# 輸送減少の統計理論

押田, 勇雄
名古屋帝國大學理工學部



出版情報：統計数理研究. 1 (2), pp.78-90, 1942-03-15. Research Association of Statistical Sciences

# 原　　著

# 輸送現象の統計理論

押　田　勇　雄（名古屋帝大理工學部）

（昭和十六年九月九日受理）

## §1. 序　說

輸送現象 (transport phenomena) とは，擴散・粘性・熱傳導・電氣傳導等の總稱であつて，斯く呼ばれる所以は，此等が夫々質量・運動量・エネルギー・電荷等の場所から場所への輸送によつて起されるからである．輸送される量は或る場合には亂れ (turbulence) の統計理論[1],[2]に於けるやうに渦度 (vorticity) であり，又或る場合には光の散亂の理論に於けるやうに光量子 (light quanta) であつてもかまはない．

以下に取扱ふ對象は主として氣體，それも稀薄な氣體に限ることにするが，併し，その取扱方は大した本質的な變更を加へることなしに他の場合に適用せしめ得る場合も又少くはないと考へられる．例へば，固體の熱傳導を論じる場合に，初め Debye[3],[4]がやつたやうに，氣體に於ける飛びまはる分子の代りに，固體の中で，矢張り一種の平均自由行路[5]を以て飛びまはつてゐる彈性波の量子を考へれば，この兩者は甚だ類似した相貌を帶びて來るのである．

此の現象に關する昔からの多くの研究は，大きく分けると次の二つになる．その一つは巨視的乃至現象論的方法で，就中下に述べる Fokker-Planck の微分方程式についての解析的な研究――たとへば有名な Carslaw[6]の熱傳導の數理的研究――がその主流をなすものである．その文獻の夥しいことは申すまでもないが，たゞ惜むらくは，晉に數學的華麗さを有する部分のみに力が集中されたかの觀があることである．しからざる部分には最早開拓すべき部分が少いとは云へないやうである．

今一つの方法は微視的乃至分子論的方法で，Maxwell や Boltzmann 以來矢張り前者に劣らぬ多くの研究がある[7]．前者のやうな數學的華麗さがなく，得て繁雜になり易いが，併し前の方法では企圖し得ない部分までも論じうる便がある．この文の意とするところは，主としてこの兩者の關係及適用限界についての反省である．

## §2. Fokker-Planck の微分方程式

輸送現象の巨視的理論の基礎をなす Fokker-Planck の微分方程式 (以後 F.P. 方程式と略稱する) とは如何なるものであるかを次に述べる．

先づ簡單の爲に一次元的擴散を考へやう．時刻 $t$ に於て一つの粒子が座標 $x$ と $x+dx$ の間にある確率を $w(x,t)\,dx$ とする．また，時刻 $t$ に於て確實に座標 $\xi$ にあつた粒子が，時刻 $t+\tau$ に於て $x$ と $x+dx$ の間にある確率を $f(x-\xi,\tau)\,dx$ とする．$f$ は即ち遷移確率を表はす．以後簡單のために $f$ は $t$ によらず，$\tau$ と $x-\xi$ のみの函數であるとする．然らば明かに

(1) $$w(x, t+\tau) = \int_{+\infty}^{-\infty} w(\xi, t) f(x-\xi, \tau) d\xi$$

(2) $$\int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) dx = 1$$

(3) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi, \tau) dx = 1$$

今遷移確率 $f$ の $n$ 次のモーメント

$$A_n(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\xi)^n f(x-\xi, \tau)\, d(x-\xi)$$

について，$A_1$ と $A_2$ は $\tau\to 0$ のとき $\tau$ と同じオーダーで零に收斂し，$A_3$ 以上は之よりも高いオーダーで零に收斂すると假定する．そして又 $\tau$ が小なる時 $f$ は $|x-\xi|$ の小さな値に對してのみ考慮に上る程度の大さを有するとする．そのとき (1) の右邊の被積分函數に於て $w(\xi, t)$ $\xi$ が $x$ に近いときの値だけが重要であつて，その他の場所では $f$ が殆ど零であるから $w(\xi, t)$ の正確な値は必要でない．即ち吾々の $w(\xi, t)$ は $\xi$ が $x$ に近いところの値でのみ正しく表されて居ればよい よつて之を $\xi=x$ の近傍で展開し

$$\begin{aligned} w(\xi, t) f(x-\xi, \tau) &= w(x-x-\xi, t) f(x-\xi, \tau) \\ &= w(x, t) f(x-\xi, \tau) - (x-\xi) \frac{\partial}{\partial x} \{w(x, t) f(x-\xi, \tau)\} \\ &\quad + \frac{(x-\xi)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{w(x, t) f(x-\xi, \tau)\} + \cdots\cdots \end{aligned}$$

之を (1) に代入し，且つ $\tau$ が小なりとして左邊を $\tau$ について展開すると (3) を參照して

$$\begin{aligned} w(x, t) + \tau \frac{\partial w}{\partial t} &+ \cdots\cdots \\ &= w(x, t) - \int_{-\infty}^{\infty} (x-\xi) \frac{\partial}{\partial x} \{w(x, t) f(x-\xi, \tau)\} d\xi \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\xi)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{w(x, t) f(x-\xi, \tau)\} d\xi + \cdots\cdots \end{aligned}$$

$\tau$ の二次の項以上を省略し，且つ微分と積分の順序を交換すれば

$$\tau \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \{w(x, t)\, A_1(\tau)\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{w(x, t)\, A(\tau)\}\,.$$

外からこの粒子に働く力を二つに分けて，比較的ゆつくり變るコントロール出來る作用と，極めて速かに變動するコントロール出來ない統計的な力――たとへば媒質分子の熱運動からうける衝突の力――とする．今後者のみがあれば，それによる平均變位は左右いづれの方向にも對稱的と考へられるから $A_1$ は零で上式は

(4) $$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,.$$

但し

(5) $$D = \frac{A_2(\tau)}{2\tau} = \frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\xi)^2 f(x-\xi, \tau)\, d\xi$$

なる關係が存在する．

お互に作用を及ぼし合はない，質量が何れも $m$ であるやうな $n$ 個の粒子を考へると，$C = wmn$

は濃度 (單位長さ當りの質量) を與へることになる．それで (4) を $mn$ 倍すれば擴散の基礎方程式

(6) $$\frac{\partial c}{\partial t}=D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

が得られる！ $D$ は擴散係數 (coefficient of diffusion) を表はすこともこれで知られる．

又若し外から作用がある，たとへば $+x$ の方向に $F$ なる力が働くといふやうなことがあれば，$f$ は $x-\xi$ について對稱でなくなるから，(4) の代りに

(7) $$\frac{\partial w}{\partial t}D=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-B\frac{\partial}{\partial x}(Fw)$$

(8) $$B=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\xi)fd\xi$$

が得られる．$B$ は易動度 (mobility) と呼ばれてゐる．

上の手續きは容易に二次元乃至三次元へ擴張出來る．三次元の場合には (6) 及び (7) に對應して夫々

(9) $$\frac{\partial c}{\partial t}=D\nabla^2 c$$

(10) $$\frac{\partial c}{\partial t}=D\nabla^2 c-B\,div\,(\mathbf{F}.c)$$

が得られることになる．$\mathbf{F}$ は力のベクトルである．(10) 型の式を F.P. 方程式と稱し又は Chapman-Smoluchowski の方程式とも云ひ，凡そ輸送現象を解析的に處理しやうとする場合，必ずと云つていゝ程常に基礎に取られる式である．熱傳導の式や擴散の式は之の特別な場合として含まれてゐる．斯樣に重要な式であるから極めて多くの人々，例へば Fokker[8][9], Planck[10], Smoluchowski[11], Einstein[12], Fürth[13], Burger[14], Zernike[15], Kormogoroff[16], Ornstein[17], Uhlenbeck[18], Peierls[19], Debye[20] 等によつて研究されてゐる．

上は擴散を例として述べたが，粘性の場合には質量 $m$ の代りに運動量 $mu$ ($u$ は特定方向の速度成分) を，熱傳導の場合には $m$ の代りにエネルギー $\frac{1}{2}fkT$ ($f$ は分子の自由度の有効數，$k$ は Boltzmann の常數，$T$ は絕對溫度) を，電氣傳導の場合には $m$ の代りに荷電 $e$ を用ひて夫々論ずることが出來ることは云ふ迄もない[21]．此の樣な次第であるから以後も專ら擴散のみを論ずる．

## §3. F.P. 方程式の缺點

F.P. 方程式は斯樣に重要なるものであるが，一つの大きな缺點を持つてゐる．それは極めて短い時間，或は極めて狹い空間內で起る輸送現象に對しては適用出來ないといふことである，そのことは次のやうにして判る．

三次元，自由 ($\mathbf{F}=0$ といふ意味) の場合の F.P. 方程式

(11) $$\frac{\partial w}{\partial t}=D\nabla^2 w$$

を，$t=0$ で粒子が確實に原點 $r=0$ にゐたといふ初期條件の下に解いて，球對稱的な解を求めるとよく知られたやうに ($r$ は原點からの距離)

(12) $$w(r,t)=\frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{r^2}{4Dt}}$$

となる[22]. 従つて $r^2$ の平均は

$$\overline{r^2} = \int_0^\infty r^2 \times 4\pi r^2 w(r,t)\, dr = 6Dt. \tag{13}$$

之は Einstein の有名な式[23]

$$\overline{x^2} = 2Dt \tag{14}$$

に一致するものである. 何故なら球對稱の性質から

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2},\quad \overline{x^2}+\overline{y^2}+\overline{z^2} = \overline{r^2}$$

であるから $\overline{x^2} = \frac{1}{3}\overline{r^2}$ を得る故である.

(13) 又は (14) は重大な力學的困難を持つて居る. このことは既に多くの人によつて氣が付かれてゐる[24]. 即ち, $t$ が充分小さければ

$$\overline{x^2} = (\text{平均速度の成分}) \times t^2$$

即ち $\overline{x^2}$ は $t^2$ に比例しなければならない.

$\overline{x^2}$ が單に $t$ に比例するといふことは, 如何に短い時間 $t$ を取つても, 其の時間内に極めて大きな不規則な力が作用するために, $t=0$ に於ける狀態から $t=t$ に於ける運動を全く定めることが出來ないとしなければならぬ. 粗く云へば, 絕えず無限大な不規則な力が働いて, 通常の力學的な量の連續性を完全に破壞し去つて居なければならぬ. 數學的には, この力の樣な函數——ある意味で連續ではあるが微分出來ない Weierstraß の函數の樣な——も興味の對照となり得ないものでも無からうが[25], 物理的には甚だ困ることなのである. 今この事柄を假りに Uhlenbeck-Ornstein の迷理と名付けておく. 本稿の目的も一は實にこの U.O. 迷理の解決にある.

勿論, 既に Perrin[26] が注意したやうに, この U.O. の迷理も, 實は巨視的現象論的立場を離れて, 原子的機構に立ち進むなら, 迷理でなくなつてしまふ. Einstein の式を導くには, 實は, それが如何なる方法で導かれたにせよ, またそのことが明記されるか否かに拘らず, 常に, 如何に短い時間々隔を取つても, その間に充分多くの回數の「衝突」が起つてゐることを假定として含んで居る. であるから, 非常に短い——その間には衝突が稀にしか起らないやうな——時間々隔に迄 $t$ を小さくすると, Einstein の式 (14) は無意味になつてしまふ.

だから運動方程式から出發する Brown 運動の研究[27]に於ては, 流石に Einstein の式と異つた, 即ち $t\to 0$ 迄適用し得る結果

$$\overline{x^2} = 2D(t-\tau_0+\tau_0 e^{-t/\tau_0})$$

に達してゐる[28],[29]. 之で見れば明かに $t\to 0$ のときは $\overline{x^2}$ は $t^2$ に比例して, 滿足な結果であることが分る.

## §4. Random Flight の問題と輸送現象の分子運動論

以上の論を今一歩押し進めるために, 所謂 Random Flight の問題[30]~[32]を論じやう. 即ち:

「一つの粒子座標原點 $r=0$ を出發して勝手な方向に直線的に $l_1$ だけ進み, そこから又之とは無關係な勝手な方向に $l_2$ だけ進む. 以下同樣. かくして $n$ の飛翔を終つた後, この粒子が原

點から距離 $r$ と，$r+dr$ の間にゐる確率 $4\pi r^2 w(r,n)$ は如何」

この問題は，この粒子を當該輸送量の運搬者 (carrier) 即ち分子と考へるとき，輸送現象の氣體分子運動論的モデルに對比し得るが故に重要である．我々は先づこれを Rayleigh が Theory of sound に於て示した方法によつて解いてみる．最初簡單のために

$$l_1 = l_2 = \cdots\cdots = l_n = l$$

としやう．今原點をお互に無關係な極めて多く ($N$ 個) のこのやうな粒子が一齊に出發するものとしやう．各々が $n$ 回の飛翔の後に於て座標が $x$ と $x+dx$, $y$ と $y+dy$, $z$ と $z+dz$ の間のあるものの數を

$$Nw(d;x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

とする．さてこの $N$ 個の粒子に各々もう一個づつの長さ $l$ の飛翔を加へる．さうするとその結果 $(x,y,z)$ なる場所に來る粒子は，この新しい飛翔を加へない前には

$$x' = x - l\sin\theta\cos\varphi$$
$$y' = y - l\sin\theta\sin\varphi$$
$$z' = z - l\cos\theta$$

なる位置にゐたことは明かである．こゝに $\theta,\varphi$ はヴェクトル $\overrightarrow{l}$ の方向を示す．さて $(x',y',z')$ にゐた粒子の全部が $(x,y,z)$ にうつるのではなく，全體の

$$\frac{l^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{4\pi l^2} = \frac{1}{4\pi}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

だけが $(x,y,z)$ にうつるのであるから

(15) $$Nw(n+1;x,y,z) = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} NW(n;x',y',z')\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,.$$

$n$ が大きく $l$ が小さいとして

$$\begin{aligned} w(n;x',y',z') = w(n;x,y,z) & \\ -\, l\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial w}{\partial x} & \\ -\, l\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial w}{\partial y} & \\ -\, l\cos\theta\frac{\partial w}{\partial z} & \\ +\frac{1}{2}l^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}l^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & \\ +\frac{1}{2}l^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{2}l^2\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z} & \\ +\frac{1}{2}l^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x} + \cdots\cdots & \end{aligned}$$

$$w(n+1;x,y,z) = w(n;x,y,z) + \frac{\partial w}{\partial n} + \cdots\cdots$$

と置いて (15) に代入し積分を遂行すると第一近似として

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{l^2}{6}\nabla^2 w$$

此の一つの解は

$$w(n,r)=\left(\frac{3}{2\pi nl^2}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}\frac{r^2}{nl^2}}.$$

今粒子の速度が一定値 $v$ であれば，$n$ は出發後の時間 $t$ に比例する．即ち

(16) $$\tau_0=\frac{l}{v}$$

と置けば，$\tau_0$ は Verweilzeit と呼ばれる量であり

(17) $$n=\frac{t}{\tau_0}$$

となるから，上の式は

(18) $$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{l^2}{6\tau_0}\nabla^2 w$$

となるのである．

之を (4) と比較することによつて

(19) $$D=\frac{l^2}{6\tau_0}=\frac{1}{6}lv.$$

即ち擴散係數を，平均自由行路 $l$ と分子速度 $v$ で表はすことが出來た．

然るに之を Mayer が異つた考察から矢張り第一近似として得た表示[33]

(20) $$D=\frac{1}{3}lv$$

に比べると半分の値しか持つてゐない．勿論 (19) も (20) も相當粗い近似であるから實驗との非常に良好な一致は望み得ないとはいへ，(20) は兎も角も相當良い近似値を算出できるのであるから，(19) を導くに何かの缺陷があつたことと察せられる．

その缺陷は何であるかといふと，すべての $l$ を等しいとしたことである．若しも之が等しくないものとすれば如何．Rayleigh は，若し長さ $l_1$ の飛翔が $n_1$ 回，長さ $l_2$ 個の飛翔が $n_2$ 回,……あるとすれば，これ等をつなげたものの分布は同じ近似の程度において

$$w(n,r)=\left\{\frac{3}{2\pi(n_1l_1^2+n_2l_2^2+\cdots)}\right\}^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}r^2(n_1l_1^2+n_2l_2^2+\cdots)^{-1}}$$

となることを示した．$n_1, n_2, \cdots$ が何れも充分大とし，$l$ は任意に分布されてゐる，即ち $l$ が $l$ と $l+dl$ の間にある機會は

$$e^{-l/\bar{l}}\frac{dl}{\bar{l}}$$

で與へられるものとする．$\bar{l}$ は眞の平均自由行路である．そのときは

$$n_1\overline{l_1^2}+n_2\overline{l_2^2}+\cdots=n\overline{l^2}=n\int_0^\infty l^2e^{-l/\bar{l}}\frac{dl}{\bar{l}}=2n\bar{l}^2$$

となり[34]，從つて $n=t/\tau_0$ の下に

(21) $$w(t,r)=\left(\frac{3\tau_0}{4\pi\bar{l}^2t}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-3\tau_0r^2/4t\bar{l}^2}.$$

(12) と比較して

(22) $$D=\frac{\bar{l}^2}{3\tau_0}=\frac{1}{3}\bar{l}\bar{v}.$$

但し $\bar{v}=\bar{l}/\tau_0$ である．$\tau_0$ は必ずしも一定ではないが兎も角もこの近似は前より良好であつて，しかも (20) に一致してゐる．同じ様な方法は粘性係數及び熱傳導率に對して夫々

$$\eta = \frac{1}{3}\rho v l \tag{23}$$

$$\varkappa = \frac{1}{6} k v l f \frac{\rho}{m} \tag{24}$$

を與へるであらう[35]．$\rho$ は密度，$m$ は分子の質量，他の記號は既に述べた．

この章で注意すべきことは，此等の結果はすべて $l$ が充分小さいこと，$n$ が充分大きいことを假定して得られたものであることである．從つて平均自由行路が（容器に比して）充分小さくないか，又は衝突數があまり大きくないやうな短時間内の現象を論じるとすれば，又問題は別の形相を帶びて來ることである．

## §5. 一定方向から絶えず一定の力を受ける場合の Random Flight

一般の F.P. 方程式に相當する場合として，$x$ 軸に沿うて絶えず一定の弱い力 $F$ が粒子に作用してゐる場合を同じ様な方法で取扱つて見やう．今度は分布函數 $w$ は $x$ 軸となす角 $\theta$ の函數でもある．簡單のために $l$ は一定とする．この間に粒子は初めの方向から若干 $+x$ 軸に近い方向に曲げられる．運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F,\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

であつて，今初期條件を

$$x = y = 0,\quad x' = v_0\cos\theta_0,\quad y' = v_0\sin\theta_0$$

とすると

$$x = \frac{F}{2m}t^2 + v_0\cos\theta_0\cdot t$$
$$y = v_0\sin\theta_0\cdot t.$$

$l$ が一定だから $F$ が小さいとして

$$l = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \simeq v_0 t + \frac{F\cos\theta_0}{2m}t^2 + \cdots\cdots$$

より，衝突間の時間が

$$t \doteqdot v_0\left(1-\frac{F\cos\theta_0}{2mv_0}\tau_0\right)$$

となることが分る．但 $\tau_0=l/v_0$ である．

次にこの飛翔の起點と終點とを結ぶヴェクトルが $+x$ 軸となす角を $\theta$ とすると

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \doteqdot \tan^{-1}\left\{\tan\theta_0\left(1-\frac{F\tau_0}{2mv_0\cos\theta_0}\right)\right\}$$

となる故

$$\tan\theta = \tan\theta_0\left\{1-\frac{F\tau\sin\theta_0}{2mv_0}(\cot\theta_0+\tan\theta_0)\right\}.$$

さて $\theta_0$ は at random に分布されてゐるとすると，$\theta_0$ が $\theta_0$ と $\theta_0+d\theta_0$ の間にある確率は $\frac{1}{2}\sin\theta_0\, d\theta_0$ であるが，$\theta$ の方は上の關係により，$\theta$ と $\theta+d\theta$ の間にある確率が近似的に

$$\frac{1}{2}\sin\theta\left(1+\frac{F\tau_0\cos\theta}{2mv_0}\right)d\theta$$

となる．従つて

$$w(t+\tau,x,y,z)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\, w(t,x-l\sin\theta\cos\varphi,y-l\sin\theta\sin\varphi,\; z-l\cos\theta)\frac{1}{2}\sin\theta\left(1+\frac{F\tau_0\cos\theta}{2mv_0}\right).$$

扨て $\tau$ 及び $l$ が充分小さいとして左右兩邊を展開し高次の項を省略すると

(25) $$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{l^2}{6\tau_0}\nabla^2 w+\frac{Fl}{6mv_0}\frac{\partial w}{\partial x}$$

となる．(10) と比較して分子の易動度は

(26) $$B=\frac{l}{6mv_0}$$

となるわけである．

尚ほ $B$ の表示としてよく用ひられるのは，半徑 $a$ の球が粘性係數 $\eta$ なる均一な流體中を一定速度で動く場合の易動度の式

(27) $$B=\frac{1}{6\pi a\eta}$$

であつて，Stokes-Einstein の易動度とも稱すべきものである．$a$ を分子半徑とすれば (23) は

$$\eta=\frac{mv}{4\pi(a)^2}$$

の形に書ける故に，(27) 入れると

(28) $$B=\frac{8a}{3mv_0}$$

を結論せしめる．(26) が正しいとすると (28) は

$$l=16a.$$

即ち，自由行路が分子直徑の8倍であるときだけ正しいことになる．無論 (26) 式は粗い近似式で，正しいとは云へないけれども，このことは，氣體分子に對して Stokes-Einstein の易動度を適用することは一般に誤つた結果を與へることを示すに充分であると考へる．

$F$ が大きい場合にはこの問題はまた恐らく全く異つた解に達するであらう．この樣な場合も實際に起り得，それに對して F.P. 方程式を適用することは無謀に近いと云はねばならない．この意味に於て，微視的現象に巨視的な考察を持込んだ色々の理論[36]は一應批判に晒されるわけである．

## §6. 簡單な考察

前々章の終に，若し平均自由行路が充分小さくなければ，普通の F.P. 方程式で取扱へない現象が起り得ることを述べた．實際そのやうな例が澤山知られてゐる．例へば，極めて細い管中の氣體の流れが Poisenille の法則から外れること[37]や，せまい間隙を通しての熱傳導が Fourier の法則に從はないこと[38]や，小さい球のうける抵抗力が Stokes の法則から外れること[39]，又低溫に於ける結晶の熱傳導が結晶の大さによること[40]なども此種の現象である．その重要さに鑑み，先づ簡單な理論を試みる．

F.P. 方程式の缺點とするところは旣に §3 で述べたやうに，結局，いかに小さく $t$ をとつてもその兩端に於ける粒子の力學的量，例へば速度に相關がないことである．$t\to 0$ と共にこの相關が1になり，$t\to\infty$ と共に相關が0になるやうにしておけば，この缺點が救へる．つまり $t$ が大になれば其間に一回衝突の起る確率が大となる．一回衝突が起ればその前後の速度成分の相關は殆ど完全に零になるから，この相關係數が $e^{-\mu t}$ の形であるとしたとき，$\mu$ は大體 $\frac{1}{\tau_0}$ の大さを持つてゐるとしていゝ．さて速度成分の相關が $e^{-\mu t}$ の形を有する場合は即ち粘い流體中の中の粒子のブラウン運動を力學的に追究することによつて調べられてゐて，そのときは $t=0$ に於て確實に原點にあつた粒子の $t=t$ に於ける分布函數が (12) の代りに

$$(29)\qquad w(t,r)=\left\{\frac{\mu}{4\pi D(\mu t-1+e^{-\mu t})}\right\}^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{\mu r^2}{4D(\mu t-1+e^{-\mu t})}}$$

となることが分つてゐる[41]．この函數は

$$\frac{\partial w}{\partial t}=(1-e^{-\mu t})D\nabla^2 w$$

なる微分方程式を充す ($D$ は $t\to\infty$ の時の擴散係數)．

(29) を用ひると，或る時刻に於ける粒子の分布を與へてそれから後の任意の時刻に於ける粒子の分布を知ることが出來るのであつて，F.P. 方程式が適用出來ない場合にはこの方法を用ひなければならないのである．即ち $t=t$ に於ける物質分布を $Nf(t,r)$ とすれば

$$Nf(t+\tau,r)=\int_{-\infty}^{\infty}Nf(t,r)\,w(t,r')\,d\sigma$$

によつて $\tau$ だけたつた後の分布狀態が分る．但し $d\sigma$ は體積素片である．

一つの應用例を示さう．コロイド粒子のブラウン運動に於て，一つの粒子が或る時刻に視野 (例へば顯微鏡の) の中にあつたとし，それがそれから $t$ なる時間經つた後，その視野から逸脫する確率 $P$ を計算することに上の結果を應用してみる．今視野 (の體積) を $\sigma$ で表はすと

$$P=\frac{1}{\sigma'}\int_{\text{whole space except}\,\sigma'}d\sigma\int_{\sigma'}w(t,r)\,d\sigma'.$$

茲に $r$ は視野外の一點から視野內の一點に到る距離である[42]．

簡單のために一次元的な場合，即ち視野が $x$ 軸に垂直な幅 $h$ の (無限に長い) スリットである場合について論ずる．そのときは $w$ は (29) の代りに ($\mu=\frac{1}{\tau_0}$ とおいて)

$$(30)\qquad w(t,x)=\frac{1}{\{4\pi D(t-\tau_0+\tau_0e^{-t/\tau_0})\}^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4D(t-\tau_0+\tau_0e^{-t/\tau_0})}}$$

を用ひることになる．さうして

$$P(t)=\frac{2}{h}\int_{\frac{h}{2}}^{\infty}dx\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}w(t,x-\xi)\,d\xi$$

によつて計算すると，

$$(31)\qquad P(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\beta}^{\infty}e^{-y^2}dy+\frac{2}{\beta\sqrt{\pi}}(1-e^{-\beta^2}).$$

但し

$$\beta=\frac{h}{2\sqrt{D(t-\tau_0+\tau_0e^{-t/\tau_0})}}$$

である．これは $\tau_0\to 0$ の極限に於てのみ Fürth[15] が與へ Westgren が計算した式

$$P(t) = \text{ditto}, \quad \beta = \frac{h}{2\sqrt{Dt}} \tag{32}$$

に一致するのである．これは當然であつて，何故なら Fürth は (30) の代りに Einstein の分布

$$w(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \tag{33}$$

から出發して居るからである．

(33) と (32) の相違を實驗によつて檢出出來，$\tau_0$ を決定することが出來れば甚だ面白いが，一般に $\tau_0$ は極めて小さい量であるから今のところ利用し得る實驗はない．

此等の計算の便宜のために，筆者の計算した $P(\beta)$ 及び $\varphi(x)=(x+e^{-x}-1)/x$ なる函數の値を掲げる．

| $x$ | $\varphi(x)$ | $x$ | $\varphi(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.000 | 1.8 | 0.536 |
| 0.1 | 0.048 | 2.0 | 0.568 |
| 0.2 | 0.094 | 3.0 | 0.683 |
| 0.3 | 0.136 | 4.0 | 0.755 |
| 0.4 | 0.176 | 5.0 | 0.801 |
| 0.5 | 0.213 | 6.0 | 0.833 |
| 0.6 | 0.248 | 10.0 | 0.900 |
| 0.7 | 0.281 | ∞ | 1.000 |
| 0.8 | 0.312 | | |
| 0.9 | 0.341 | | |
| 1.0 | 0.368 | | |
| 1.2 | 0.418 | | |
| 1.4 | 0.462 | | |
| 1.6 | 0.501 | | |

| $\beta$ | $P(\beta)$ | $\beta$ | $P(\beta)$ |
|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.00000 | 1.4 | 0.74017 |
| 0.1 | 0.99974 | 1.5 | 0.70687 |
| 0.2 | 0.99850 | 1.6 | 0.67438 |
| 0.3 | 0.99510 | 1.7 | 0.64308 |
| 0.4 | 0.98873 | 1.8 | 0.61325 |
| 0.5 | 0.97870 | 1.9 | 0.58504 |
| 0.6 | 0.96471 | 2.0 | 0.55854 |
| 0.7 | 0.94664 | 3.0 | 0.37611 |
| 0.8 | 0.92466 | 4.0 | 0.28210 |
| 0.9 | 0.89911 | 5.0 | 0.22568 |
| 1.0 | 0.87058 | 6.0 | 0.18807 |
| 1.1 | 0.83971 | 10.0 | 0.11284 |
| 1.2 | 0.80723 | ∞ | 0.00000 |
| 1.3 | 0.77383 | | |

## §7. 嚴 密 な 理 論

前章の方法は極めて粗大なものであつて，是では我々は滿足することが出來ない．問題を嚴密に解くためには，再び Random Flight に戻り，それを $n$ 大，$l$ 小といふやうな假定なしに解くことを考へなければならぬ．そのためには §4 で示したやうな微分方程式に直す方法は不適當であるが，他に不連續函數を用ひる方法が知られてゐて，之によれば，少くとも形式的には何等 $n, l$ に制限を與へることなしに，此の問題を處理する事が出來るのである．その方法の詳細は Rayleigh[44] の論文其他[45] に讓り，我々の場合にそれ等の結果が如何に用ひられるかを示さう．

Rayleigh によれば $l_1, l_2, \cdots, l_n$ なる $n$ 個の Random Flight の結果が出發點から距離 $R$ 以內に落ちる確率は[46]

$$P_R(l_1, \cdots l_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx \frac{\sin Rx - Rx\cos Rx}{x} \times \frac{\sin l_1 x}{l_1 x}\cdot\frac{\sin l_2 x}{l_2 x}\cdots\frac{\sin l_n x}{l_n x}.$$

若し $l_1, \cdots l_n$ が一定でなく，$l_i$ が $l_i$ と $l_i+dl_i$ の間にある確率を $\phi_i(l_i)dl_i$ とすると，仲上氏が示したやうに

$$P_R(l_1, \cdots l_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx \frac{\sin Rx - Rx\cos Rx}{x}\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty \frac{\phi_i(l_i)\sin l_i x}{l_i x}dl_i$$

となる(27). 今

$$\phi_1(l_1) = \phi_2(l_2) = \cdots = \phi_n(l_n) = \phi(l) = \frac{1}{L}e^{-l/L}$$

とすると

$$P_R(l_1, \cdots l) = \frac{2}{L^n\pi}\int_0^\infty dx \frac{\sin Rx - Rx\cos Rx}{x}\left\{\int_0^\infty \frac{e^{-l/L}\sin lx}{lx}dl\right\}^n.$$

從つて知られた定積分

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

を用ふることにより

$$w(n, R) = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{dP_R}{dR} = \frac{1}{2\pi^2 RL^n}\int_0^\infty \frac{dx}{x^{n-1}}\sin Rx \arctan^n Lx. \tag{34}$$

之が $w(n, R)$ の嚴密な表示である．遺憾ながらこの定積分は一般に遂行出來ない．然し $n$ 大なるとき

$$\frac{\arctan^n Lx}{x^n} \sim L^n e^{-\frac{n}{3}L^2x^2 - \frac{23}{90}nL^4x^4 + \cdots}$$

だから主項のみを取れば (21) と一致する結果に達するのである．($L$ は前の $\bar{l}$ と同じものであるから) 即ち

$$w(t, r) \sim \left(\frac{3\tau_0}{4\pi L^2 t}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-3\tau_0 r^2/4tL^2}$$

である．$n$ が小さい場合は數値積分をするより他に方法がない．即ち

$$4\pi R^2 L w(n, R) = \frac{2R}{\pi L}\int_0^\infty \xi \sin\frac{R}{L}\xi\left\{\frac{\arctan\xi}{\xi}\right\}^n d\xi$$

の右邊の積分を數値的に處理するのである．

扨て以上述べたことは未だ滿足でない．何故なら $\tau_0$ が一定といふ假定が未だ除かれてゐないからである．衝突が全く不規則に起ることを承認するならば，それは Poisson の分布に從ひ，時間 $t$ の間に $n$ 回衝突の起る確率は

$$W(n, t) = \frac{1}{n!}\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^n e^{-t/\tau_0}$$

で與へられる．茲の $\tau_0$ は相隣れる衝突の間の平均時間である．從つて $w(n, r)$ を知つて $w(t, r)$ を求めるには，單に $n = t/\kappa_0$ の關係を用ひて變數を $n$ から $t$ に變へるのではいけなくて

$$w(t, r) = \sum_{n=1}^\infty W(n-1, t)\,w(n, r) \tag{35}$$

によつて計算しなければならない事になる．

## §8. 結　び

以上示したことによつて，我々は F.P. 方程式の成立たぬ場合のあること，及びそのときに取るべき方法が判明した．取扱はれたのは最も簡單な場合であるとはいへ，之が應用は決して僅少ではないと信ぜられる．先づ第一に我々は §6 の冒頭に述べた諸現象を，從來のやうな簡單ではあるが間に合せ的な理論でなく取扱ふことが出來るやうになる．

それと共に，微視的過程に巨視的法則——たとへば Stokes の抵抗法則の様な——を持ち込んだすべての理論，即ちイオン運動の理論[48]，Debye の双極子液體の理論[49]，大氣電離層に於けるイオン乃至電子の運動の式[50]等[51]は，今我々の得た結果に照してみて再吟味することを餘儀なくされるのである．

今一つの重要な應用は多重散亂の問題の數理的處理であつて，大氣内に於ける光線の散亂[52]や水素化合物内に於ける中性子の散亂[53]に對して重大な意味を持つてゐるのである．この多重散亂の問題については別の機會に讓る．

擱筆に臨み常に指針と激勵を賜る恩師山内恭彦・小谷正雄兩先生，有益な助言を戴いた高橋秀俊氏，この研究を本誌に載せる光榮を與へられた北川敏男氏，其他御世話になつた方々に厚く御禮申上げる．

---

## 註


(1) G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. A. **145** (1934) 379 等.

(2) H. Gebelein, Turbulenz, Physikalishe Statistik und Hydrodynamik, Berlin, Verlag von Julius Springer, 1935.

(3) P. Debye, Vorträge über die kinetishe Theorie der Materie, Leipzig. 1914.

(4) R. Peierls, Ann. d. Phys. **3** (1929) 1055.

(5) Debye は結晶内の熱波動の平均自由行路が $10^{-4}$ cm の程度であるといふ計算をしてゐる.

(6) Carslaw, Theory of Heat Conduction.

(7) Chapman and Cowling, Theory of non-uniform Gases.

(8) S. A. Fokker, Ann. d. Phys. **43** (1914) 812.

(9) S. A. Fokker, Dissertation Leiden, 1913.

(10) M. Planck, Berl. Ber. 1917, p. 324.

(11) M. v. Smoluchowski, Phys. Zeits **17** (1916) 557.

(12) A. Einstein, Ann. d. Phys. **19** (1906), 371.

(13) R. Fürth, Ann. d. Phys. **53** (1917) 177.

(14) H. C. Burger, Proc. Amsterdam **20** (1918) 642.

(15) F. Zerucke, Proc. Amsterdam **18** (1916) 1520.

(16) Kolmogoroff, Math. Ann. **104** (1931) 415.

(17) L. S. Ornstein and H. C. Burger, Versl. Acad. Amst. **27** (1919) 1146, **28** (1919) 183.

(18) G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein, Phys. Rev. **36** (1930) 823.

(19) (4) に同じ.

(20) P. Debye, Ber. dtsch. Phys. Ges. **15** (1913) 777, Phys. Zeits **13** (1912) 97, Polare Molckeln, Leipzig 1929.

(21) 芝龜吉, 氣體論, 岩波講座「物理學及び化學」の内.

(22) 例へば L. Hopf, Einführung in die Differentialgleichungen der Physik, Berlin und Leipzig 1933, p. 133.

(23) 例へば E. Madelung, Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers, Berlin, 1936, p. 362.

(24) 例へば H. Gebelein, loc. cit. 及び Uhlenbeck and Ornstein, loc. cit.

(25) R. E. A. C. Paley and N. Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, New York (1934), p. 157.

(26) J. Perrin, Atoms 及 (25).

(27) (18) に同じ.

(28) 高橋浩一郎, 氣象集誌 **14** (昭. 11) 190.

(29) R. Fürth は Zeits f, Phys, **2** (1920) 244 に於て他の方法によつて之を導き出した.

(30) Lord Rayleigh, Sci. Pap. I. 491, IV 370, V 256, VI 604, 627.

(31) Lord Rayleigh, Theory of Sound I, p. 35.

(32) F. Zernike, Hdb. d. Phys. Bd. III. 456.

(33) 例へば (21) を見よ.

(34) J. Frenkel, Trans. Farad. Soc. **33** (1937) 59, 277.

(35) (21) を見よ.

(36) 實例は最終の章にある.

(37 a) 例へば F. C. Champion and N. Davy, Properties of Matter, London 1936, §9.

(37 b) Knudsen, Ann. d. Physik **29** (1909) 179.

(37 c) Loeb, Kinetic Theory of Gases (1927).

(38) (37 a, c) を見よ.

(39 a) E. Cunningham, Proc. Roy. Soc. A. **83** (1910), 375.

(39 b) J. J. and G. P. Thomson, Conduction of Electricity Through Gases, Vol. I (1928) p. 187.

(40) H. Casimir, Physica **5** (1938) No. 6.

(41) (28) を見よ.

(42) A. Westgren, Zeits f. Phys. Chem. **93** (1915) 231, **95** (1916) 39, Ark. f. Mat. Astr. och Fysik **11** (1916) Nr. 8 und 14. 尙序で乍ら Brown 運動に關する綜合報告が Kappler によつて書かれてゐる, E. Kappler, Natutwiss, **27** (1939) 649, 666.

(43) R. Fürth, Schwankungserscheinungen in der Physik, p. 46. 尙觀測から P を決定するには, 視野內の粒子の平均數を $\nu$, それからの偏りを $\Delta$ とすると

$$\overline{\Delta^2} = 2\nu P$$

によつて P が分る.

(44) (30) 特に VI 604. 之と同じものは Phil. Mag. **37** (1919) 321 にある.

(45) 仲上稔, 電氣通信學會雜誌 201 號 (昭. 14) 712, 202號 (昭. 15) 17, 203號, (同) 73.

(46) (44) に同じ.

(47) (45) を見よ.

(48) M. J. Polissar, J. Chem. Phys. **6** (1938) 833 參照.

(49) (20) 又は Born, Optik を見よ.

(50) E. V. Appelton, Reports on Progress in Physics **11** (1935) 130. H. R. Mimno, Rev. Mod. Phys. **9** (1937) 18.

(51) 次のもの (ブラウン運動理論の化學反應速度論への應用) もこの種の一つである. H. A. Kramers, **7** (1940) 284.

(52) 例へば 藤原咲平及北岡龍海, 氣象光學, 岩波講座「物理學」の內を見よ.

(53) 例へば 菊地正士及湯川秀樹, 原子核及び元素の人工轉換' 下卷 672 頁を見よ.