應するテンソル $\mathfrak{E}_i$ を利用すると、(14.3) は次の如く書き表せます；

$$(14.5) \quad [\mathbf{p}_i \mathbf{p}_k] = \mathfrak{E}_i^{-1} \cdot (\mathbf{r}_{ik} - \mathbf{r}_{i3} \cdot \mathbf{r}_{3k}) \cdot \mathfrak{E}_k^{-1}, \quad \text{但し } \mathbf{r}_{ik} = \mathfrak{E}_i \cdot [\mathbf{z}_i \mathbf{z}_k] \cdot \mathfrak{E}_k.$$

従つて

$$(14.6) \quad \Re(\mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2) = \mathfrak{E}_1^{-1} \cdot (\mathbf{r}_{12} - \mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{r}_{32}) \cdot (\mathfrak{E} - \mathbf{r}_{23} \cdot \mathbf{r}_{32})^{-1} \cdot (\mathbf{r}_{21} - \mathbf{r}_{23} \cdot \mathbf{r}_{31}) \cdot (\mathfrak{E} - \mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{r}_{31})^{-1} \mathfrak{E}_1,$$

故に

$$(14.7) \quad r_{M12.3} = \frac{1}{n} \text{Sp.} (\mathbf{r}_{12} - \mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{r}_{32}) \cdot (\mathfrak{E} - \mathbf{r}_{23} \cdot \mathbf{r}_{32})^{-1} \cdot (\mathbf{r}_{21} - \mathbf{r}_{23} \cdot \mathbf{r}_{31}) \cdot (\mathfrak{E} - \mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{r}_{31})^{-1}$$

となります。此處に (14.6) 式を導くには $\mathbf{p}_i (i=1, 2)$ の分散テンソルが零でないこと、即ち §7 の定義に従へば、 $\{\mathbf{z}_1\}$ と $\{\mathbf{z}_3\}$ 及び $\{\mathbf{z}_2\}$ と $\{\mathbf{z}_3\}$ が夫々線型亞關聯でないことが必要です。

§15. 結 語

この第II報では、第I報で導いた加算性相関係数 r_M を實際に應用した場合得られた數値の意義を判定する一つの方法を中心に、この r_M の性質の初等的解説に役立つと思はれる式、又偏相関係数を綺麗な形に表す一つの技巧を述べ、應用を試み成功したと思はれる一例を附加へました。實用上の立場からまだ残された問題が少くありません。例へば第I, II報を通じて殆んど分散テンソルの特異でない場合ばかり取扱つて來ましたが、實際には特異に近い（分散テンソルの行列式が殆んど零）場合が起り得ると思ひます。この様な場合、結論を誤まらない様にするにはどう處理したらよいかと云ふ問題は一つだと思ひます。機會を見てこの種の問題を更に調べたいと思ひます。

最後にこの研究に手をそめてから今日迄の遅々とした歩みに對し、絶えず御激勵と御鞭撻とを賜つた恩師藤原咲平博士並に本誌への發表を熱心に勧められ驗討の機會を與へられた北川敏男博士に厚く御禮申上げたいと存じます。

文 献 表 (II):

- 16) Masuyama, M.: On the Significance Test of the Additive Correlation Coefficient. Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 23 (1941), 1016.
- 17) 増山元三郎：夏期箱内蒸發量と死亡傾向(補遺)，科學，8(1938)，309；餘效の評價法とその應用，日本溫泉氣候會誌，4(1938)，128.

註 本文で云ひ足りなかつたこと及び手許にあつて利用した單行本の名前を擧げて置きます。* 印は所謂上海版の存在する書物です。

§ 1. 相關測度に関する文獻目録の比較的豊富にあるところは、

- 1)* Rietz, H. L.: Handbook of mathematical statistics, 1924.
- 2) Weida, F. M.: On the various conceptions of correlation, Annals of Math. 29 (1927/28), 276.
- 3) Mitropolsky, A. K.: Theory of moments, 1933, 214-219, (russ.).
- 4) Yule, G. U. & Kendall, M. G.: An introduction to the theory of statistics, 1937, 509-514.
- 5) Tschuprow, A. A.: Principles of the mathematical theory of correlation, 1939, 183-194.

地形に依る流れの場の歪みの状態をテンソルの場として見ることは、次の様な例で之を示すことが出来ます。即ち原点に半徑 a の障壁物の在る場合の複素ポテンシャルは、 X 軸に沿ふて十分遠方で U_∞ と云ふ流れ、を興へた場合にはよく知られて居る通り

$$w = U_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

で表せます。之は正に地形だけで定まる作用素 $\left(z + \frac{a^2}{z} \right)$ を U_∞ (圓形障壁物の無い場合に各點で期待される流れ!) に作用されたものと見做せます。併しこの式では十分遠方での流れの方向が X 軸に平行でない時困ります。

夫で二次元でベクトル u_∞ に對する作用素として、ベクトルの一次函数 $\mathcal{E}$ を作用させることに翻譯します。すると極座標 (r, θ) をパラメーターとして、 $O.N.C.$ 系での $\mathcal{E}$ の行列表現は

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \mathcal{E} - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} & r \geq a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

となります。 $\mathcal{E}$ は測元零の量です。之を用ゐると、極座標が (r, θ) で表される一點 P での流れは

$$u_P = \mathcal{E} \cdot u_\infty$$

で表せます。この様にすれば、 u_∞ が X 軸に平行と云ふ制限は全く不要と成ります。

この $\mathcal{E}$ は當然豫期される通り、Laplace の微分方程式を満足して居ます。 $\mathcal{E}$ の固有値は正又は零の實數で、長軸が動徑方向にある橢圓が、この圖式表現となります。離心率は

$$\frac{2\left(\frac{a}{r}\right)^2}{1+\left(\frac{a}{r}\right)^2}$$

で、原点から遠去るに従ひ小さくなります。

此處で $\mathcal{E}$ が流れの場に附隨して豫め—— u_∞ の如何に係らず——定まつて居ることは、實用上興味のあることです。若しこの程度の近似が實際役立つなら、本文中に述べた結合テンソルを統計的に定める公式に依つて、 $\mathcal{E}$ を統計的に定めることが出来るからです。殊に氣象界では、地上の總ての點で $\mathcal{E}$ を定める必要はなく、特定の地點に對してだけ定めることが出来ればよいので一層簡単です。

この場合、この圓形障壁物の場の任意の二點 P, Q に對し、

$$u(P) = \mathcal{E}(P, \infty) \cdot u_\infty, \quad u(Q) = \mathcal{E}(Q, \infty) \cdot u_\infty$$

と書けば、 $\mathcal{E}(P, \infty)$ が特異でさへなければ、

$$u(Q) = \mathcal{E}(Q, \infty) \cdot \mathcal{E}(\infty, P) \quad u(P) = \mathcal{E}(Q, P) \cdot u(P), \quad \text{但し } \mathcal{E}(\infty, P) = \mathcal{E}^{-1}(P, \infty).$$

即ちこの様な任意の二點に就いて結合テンソルが考へられるので、無限の遠方での流れ u_∞ に對してでなくこの場の或る點 P での流れ $u(P)$ に對して結合テンソルの場を統計的に定めることが出来るわけです。

このことは具體的な例で申しますと、平時 P, Q 二點での風の觀測資料が入手出来るとき、 $\mathcal{E}(Q, P)$ を計算して置けば、非常時になつて Q 點の資料が入手出来なくなつても、 P 點での觀測値から Q 點での風を推算することが出来ることになります。この様なテンソルの場は、圓形障壁物の場合ばかりでなく、他の地形に對しても、亦三次元の場合でも考へられますので、この重要性を指摘したため、少し長い説明を附け加へました。

無意義な角の得られる一例を申しますと、現在氣象界で平均風向を定める爲用ゐられて居る Lambert の方法が夫です。之は云はば一定の方向（例へば北方）と風とのなす角の平均を求める問題と云へませう。彼は風のベクトルの平均と一定方向とのなす角を平均角としましたが、之は尤もらしい様で實はそうではありません。夫は彼の方法では、有意義な平均角の存在するための十分条件の方を殆んど全く考へて居ないからです。彼に依れば風のベクトル和が零でさへなければ、どんな吹き方の場合でも必ず一つの平均角が定まりますが、實際家が平均角を求める根底には之が何かの推量に役立つことを豫期して居るにも係らず、彼の方法では推測に役立つものが得られる虞れが多分にあるからです。私は問題の二方向を表すベクトル間の結合テンソルの固有値が共軛複素量でなければならぬことから、この問題に手をそめました。¹⁴⁾ 之に對して私のは餘り條件が強すぎると云ふ非難がありますが、究極の問題は角そのものを求めることにあるのではなくこの角を利用してなるべく精密な推測を行ふことにあると信じますので、條件を緩くすることに賛成出来ません。

風の週期性を統計的に調べる問題は、少し一般化して云へば、時系列 $\{u(t)\}$ に對して、假定した或る p に對し

$$u(t+p) = \epsilon \cdot u(t), \quad p \text{ は週期に相當するパラメーター}$$

が成立する確率を定める問題で、實用的には風の日變化を統計的に調べる問題と結びついて居ます。之の研究は加算性相關係数の加算性が役立つであらうと思ひます。研究の大體の方針は、スカラーの場合の Wold の研究と並行してやつて行けると豫想されます。

6) Wold, H.: A study in the analysis of stationary time series, 1938.

§2. ベクトル記號は大體 Gibbs に依りました。

7)* Gibbs, J. W. & Wilson, E. B.: Vector analysis, 1929.

多次元ベクトルに就いては

8) Shirokow, P. A.: Tensor calculus, Part I, Tensor algebra, 1934. (russ).

ベクトルの一次變換のことは、7), 8) の外に

9) Budde, E.: Tensoren und Dyaden, 1914.

10) Schouten, J. A.: Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis, 1914. (著者はオランダ人ですからスハウツンとでも云ふべきでせう)

11) Spielrein, J.: Vektorrechnung, 1926. (著者はロシア人ですから、スピールレインと讀むべきでせう。原文は東大圖書館にあります)

12) Lagally, M.: Vektorrechnung, 1928.

13) Burali-Forti, C. Marcolongo, R.: Analisi vettoriale generale, Vol. I Trasformazioni lineari, 1929.

14)* McConnell, A. J.: Applications of the absolute differential calculus, 1931. (臺北市大松村教授の絶対微分學概要、九州帝大伊藤教授の應用テンソル解析は何れもこの書物の一部を譯したものと云つてよい位です。實際家がテンソルに慣れるにはこの原著が一番よいと思ひます)

15)* Wills, A. P.: Vector analysis with an introduction to tensor analysis, 1931.

16) Lohr, E.: Vektor- und Dyadenrechnung, 1939.

等を参照しました、この外、後述の四元數論や一次變換群、行列の書物も利用しました。

複素ベクトルのことは 7), 8), 16) 及び次の書物に書いてあります。

17) Schwann, W.: Elementare Geometrie, Bd. I. 1929.

§3. 電氣回路の統計的解析に役立つであらうと云ふことは、例へば次の二書を御覧になれば明かと思ひます。私は Pipes の四端子回路網の論文を見てそう想像しました。

18) 早田保實: 電氣回路理論に於けるマトリクスの應用, 昭和15年, コロナ社。

19)* Kron, G.: Tensor analysis of networks, 1939.

7° の要請の重要性は、相関係数を Bowley, Yule 或ひは Whittaker & Robinson の教科書にある様な等標準偏差を假定して比率で云ひ表はす流儀⁹⁾が餘り有名な爲か、私の調べた範囲では誰も注意して居ない様です。Parseval の式が重要だと云ふことは、一般の Fourier 係数と相関係数との関係を始めて述べた次の書物から暗示されました。

- 20) 小倉金之助: 数理統計, 改造社版 經濟學全集 第35卷 234頁, 昭和5年.
そしてそのことを文献表の 17) に挙げた拙稿の中で初めて述べました。

§5. 分散テンソルの行列式が零と云ふことから、線型式を導くことは少し天下りのですが一般化する場合便利な方法と思ひます。之は (4.1) の表現式を求めて居る最中に不圖氣附いたことなので、天下りのなのは止むを得ません。

行列の理論は次の書物を主として参照しました。28) は實際家の計算に甚だ有益な本と思はれます。

- 21) 藤原松三郎: 行列及び行列式, 岩波全書, 昭和9年.
22) 藤原松三郎: 代數學, 第二卷.
23)* Bôcher, M.: Introduction to higher algebra, 1921.
24) Turnbull, H. W.: The theory of determinants, matrices and invariants, 1929.
25)* Schreier, C. und Sperner, E.: Einführung in die analytische Geometrie und Algebra, Bd. I, 1931; Bd. II, 1935.
26) Schreier, O.: Vorlesungen über Matrizen, 1932.
27) Wedderburn, J. H. M.: Lectures on matrices, 1934.
28)* Frazer, R. A., Duncan, W. J. & Collar, A. R.: Elementary matrices, 1935.

二次形式論に就いては 8), 21), 22), 23) の外、次書を参照しました。

- 29) Dickson-Bodewig: Höhere Algebra, 1929. (=Modern algebraic theories).

根號に相當するテンソルの存在は次の Neumann の書物から暗示を受けましたが、調べて見ると四元數論の中に既にベクトルの一次函數の平方根として論じてあります。又 8) の 432 頁にも大略述べてあります。陽な行列表現を求めるには、27) 31 頁及び 118 頁以降が役立ちませう。等しい固有根のない場合なら 28) 81 頁にも述べてあります。

- 30) Neumann, J. von: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, 1932, 97.
31) Hamilton, W. R.: Elements of quaternions, Vol. II, 1901, 225.
32) Joly, Ch. J.: A manual of quaternions, 1905, 99.
33) Hilton, H.: Homogeneous linear substitutions, 1914, 116.

結局成分に還元しないでベクトルの儘で證明出來ましたが、最初 O.N.S. 系の成分で回歸テンソルの陽な形を決めた時は、次の不等式の書物を参考にしました。

- 34) Hardy, G. H., Littlewood, J. E. & Pólya, G.: Inequalities, 1934.

§7. 不變量として何を撰んだらよいかと云ふ點に就いては 10), 11), 13) 及び次の書物を参照しました。

- 35) Weitzenböck, R.: Invariantentheorie, 1923.

射影演算子のことは 30) に倣ひました。

§8. 變換の幾何學的考察は、四元數論の書物の中にありますが、手近なところでは、7), 9), 12), 14), 15), 16) 等にも記載してあります。

§12. z -分布の理論は、次の單行本 36) にあります。その使ひ方や表は 4) 及び 37) にあります。

- 36) Jeffreys, H.: Theory of probability, 1939, 93, 120.
37)* Fisher, R.: Statistical methods for research workers, 1936.

§15. 分散テンソルが特異に近い場合の研究には、スカラーの場合の次の書物が参考になると思ひます。

- 38) Frisch, R.: Statistical confluence analysis, 1934.