適合度検査法(Test of Goodness of Fit)と${chi}^2 $分布

北川, 敏男
九州大學理學部

出版情報：統計数理研究. 1 (2), pp.33-77, 1942-03-15. Research Association of Statistical Sciences
バージョン：

適合度檢査法 (Test of Goodness of Fit) と χ^2 分布

會員 北 川 敏 男 (九大理學部)

(昭和十六年九月廿九日受理)

内 容

まへがき

理論より導かれる結果が判つて居り，他方，實驗乃至觀測が現實に示した事實があるとき，これら兩者を比較し，後者は果して前者によく一致（適合）してゐると見做し得るか，かゝる適合といふ問題に關して，適合の良否ともいふべきものを數量的に表示すべき計量はないであらうか——この種の問題は，日常屢々遭遇するものであり，その解決の緊要なことも言ふを俟たない．上述の問題が極く一般の意味で，適合度の問題といふべきものであらう．この様な根本的な問題に對してはこれに解明を與ふべき立場，或は技術的な方法に關して，いろいろ相異る所說を見るのは當然である．今，その様なものを全般的に見渡してそれらを比較論評するが如きは，小文の企て及ぶ所ではない．茲では，χ^2 分布を結局使用するもの或はこれに密接な關係のあるものに，論題を局限し，在來の教科書類の記述よりは，多少立入つて，その根據とか有效範圍とかに就いて述べることにした．適合度檢査を實施するに當つて，多少御參考になる點があれば幸甚である．豫め御斷りしたい事を次に列擧して置く．

(i) 實際に得た結果は，それを得る方法としては，實驗・觀測・調査等いろいろあらうが，簡單のため，どれか一つを擧げる事にした．例へば，本文で實驗値と云つても，それは觀測値であつても，議論にさして變りはない．又實際に得た結果は，いつも數値で與へられたものとする．

(ii) $\chi^2, \chi^2_{IV}, \chi^2_s, \chi^2_1, \chi'^2$ 等を論ずる．χ^2_{IV} は筆者の勝手につくつた記號で茲だけにしか通用しないものであるが，その他は，夫々原著者の導入使用された記號であつて，成るべくそのまゝ使用する事にしたが，最小 χ^2_1 法 (Neyman-Pearson [1]) と言ふのを私は最小 χ^2_s 法といふ事にした．

(iii) 本文に於いては χ^2 分布と χ^2 の分布とは別物であるのに注意して戴きたい．(II, §7 參照)

(iv) χ^2 分布は，Contingency Tables に於ける Test of Significance, Test of Homogeneity 等に用ゐられる．然し，玆では適合度檢査に於いて，どれだけ χ^2 分布が使用されるかを見るのを目的としたので，それらの點には全く觸れてゐない．これらは大きな問題で別個に論ずるのを適當と考へたからである．

(v) Sample, Sampling を夫々試料・試料抽出と譯してゐる．他の機會で，標本・標本抽出といふ用語も使用した事があるが，私は，今のところ，場合に應じてその何れを用ゐても宜しからうと思つてゐる．

I. 適合度檢査法の論理

§1. 問題の提示　從來統計學の教科書等に於いて，吾々は，次の様に教へられて居るようである．「適合度檢査に當つて，吾々の注意しなければならぬのは，理論の導く結果即ち所謂理論値なるものには，二種類がある事である．それに應じて適合度の檢査法も違つてくる．その一つは，該理論値が，何等かの根據から導かれたものではあるが，それを導き出す途中の何處かで，これと比較検討さるべき當面の實驗結果のデーターを計算に使つてゐるものである．他のもう一つは，これに反し，該理論値を導き出すのに，當面の實驗結果データーは少しも使つてゐないものである．後者を a priori な理論値といふ．

この二種類の區別すら，往々にして閑却され勝ちな事情も見受けられる故，上に說く區別は決して無駄ではないと思ふ．併し，尙立ち入つて考へて見ると，必ずしも，兩者の區別分明なりとも云はれぬ場合もあり，適合度檢査法の分類の基準となし得るに足る程，論理的な分け方であるとは云はれない様である．適合度檢査とは何か．又 a priori な理論値，然らざる理論値とは何か，そういふ問題を說明するために，次に具體的な例について當つて見よう．

__第一例__　Fürth [1] は，嘗つて，全く同じ様な貨幣10個を同時に投げ，その內表の出たものの個數を算へるといふ實驗を 500 回繰返した事がある．第一表 k (觀測) にその實驗事實を示す．

第一表 (Fürth)

r	$W(r)$ (計算)	k (觀測)	k (計算)
0	0.001	0	0~1
1	0.010	6	5
2	0.044	23	22
3	0.117	50	58
4	0.205	90	103
5	0.246	130	123
6	0.205	106	103
7	0.117	58	58
8	0.044	28	22
9	0.010	8	5
10	0.001	1	0~1

r は 10 個のうち表の出た個數を示し，k はそうした實驗結果が何回起つたといふ回數を表す．確率論の初步に依り，今各貨幣共，表・裏の出る確率を夫々 1/2 とし，各回に於いて 10個の貨幣の表・裏何れかが出るかは相互に獨立とし，又 500 回の實驗同志も相互に獨立とすれば，500 回の實驗のうち r 個の表の出る實驗回數の期待値は，

$$500\binom{10}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r (\equiv 500\, W(r)) \tag{1.01}$$

なる事周知の如くである．第一表 k (計算), $W(r)$ にその數値を示す．

この様な場合，$W(r)$ 從つて k (計算) と書いた値は，左側の實驗結果の數値を全然使用して居らない．そして k (計算) は，これに全實驗の回數をかけたものである．かゝるが故に a priori と云ふのであらう――と一應は考へられよう．併し玆に a priori と云つても，それは決して總ゆる經驗に先立つて決定するといふ意味

のみに限らるべきではない．貨幣の表の出る確率が 1/2 といふのは，無理由の理由に依つて主張されるものであるか或は過去に於いて多くの實驗事實があり，それによつてこそ支持さるべき理論であるのが事實であらう．それで玆に云ふ a priori は當該實驗事實(具體的に云へば結果の數値)が全然未知であつても，右側の計算は出來るといふ意味以上の何物でもないと云へばよからう．成程そう云ふならば一應それではつきりした様でもあるが，尙立入つて考へて見れば，それでも必ずしも明瞭でない．假りに Fürth [1] の用ゐた貨幣は，その國の貨幣鑄造の方法のため，重心が貨幣の表面の方に近くなつてゐると知つて居つたとせよ，そして，同國に於ける同様な多くの實驗により表の出る確率は 0.48 なりと知れる場合は如何．これを基にして計算すれば

$$500\binom{10}{r}p^r(1-p)^{10-r} \qquad (p=0.48) \tag{1.02}$$

なる事勿論である．かゝる場合 $p=0.48$ なりと云ふ智識は，a priori な智識であると云ひ得るか否か，それは一義的に決定出來るものとは思へない．結局，人に依り所に依つては，(1.01), (1.02) 何れも a priori な理論値であるといへる．人に依り，所に依り，時に依つて，いろいろ違つた a priori な理論値があると云ふでは，正しく，a priori でない事に他ならないではあるまいか．それ故吾々は，もつと論理的に的確な表現法を，他に求むべきであると考へる．(この例に對する適合度檢査の結果は，II, §8 の終りを參照)

第 二 表　Saargebiet に於ける鐵道事故による死亡者 (1925—1929)
(R. Lüders に由る)

死亡者數	實際月數		Poisson (I) に依る分布		Pólya-Eggenberger に依る分布		Poisson (I, II, III) に依る分布	
0	20		15.1		19.3		20.0	
1	17		20.8		18.1		17.1	
2	11		14.4		11.4		11.4	
3	8	12	6.6	9.6	6.0	11.0	6.4	11.5
4	2		2.3		2.9		3.0	
5	—		0.6		1.3		1.3	
6	2		0.1		0.5		0.5	
7 以上	—		0.0		0.3		0.3	

第二例　Saargebiet に於ける鐵道事故に依る死亡者數の月別統計に關して，第二表左側に觀測の實際月數が示されてゐる．かゝる分布を見るとき，之に對して適用さるべき確率法則として稀事象生起分布の法則たる Poisson の分布を理論値にとり，實際月數と比較せば如何と云ふ事は，誰しも一應考慮する事である．R. Lüders (Biometrika, 26(1934), 108–128) は Poisson の分布を試みた．

$$h^n e^{-h}/n! \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{1.03}$$

が良く知られてゐる様に Poisson の分布であるが，この場合 h を決定するのに，上記の實際分布を使用した．即ち一月に於ける平均死亡者數といふべき

$$\bar{x}=\frac{20\times0+17\times1+\cdots+4\times2+6\times2}{60}=1.383 \tag{1.04}$$

を計算し，この $\bar{x}$ を以つて h の推定値 (estimate) なりとした．即ち h は所謂試料平均値 (sample mean) $\bar{x}$ に等しい値なりと置いた．(即ち推定したわけである．) そして

$$60 \times (1.383)^n e^{-1.383}/n! \quad (n=0, 1, 2, \cdots) \tag{1.05}$$

を計算したのが第二表第二列目の數字である．かゝる場合に於いても「(1.05) なるものが果して實際月數とよく一致（適合）するか」といふ問題が起るわけである．第一例と異なる點は $h=1.383$ といふ事が實際觀測された結果に基いてゐる事である．然しこの様な場合にあたつて吾々が最も注意しなければならぬ事がある．即ち，上述「」中に云ふ意味は，實は次の二種類の相異つた設問の何れとも解釋され，その何れを指すものか明瞭でないのである．

(α) (1.05) から實際計算される期待頻度即ち 15.1, 20.8, 14.4, …… なる分布が，實際月數の分布と良く一致するか否かといふ問題

(β) 公式 (1.03) なるものが實際月數の分布を良く表はすか否かといふ問題

(α) の問題の型式では

$$15.1,\ 20.8,\ 14.4,\ \cdots\cdots \tag{1.06}$$

なる確率分布が實は (1.05) に等しいものといふ事も考へに入つてゐるのではない．單に，天降り式に (1.06) なる確率分布がある．之を60倍したものが實際月數とよく一致するか否かといふ問題であるといふのが，その意味に外ならない．之に反して (β) では，問題は (1.03) なる公式の應用の妥當性如何にある．勿論その場合，飛んでもない h を勝手に (1.03) に入れて之を60倍に實際月數と比較して大違があつてもその事から (1.03) なる公式が不適當だと言ふ事にはならない．(1.03) の公式の應用の妥當性を見るには，h に對して或る適當な値を推定しなければならぬ．而して後始めて上記公式の妥當性の問題が起るのは，常識上もとより然るべき事と云はねばならぬ．たゞその場合注意すべき事は，h の適當な推定法と言つても多くの場合，幾通りの方法も可能であらう．しかも (1.03) の公式の應用の妥當性の檢證は，事實上，h の推定法に依存せざるを得ない．(β) の場合が (α) の場合に比し，比較にならぬ程，論理上，複雜な所以は實に玆にある．しかも，實際吾々に必要なものは，多くの場合，(α) ではなくして (β) なのであることは言ふを俟たない．Lüders は，Poisson 分布に依る (1.05) の他に，尙 Pólya-Eggenberger の分布，Poisson の分布を convolute（確率論での用語，說明は省略する）した様な分布の適用を考へ，その各々から得られる理論値を求めた．第二表，第三，四列にこれらを示してある．何故，これらの分布を考慮すべきであるか，その理由・根據に就いては，玆に論じようとする適合度檢査とは別個の事柄だから玆では說明を省略する事にし，單に，分布として實際のデーターとの比較を問題にする．かく吾々の考察を限定する限りに於ては，吾々にとつて唯一の手掛となるのは，勿論第二表の各列の比較しかあり得ない．この様な限定された立場に於いて觀察するとき，先づ上述 (α) の問題に對しての大凡の常識判斷的な解答として云へる事は，Poisson の分布よりも，第三列乃至第四列の分布の方が，實際月數の分布によく適合してゐるように思はれる事である．併し之は，何處迄も，いはば，感じと云ふ程度のものであり，客觀的な基準に依つた譯ではない．更に注意しなければならぬのは，かゝる感じを，(β) の問題迄に，押し進めて適用することは，一層危險である．この事を分り易くするため，上の例で極端の場合をとらう．上記 Poisson の分布，Pólya-Eggenberger の分布，convolute された Poisson の分布では，そこに入つてくる parameters は夫々，h, h と d, h_1 と h_2 とであつて，parameters の個數は夫々，1, 2, 3 である．今段々に parameters の個數を増加させたならば如何．そうすれば勢ひ，益々複雑な分布法則とならうが，その代り，その分布法則に基づく理論値は，全く實際月數と一致する樣に，各 parameters の個數を選べるに至る．(一般的に言つて，分布の組の個數(第二例では組は 0, 1, 2, …, 6 及び 7以上だから，組の個數は 8 と考へ得る) が n ならば，parameter の個數が $n-1$ である樣な分布法則を考へれば上の事が成立つ．) 然しこの樣な場合，該公式の適否と言ふ事に就いて，吾々は如何なる發言をなし得ようか．全く一致する樣に，sample から parameters の値をきめれば，全く一致する——これでは明らかに tautology である．これ程極端な場合でなくとも，sample からきめるべき parameter の個數を逐次増して行けば，(α) の問題に對しては，よりよい解答が得られるが，それだからといつて (β) の問題に對しての解答になるといふのではない．かく考へて來ると，適合度檢査の問題は，一見容易であつても，その實，なかなか厄介な事が分かる．

次に尙一つ，豫め吾々の立場に就いて斷つて置かねばならぬ事がある．今假りに，茲に素朴な人があつて，一致といふ事を字義通りに解釋して，一致とは，理論値と實際値とに於いて相對應する數値が，夫々相等しい事なりと解釋するとせば如何．かゝる人ならば，上記二例の何れに於いても當該理論値は何れも實驗と不一致であると結論し，それ以上論ずべき何等の問題もないとするであらう．然し，この樣な人にとつては，殆んどすべての理論値は實驗値と不一致といふ結論に，いつでも到達するであらう．それは，實驗には實驗誤差があるからだと，通常云ふのである．この立場を假定してこそ始めて適合度檢査の問題が，統計學的硏究對象となる．實驗誤差と言ふ樣な，意味の鮮明でない言葉を避けて，一般的なそして明確な用語をもつてすれば，ストカスチック (stochastic) な立場で適合度檢査の問題を取扱ふと云ふのである．約言すれば，吾々は確率論的な型式を導入し，これに就いて議論をするのである．これを次の §2 で論じよう．(第二例に適合度檢査を應用した結果については §14 參照)

§2. 確率事象系 S 及び C 假設とその單純性，複合性　玆では，二種類の確率事象系 S 及び C を想定するとき，適合度檢査の問題は，統計學的立場から，これら兩者の何れかに關する統計假說檢定の問題となる事，又兩者の何れかであるに依つて，夫々，當該假說は單純 (simple) であるか，複合的 (composite) であるかである事を示さう．

〔A〕 <u>確率事象系 S と單純假說</u>　今茲に n 個の個所を考へ，これに對して1番から n 番迄の番號を付けて區別する事にする．今一球をとつて來て，これら n 個の個所に向つて投ずると言ふ試行を考へる．その結果，必ず，この n 個の個所の何れか一つに入るとするのであるが，それがどの個所になるかは，決定論的に確定されるものでなく，確率論的に，即ちストカスチックにきめられるに過ぎない．即ち，第 i 番に入る確率は $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$ といふ事が言へるだけとする．勿論上述により $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$ である．この場合，この $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$ が如何にして定まつたかは吾々の關知するところではなく，とにかく，かゝる n 個の p_i の値が吾々に與へられたとするのである．さて，上記の如き試行を N 回行ふとする．その結果各回とも一球づつ，何處かの個所に球が入つたわけであるが，これらの試行は 相互に獨立に行はれたとする．この樣な場合，第 i 番目

の個所に何個入るかは，一定のものではあり得ない．單に確率論的に言へるだけである．之が吾々の考へる確率事象系 S といふものなのである．初等な確率論の結果から明らかな様に，第 i 番目の個所に入る球の個數の期望値は，$Np_i(i=1,2,\cdots,n)$ である事は言ふ迄もない．これを一括して $(Np_1, Np_2, \cdots, Np_n)$ と表はすならば，これが期望さるべき平均的な結果とも言ふべきものである．併し，いつでもこの結果を得るといふのではないのは勿論である．今實際，上の如き實驗をしたら第 i 番目の個所に入つた個數は m_i であつたとする．即ち $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ なる結果を得たとする．茲に於いて，吾々は次の様な問題を提出しよう．即ち $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ といふ結果は，上記確率事象系 S では——詳言すれば，確率事象系 S を眞なりとする假說のもとに於いては——どれだけの實現の確率があるかといふ問題である．

この事を確率變數を用ゐて表現するには次の如くすれば宜しからう．$X_k^{(i)}(i=1,2,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots,N)$ なる確率變數があるとし，次の三つの事を假定する．

（i） 第 k 回目の試行結果が i 番目の個所に入れば $X_i^{(k)}=1$，i 番目の個所に入らなければ $X_i^{(k)}=0$ とする．而して $X_k^{(i)}=1$ になる確率を p_i とする．即ち $\Pr.\{X_k^{(i)}=1\}=p_i$ 從つて $\Pr.\{X_k^{(i)}=0\}=1-p_i$．$(i=1,2,\cdots,n)$

(ii) 各 i に關して，$X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \cdots, X_N^{(i)}$ は相互に獨立な確率變數である．$(i=1,2,\cdots,n)$

(iii) 各 k に關して次の關係がある：$X_k^{(1)}+X_k^{(2)}+\cdots+X_k^{(n)}=1$．$(k=1,2,\cdots,N)$

吾々がさきに確率事象系 S を想定するといつた事は，上述の如き $X_k^{(i)}(i=1,2,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots,N)$ なる $n\times N$ 個の確率變數を考へるといふ事と同一內容の事なのである．球とか，之を投げるとか云ふ事は，何等本質的に必要な事ではない．本質的に必要な事は，上の如き抽象的な確率變數に含まれた事柄だけなのである．この事さへよく理解されるならば，確率事象系 S と用ひても $n\times N$ 個の確率變數系を用ゐてもその間何等の相違はない．確率事象系 S に於いて N 回の試行の結果 $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ といふ結果を得るといふ事は，確率變數でいへば，即ち $X_1^{(i)}+X_2^{(i)}+\cdots+X_N^{(i)}=m_i(i=1,2,\cdots,n)$ といふ n 個の結果を得るといふ事に外ならない．但し如何なる結果も，等しい確率で起り得るといふのではない．

初等な組合せの定理から分る様に，N 回の上記試行に於いて第 i 番目の個所に，m_i 回入る $(i=1,2,\cdots,n)$ 様な結果を得るといふ n 個の事象が悉く出現する確率は——これを簡單のため以下 $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ が起る確率といふ——

$$(1.07)\qquad \frac{N!}{m_1!\,m_2!\cdots m_n!}\,p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_n^{m_n}\quad (\equiv p(m_1, m_2, \cdots, m_n)\ \text{とおく})$$

である．但し $m_1+m_2+\cdots+m_n=N,\ p_1+p_2+\cdots+p_n=1$．

この値は $N, p_1, p_2, \cdots, p_n$ を一定とし，$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ の函數として考へるとき，いろいろな値をとり，最大値は，n 次元空間の點 $(Np_1, Np_2, \cdots, Np_n)$ の附近にあり，その點を遠ざかるに從ひ (1.07) の値は小になる事がわかる．確率事象 S に於いて $(m_1', m_2', \cdots, m_n')$ と $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ とがどちらが起り易いかと云ふと，それには例へば

$$(1.08)\qquad p(m_1, m_2, \cdots, m_n)/p(m_1', m_2', \cdots, m_n')$$

なる比が1より大なるか否かを見ればよいと云ふ考へ方も可能である．ところでNが大になるに伴ひ，起り得べき$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$のなる點（n次元空間の點）の個數は増加し，一般に(1.07)は小になる．そこで$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$が如何なる確率で起るかは，吾々の當面の目的のために餘り重要な計量でなくなる．こうした場合，當面の實驗事實たる$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$に對する$p(m_1, m_2, \cdots, m_n)$よりも大ならざる$p(m_1', m_2', \cdots, m_n')$をもつ樣な$(m_1', m_2', \cdots, m_n')$の起り得べき確率を計算する方がよからうと云ふ事が一つの方法として考へられよう．何となれば，その確率は次の如き和であらはされ，和の各項は小なるも，和それ自身は有限のある値を與へるであらうからである：

$$(1.09)\qquad P_p \equiv \sum_D p(m_1', m_2', \cdots, m_n') = \sum_D \frac{N!}{m_1'!\, m_2'! \cdots m_n'!} p_1^{m_1'} p_2^{m_2'} \cdots p_n^{m_n'}$$

但し上の和に於いて，和をつくる範圍Dは

$$(1.10)\qquad p(m_1', m_2', \cdots, m_n') \leqq p(m_1, m_2, \cdots, m_n) \quad 且つ \quad m_1' + m_2' + \cdots m_n' = N$$

なる不等式及び等式を滿足するn個の負ならざる整數の組$(m_1', m_2', \cdots, m_n')$のすべてに關してつくる．かくの如く考へて來ると，適合度の問題に對する一つの方法として次の如きものが考へられよう．

〔I〕 確率事象系Sを想定する（上述）．而して$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$は，このSに於ける試行結果なりとの假說を提出する．

〔II〕 確率事象系Sに於いて，$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$なる事象に對應して，(1.10)なる附帶條件のもとで和(1.09)をつくる．

〔III〕 和(1.09)の數値の大小を以つて，適合度の計量とする．即ち豫め$\alpha (0 < \alpha < 1)$なる數を設定して置いて，$P_p \leqq \alpha$ならば當該假說を棄却すべきものと見做す．αは通例0.01又は0.05にとる．

この樣な方針をとる限り，確率事象系Sなるものは一つの假說であり；その當否の檢討は〔III〕に依つて與へらるべきものである．故に，問題は，假說檢定の理論に屬すべきものとなる．しかもこの場合，Sの規定する確率分野には，何等未定の parameter を含まぬものであり，$p_1, p_2, \cdots, p_n$は全く確定のものである．その意味で，該假說は單純である．

〔B〕 確率事象系Cと複合假說　次に〔A〕の場合と同樣な確率事象系Cを考へる．そのときCとSとの相異る點は，Sに於いては$p_1, p_2, \cdots, p_n$が確定したものであるのに對し，Cに於いては$p_1, p_2, \cdots, p_n$には parameters が入つて居り，parameters の値が確定すれば，$p_1, p_2, \cdots, p_n$は確定するが，その肝腎の parameters の値は何れも指定されてゐない．詳言すれば，parameters を$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$とすると

$$(1.11)\qquad p_i = f_i(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

と書かれ，各函數$f_i (i = 1, 2, \cdots, n)$の形式そのものは確定したもので吾々に既知のものであるが，$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$の値は未知である．從つて各$p_i$が未知なりとする．この樣な場合に於いても，適合度檢査の問題を，假說檢定の問題の型式に入れて考へる事は出來る．誤解のない樣，更に說明を加へよう．(1.11)に於いて$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$は吾々には未知であると言つたが，それは不定なものと考へて

居ない，確定したものと考へて居る．たゞ吾々には，その値が未知だといふのである．そして吾々が適合度検査を行ふに當つて，$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ の各々の値そのものは指定しないで論じる様な形式で問題を論じようとするのである．この意味に於いて，この場合，適合度検査の問題は，複合(的)假説検定の問題でなければならぬ．

この様な立場から問題を見るならば，§1 で述べた二つの例に於ける問題は次の如く解決される．先づ第一例に於いては $n=11$，而して $p_i=W(i-1)\,(i=1,2,\cdots,11)$ であつて，各 p_i の數値は確定的であるから，單純假説の場合である．第二例では如何と云ふに，そこに問題となつてゐる理論分布では，cells の個數は，理論上は無限であるが，7 以上に對應するものは，極めて小であるから，これを一括して，7 以上といふ組にしたわけである．それで $n=8$ と思つてよい．(あとで χ^2 分布を使用するときには，更に cells の個數を少くする必要がある．§12 參照) 第二例 (α) では，$p_1, p_2, \cdots, p_8$ は確定した數値であり，これを 60 倍したものが (委しく云へばこの數値の組が) 實際の數値 (月數) と良く一致してゐるか否かを問題にして居るから，それは單純假説である．これに反して，第二例 (β) では，h は未知のまゝで問題を提出するのであつて，確定した分布數を母集團にとり，これを假説として提出し，實際値 (月數) に適合してゐるか否かを問題にしてゐるのではない．この意味で複合的な場合である．

この様な説明には更に註解を必要とするかも知れない．例へば，複合假説の場合，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ は後で述べるが如く，これに對して推定値は考へるが，問題の形式としては，それを指定しないで提出するのであるから，(1.09) の數値も知られないではないかと云ふ質問が出るであらう．誠に然りである．實際やるときには，實驗結果たる $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ を用ゐて未定の parameters $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ を何等かの方法により推定 (estimate) して，その値をきめ，これを函數 f_i に代入して p_i の數値 p_i' を推定して計算を遂行する．實際には P_p を計算せず，これに代用となるべきものを用ゐるが，その論理的構造には變りはない．この推定方法が何であるかを問はず，たゞ $p_1', p_2', \cdots, p_n'$ を天降りに與へられたものの如く考へて，即ち $p_i=p_i'\,(i=1,2,\cdots,n)$ といふ假説を提出し所論を進めれば，それは (α) の場合となり單純假説の場合となる．この計算された $p_1', p_2', \cdots, p_n'$ を何處迄も推定値と考へ，この推定法をも考慮に入れ，それに伴ふ推定法 (method of estimation) の誤差等を考慮に入れるときには，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ は未知のまゝで問題を考へるのであるから (β) の場合となり，その限りに於いて，それは複合假説といはねばならぬ．更に §9 に於いて，この點を詳しく説明する．玆では，理論値を a priori と然らざるものとに區別する事が論理上，不明確な點を擧げると共に，適合度検査の問題は，畢竟，統計假説検定の問題であり，假説の單純性・複合性に依り分類すべき事を主張したわけである．

次に，二三の注意を述べて置かう．

注意 1. 以上は (1.10) なる條件のもとに和 (1.09) を考へて來たわけである．こゝにもう一つの見方が當然可能であらう．それは，今迄考への根底にあつたものは，P_p の大小であつて，その限りに於いては，P_p が大であればある程，棄却を免れる事益々少かるべき事が當然と見做されるであらうと云ふ事になる．然し一面，次の様にも考へられる．P_p が大といふ事は，$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$

が非常に假說に對して都合のよいものであつて，$(m_1', m_2', \cdots, m_n')$ の函數としての $p(m_1', m_2', \cdots, m_n')$ の最大値をとる點の附近にあつたためであらう．$p(m_1', m_2', \cdots, m_n')$ の値の大なる程，$(m_1', m_2', \cdots, m_n')$ は起り易いとも考へられるであらうが，併し，そういふものは極めて都合のよい場合ともいへるわけでもある．その見方からする限り，$(m_1', m_2', \cdots, m_n')$ をいろいろにとつて見たとき $p(m_1', m_2', \cdots, m_n')$ はそれに應じていろいろに變るが，その平均の値の場合に近くあるものが，特に都合惡くもなく特に都合よくもない，いはば最も起り易い場合といふべきでもあるといふ見方も可能である．かく觀察して見ると，P_p の値が1に餘りに近いときには，當該の假說は，却つて棄却さるべきものと言はねばならぬ．以上の考へ方は，幾分，事の眞諦に觸れてゐる事は確かである．たゞ，それを實際型式化して簡單な形で云ふ事は，$p(m_1, \cdots, m_n)$ そのものを問題にする限りでは，いはば技術的に困難である．併し，この考へは，P_p を使用する際にも，陰影の如くつきまとふ事はたしかであり，P_p なる和を χ^2 分布におきかへて論じ得る場合には，それを表面にもち來らす事も可能である．(II, §7 參照)

注意 2. 以上の如く考へて來ると，P_p の導入は誠に自然な徑路をとつて居り，誰しも第一に思ひ付くべき筋道であるように思はれる．併し，過去の歴史はかゝる徑路をとつて居らない．(後述する如く，P_p は，それらを實際計算するに當つては $P\chi^2$ を用ゐる．これが有名な χ^2 分布であるが，Pearson, K. [1] が始めて χ^2 分布を導入したときには上の如き考へをしなかつた．III, §10 參照) 而も Sheppard [1] の言に依れば，それより以前には，又別の一つの方法が行はれてゐた由である．その方法の不完全な點を認識する事が，とりも直さず，P_c, P_λ (後出), $P\chi^2$ (後出) 等の方法論的意味を明かにする所以でもあるので，以下該方法を述べ且つその不完全な點を指摘しておく．

單純假說のときだけに就いて述べておかう．前述の如く S なる確率事象系をとる．前述の $X_k^{(i)}$ からして $M^{(i)} = X_1^{(i)} + X_2^{(i)} + \cdots + X_N^{(i)}$ をつくる．この $M^{(i)}$ なる確率變數は，平均値 $E\{M^{(i)}\} = Np_i$，標準偏差 $\sigma\{M^{(i)}\} = \{Np_i(1-p_i)\}^{1/2}$ である．從つて $(M^{(i)} - Np_i)/\{Np_i(1-p_i)\}^{1/2}$ は，平均値0, 標準偏差1の確率變數である．さて，所與の事實として，第 i 番目の個所に m_i 個入つたといふ事は，S を假說として採用すれば，$M^{(i)}$ が m_i となつて出現した事を示す．從つて

$$(1.12) \qquad (m_i - Np_i)/\{Np_i(1-p_i)\}^{1/2}$$

は何れの i に關しても，平均値0, 標準偏差1の確率變數の現はれである．換言すれば，平均値0, 標準偏差1なる母集團からのとり出された一つの値である．以上の所論は全く正しい．

そこで次の樣な考へ方をする．「(1.12) なる n 個の數は，平均値0, 標準偏差1なる同一の母集團からの試料と見做すといふ假說をする．他方，かゝる母集團に於ける大きさ n の試料の試料分布を理論的に求める．(1.12) がそれに照合して見て，該假說の適否を見る.」

この考への重大な缺點を一つだけ擧げよう．それは次の點にある．(1.12) なる n 個の數は，同一母集團からの random sample とは見做せない．何故ならば，若しも sample が random と見做されるものであるならば，i 個の確率變數 $(M^{(i)} - Np_i)/\{Np_i(1-p_i)\}^{1/2}$ は相互に獨立でなければならぬ．然るに，$M^{(1)} + M^{(2)} + \cdots + M^{(n)} = N$ といふ關係がある．

注意 3. 吾々は，確率事象系 S とか C とかを考へると言つたが，S は Simple, C は Composite から夫々頭字をとつたものである．通常の統計學の用語に從ふならば，母集團 (Population = parent Population = hypothetical parent Population) を考へると言へばよいわけである．そしてそれに對して N 回の任意試料抽出 (Random Sampling) を行ふ場合に相當してゐる．吾々は確率變數を表面に出した方が，理解を容易にすると信じたから，上述の様にしたのに過ぎない．

§3. 批判と注意　適合度検査の問題は，これを §2 で述べた如き型式の下で考へる限り，統計假設検定の理論に屬すべきものである．しかもそれは，假設が單純であると複合的であるとを問はず，或る特殊な検定の方法である．適合度検査の技術的な細部に立入るに先立ち，その論理的構造を，はつきりと見定めて置く必要があると思はれる．それで以下，色々の觀點から検討を加へて見よう．特に斷らない限り，この § の以下の各項の所論は，假設が單純であると複合的であるとに係らず兩者を通じて妥當するものである．

[1]　§2 の適合度検査法では，各検査の度毎に，唯一つの假設の當否を問題にしてゐるのである．他に可能なるべき假設をも考慮に入れ，比較考量して，そのうちより選擇しようとするものではない．この事は，假設が單純なときには，§2 の所論に依り明らかであらう．假設が複合的である場合にも，後述 (III 參照) するが如く，(1.11) の $f_i (i=1,2,\cdots,n)$ なる函數型は一定に決定されたものであつて，他に，別個の函數型 $h_i (i=1,2,\cdots,n)$ を想定し，(1.11) に代ふるに，$p_i = h_i(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ を想定して，これに對して適合度検査を行ひ，兩者を比較論評して $f_i (i=1, 2,\cdots,n)$ を採用するか $h_i (i=1,2,\cdots,n)$ を採用するかを決定するといふのでもなければ，(1.11) なる複合假設を棄却する理由として，他にもつと合理的な複合假設 $h_i (i=1,2,\cdots,n)$ があるといふ様な論法を行ふものでもない．換言すれば，複合假設としての (1.11) の適否を決定するのは (1.11) 自身に依るのである．

こういふわけであるから，當該假設を棄却する理由として，他にもつと合理的な假設が存在する事を擧げるといふが如き論法は，單純・複合的の何れの場合に於いても §2 の適合度検査法の關知しないところである．その様な論法は，假設検定並びにその採否に當つての吾々の推論の眞諦に觸れたものと言ひ得べき場合の多いのは事實である．それに對しては，それに適切に該當すべき検定法の型式を考慮すべきであるが，それは今の場合別個の問題である．忘れてならぬ事は，上述 §2 の適合度検査法は，その論理的構造上，その様な検査法の型式を具へるものではない事である．若しこれを看過し誤解するならば，§2 の方法に對して見當違ひの能力を期待して，誤謬に陷るのである．かゝる論據から，Berkson [1] の論說を論駁した Camp [1] の所論は正當なものと言はねばならぬ．

[2]　一體，統計假設を眞なりとして採用する事に依り，或は僞なりとして棄却する事に依り，吾々は誤謬に陷るかも知れぬのであるが，かゝる誤謬には論理上二種類が可能である．その一つは該假設が眞なるにも係らず，これを僞なりとして棄却する誤謬であり，他のもう一つは，該假設が僞なるにも係らず，これを眞なりとして採用する誤謬である．通常，前者を第一種の，後者を第二種の誤謬といふ．「$P_p \leqq \alpha$ なるとき，該假設を棄却すべし」この指令に從ふときにはどうなるか．所與の data たる $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ に對して $p(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ を計算し，これに對して (1.10) を

満足する $(m_1', m_2', \cdots, m_n')$ を考へ，和 (1.09) をつくつて P_p とおいたのであるから，次の様に言へる．「所與の data $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ に對する $p(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ を計算する．$p(m_1', m_2', \cdots, m_n')$ がこの $p(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 以下の値である様なときには $(m_1', m_2', \cdots, m_n')$ はすべて棄却する．こうする事に依り，吾々は第一種誤謬をおかすかも知れぬ．併しかゝる第一種誤謬をおかす確率は總計しても，α は超へない．」簡單のために，「$P_p \leqq \alpha$ なるとき，$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ を棄却する事に依つておかすべき第一種誤謬の確率は，α 以下である」といふ事にするが，委しく言へば勿論上の意味である．

(i) α は豫め定め置くべき數であり，勿論，論理上，如何なる數 $(0 < \alpha < 1)$ であつても宜しい．但し實際上の立場から云へば，α を大きくとれば，それだけ棄却する場合が大きくなり，α を小にとれば，それだけ棄却する場合が少くなる．かくして前者では，餘りに檢査が嚴重で，どれもこれも棄却される事になり，後者では，之に反して，檢査が緩く如何がはしいもの迄棄却を免れるといふ事になる．慣用上 $\alpha = 0.01$ とか $\alpha = 0.05$ とかを使用する．これは實用上，嚴寛何れにも失せしないためである．100 回に 1 回とか 100 回に 5 回とかいへば，餘りに第一種誤謬をおかす確率が大である様にも思はれるが，この程度でなければ，到底實用にならぬ．尙念のため附言するが 0.01 とか 0.05 とかは單に簡單な數なので選ばれたにすぎない．

(ii) 上述の論法から分る様に，「$P_p > \alpha$ ならば該假說を採用すべし」といふ様な檢査法を與へるものでは，斷じてないのである．勿論，P_p の値が相當以上に大ならば，該假說を採用する事に決めて置くとするも，それは當人の勝手である．但しその場合，他人を說伏すべき根據を，何處かに求めねばならぬが，第一種誤謬或は第二種誤謬を計算して與へる事は出來ない．他に根據を求めねばならぬ．(本§の [4] 參照)

(iii) $P_p > \alpha$ なる場合，吾々は該假說を棄却すべきものでない事にする．「棄却すべきものでない」といふのは，P_p を使用する檢査法に關する限りのことであつて，採用するといふのではない．tentative acceptance であつて，final acceptance ではない．

[3] §2 の適合度試驗に於いて共通する事は，確率事象系 S にしろ C にしろ，何れも n 個の組 (cell) からなつて居り，そこに於ける分布を問題にするのである．即ち組別分布 (cell distributions) が問題なのである．例へば、連續な分布密度をもつ様な母集團に對しても，その變動の範圍を n 個に區分し，各組に入るべき確率を問題にするわけである．例へば，$y = F(x; \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \cdots, \bar{\theta}_l)$ が x の函數として分布函數であるとする．そのときには，$a_0 = -\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < \infty = a_n$ なる如き $n+1$ 個の分點 $a_k (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ を設けて，n 個の細區間 $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \cdots, (a_{n-1}, \infty)$ をつくり

$$p_k = F(a_{k+1}; \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \cdots, \bar{\theta}_l) - F(a_k; \bar{\theta}_1, \cdots, \bar{\theta}_l) \tag{1.13}$$

$Np_k = \bar{m}_k$ とおく．かくする限りに於いて，適合度試驗に於いて直接に問題になるのは分布の曲線そのものではなくして，これを分割した組別にした分布である．從つて，適合の良否の直接に關係するところが cell distribution であるのは勿論である．組 (cells) に分ける方法が違へば，適合の良否も違つてくるのは當然である．

〔4〕 P_p の値が 1 に餘りに近いときには，當該假說は棄却しなければならぬ．この思想の根據には，§2, 注意 1 で述べた如き見方が加味されてゐる事は否めない．P_p の値が 1 に近ければ近い程適合度がよいといふ考へに陥り易い．併し，§2 の終りに述べた考へに支持を與へる限り，それは必ずしも正當とは云へない．これに關して，直接注意を與へたものは見當らないが，P_p の近似となるべき，或は代用となるべき $P\chi^2$ に關しては，(II, 參照）多くの教科書に，注意されて居るところである．(II, §7−8 參照)．

〔5〕 尤度 (Likelihood) の概念を入れて單純假說の場合を論じた議論が Neyman-Pearson〔1〕にある．(1.07) の $p(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ に於いて，$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ を一定とし，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ を parameters と考へるならば，その限りに於いては，(1.07) の値が大なれば大なる程，組別分布は $p_1, p_2, \cdots, p_n$ なりといふ單純假說が尤らしいといふ事になる．依つて $p(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ を $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ の函數と考ふると上述の如き意味があるから，これを尤度 (Likelihood) と呼び，$L(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ で表はす．

(1.14) $$L(p_1, p_2, \cdots, p_n) = \frac{N!}{m_1!\, m_2! \cdots m_n!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_n^{m_n}$$

のうちでこれを最大にする $(p_1^0, p_2^0, \cdots, p_n^0)$ を求める．$(p_1^0, p_2^0, \cdots, p_n^0)$ を最尤解 (maximum likelihood solution) といふ．但し $p_i (1 \leqq i \leqq n)$ に關しては $p_i \geqq 0$ で，且つその和が 1 といふ條件がつく．すると $p_i^0 = m_i/N$ となるのである．この事は凡ゆる母集團のなかで最も尤度の大なる母集團は，組別分布が $(p_1^0, p_2^0, \cdots, p_n^0)$ で與へられるものであると云ふ事に外ならない．即ち (1.14) の最大値は

(1.15) $$L(\Omega_{\max}) = \frac{N!}{m_1!\, m_2! \cdots m_n!} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{m_i}{N}\right)^{m_i}$$

又或る特定の $p_i (1 \leqq i \leqq n)$ に關しては $Np_i = \bar{m}_i$ とおく．すると

(1.16) $$\lambda = \frac{L(p_1, p_2, \cdots, p_n)}{L(\Omega_{\max})} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\bar{m}_K}{m_K}\right)^{m_k}$$

となる．明かにこれは $0 \leqq \lambda \leqq 1$ である．

$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ は既に與へられた一定のものである．これを確率事象系 S についての試行の結果即ち sample と見做すに當つて，その尤らしさは λ に依つて計量されるといふ考へ方も可能であらう．この λ を，次に $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ の函數と考へるならば，λ の分布が問題にならう．(1.09) で P_p を定義した如く，P_λ を次の如く導入する事が出來る．論點をはつきりさせる必要上，(1.16) の如き λ は $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ の函數である事を標示する事にし $\lambda(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ とかく．すると

(1.17) $$P_\lambda = \sum_{T} \lambda(m_1', m_2', \cdots, m_n')$$

但し，T なる $(m_1', m_2', \cdots, m_n')$ の變る範圍は，$m_k' \geqq 0$, $m_1 + \cdots + m_n = 1$ にして，且つ

(1.18) $$\lambda(m_1', m_2', \cdots, m_n') \leqq \lambda(m_1, m_2, \cdots, m_n)$$

なる範圍を示す．

〔6〕 尤度比 (Likelihood Ratio) に依り，$(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ なる假說の下に於いて $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$

なる頻度分布を得べき尤らしさを示すが如き，或は $p(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ を以つて，該頻度分布を得べき確率を示すが如き，何れもその根據を確率論におく．即ち，確率論の基本定理の必然的な結果である．それ以外に，吾々は何等附加的な智識を必要としない．換言すれば，研究對象に關して全く無智であるとして行ふ事に外ならない．無智で済むといへば，頗る重寶であるが，無智でもやれるといへば心許なくも思はれよう．若し茲に該研究對象に對して，特殊の智識があつて，頻度分布 $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ の出現の可能性を，λ なり，$p(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ なりでは表現しえない．即ちそこに確率論の組合せの關係以外の制約があるとすれば如何．そういふ風な，現實の結果たる $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 以外の智識は，P_p なり P_λ なりを適用する前に，導入しておくべきである．あらゆる智識を動員して，それを検査せんとす假說のなかに入れておき，全く未知の部分を試料分布の方法即ち P_p, P_λ 等の計算に基き，判斷を加ふべきである．確率事象系 S なり C なりを考へる事は，研究對象に關して $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 及び N 以外に何等われわれは利用すべき智識を必要としない事を意味してゐる．

II. 單純假說の場合

§4. χ^2 分布の導入　單純假說の場合に於ける適合度検査の問題に關しては，その論理的側面は既に I の所說に盡きて居る．併し (1.09) なる和の數値を實際求める事は，極めて多くの手數を必要とする．そのため實用に供される事は先づない．この和を近似的によく表はし，且つ，容易に計算し得べき計量が望ましい．こゝに χ^2 分布の使用さるべき根據があると云へようと思ふ．

〔1〕 先づこの § では，通常如何なる數學的處理により P_p から χ^2 分布が導入されるかを，概略述べて見る事にする．その適用範圍に關する吟味等は §6—§7 に讓る．

便宜上，次の三段に分けて，χ^2 分布に到達することにしよう．

第一段　(1.09) の右邊の各項に於いて現はれる階乗に對して，Stirling の公式を用ゐると

$$
(2.01)\qquad \begin{cases} N! = \sqrt{2\pi N}\, N^N e^{-N} e^{\omega(N)} \\ m_K'! = \sqrt{2\pi m_k'}\, m_K'^{m_K'} e^{-m_k'} e^{\omega(m_k')} \end{cases}
$$

が成立つ．茲に ω なる函數に關しては，

$$
(2.02)\qquad 1/12(x+\tfrac{1}{2}) < \omega(x) < 1/12x
$$

なる事が知られてゐる．(2.01) を (1.09) の各項に代入すると，結局次の等式を得る．

$$
(2.03)\qquad p(m_1', m_2', \cdots, m_n') = \frac{e^{\omega(N)-\sum_{k=1}^{n}\omega(m_K')}}{(\sqrt{2\pi N})^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_n}} \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{Np_k}{m_k'}\right)^{m_k'+\frac{1}{2}}.
$$

第二段　今の場合 $m_1', m_2', \cdots, m_k'$ は (1.10) なる範圍に亘つて動くものとしてゐるから，これらは勿論變數と考へてゐるわけであるが，この變數に對して

$$
(2.04)\qquad m_k' = Np_k + x_k'\sqrt{Np_k} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)
$$

に依つて定義される變數 x_k' を考へる．何故かゝる變換を考へるかと云へば，これに依つて，結局得られる式が簡單になるからと答へる外はあるまいが，(2.04) により $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ のもとの空間で，$(Np_1, Np_2, \cdots, Np_n)$ として表はされた點の附近に，(2.03) の最大になる點があり，これを遠

かるに従ひ，(2.03) の値が小になるといふ事を想起すれば，上の變換は $(Np_1, Np_2, \cdots, Np_n)$ に新座標系の原點を移し，且つ，新座標系の目盛りをかへるものであるから，その目的が奈邊にあるかは想像されよう．

(2.04) に依つて

(2.05)
$$\left(\frac{Np_k}{m_k'}\right)^{m_k'+\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{x_k'}{\sqrt{Np_k}}\right)^{-Np_k - x_k'\sqrt{Np_k}-\frac{1}{2}}$$
$$= \exp\left\{-\left(Np_k + x_k'\sqrt{Np_k}+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{x_k'}{\sqrt{Np_k}}\right)\right\}.$$

茲で

(2.06)
$$\log\left(1+\frac{x_K'}{\sqrt{Np_K}}\right) = \frac{x_K'}{\sqrt{Np_k}} - \frac{1}{2}\frac{x_K'^2}{Np_k} + \varphi(x_K, Np_k)$$

とおき，これを (2.05) に代入し，更にそれらを (2.03) にて用ふる事にすると，結局

(2.07)
$$p(m_1', m_2', \cdots, m_k') = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x_1'^2+x_2'^2+\cdots x_n'^2)}}{(\sqrt{2\pi N})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\cdots p_n}}\Big((1+\psi(x_1', x_2', \cdots x_n', p_1, \cdots, p_n, N)\Big)$$

の形をとる．

但し，茲に

(2.08)
$$1+\psi(x_1', x_2', \cdots, x_n'; p_1, p_2, \cdots, p_n, m_1', m_2', \cdots, m_n')$$
$$= \exp\left\{\omega(N) - \sum_{K=1}^{n}\omega(m_k') + \frac{1}{2}\sum_{K=1}^{n}\frac{x_K' - x_K'^3}{\sqrt{Np_k}} - \frac{1}{4}\sum_{K=1}^{n}\frac{x_K'^2}{Np_k}\right.$$
$$\left.= \sum_{K=1}^{n}\varphi(x_K', \sqrt{Np_k})\left(Np_k + x_K'\sqrt{Np_k}+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

となる．以上の等式は何れも嚴密な意味で成立つもので，近似式ではない．

<u>第三段</u>　茲に於いて近似式をもとめる．先づ N が限りなく增加する場合の狀態を考へる事にし．$p_1, p_2, \cdots, p_n$ は何れも零ならざる確定した一定數とする．そして，二種類の近似を行ふ．

(2.09)
(i) (2.08) で定義される ψ を，(2.07) に於いては 0 とおく．
(ii) 然る後，(1.09) に於ける和を積分でおきかへる．

(1.09) の和のとり方は，(1.10) に依るべきものであつた．然るに今の場合，(i) が假定された事情のもとであるから，(1.10) なる不等式は

(2.10)
$$x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_n'^2 \geqq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

となすべきものとなる．(2.10) で定義された範圍を K とする．(2.09)，(i) 及び (ii) を許容すれば

(2.11)
$$P = C\iint\cdots\int_K e^{-\frac{1}{2}(x_1'^2+x_2'^2+\cdots+x_n'^2)}dV$$

茲で常數 C を決定するには，若し積分區域 K が $(n-1)$ 次元空間全體と一致すれば，P の値は 1 になるといふ事實を用ひればよい．(2.10) を變形すれば結局次の式が得られる事がわかる．

[I.1]
$$P_{\chi^2} = \frac{\int_\chi^\infty s^{n-2}e^{-\frac{1}{2}s^2}ds}{\int_0^\infty s^{n-2}e^{-\frac{1}{2}s^2}ds} \quad (\equiv F_{n-1}(\chi) \text{ とおく})$$

但し

$$\chi^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \tag{I.2}$$
$$\equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{(m_k - Np_k)^2}{Np_k}$$

以上をまとめて置くと次の如くなる.

上述の近似計算が許される範圍に於いては，P_μ の代りに，その近似値として，$P\chi^2$ を用ひても宜しい．玆に，$P\chi^2$ なる値は [I.2] で與へられる．依つて χ^2，從つて χ を計算し，これを用ひて，[I.2] の右邊を求めればよい．$1-F_{n-1}(\chi)$ を稱して，χ^2 分布と云ふ．委しくは自由度 $n-1$ なる χ^2 分布といふ．(χ^2 の分布とは概念上別物である.)

[2] 尤度比 (Likelihood Ratio) からも χ^2 分布が得られる事に注意して置く．(Neyman Pearson [1])

(1.16) からして

$$\log\lambda(m_1', m_2', \cdots, m_n') = -\sum_{i=1}^{n} m_i \log\left(1+\frac{m_i-Np_i}{Np_i}\right) \tag{2.12}$$
$$= -\sum_{i=1}^{n}\{Np_i+(m_i-Np_i)\}$$
$$\times\left\{\frac{m_i-Np_i}{Np_i}-\frac{1}{2}\left(\frac{m_i-Np_i}{Np_i}\right)^2+\cdots\right\}.$$

右邊の各項を計算し，兩邊の指數をとると

$$\lambda(m_1', m_2', \cdots, m_n') = e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(m_i-Np_i)^2}{Np_i}-\frac{1}{3}\frac{(m_i-Np_i)^3}{(Np_i)_2}+\cdots\right\}}. \tag{2.13}$$

依つて，上述 [1] と同じく，N が充分大，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ は何れも餘りに小でないといふ條件のもとで，e の肩の和の各項の第二項を捨て得るとすれば，近似的に

$$\lambda(m_1', m_2', \cdots, m_n') = e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \tag{2.14}$$

となる．かゝる事情のもとに於いては，(1.18) にて T なる $(m_1', m_2', \cdots, m_n')$ に關するところの領域，これを近似的に，K 即ち (2.10) で定義された領域と同一視し得べきものである．かくして P_λ に對する近似値は，こゝでも上述 [1] の $P\chi^2$ にて與へられる事になる．

§5. χ^2 分布の數學的性質　玆では，§4 で到達した函數

$$P\chi^2 = F_{n-1}(\chi) = \frac{\int_\chi^\infty s^{n-2}e^{-\frac{1}{2}s^2}ds}{\int_0^\infty s^{n-2}e^{-\frac{1}{2}s^2}ds}, \tag{I.1}$$

に關して，χ^2 の函數としての behavior を少し調べて置く．

[1] <u>$P\chi^2$ の變形</u>　$\chi^2/2=s$ なる變換に依り

$$P\chi^2 = F_{n-1}(\chi) = \frac{\int_{\chi^2/2}^\infty s^{\frac{n-3}{2}}e^{-s}ds}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \tag{2.15}$$

分子の積分を部分積分法で s の "べき" の指數を下げて行く．

(i) n が奇數のとき ($n \geqq 3$)

$$(2.16)\qquad P_{\chi^2}=F_{n-1}(\chi)=e^{-\frac{\chi^2}{2}}\left\{1+\frac{\chi^2}{2}+\frac{\chi^4}{2.4}+\cdots+\frac{\chi^{n-3}}{2.4.\cdots(n-3)}\right\}.$$

（ii） nが偶數のとき （$n>2$）

$$(2.17)\qquad P_{\chi^2}=F_{n-1}(\chi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_\chi^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2}dy+e^{-\frac{\chi^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{\chi}{1}+\frac{\chi}{1.3}+\cdots+\frac{\chi^{n-3}}{1.3.\cdots(n-3)}\right\}.$$

$n=2$ のとき

$$(2.18)\qquad P_{\chi^2}=F_1(\chi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_\chi^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2}dy.$$

Bortkiewicz [1] は P_{χ^2} の計算には，直接

$$(2.19)\qquad \int_0^\chi \chi^{n-2}e^{-\frac{1}{2}\chi^2}d\chi$$

の數値積分法を採用してゐる.

[2] 分布函數としての $1-P_{\chi^2}$ $1-P_{\chi^2}=1-F_{n-1}(\chi)$ は χ の函數としては $\chi=0$ では 0 であり單調增加して $\chi=\infty$ のとき 1 となる．故に一つの分布函數には違ひない．今 Zをこの分布函數に從ふ確率變數としてそのモーメントを求める.

$$(2.20)\qquad E\{z\}=\int_0^\infty s^{\frac{n-3}{2}}e^{-s}ds/\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)=\frac{n-1}{2}.$$

一般に r 次のモーメント $E\{z^r\}$ については

$$(2.21)\qquad E\{z^r\}=\int_0^\infty s^{\frac{n-3}{2}+r}e^{-s}ds/\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)=\prod_{k=0}^{r-1}\left(\frac{n-1}{2}+k\right)$$
$$=\frac{(n-1)(n+1)\cdots(n+2r-3)}{2^r}.$$

これから特に標準偏差 $\sigma\{z\}$ については

$$(2.22)\qquad \sigma\{z\}=\sqrt{\frac{(n-1)(n+1)}{4}-\frac{(n-1)^2}{4}}=\sqrt{\frac{n-1}{2}}.$$

[3] χ^2 分布の形狀と正規型分布 (normal distribution)

(1°) $n=2$ ならば，χ^2 分布は，$\chi>0$ に關する限りでは，係數をのぞいては，正規型分布の曲線であり，標準偏差は 1 である.

(2°) $n>2$ ならば，

$$(2.23)\qquad s^{n-2}e^{-\frac{1}{2}s^2}\Big/\int_0^\infty s^{n-2}e^{-\frac{1}{2}s^2}ds$$

は $0\leqq s<\infty$ にて單峯型をなし，$s=0$ で s 軸に切し，$s=n-2$ に於いて最大値をとる．それからは減少して，$s=\infty$ では s 軸に切する．故に skew な曲線である.

(3°) nが增加するに從ひ，益々對稱的になり，そうして，適當な平均値並びに適當な標準偏差をもつところの正規型分布で近似的に表はされるに至る．但し，そうした正規型分布の選び方には幾通りも知られてゐる.

（i） $\sqrt{2\chi^2}$ は，平均値 $\sqrt{2n-3}$，標準偏差 1 なる正規型分布で近似的に表はされる. (R.A. Fisher)

（ii） $(\chi^2/n-1)^{1/3}$ は，平均値 $1-2/9(n-1)$，標準偏差の自乘 $2/9(n-1)$ なる正規分布で近似的に

表はされる.(Wilson-Margaret [2]

其他いろいろなのがある. (ii) は殊に優秀で $n \geqq 2$, $0.01 \leqq P\chi^2 \leqq 0.08$ なる範圍で良い近似を示すから, χ^2 分布の表が手許になく, 正規型分布の表があるときには, (ii) を用ふればよいと思ふ. 尤も普通 $n > 30$ で (i) を用ゐるのが慣例のようである.

§6. χ^2 分布の適用範圍 既に §4 で述べた如く, χ^2 分布の導入には二つの近似 (i) 及び (ii) が假定されてゐる. この假定は, N が充分大であり, 且つ $p_1, p_2, \cdots, p_n$ が何れも餘りには小でないとして始めて許さるべきことと思はれる. もつと明確且つ數量的にその條件が規定されて然るべきものと思はれるが, そうした記述は, 私にはまだ見當らない. 根據を示さず, 單に斯々の注意が肝要であると云ふのならば, 教科書類に於いてもよく見受ける. 例へば Yule-Kendall [1] には次の様な意味の事を書いてある. "(a) N は, 相當に大きくなければならぬ. そうでないと $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の各々は正規分布をなさない. この條件は實地に當つては, 殆んど常に滿足されて居る. 大きくなければならぬと言つたが, これを精確に言ふ事は困難である. 併し, 組 (cell) の個數が如何に小であつても, N としては, 先づ少くも 50 でなければならぬ. 但し, 玆に 50 といふ數は大凡の標準を示す任意的なものである. (b) $Np_1, Np_2, \cdots, Np_n$ の何れも餘り小であつてはいけない. 玆でも小さいとは何かを精確には言へないが, 5 といふのが, ぎりぎりのところで, それ以上でなければならぬ. 10にしておけば, もつとよいと思ふ." (Yule-Kendall [1], 422頁) この様な記述は, 他の教科書に於いても注意として附記されてゐるところである. その注意は, χ^2 分布を用ゐるとき, 遵守すべき心懸けとしては, 周知の事項である. (III, §14參照) ところが, 嚴密に, 殘るところなく證明したものは, 今迄にはない. 玆では, これらに關聯したものを擧げて置かう.

[1] Houel の研究 試行の回數或は試料 (標本) の大きさともいふべき N が小なるとき, §4 の近似法 (i) の影響を詳細に論じたものとして, Houel [1] の研究がある. §4 の [I.1] の $P\chi^2$ は, 要するに, N が限りなく大になるときにのみ, (1.09) と一致すべきものであるが, もつと正確には次の如くなると Houel [1] は云ふのである.

$$\sum p(m_1', m_2', \cdots, m_n') = F_{n-1}(\chi) + \frac{1}{N}(R_1S_1 + R_2S_2) + o\left(\frac{1}{N}\right). \tag{2.24}$$

但し

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}\chi^2}\chi^{n-1}}{2.4.\cdots(n+1)}[\chi^2-(n+1)] \\ R_2 = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}\chi^2}\chi^{n-1}}{2.4.\cdots(n+1)}[\chi^4-2(n+3)\chi^2+(n+3)(n+1)] \\ S_1 = \dfrac{1}{8}\left[\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{p_i} - (n^2+2n-2)\right] \\ S_2 = \dfrac{1}{24}\left[5\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{p_i} - (3n^2+6n-4)\right]. \end{cases} \tag{2.25}$$

この結果を出すのに用ゐた方法は, 特性函數の方法ともいふべきものであるが, 計算は相當に煩はしいので原著に譲る. Houel [1] は $3 \leqq n \leqq 17$ なる各 n に對して, 0.05 Level に對應する χ^2 を

[I.1]−[I.2] より求め，かゝる χ^2 を用ゐて R_1, R_2 を計算したところ，$0<R_1<0.08$, $-0.08<R_2<0$ である事を知つた．ところが S_1, S_2 は，一般に正であるから，$R_1S_1+R_2S_2$ は，R_1S_1, R_2S_2 といふ共に絶對値の餘り大でない且つ符號の反對な數の和であるから，その値は大したものでないと思はれる．實際 $N=10$, $n=5$, $\chi^2=9.448$ とし，$p_1=p_2=1/20$, $p_4=6/20$, $p_5=8/20$ としたところ，$S_1=2.33$, $S_2=6.38$, $R_1=0.056$, $R_2=-0.027$ であり，$F_4(9.448)=0.05$, $(R_1S_1+R_2S_2)/N=0.005$ なることを示した．これでは，通常の χ^2 分布に對して補正も必要ない樣である．但し，Houel も斷つてある樣に，χ^2 分布を導くに當つて，必要とした二つの近似法のうち，(ii) の方即ち和を積分でおきかへる方には，何等觸れてゐない事を注意しなければならぬ．

[2] Wilson 等の研究　吾々は，χ^2 分布を導き出したが，それは $p(m_1', m_2', \cdots, m_n')$ より出發しこれを變形し得たものである．然し，結局のところ

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(m_i-Np_i)^2}{Np_i} \tag{I.2}$$

なる量が問題となつた．そこで [I.2] の導入法の根據・由來を問はず，[I.2] 自身を實際値 $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ と理論値 $(Np_1, Np_2, \cdots, Np_n)$ との discrepancy を表はすべき一つの計量と考へて議論をすゝめて行く事が出來よう．かく考へ來ると，上記距り (discrepancy) を表はすべき計量としては，他にもいろいろなものが考へらるべきは當然である．例へば

$$\chi_{W}^2\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{(m_i-Np_i)^2}{Np_iq_i}\quad (\text{但し } q_i=1-p_i) \tag{2.26}$$

の如きも，簡單さに於いて敢て，[I.2] に遜色を見ないと云へよう．Wilson 等三氏共，[I] は次の樣な結果を報告してゐる．

(1°)　$N=6$, $n=3$, $p_1=1/2$, $p_2=1/3$, $p_3=1/6$ の場合の $p(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ の値を實際計算した．即ち

$$p\equiv\frac{6!}{m_1!\,m_2!\,m_3!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m_1}\left(\frac{1}{3}\right)^{m_2}\left(\frac{1}{6}\right)^{m_3} \tag{2.27}$$

なる値を $m_1+m_2+m_3=6$ なる凡ゆる負ならざる整數の組 (m_1, m_2, m_3) に就いて計算した．他方かゝる (m_1, m_2, m_3) の各々について χ^2, χ_W^2 を計算した．すると次の結果が判つた．

(i)　(m_1, m_2, m_3) と (m_1', m_2', m_3') とでは，これら各々に對應する χ^2 が相等しくとも，p は相異ることがある．p が相等しくとも χ^2 が相異る事がある．

(ii)　(i) と同樣な事が χ_W^2 と p とに關しても言へる．

(iii)　p の大小の順序と χ^2 の大小の順序とが必ずしも一致しない．

(iv)　(iii) と同樣の事が p と χ_W^2 とに就いても言へる．

(v)　χ^2 の大小の順序と χ_W^2 の大小の順序とは必ずしも一致しない．併し順序の transpositions は，(iii) 又 (iv) 程には著しくない．

(2°)　(1°) で示した例に依れば，小試料 $(N=6)$ にして且つ組數小なるとき $(n=3)$ には，$p(m_1, \cdots, m_n)$ と，χ^2 乃至 χ_W^2 との關係は必ずしも緊密なものでないだらうと想像される．然りとすれば χ^2 分布の表を用ゐる事の根據は，前述 §4 の所論に，之を求め得ない事にならう．然しかゝる場合に於いても [II.2] 乃至 (2.12) 自體は，距り (discrepancy) 表示の計量としての意味を保持するこ

とには變りはない．それらが實際上，簡便有効である限りに於いて，それ自身として研究の對象たるべきものと言へよう．研究の根據をかく解するならば，それは，この§で論ずる事は論理上不適當である．これに關しては次の§に述べよう．

[3] Neyman-Pearsonの研究　Neyman-Pearson [2] は $N=10$, $n=3$, $p_1=0.2$, $p_2=0.5$, $p_3=0.3$ の場合に於いて，$p(m_1, m_2, m_3)$, χ^2, λ の値を實際計算してゐる．その結果に依ると，P_{χ^2} の方が P_λ よりも P_e に對して better な近似の程度を示す．彼等曰く "The present authors must confess themselves pleasantly surprised to find so close an aggrement in this rather extreme case."

§7. χ^2 **の分布と** χ^2_W **の分布**　§6, [2] で豫告した様な立場から，χ^2 及び χ^2_W の分布を調べ，これに依り，適合度檢査の方法を得ようとするのが本節の目的である．χ^2, χ^2_W を再記すれば，次の如くである．

[I.2]
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(m_i - Np_i)^2}{Np_i}$$

(2.26)
$$\chi^2_W = \sum_{i=1}^{n} \frac{(m_i - Np_i)^2}{Np_i q_i} .$$

§4の所論では，P_p の近似値をあたへるものとして，P_{χ^2} を述べた．そこで必要となる量として P_p が入つて來た次第であつたが，吾々は，茲では [I.2] そのものを，P_p との關係を離れて，直接に研究對象にとらうと言ふのである．何となれば，[I.2] それ自身で，實驗値 $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ と理論値 $(Np_1, Np_2, \cdots, Np_n)$ との距りを表示する計量と考へられるからである．同様な意味では，(2.26) も考へられ，これも，その表式の簡明さに於いて，[I.2] に比し甲乙があるとも思はれない．だから χ^2 と一共に，χ^2_W をも調べて見ようといふ譯なのである．

問題は，χ^2 の分布，χ^2_W の分布，更に進んでは兩者相互の關係等であるが，その何れに於いても N, p_i (從つて $q_i=1-p_i$) $(i=1, 2, \cdots, n)$ は一定の與へられた數であつて，確率變數として考へるものは，m_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ である．詳言すれば，確率變數としての m_i は，$X_1^{(i)}+X_2^{(i)}+\cdots+X_N^{(i)}$ に等しいのである．即ち吾々は，茲に吾々の出發點たる確率事象系 S に立歸り，S に關係した確率變數としての χ^2, χ^2_W 等を論じようと云ふのである．かゝる意味に於ける確率變數 χ^2 の分布は，既述の χ^2 分布と區別する事を必要とするのは勿論である．前者 χ^2 の分布が，χ^2 分布 [I.1] であらはされるのには，例へば §4 で述べた様な條件が滿足さるれば宜しいが，若しそうした條件が滿足されなければ，χ^2 の分布必ずしも χ^2 分布とはならない．χ^2 の分布と χ^2 分布とのこの區別は重要である．

χ^2 の分布，χ^2_W の分布を求むる正統的な方法としては，確率事象系 S を考へて，χ^2, χ^2_W 等の平均値・標準偏差，更に進んで高次のモーメントをいくらか求めるといふ方法を考ふべきである．事實その様な研究方針を採つて，計算を遂行したものとしては，Wilson-Hilberty-Mahler [1] の研究があり，又遺傳學方面の問題に關聯した興味ある論究として Cochran [1], Haldane [1], Grnüeberg and Haldane [1] があつて，應用上相當有効な結果を擧げて居る．

一般に，確率變數 Z の平均値・標準偏差が存在すれば，これらを夫々 $E\{Z\}$, $\sigma\{Z\}$ で表はす事

にする．この規約の下で書くと，次の如き結果が知られてゐる．

(2.28) $$E\{\chi^2\}=n-1,\quad E\{\chi^2_W\}=n.$$

そこで χ^2, χ^2_W の代りに確率變數 $\chi^2/(n-1), \chi^2_W/2$ を考へるとする．

(2.29) $$\sigma^2\left\{\frac{\chi^2}{n-1}\right\}=\frac{2}{n-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\frac{1}{N(n-1)^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}-n^2\right\},$$

(2.30) $$\sigma^2\left\{\frac{\chi^2_W}{n}\right\}=\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\frac{1}{Nn^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}-n^2\right\}$$
$$+\frac{2n-1}{Nn}\left(\frac{p}{q}\right)_m^2+\left(2-\frac{3}{N}\right)\left[\frac{n-1}{n}\left(\frac{p}{q}\right)_m^2-\frac{1}{n}\sigma^2\left(\frac{p}{q}\right)\right].$$

但し，茲に

(2.31) $$\left(\frac{p}{q}\right)_m=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{q_i},\quad \sigma^2\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i}{q_i}-\left(\frac{p}{q}\right)_m\right)^2$$

である．更に進んで χ^2 と χ^2_W との相互關係を調べる目的で次の値を求めるものである．

(2.32) $$E\left\{\frac{\chi^2}{n-1}\frac{\chi^2_W}{n}\right\}=\frac{2}{n-1}\left(1-\frac{3}{2N}\right)+\frac{1}{Nn(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p_i}-n^2\right)+\frac{1}{N}\left(\frac{p}{q}\right)_m.$$

これらの關係から次の事がわかる．

(1°) 以上本節の關係式 (2.28)—(2.32) では，$p_1, p_2, \cdots, p_n, N, n$ に關して何の制限なしに成立つ．これが强味であるが，併しその代り，一般的に言つて，平均値・標準偏差だけでは済されないのであつて，χ^2, χ^2_W 等の分布を見るには，それらの higher moments まで當つて見なければならぬ．Haldane [1], [2] にはそうした研究がある．方法は簡潔ながら，結果は，覺へやすくも，取扱ひやすくもない様である．

(2°) Nを限りなく大きくとるとして，上述諸關係式から分かる事は，

(2.33) $$\sigma^2\left\{\frac{\chi^2}{n-1}\right\}=\frac{2}{n-1},\quad E\left\{\frac{\chi^2}{n-1}\frac{\chi^2_W}{n-1}\right\}=\frac{2}{n-1},$$
$$\sigma^2\left\{\frac{\chi^2_W}{n}\right\}=\frac{2}{n-1}+2\left[\frac{n-1}{n}\left(\frac{p}{q}\right)_m^2-\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n}\sigma^2\left(\frac{p}{q}\right)\right].$$

(3°) Nが充分大なりとし，從つて (2.33) が近似的に成立つものとしてよい場合を考へる．すると，近似的に $\chi^2/(n-1)$ は平均値 1 で，標準偏差 $\sqrt{2}/\sqrt{n-1}$ であると考へてよいのは確かである．更に考察を進めて，平均値・標準偏差が，上述の如き正規型分布で近似的に表はされるものと假定するならば，吾々は結局次の様な事をいへる．例へば——Nが充分大なるときには，χ^2 の値が $n-1\pm0.674\sqrt{2(n-1)}$ の範圍内にある確率は大凡 1/2 であり，$n-1\pm3\sqrt{2(n-1)}$ の範圍内にある確率は大凡 0.9975(=1−0.0025) である．ところが，こうした近似は實は，§5, [3], (2°) で述べた近似程にはよくはない事が知られてゐる．(Wilson-Hilberty [1])

§8. 總括　單純假説に於ける限り，適合度檢査に關する諸問題の關係は割合簡單にすむ．χ^2 分布は，若干の假定のもとでは P_p の代用となる事が分かつた (§4)．その條件を精しく調べた研究もある．(§6) 又，P_p との關係を離れて，一つの計量として χ^2 の分布を論ずる方向に進んだ研究もある．(§7) その研究並びに，χ^2 分布の函數論的考察 (§5) からわかる事は，近似的には，χ^2 の分

布，χ^2 分布は，ある意味で正規型分布で表はされる事である．(§5, §7) 勿論それは若干の附帶條件のもとに於いてである．正規型分布で近似的に表はされる限り，χ^2 の起り得べき値に關しては，該正規型分布の平均値の周りに例へば，該正規分布の標準偏差の幾倍かをとつた限界内に可能性が多く，その限界外に落ちる確率も，近似的に推算されよう．それ故，吾々は，次の樣な言葉を容易に首肯し得るであらう．

適合度 (Goodness of Fit) といふ言葉が禍となつて，P ($P\chi^2$ を指す．筆者註) が大であればある程，假說の證明が一層滿足なものとなるといふ誤謬に陷つてゐる人が，從來あつた．往々にして，$P\chi^2$ の値として 0.999 以上の値が報告されて居る事がある．ところが，假說が眞實であるとするならば，この樣な値は，1000 回に 1 回しか起らぬものである．こうした場合，假說は，はつきり，僞なりとして棄却すべきものである．それは，恰かも $P\chi^2$ の値が 0.001 であつた場合に於て，そうすべきであると何等異らない．(R.A. Fisher [6], p. 83. 意抄譯)

“P の値が小さい場合だけが，吾々の假說乃至試料法に疑ひを挾む樣になるのではない．1に極めて近い P の値も，亦そうなる可能性がある．これは，やゝ驚くべき結果であるが，その起りはこうである：Pの大きな値は，普通，これに對應する χ^2 の値が小さいためである．即ち理論と事實とが，極めて近密な合致を意味するのである．ところで，極めて近密な合致は，“too good to be true” である．” (Yule-Kendall [1], p. 423)

最後に，χ^2 分布と χ^2 の分布とは理論上別物である．(§7 參照) この用語上の區別を注意していただきたい．

尙以上の所論を I, §1 に掲げた第一例に適用して見よう．(第二例に關しては III, §14 參照)

第一例 (I, §1 參照) この場合は確かに，單純假說である．このまゝで，cells の個數 n は 11 であるが，$m_i = N_{\text{計}(i-1)}$ $(i=1, 10)$ の如きものは，何れも 5 より小である．それ故，理論値の分布として採用するときにはいくつかの組 (cells) を合併して論ずる必要がある．尙もう一つ，注意すべき事がある．それは，k_r (計算) $(r=1,2,\cdots,9)$ は皆その値をまるめて小數部を四捨五入したが，k_0，は丁度 0.5 であつたため，0〜1 として置いた．若し整數値を固執するならば，$k_0=1$ とすれば $k_{10}=0$，$k_0=0$ とすれば $k_{10}=1$ とするのが一つの合理的な方法であらう．次に筆者が試みにやつて見た四つの場合を擧げておかう．

(*a*) $n=9$ とし，理論値を 6, 22, 58, 103, 123, 103, 58, 22, 5 とした場合．$\chi^2 \fallingdotseq 8.11$, $P=0.43$ (自由度 8)

(*b*) $n=9$ とし，理論値を 5, 22, 58, 103, 123, 103, 58, 22, 6 とした場合．$\chi^2=6.612$, $P=0.58$ (自由度 8)

(*c*) $n=8$ とし，理論値を 28, 22, 58, 103, 123, 103, 58, 27 とした場合．$\chi^2=7.014$, $P=0.43$ (自由度 7)

(*d*) $n=8$ とし，理論値を 27, 22, 58, 103, 123, 103, 58, 28 とした場合．$\chi^2=6.316$, $P=0.50$ (自由度 7) 計算は，Fisher-Yates, Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research. (1938), Table IV, Distribution of χ^2 に依つた．但し，同表に n とあるは自由度の事

であるから，吾々の n (cells の個數) より，單純假説の場合は，1だけ1である．計算は一次補間に止めたが，上記何れを見ても，$P>\alpha=0.05$ であるから，當該理論値は棄却すべきものではないといふ事が，χ^2 檢査で云へたわけである．

III. 複　合　假　説

§ 9. 問題の說明と史的回顧　複合假説の場合に於ける適合度檢査法の理論的根據は，確率事象系 C の想定にある事を既に明らかにした．これは，單純假説の場合に，それの根據が確率事象系 S の想定にあるといふ事に對應すべきものである．さて，II, §4 に於いて，既に吾々は，P_n から出發して χ^2 なる變量の導入さる筋道と，そのための條件とを考察した．同様な近似計算方法のうち，複合假説の場合にも適用され得べきものもあらう．今そうしたものを繰返さない．吾々は茲では，單純假説に於ける χ^2 に對應するものを求め，これに論究を集中させる事にする．

確率事象系 C の想定と云ふ事を，もつと詳細に述べよう．茲に n 個の個所がある．總數 N の個體が，各個所に分かれて入る．i 個番目の個所に入つた個體の數を m_i とする．これを觀測個數 (observed numbers) といふ．今茲に假説を設ける．それは，一つの母集團を考へると云つてもよい事になるのであるが，上記第 i 番目の個所に入る確率を p_i とするといふ事である．從つて N 回の獨立な任意試料抽出 (Random Sampling) では，第 i 番目の個所に入るべき個體の個數は Np_i なる期望値をもつ．茲に，最も注意すべき事は，$\{p_i\}(i=1,2,\cdots,n)$ なるものは，確定且つ既知のものとは考へない事である．若し，そう考へるならば，それは單純假説の場合となる．$\{p_i\}$ に對しては，單にかくの如くあるべしと推定された値，即ち推定値 (estimated value) が見當付けられるだけである．然らば何によつて推定するか，それは即ち觀測事實，即ち $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ といふ事——即ち第 i 番目の個所には m_i 個入つてゐたといふ實驗事實——に依るのである．その具體的方法は，あとで例に就いて委しく述べるが，今かくして各 Np_i は n_i なるべしと推定されるものとするのである．然らば，單純假説のときの χ^2 に對應すべきものとして，次式で定義される様な χ_s^2 即ち

$$\chi_s^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{(m_i - n_i)^2}{n_i} \tag{3.01}$$

を採用しては如何といふ事は誰しも想到するところであらう．

然らば，χ^2 はこの場合，如何に書かるべきであるか．それは勿論

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{(\bar{m}_i - n_i)^2}{\bar{m}_i} \tag{3.02}$$

となるべきである．但し茲に $\bar{m}_i = Np_i\ (i=1,2,\cdots,n)$．今の場合 (3.02) を問題にするわけには行かない．何者 $p_i\ (i=1,2,\cdots,n)$．從てつ $\bar{m}_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ が未知であるからである．これに對して，次の様に言ふ論者があるかも知れない．成程未知ではある，然し何か各 m_i として適當な數値を假定して置いてやればよいではないかと．然り，それは勿論可能である．然し，それではその問題は單純假説の場合となる．何者，$\bar{m}_i$ 從つて p_i を指定したのだからである．更に，論者が質問して曰く，それでは，上に相當な數値を假定するといつたが，それを偶々 $n_1, n_2, \cdots, n_n$ にしたならば如何と．この場合，指定したといふ事からいへば單純假説ではあるが，しかも，實際の値は，χ_s^2

に等しいものではないかと．これに對して答へよう．然り，外見上の形は χ_s^2 と同じである．然し意味が違ふ．それは，χ_s^2 なるものを確率變數として如何に見るかといふ事に關係する．先づ $n_1, n_2, \cdots, n_n$ は，實驗値 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ から決定されるのであるから，一般に

$$n_k = \varphi_k(m_1, m_2, \cdots m_n) \tag{3.03}$$

として表はされる事は，論者の場合も，吾々の χ_s^2 でも何等變りない．併し論者の場合では，上の式 (3.03) の右邊の $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ は確率變數と考へない．これに反し，吾々の χ_s^2 では，それをも確率變數と考へるのである．II, §4 の確率事象系 C で說明した如く，m_i に對應する確率變數は $X_1^{(i)}+X_2^{(i)}+\cdots+X_n^{(i)}$ である．今暫く簡單のため $M^{(i)}$ とかく事にすると，論者の場合では

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(M^{(i)}-\varphi_i(m_1, m_2, \cdots, m_n))^2}{\varphi_i(m_1, m_2, \cdots, m_n)}, \tag{3.04}$$

吾々の χ_s^2 では

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(M^{(i)}-\varphi_i(M^{(1)}, M^{(2)}, \cdots M^{(n)}))^2}{\varphi_i(M^{(1)}, M^{(2)}, \cdots, M^{(n)})} \tag{3.05}$$

が夫々，確率變數として考へられるものである．前者の場合，確率變數として論ずるのには，φ_i の形は意味（影響）をもたない．だから，その限りに於いては，$\varphi_i(m_1, m_2, \cdots, m_n)=b_i$ とすれば，$b_1, b_2, \cdots, b_n$ なる n 個の數が，如何なる根據に由るかは問はず，天降りに與へられたと思ふといふ事に相當する．後者 (3.05) に於いては，$\varphi_i(i=1, 2, \cdots, n)$ の形が，これに甚大な影響をもつのは勿論であつて，吾々がさきに，複合假說の場合，指定方法をも考慮に入れねばならぬと云つたのは，χ_s^2 の場合，(3.05) をそれに對應する確率變數として考へるといふ意味に外ならない．そして吾々の場合には，何等かの推定法 φ_i に依り，$n_i(i=1, 2, \cdots, n)$ が決定され，從つて χ_s^2 の値は確定したのであるけれども，$n_i(i=1, 2, \cdots, n)$ は何處もこれは推定値であり，n_i/N は p_i の推定値にとゞまる．母集團の $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ の値を指定してゐない．この意味で假說は複合的である．

第三例　Gauss の分布即ち正規型分布

$$\Phi\left(\frac{x-a}{m}\right)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx \tag{3.06}$$

の場合を問題にする．變數の動く範圍は $(-\infty, \infty)$ であるから，次の様な組に分つ．

$$-\infty = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = +\infty. \tag{3.07}$$

即ち第 i 番目の組は (a_{i-1}, a_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$ である．玆に $a_1, a_2, \cdots, a_n$ は定數とする．從つて第 i 番目の組に屬すべき確率は

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{a_i}^{a_i}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx. \tag{3.08}$$

今觀測事實として，第 i 番目の組に屬するものは，m_i 個なりとする．

さて玆で，母集團平均値 m，母集團標準偏差 σ は未知であるが，とにかく，(3.06) の如き型の母集團よりの試料なりとして，この觀測事實を見る．すると m, σ は，$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ から推定 (estimate) さるべきである．問題は，m, σ をきめる事である．然るに組の數は n である．$n>3$ ならば（一般にそうであるが），m, σ を推定する方法は幾通りも可能である．例へば，$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$

から試料平均（sample mean）及び試料標準偏差（sample standard deviation）をつくり，Sheppard の補正（Correction）を施して後，m と σ とを推定するといふのも一つの方法である．Gauss 型分布の場合，m, σ の推定法としてはこれが或る意味で最良なものである．即ち推定法の理論でいへば efficient でありしかも sufficient である．併し他にも方法はある．

(3.09)
$$m_k = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx \qquad (k=i,j)$$

なる二つの式を解いて，m と σ とをきめてよい．i, j の選び方は任意である．

この様にして，何等かの方法に依り m と σ とを決定して後，かくして推定された値——これを m, σ と區別するため m_0, σ_0 とかく——を用ゐて n_k を計算する．即ち

(3.10)
$$n_k = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-\frac{(x-m_0)}{2\sigma^2}}dx \qquad (k=1,2,\cdots,n).$$

この $n_k(k=1,2,\cdots,n)$ なる n 個の値は，m_0, σ_0 に關係する量である．推定法が違へば，m_0, σ_0 が違ふであらうから，結局，推定法に依つて，$n_k(k=1,2,\cdots,n)$ なる n 個の値は違ふのが一般である．例へば，(3.09) を解いてきめた場合には，$m_i = n_i(i=k,j)$ は成立つが，その代り，$i \neq k, j$ ならば，m_i と n_i とは，相當違ふであらう．

<u>第四例</u>　Poisson の分布 (1.03) の場合を問題にする．この場合，變數のとり得る値は，負ならざる整數と考へられる．又餘り大きな正の整數をとる確率は極めて小さい．そこで，次の様な n 個の組に分つ．$0, 1, 2, \cdots, n-2$ の各々をとる $n-1$ ケの組及び $n-1$ 以上の値をとる一組，合計 n ケの組がこれである．今觀測結果として，i なる値をとりしもの（即ち第 i 番目の組に屬せしもの）の個數を m_i なりとする．母集團としては，i なる値をとる確率は $h^i e^{-h}/i!$ であるから，$\bar{m}_i = Np_i = Nh^i e^{-h}/i!$ である．

Poisson の分布には，parameter は一つしかない．これを推定するに，多くの方法がある．例へば，m, N は既知だから

(3.11)
$$m_1 = Ne^{-h}$$

を解いて，h を定めるといふ推定法もある．即ち $h_0 = \log(N/m_1)$ となり，これを用ゐれば，$m_k = N(h_0)^{k-1}e^{-h_0}/(k-1)!$ としてきまる．

他の推定法としては，Poisson の分布 (1.03) に於て h は母集團平均（Population Mean）なる事實に留意して，母集團平均を，試料平均で推定するといふ方針をとる．即ち h の推定値 h_1 として

(3.12)
$$h_1 = \frac{0.m_1 + m_2 + 2m_3 + \cdots + (n-1)m_n}{N}$$

をとる．これから，$n_k = N(h_1)^{k-1}e^{-h_1}/(k-1)!$ なる推定値をとる．この h_1 が或る意味で最良の推定値である．推定法の理論に依れば，h_1 と k_0 とは必ずしも一致しない．故に n_k の値は，h_0 を用ふか h_1 を用ふかに依つて，相異るのが一般である．

以上は，單なる二例に過ぎない．然し，かゝる事情即ち，推定方法を異にすれば，一般に $\{n_k\}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ が相異るべしといふ事情の一般に成立つべき事は容易に想像される．然らば χ_1^2 に

用ふべき $\{n_k\}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ は，何を以つてすべきか．これに關して，χ^2 及び χ_s^2 の創始者なる Pearson, K. [1] は，次の如く言つて居る．"……But we are supposed to fit a distribution or curve to the sample so as to get the "best" values of the constants." (Pearson, K. [1], p. 165)

K. Pearson [1] のこの敍述は，明確なりとは云へない．特に "best" とは何かが問題である．こうした不明確さを突き止め，これに理論的な解明を與へ，以つて，的確な應用に貢獻したのが R. A. Fisher [1] 以後の研究であつて，吾々は茲に，近代理論統計學特に數理統計學の功績の一つを見出すわけである．

この方面の歴史的な發達徑路を豫め述べて置かう．Pearson, K. [1] に依つて，χ^2, χ_s^2 が導入されたのであるが，複合假說の場合，理論値と實驗値との距りを表はす一計量としての χ_s^2 分布は，單純假說の場合の χ_2 の分布と等しく，共に $F_{n-1}(\chi)$ (II, §5) で表はされる．即ち (χ^2 分布) となした．但し n は，組 (cells) の個數である．但し當時は，假說の單純とか複合といふ概念は定義されてゐなかつたら，理論値を a priori known であるか否かに依つて分けたわけである．χ^2 に關しては Pearson, K. [1] の議論は正しかつたのであるが，χ_s^2 に關しては重大な誤謬があつた．Pearson, K. [1] は 1900年の論文であるが，爾來 1922年，Yule, G. U. [1] がその誤謬に氣付く迄，何人も氣が付かつなかたと云ふ事は，今から之を觀ると，誠に不思議な事實と云はねばならぬ．しかも Yule, G. U. [1] と雖も，Pearson, K. [1] の誤謬を，理論的な根據から指摘したのではなくして，contingency table に關する試料抽出實驗 (sampling experiments) に於いて，χ_s^2 を Pearson, K. の主張の如き分布に從ふとしては，事實にひどく違つたものになるといふ實驗的事實を揭げたに過ぎない．組 (cells) の個數が n 個のとき χ^2 の分布は $F_{n-1}(\chi)$ に從ふと言つたが．このとき $n-1$ を自由度といふ事にする．(自由度の意味は §14 參照) すると χ^2 の分布は，自由度 $n-1$ の χ^2 分布に從ふといふ Pearson, K. [1] の主張は正しいが，χ_s^2 の分布も亦自由度 $n-1$ の χ^2 分布に從ふといふ Pearson, K. [1] の議論には理論的缺點がある．これを指摘し χ_s^2 の分布は，必ずしも χ^2 分布で表はされるものではない．理論値の推定方法が若干の性質をもつ場合に於てのみ，χ^2 分布で表はれるものであり，且つその場合と雖も，自由度 $n-1$ の χ^2 分布に從ふのではない．推定すべき未知の parameters 個數を k とすると，自由度 $n-k-1$ の χ^2 分布，即ち $F_{n-k-1}(\chi)$ なる分布に從ふといふ結果を示したのは，Fisher, R.A. [1]—[5] に負ふものである．1922年頃といへば，Fisher, R. A. [4] が推定の理論を發表した頃であり，數理統計學の一時期を劃しつゝあつた頃である．Pearson, K. [1] の誤謬を指摘することは，實に確固たる推定の理論を必要としたと云つても過言ではないのである．さて吾々は，理論値の推定方法が若干の性質をもつ場合と云つたが，Fisher, R.A. [3] に從ふと，それは efficiency 1 なる推定方法たる事を要する．efficiency 1 なる推定方法は幾通りもある．Fisher, R.A. [3] の使用したのは最小 χ_s^2 法といふべきものである．(§12 及び 13參照) ところで，Fisher, R. A. [3] の論文は，氏の他の論文がそうであるが如く，記述が簡潔にすぎて，往々にして追求し難い事がある．Neyman-Pearson [1] は，そのため，やゝ異つた方法からして，最小 χ_s^2 法 (χ_s^2 を用ゐる方法) を論究したが，之が Neyman-Pearson [1] の χ_1^2 といふべきもので，

それは要するに，Fisher, R.A. [3] の所論を補足したものである．これと共に，Neyman-Pearson [1] の論文の重要なのは，彼等の Theory of Testing Statistical Hypotheses の立場から，問題の論理的構造を明かにした事である．(§13 参照)

上述とやゝ系統を異にした研究に，Sheppard [1] がある．これも Fisher と同じく，Pearson, K. [1] の誤謬を是正する目的をもつものである．氏はかくして，χ'^2 なる計量を導入するに至つた．その研究は理論的にも重要であり徹底的であり，又氏の實驗した試料實驗も貴重なものであるが，議論の立て方に大きな弱點があつて，このため，Irwin の如きは，Sheppared [1] の理論は Theoretical Interest に止ると言ふ程である．要するに，推定方法に關する Sheppard [1] の理論が不徹底なためであつた．

以上を要するに，Pearson, K. [1] の議論は誤謬があつたが，適當な條件のもとに於いては，複合假設の場合でも χ^2 分布を使用出來る．但し，自由度は $n-1$ でなく，$n-k-1$ にしなければならぬといふ結論が，R.A.Fisher, Neyman-Pearson に依つて樹立されたわけである．玆に於いて，吾々は再び χ^2 分布に遭遇する．以つて χ^2 分布の，如何に重要であり且つ又重寶なものであるかを窺ふに足るであらう．

§10. K. Pearson の研究　既に述べた如く，Pearson, K. [1] の研究は，χ^2 分布の生誕を記念するものである．その所論は，單純假設の場合には正しいものであるが，複合假設の場合には重大な誤謬があつた．後者の場合に關する其以後の研究は，實にこの誤謬の解決にあつたと云つても餘り過言ではないと思はれる．吾々は玆に，Pearson, K. [1] の研究を紹介しよう．

Pearson, K. [1] で豫備的な定理として擧げられるものは，現代の確率論の用語を以つて表現すれば，次の如くである．

定理 Pearson K. [1]　玆に n 個の確率變數 $Y^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ がある．これらに關して次の (1°)—(3°) を假定する．

(1°)　$Y^{(i)}$ の平均値の，平均値・標準偏差を夫々 0 及び σ_i とする．即ち $E\{Y^{(i)}\}=0,\ \sigma\{Y^{(i)}\}=\sigma_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$

(2°)　各 $Y^{(i)}$ は正規分布をなす．

(3°)　$Y^{(k)}$ と $Y^{(l)}$ との相關係數を $r_{k,l}$ とするとき，即ち $r_{k,l}=E\{Y^{(k)}Y^{(l)}\}/\sigma\{X_k\}\sigma\{X_l\}$ とするとき，これらのつくる n 次の行列 $R=\|r_{k,l}\|$ に關しては，その行列式 $|R|$ は 0 ならずとする．

然るとき，以上の (1°)—(3°) の假定のもとに於いては，次の (i) 及び (ii) が成立つ．

(i)　各 $Y^{(k)}$ が夫々或る任意に與へられた數 $x^{(k)}$ になるといふ n 個の事象が同時に起る確率密度は

$$Ce^{-\frac{1}{2}\chi^2} \tag{3.13}$$

に等しい．但し，玆に

$$\chi^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{R_{k,k}}{R}\frac{(x^{(k)})^2}{\sigma_k^2}+2\sum_{p<q}^{(1,2,\cdots,n)}\sum\frac{R_{p,q}}{R}\frac{x^{(p)}}{\sigma_p}\frac{x^{(q)}}{\sigma_q}. \tag{3.14}$$

玆に，$R_{k,k}, R_{p,q}$ は行列式 $|R|$ にて夫々 $r_{k,k}, r_{p,q}$ に對應する小行列式である．換言すれば，行列

R の逆行列 $R^{-1}=\|E_{i,k}\|$ とおけば

$$(3.15)\qquad \chi^2 = E_{i,k}x^i x^{(k)} \left(=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E_{i,k}x^{(i)}x^{(k)} \text{ の意味}\right)$$

と書かるべきものである.

(ii) $E_{i,k}Y^{(i)}Y^{(k)}$ なる確率變數を考へれば

$$(3.16)\qquad \Pr.\{E_{i,k}Y^{(i)}Y^{(k)} > \chi^2\} = \frac{\int_\chi^\infty e^{-\frac{1}{2}\chi^2}\chi^{n-1}dx}{\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\chi^2}\chi^{n-1}dx}.$$

注意: $E_{i,k}Y^{(i)}Y^{(k)}$ は i,k についての和を意味する. 即ち

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}E_{i,k}Y^{(i)}Y^{(k)}$$

に等しいのである.

この定理の證明には, 何の困難もない. 問題は, これを如何に適合度檢査の場合に應用するかである.

(A) <u>單純假說の場合</u> Pearson, K. [1] の所論に於いても, 實質的には確率事象系 S を考へて居るわけであると解すべきである. I, §2 の記號を用ゐると, $Y^{(i)}=X_1^{(i)}+X_2^{(i)}+\cdots+X_N^{(i)}-Np_i$ とおいて, これを上の定理の條件を滿足するか否かを調べて見る.

(a) $E\{Y^{(i)}\}=0,\quad E\{(Y^{(i)})\}=Np_i(1-p_i)$

(b) $E\{Y^{(i)}Y^{(k)}\}=-Np_ip_k$ 從つて $r_{i,k}=-\sqrt{p_ip_k/(1-p_i)(1-p_k)}$

(c) 今の場合 $Y^{(1)}+Y^{(2)}+\cdots Y^{(n)}=0$ といふ關係がある. 何故ならば

$$\sum_{i=1}^{n}Y^{(i)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}(X_k^{(i)}-Np_i)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}X_k^{(i)}-N\sum_{i=1}^{n}p_i=N-N=0.$$

それ故, 若し, n 次の行列式 $R_n=|r_{i,k}|$ をつくるならば, これは 0 になる. それでは上の定理の條件 (3°) は滿足されない. 併し, $Y^{(1)},Y^{(2)},\cdots,Y^{(n-1)}$ なる $n-1$ 個の確率變數のみを考へ, $n-1$ 次の行列式 $R_{n-1}=|r_{i,k}|$ $(i,k=1,2,\cdots,n-1)$ をつくるならば, $R_{n-1}\neq 0$ であるかも知れないといふ希望はある. 實際計算してみると確かにそうなつてゐる.

(d) 各 $Y^{(i)}$ の分布は, 二項分布のそれであるが, 大數の法則に依つて (委しくいへば中心極限定理に依つて) わかる樣に, N が充分大きく, 且つ p_i, q_i の何れも餘り 0 に近くないとすれば, 各 $Y^{(i)}$ の分布は, 平均値 0, 標準偏差 $\sqrt{Np_i(1-p_i)}$ なる正規分布で近似的にあらはされる.

以上の考察に依り, (d) なる事項が成立するものとし, 從つて, 上記定理の假定 (2°) は滿足されてゐるものとする. そして上記定理を $Y^{(1)},Y^{(2)},\cdots,Y^{(n-1)}$ について適用する. それ故, 上の定理で n は $n-1$ とおいて考へねばならぬ. かく規約する限り, $R_{n-1}\neq 0$ がいへさへすれば, 上記定理を應用し得る事になる. 以下 $R_{n-1}\neq 0$ を證明し, 尙進んで上述の Pearson の χ^2 が II, §4 で與へた χ^2 と一致する事を示さう.

Pearson, K. [1] に從ひ, $p_k=\sin^2\beta_k$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$ なる變換を行ふと, $r_{i,k}=-\tan\beta_i\tan\beta_k$ $(i\neq k)$ となる. そこで, 次の樣な計算を行ふ. 簡潔のため R_{n-1} を R とかき, その小行列を $R_{p,q}$ とかく.

$$
(3.17)\qquad R = \begin{vmatrix} 1 & -\tan\beta_2\tan\beta_1 & \cdots\cdots & -\tan\beta_{n-1}\tan\beta_1 \\ -\tan\beta_1\tan\beta_2 & 1 & \cdots\cdots & -\tan\beta_{n-1}\tan\beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\tan\beta_1\tan\beta_{n-1} & -\tan\beta_2\tan\beta_{n-1} & \cdots\cdots & 1 \end{vmatrix}.
$$

$$
= (-1)^{n-1}\tan^2\beta_1\tan^2\beta_2\cdots\tan^2\beta_{n-1}\times J
$$

但し

$$
(3.18)\qquad J = \begin{vmatrix} -\cot^2\beta_1 & 1 & 1\ \cdots\cdots & 1 \\ 1 & -\cot^2\beta_2 & 1\ \cdots\cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1\ \cdots\cdots & -\cot^2\beta_{n-1} \end{vmatrix}.
$$

同様にして

$$
(3.19)\qquad \begin{aligned} R_{1,1} &= (-1)^{n-2}\tan^2\beta_2\tan^2\beta_3\cdots\tan^2\beta^{n-1}\times J_{1,1} \\ R_{1,2} &= (-1)^{n-1}\tan\beta_1\tan\beta_2\tan^3\beta_3\cdots\tan^2\beta_{n-1}\times J_{1,2}. \end{aligned}
$$

そこで今

$$
(3.20)\qquad \gamma_k = \cot^2\beta_k = \frac{1}{p_k} - 1\,,\quad \lambda = \prod_{k=1}^{n-1}(1+\gamma_k)
$$

とおくと

$$
(3.21)\qquad J_{i,k} = (-1)^{n-2}\frac{\lambda}{(\gamma_i+1)(\gamma_k+1)}\quad (i \neq k)
$$

となる事がわかる.

残るところは $J_{k,k}\,(k=1,2,\cdots,n-1)$ を求める事である. 行列式論から容易にわかる様に

$$
(3.22)\qquad \begin{aligned} & J_{1,1} - \gamma_2 J_{1,2} + J_{1,3} + \cdots + J_{1,n-1} = 0 \\ & J = -\gamma_1 J_{1,1} + J_{1,2} + \cdots + J_{1,n-1} \end{aligned}
$$

を得る. これから (3.21) を使つて

$$
(3.23)\qquad \begin{aligned} J_{1,2} &= \frac{(-1)^{n-2}\lambda}{1+\gamma_1}\left(1-\frac{1}{1+\gamma_2}-\frac{1}{1+\gamma_3}-\cdots-\frac{1}{1+\gamma_{n-1}}\right) \\ J &= (-1)^{n-1}\lambda\left(1-\frac{1}{1+\gamma_1}-\frac{1}{1+\gamma_2}-\cdots-\frac{1}{1+\gamma_{n-1}}\right). \end{aligned}
$$

然るに

$$
(3.24)\qquad \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1+\gamma_k} = \sum_{k=1}^{n-1}p_k = 1-p_n
$$

となるから

$$
(3.25)\qquad J = (-1)^{n-1}\lambda p_n\,,\quad J_{1,1} = (-1)^{n-2}\frac{\lambda}{1+\gamma_1}(p_1+p_n).
$$

かくの如くして一般に

$$
(3.26)\qquad J_{k,k} = (-1)^{n-1}\frac{\lambda}{1+\gamma_k}(p_k+p_n)
$$

を得る.

$$
(3.27)\quad
\begin{aligned}
\frac{R_{k,k}}{R\sigma_k^2} &= -\frac{J_{k,k}}{J\sigma_k^2}\cot^2\beta_k = \frac{\cot^2\beta_k p_k^2}{N\sin^2\beta_k\cos^2\beta_k}\left(\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_n}\right) = \frac{1}{Np_k}+\frac{1}{Np_n}\\
\frac{R_{i,k}}{R\sigma_i\sigma_k} &= -\frac{\cot\beta_i\cot\beta_k}{J}J_{i,k} = \frac{1}{Np_n}.
\end{aligned}
$$

そこで

$$
(3.28)\quad
\begin{aligned}
\chi^2 &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{R_{k,k}}{R\sigma_k^2}(x^{(k)})^2 + 2\sum_{i\neq k}^{1,2,\cdots,n-1}\sum\frac{R_{i,k}}{R\sigma_i\sigma_k}x^{(i)}x^{(k)}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(x^{(k)})^2}{Np_k} + \frac{1}{Np_n}\sum_{k=1}^{n-1}(x^{(k)})^2 + \frac{2}{Np_n}\sum_{i\neq k}^{1,2,\cdots,n-1}\sum x^{(i)}x^{(k)}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(x^{(k)})^2}{Np_k} + \frac{1}{Np_n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}x^{(k)}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{(x^{(k)})^2}{Np_k}.
\end{aligned}
$$

即ち，吾々がさきに得た χ^2 (II, §4, [I.2] 參照) に外ならず，その分布が亦 χ^2 分布で與へられる事に對しても，以上により別證明が與へられたことになる．

<u>(B) 複合假說の場合</u>　既に述べた如く，複合假說 (そういふ言葉は當時未だなかつた) の場合の議論は間違ひがあつた．次節以下は，結局その問題の奈邊にあるかを突き止め，且つ，これに代るべきものを求める事にその目的があると言つても過言でない．

§11. Sheppard の χ'^2　Pearson, K. [1] は，上述の研究に於いて，χ^2 分布を導入したのであるが，複合假說の場合に於いて重大な誤謬をした．それは，吾々の用語でいへば，χ_s^2 の場合も，その分布は，$F_{n-1}(\chi_s^2)$ で與へられるとした所にある．その誤謬の根據を，正確に示した點に於いても Sheppard [1] の研究は極めて重要である．用語等は，現在の方式にかへて，今それを紹介して見よう．

(1°)　Sheppard の導入した χ'^2_2 を說明する．今假說として，採用されるものは確率事象系 C であつて，$m_i = Np_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ とおく．C は k 個の未定の parameters を含むものであるが，今その假說的 (hypothetical) な値として，$\bar\theta_1, \bar\theta_2, \cdots, \bar\theta_k$ をとるものとし，從つて

$$
(3.29)\quad \bar m_i = Np_i = Nf_i(\bar\theta_1, \bar\theta_2, \cdots, \bar\theta_k) \quad (i=1,2,\cdots,n)
$$

なりとする．勿論 $n>k$ なりとする．上式を解いて

$$
(3.30)\quad \bar\theta_\alpha = G_\alpha(\bar m_1, \bar m_2, \cdots, \bar m_n) \quad (\alpha=1,2,\cdots,k)
$$

が得られるものとする．從つて

$$
(3.31)\quad
\begin{aligned}
\bar m_i &= Nf_i(G_1(\bar m_1, \bar m_2, \cdots, \bar m_n), \cdots, G_k(\bar m_1, \cdots, \bar m_n))\\
&= Ng_i(\bar m_1, \bar m_2, \cdots, \bar m_n) \quad (i=1,2,\cdots,n)
\end{aligned}
$$

なる關係がある．但し，玆で注意すべき事は，上式 (3.31) は，如何なる $m_1, m_2, \cdots, m_n$ をもつて來ても成立するといふのではない．(3.29) 及び (3.30) が成立すれば，(3.31) が成立つといふに過ぎない．

以下，各 G_α，各 f_i，從つて各 g_i なる函數の形式は既知であるとして議論を進める．

今，實驗値として，$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ を得たとする．そして推定値 $(n_1, n_2, \cdots, n_n)$ を求めるのに

上式を用ゐて次の如く計算したとする．即ち，上述の既知の函數 G_α を使用する事により，實驗値 $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ をそれに入れて

$$\theta_\alpha = G_\alpha(m_1, m_2, \cdots, m_n) \quad (\alpha=1, 2, \cdots, k) \tag{3.32}$$

が得られる．この θ_α を用ゐて，次に上述の既知の函數 f_i を使ひ，

$$n_i = Nf_i(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{3.33}$$

に依つて，$n_i (i=1, 2, \cdots, n)$ をきめる．

玆に，$\{n_i\}, \{m_i\}, \{\tilde{m}_i\}$ は一般に相異るものである．吾々は次の如く置く．

$$\varepsilon_i = m_i - \tilde{m}_i, \quad \rho_i = n_i - \tilde{m}_i. \tag{3.34}$$

G_α, f_i, g_i は何れも連續的に微分可能な函數とし，且つ，ε_i は極めて小であるとして，

$$\begin{aligned} n_\lambda - \tilde{m}_\lambda &= Nf_\lambda(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) - Nf_\lambda(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \cdots, \tilde{\theta}_k) \\ &= N\sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta_\alpha}(-\theta_\alpha - \tilde{\theta}_\alpha) + o(N\sum|\theta_\alpha - \tilde{\theta}_\alpha|) \\ &= N\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial F_\alpha}{\partial \tilde{m}_l}\varepsilon_l + o\Big(N\sum_{l=1}^{n}|\varepsilon_l|\Big). \end{aligned} \tag{3.35}$$

從つて，o 項を捨てて考へれば，近似的に

$$\rho_\lambda = \varepsilon_\lambda' - N\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial F_\alpha}{\partial m_l}\varepsilon_l \quad (\lambda=1, 2, \cdots, k) \tag{3.36}$$

なる關係が成立つ．

それ故，玆に重要な關係として，$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_k$ の間には一次的な關係式が成立つと云ふ事が分かる．事實

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\partial G_\alpha}{\partial \tilde{m}_\lambda}\rho_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\partial G_\alpha}{\partial \tilde{m}_\lambda}\Big(\varepsilon_\lambda - N\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial F_\alpha}{\partial \tilde{m}_l}\varepsilon_l\Big) = 0 \tag{3.37}$$

なる α 個の關係式が成立つ．

複合假說の場合，$\tilde{m}_i \,(i = 1, 2, \cdots, n)$ は表面に表はれない．從つて，$\varepsilon_\lambda \,(\lambda = 1, 2, \cdots, k)$ は未知である．吾々の利用し得べきものは $\rho_\lambda \,(\lambda = 1, 2, \cdots, k)$ である．さて ε_λ は (3.34) で定義され，$\varepsilon_\lambda = m_\lambda - \tilde{m}_\lambda$ である．$\tilde{m}_\lambda$ は未知の數であるが，m_λ は既知の數である．しかも m_λ に對應する確率變數は $M^{(\lambda)}$ である (§9 参照) から，$m_\lambda - \tilde{m}_\lambda$ に對應する即ち ε_λ に對應する確率變數は $M^{(\lambda)} - \tilde{m}_\lambda$ である．即ち ε_λ に對應する確率變數を E_λ とかけば，$E_\lambda = M^{(\lambda)} - \bar{m}_\lambda$ である．從つて (3.06) 式に依り，ρ_λ に對應する確率變數 ρ_λ も考へられる．$E_\lambda \,(\lambda = 1, 2, \cdots, n)$ の平均値・標準偏差，並びに $E_\lambda E_\mu \,(\lambda, \mu = 1, 2, \cdots, k, \lambda \neq \mu)$ の平均値は，單純假說の場合の所論により既知であるから，それらを利用すれば，(3.36) 式により $\rho_\lambda \,(\lambda = 1, 2, \cdots, n)$ に關しても，それら各々の平均値・標準偏差 $\rho_\lambda \rho_\mu$ の平均値等も計算出來る．勿論これは (3.36) 式の係數が既知と假定しての事である．單純假說の場合に述べた如く，$E_\lambda \,(\lambda = 1, 2, \cdots, n)$ の各々は正規型分布である．それ故 (3.36) 式で定義された $\rho_\lambda \,(\lambda = 1, 2, \cdots, k)$ も亦正規型分布である．それ故 $(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n)$ の n 次元空間に於ける分布曲面もわかるわけであらう．こゝ迄は，誠に都合よく行つて居るわけである．それでは，すぐ上記定理を適用出來るかと云ふに，玆に致命的な支障がある．それは，(3.37) なる關係式があるからして

$\rho_\lambda(\lambda=1,2,\cdots,n)$ から R_n をつくるならば，$R_n=0$ となつて，定理の假定を滿足しないのである.

そこで，如何にすればよいかといふに，$\rho_\lambda(\lambda=1,2,\cdots,n)$ 相互間には，k 個の關係があるから，かゝる一次的な關係のない n-k 個の ρ_k の一次形式を以つておきかへればよい. 今かゝるものを新に $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_{n-k}$ と名付ける事にする. これに依つて一般性を失はない. 然る後に於いて，吾々は次の如き χ'^2 を導入する.

(3.38)
$$\chi'^2=\theta^{ij}\rho_i\rho_j=\sum_{j=1}^{n-k}\sum_{i=1}^{n-k}\theta^{ij}\rho_i\rho_j$$

但し，θ^{ij} は次の如く決定されるものである. 即ち $\rho_\lambda(\lambda=1,2,\cdots,n-k)$ に就いて，これを確率變數とみて，その標準偏差並びに相互間の相關係數を上記定理に於ける $Y^{(i)}$ に於ける如く計算して其處に於ける $E_{i,k}$ の如く計算する. 換言すれば

(3.39)
$$r_{i,i}=1,\quad r_{i,j}=\frac{E(\rho_i\rho_j)}{\sigma(\rho_i)\sigma(\rho_j)}$$

とおいて，$R=\|r_{i,j}\|$ なる n-k 次の行列をつくると $|R|\neq 0$ であるから，その逆行列が考へられる. 逆行列 $R^{-1}=\|\theta^{ij}\|$ としたわけである. 以上の如くして，定理の條件が悉く滿足された事になり，依つて定理が應用される事になるのである.

Sheppard [1] の上述の議論に對して，二三の注意と批判とを述べて置かう.

(*a*) $\chi'^2=\theta^{ij}\rho_i\rho_j$ なる式を用ゐたが，これは既に述べた如く，(3.36) なる式から導き出したものである. θ_a を求める式としては，他にも可能であらう. 然らば，それは如何なるものであれば充分か. つまり既述の議論に於いて，吾々が使用してゐる事は何かといふ問題であるが，推定理論の用語で云へば，consistent statistics である事が充分條件であると答へ得る. 換言すれば玆に H_1, $H_2,\cdots,H_k$ なる函數があつて

(3.40)
$$\theta_a=H_a(m_1,m_2,\cdots,m_n)\quad(a=1,2,\cdots,k)$$

は，試料の數 N が限りなく增加するとき，正しい値 $\bar\theta_a$ に法則收斂する. しかも $\sqrt{N}(\theta_a-\bar\theta_a)$ は平均値 0, 標準偏差有限確定なる正規分布に法則收斂するものであること，即ち H_a が $\bar\theta_a$ の consistent statistics である事が充分條件である. G_a も，勿論，そうした性質をもつ. しかし，何も G_a に限つたわけではない. $G_a(a=1,2,\cdots,k)$ から $\rho_i(i=1,2,\cdots,n)$ を導き，$\theta^{ij}(i,j=1,2,\cdots,n-k)$ をつくつたと全く同様な方法に依り，$H_a(a=1,2,\cdots,k)$ から $\phi_i(i=1,2,\cdots,n)$ を導き，$\Phi^{ij}(i,j=1,2,\cdots,n-k)$ をつくる事が出來よう. G_a と H_a とが違つて居れば，ρ_i と ϕ_i，θ^{ij} と Φ^{ij} とは相異るであらう. 然るに玆に Sheppard [1] に依り，著しい結果が證明されてゐる. 即ち $\theta^{ij}\rho_i\rho_j=\Phi^{ij}\phi_i\phi_j$ といふ事である.

(b) Sheppard [1] の上述の研究に依り，k 個の parameters をば試料から推定するならば，χ'^2 に對する分布法則は，$F_{n-k-1}(\chi')$ を以つてすべき事が解つたわけで，これは Yule [1] の實驗に對して，又 Fisher, R.A. [1] の議論に對して，或程度迄，根據を與へたものといはなければならぬ.

(c) Sheppard [1] の上述の研究は，その數理上には何の缺點もないが，統計學の理論としては不備の點がある. と云ふのは，(3.36) なる式で ε_λ の係數になる

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial F_\alpha}{\partial \bar{m}_l}, \quad (\alpha, \lambda = 1, 2 \cdots, k; l = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.41}$$

の數値が定められてゐること，又 $E\{E_\lambda E_\mu\}$, $\sigma\{E_\lambda\}$ とかの値が分つてゐる事が前提されて，始めて Θ^{ij} が計算出來る．然るにこれらの値は，$\bar{\theta}_\alpha (\alpha = 1, 2, \cdots, k)$, $\bar{m}_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ の値を知つて居る場合に於てのみ正確に與へうる．然るに，複合假說の場合には，$\bar{\theta}_\alpha$, $\bar{m}_k$ は與へられた數値とは考へないのである．Sheppard [1] は，これらに對して最確値 (most probable value) を與へれば良いと云つてゐるが，實用上は，それで相當結果を得ようが，然し，上述の理論とは，論理的には違つたものである．即ち最確値とは何かと云ふ議論が起る．それは推定の問題を含む事になるからである．要するに，未知の數値を既知の如く取扱つた上での議論である．併し，實際上，全然無價値と云ふわけではない．

Sheppard [1] の研究で，理論的に最も重要な點は以上に盡きて居ると思ふが，尙特筆すべき結果も寡くない．玆では，次の二つだけを擧げて置かう．

(d) 實驗的な研究として，平均値 = 2/3, 標準偏差 = 20/3 なる正規分布の母集團をつくり．これから大きさ30萬の任意試料をつくつた．即ち，手當り次第勝手に (at random) 30萬回，拔取りを行つたと同じわけである．今 $(-\infty, \infty)$ に對して，$a_0 = -\infty$, $a_1 = -6$, $a_2 = -2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 4$, $a_5 = 8$, $a_6 = \infty$ として，$(x_i, x_{i+1}) (i = 0, \cdots, 5)$ なる 6 區間に分けて，これらの區間に入つた個數を記錄したところ，累積分布で云ふと，

$$47494,\ 103459,\ 155641,\ 207099,\ 259240,\ 300000 \tag{3.42}$$

そこで問題は，平均値，標準偏差が夫々 2/3, 20/3 といふことを知らないものとして，これらを (3.42) から推定し，次いで，かく推定して得た平均値 m, 標準偏差 σ を用ゐて，$n_1, n_2, \cdots, n_6$ を計算する．そして，ρ, Θ 等を計算する．

平均値，標準偏差の推定法には，第三例で述べた如くいろいろある．

(i) (3.42) のうち，a_5, a_6 のみを用ゐて推定した場合

$$\begin{aligned} \chi'^2 &= 5.22941009, \quad P' = 0.155749 \\ \chi_s^2 &= 14.991604, \quad P = 0.001824 \ (\text{自由度 } 3) \end{aligned} \tag{3.43}$$

(ii) (3.42) のうち，a_1, a_2 のみを用ゐて推定した場合

$$\begin{aligned} \chi'^2 &= 5.23041587, \quad P' = 0.155682 \\ \chi_s^2 &= 14.986791, \quad P = 0.001824 \ (\text{自由度 } 3) \end{aligned} \tag{3.44}$$

(iii) 平均値，標準偏差を最尤法 (Method of Maximum Likelihood) で推定した場合

$$m = 0.6765899206, \quad \sigma = 6.6695000707 \tag{3.45}$$

但し，これを得るには近似方法を三度繰返した由である．これに就いては

$$\chi_s^2 = 5.220136, \quad P = 0.156369 \ (\text{自由度 } 3) \tag{3.46}$$

となる．

(iv) 以上 (i)-(iii) の結果が何を意味するかを說明して置かう．

(1°) (i), (ii) で χ'^2 同志，從つて P' 同志が殆んど相等しい事に注意しなければならぬ．此の事は (a) の理論的結果を，實驗的に示したものともいふべきものである．a_5 と a_6 とを用ゐて，m, σ を推定する方法は，consistent な estimate である．a_1 と a_2 とを用ゐるものも亦然りである．それ故，(a) 結果により，試數の大さ30萬なる今の場合，(i), (ii) の χ'^2 同志が，從つて P' 同志が相等しい事は，理論からも當然であつて，これが實際に示されたわけである．

(2°) (i), (ii) に於いて，χ_s^2 は χ'^2 に比して著しく大きく，P としては，Fisher, R. A. [1] の注意に依り自由度3とすれば，その値極めて小である．この事は，(1°) と對應させて考へるとき何を意味するか，これに關しては，次の § に於いて，R.A. Fisher の理論により判明すると思ふ．要點をいふと，(i) 又は (ii) の推定方法は，efficiency が1でないといふ事に起因する．(iii) の推定方法は efficiency が1であつて，この推定方法に依つて得たる χ_s^2 が，(i), (ii) の χ'^2 と大差のない事は誠に注目すべき貴重な實驗事實といはねばならない．

(e) $(m\times n)$ Contingency Table の場合には，Pearson の χ_s^2 は Sheppard の χ'^2 と一致する．

§12. R.A. Fisher の理論　既に §9 で述べた如く，Fisher, R.A. [3] の業績は，適合度檢査法に於いて，それ迄 Pearson, K. [1] 以來世人が犯して來た誤謬を是正して，正しい自由度を導入した點で重要なものであるが，同氏の推定の理論に依つて，更に深い根底に立脚して，χ_s^2 を考察する事が出來る．一體 R. A. Fisher の所論は，往々にして，途中の理路を省略して結果のみを揭げたり，或は論證極めて簡單であつて，補捉に容易でない．併し同氏の考察が極めて深いものである事，近代に於ける數理統計學發達に寄與した最も有能な統計學者の一人である事は，何人と雖もこれを認める所と思ふ．玆では，χ_s^2 に關する同氏の理論の要點を簡單に紹介して置かう．同氏のこの理論は更に究明すべき餘地が殘されてゐると思はれる．

Fisher, R. A. [3] の研究に引用されるものは，Brownlee [1] の實驗である．Brownlee [1] は coin-tossing を行ひ，32組の試料をつくつた．但し，各試料は何れも夫々256個の觀測からなつてゐる．各觀測結果は五種に分かれる．即ち4個の貨幣をなげた結果が，一つの觀測結果をなすのであつて，從つて，(a) 4個共に表の場合，(b) 3個表1個裏の場合，(c) 2個表2個裏の場合，(d) 3個裏1個表の場合，(e) 4個共に裏の場合，以上の5通りの場合がある．さて，玆で種々の統計的假說を提出し，その夫々について，χ^2 乃至 χ_s^2 等の分布を調べたのである．

(i) 先づ所謂 a priori な假說を設ける．即ち上述の5つの場合の起り得べき確率を夫々 p_a, p_b, p_c, p_d, p_e として，これは $(1/2+1/2)^4$ の展開から求まるものとする．即ち $p_e=p_a=(1/2)^4$, $p_e=p_b=4\times(1/2)^4$, $p_d=6\times(1/2)^4$. 而して $256\,p_a=\tilde{m}_a$, $256\,p_b=256\,p_b=\tilde{m}_a=\tilde{m}_c$, $256\,p_d=\tilde{m}_d$ とする．これは勿論，單純假說の場合である．一組の試料に對して，一つの χ^2 がきまる．(各組共，試料の大きさ $N=256$) 試料は全部で32組あるから，32個の χ^2 が得られる．

(ii) 次に表の出る確率を $1/2+\eta$, 從つて裏の出る確率を $1/2-\eta$ とし，この η は，各試料毎に夫々推定された値をとるとする．その推定法としては，該試料にて，(a), (b), (c), (d), (e) に屬するものの數を夫々，$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ とすれば

$$\chi_1^2 \equiv \frac{\{\alpha-256(\frac{1}{2}+\eta)^4\}^2}{256(\frac{1}{2}+\eta)^4}+\frac{\{\beta-256\times4(\frac{1}{2}+\eta)^3(\frac{1}{2}-\eta)\}^2}{256\times4(\frac{1}{2}+\eta)^3(\frac{1}{2}-\eta)}$$
$$+\frac{\{\gamma-256\times6(\frac{1}{2}+\eta)^2(\frac{1}{2}-\eta)^2\}^2}{256\times6(\frac{1}{2}+\eta)^2(\frac{1}{2}-\eta)^2}+\frac{\{\delta-256\times4(\frac{1}{2}+\eta)(\frac{1}{2}-\eta)^3\}^2}{4(\frac{1}{2}+\eta)(\frac{1}{2}-\eta)^3}$$
$$+\frac{\{\varepsilon-256(\frac{1}{2}-\eta)^4\}^2}{256(\frac{1}{2}-\eta)^4} \tag{3.47}$$

を考へ，この χ_1^2 を最小にする様な η をとるといふのである．一寸見ると大變な式だが，求める η としては近似的には

$$\{60(\alpha^2+\varepsilon^2)+6(\beta^2+\delta^2)+\gamma^2\}\eta = 24(\varepsilon^2-\alpha^2)+3(\delta^2-\beta^2) \tag{3.48}$$

で與へられる事は容易に分かり，これから簡単に求まる．かくして求めた η に對して，χ_1^2 を計算する．つまり，η の函數と考へた場合の χ_1^2 最小値を計算したわけである．各試料に對して一つの χ_1^2 の最小値が夫々あるから，82 組の試料では，そうしたものが 32 個得られる事になる．

(iii) 最後に，一つの方法として，正規型分布の適用を行ふ．但し此の際，Sheppard の補正を第二次のモーメントに對して施すべきものとする．この場合，全變域 $(-\infty,\infty)$ を如何様に分類したかは明示されて居らないが，恐らく $a_0=-\infty$, $a_1=-1.5$, $a_2=-0.5$, $a_3=0.5$, $a_4=1.5$, $a_4=+\infty$ として，(a_i,a_{i+1}) $(i=0,1,2,3,4)$ なる 5 個の區間を考へたのであらう．(i), (ii) と同様，各試料毎に母集團の分布函數のパラメーターを推定する．この場合，正規型分布が母集團の分布函數だから平均値，標準偏差の推定値を各試料毎に求める．各試料に於いて，推定値 $\{n_k\}$ $(k=1,2,3,4)$ をつくり，従つて，χ_3^2 をつくる．かくして，32 個の χ_3^2 をうる．

Brownlee [1] の計算結果を第三表に示す．

第三表の第 5 列 $(n=4)$, 第 6 列 $(n=3)$ は自由度が夫々 4, 3 なるときの χ^2 の確率分布に 32をかけたものである．

第 三 表 (Brownlee)

χ^2	(i)	(ii)	(iii)	n=4	n=3
0—2	7	12	10	8.4	13.7
2—4	10	12	12	10.6	9.9
4—6	10	6	5	6.6	4.8
6 …	5	2	5	6.4	3.6

第三表を見るに，次の事が分かる．(1°). (i) の場合の結果 (第三表, 第 2 列) は第 5 列の分布とよく似てゐる．(2). (ii) の結果 (第三表, 第 3 列) は第 6 列の分布とよく似てゐる．然し第 5 列の分布とは著しく違つてゐる．(3°). この場合に對して Brownlee は次の様に云つてゐる．Fisher, R.A. [1] 流にいへば，自由度は二つ引かねばならぬ．つまり $n=2$ の場合と比較されねばならぬと云ふことになるう．然し，(iii) なる分布を見ると，それは寧ろ，第 5 列 $(n=4)$ の場合に近いと言はねばならぬ．それ故 "I probably misunderstand Mr. Fisher upon this point" と結んで居る．

以上の計算報告並びにその解釋に對して，如何なる批判が，Fisher の推定法の理論からなされるかを述べよう (Fisher, R.A. [3] 参照).

先づ，Brownlee の結果のうち (1°), (2°) なるものは，從來の理論を裏書するものであつて，差當り問題はない.——但し茲に注意して置いたのは，(1°), (2°), (3°) 何れの解釋に於ても，分布函數の比較が問題であつて，それこそ，χ^2 の應用さるべき場合である．單純假説の場合の χ^2 分布の理

論は妥當なりと假定しての議論でないと循環論に陥る．尙遺憾なのは，そう云ふ目的からみると，試料の組數 $N=32$ がもう少し大であつて欲しかつたと思ふ．併し要するに說明例として，大目に見ておくことにする.——問題は，(3°) の所論である．即ち，この場合には，在來の理論と一致しない様である．そこで問題は，かゝる χ^2 の分布を如何に解釋するかである．

旣に，§9 で述べた如く (證明は §11, 12 で與へる)，χ_s^2 の分布に關しては，自由度のとり方が單純假說の場合と違ふのであるが，その分布函數は，要するに χ^2 分布になる事が知られてゐると述べた．(3°) の結果はこれに違背するものである．かゝるものは總稱して χ_s^2 の abnormal distribution と云ふべきものであらう．かゝるものは如何にして起るか．これに對して，Fisher, R. A. [3] は三通りの理由を擧げて居る．

(A) 檢定せんとする假說が，事實に於いて，眞ならざるとき． Brownlee [1] の上の例では母集團の分布は，上述 5 組では 1, 4, 6, 4, 1 の割合でおこるべきもの或はこれに近かるべきものと想像される．その様な分布は，等間隔に分割した小區間に對する正規分布の値からは得られない．(iii) なる假說は事實に於いて不成立即ち眞ならずと見做される．χ_s^2 の分布に關する在來の結果は，假說が眞なりとしての分布であるから，かゝる結果を生じても，毫もこれを怪しむには及ばない．

(B) 推定方法が Inconsistent である場合，即ち Consistent でない場合． 假令，當面の假說が眞であつても，該假說を規定 (specify) すべき parameters を推定するに當つて，その推定方法 (method of estimation) が consistent でなければ，そうした推定方法に依つて parameters をきめ，次いで之に依り，理論値 $n_1, n_2, \cdots, n_n$ を導いて χ_s^2 をつくつても，χ_s^2 の示す分布は abnormal になる．玆に，推定方法が consistent であるといふ事の意味は，試料 (sample) の大きさが限りなく大きくなつたとすれば，該推定法に依つて得られる parameters の値は，それが目的とする各 parameter の正しい値を與へ得るといふことである．(嚴密な定義に關しては，古屋，推定の問題，本誌本號所載に讓る） 上述 (iii) の場合，そこで掲げた 5 組の各々に入るべき確率は，夫々 0.0668072, 0.2417303, 0.3829250, 0.2417303, 0.0668072 である事は，正規型分布の表から容易に分かる．そこで當面の假說が眞であるならば，試行の回數が充分大なるとき (即ち，試料の大さが充分大なるとき)，各組に入るべき個數即ち $m_1, m_2, \cdots, m_n$ は夫々，上の五つの數字に N を掛けたものに近くなる筈である (大數の法則)．N が限りなく大きくなるに從つて，m_i/N が益々上述の數に夫々近づくのが一般である．それ故に，今，上の五つの組に入る割合を，上述の數字にとれば，これは正しく N が限りなく大きくなつたときの，各組に入るべき個數の比をあらはすものである．それ故，用ふる推定法にして若し consistent なものであるならば，m, σ について正しい値，即ち夫々 0,1 なる値を與へなければならぬ．然るに後者 σ に關しては，Brownlee の方法では 0.934585 であつて 1 にならぬ．即ち推定方法が inconsistent であつた．

(C) 推定方法の Efficiency が 1 でない場合． 推定方法の Efficiency に關しては，古屋，前掲報告參照．

Fisher, R.A. [3] は，(i)．更に進んで，最小 χ_s^2 法に依り (或る場合に)，efficiency 1 なる推定法に到達出來る事を示した．(ii)．最小 χ_s^2 の從ふ分布函數が，自由度 $n-k-1$ なる χ^2 分布なる事を

證明した．尙 efficiency 1 ならざる場合に關しても論じてゐる．(i) に就いては，次の §13 でこれに Fisher, R. A. [3] よりも詳細に説明を加へよう．(ii) に就いては，氏の議論は尙論究の餘地がある．§14 に述べる Neyman-Pearson の理論は，(ii) に對する一つの再検討とも見られよう．

§13. 最尤法と最小 χ_s^2 法　推定法の理論の立場から，複合假說に於ける適合度檢査の問題を說明しよう．

吾々は先づ $p_i=f_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ なる cell distribution を示す母集團を考へるのであるが，各 θ_i 從つて各 p_i なるものは指定しない形式で問題を論じようとするのである．玆に實驗値として $(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ なる cell frequencies を得たとする．これに基いて，各 $\bar{\theta}_a$ の推定値 θ_a を求めるのであるから

(3.49)　$$\bar{\theta}_a = H_a(m_1,m_2,\cdots,m_n)\quad (a=1,2,\cdots,n)$$

となり，かくして第 i 番目の個所に入るべき n_i は

(3.50)　$$\begin{aligned} n_i &= Nf_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\\ &= Nf_i(H_1,m_2,\cdots,m_n),\cdots,H_k(m_1,m_2,\cdots,m_n)\\ &= N\varphi_i(m_1,m_2,\cdots,m_n)\end{aligned}$$

となる．

§12 で述べた Fisher, R. A. [3] の研究に依ると H_a $(a=1,2,\cdots,n)$ の選び方としては，即ち推定方法としては，efficiency 1 なるものを必要とし，若し然らざるものを用ふるならば，χ_s^2 は abnormal distribution を示すに至る．然らば，この場合 efficiency 1 の推定法は何であるか．玆に推定法の理論を採用すると，元來 efficiency 1 なる推定法は必ず存在するものではないが，相當一般な場合に於いて存在する．そして，efficiency 1 の推定法が存在するならば，かゝる推定法は最尤法 (Maximum Likelihood Method) に依つて求められるといふ事が知られてゐる (古屋，前掲報告11頁)．但し，實際の計算の手數から云ふと．最尤法に依る解法即ち最尤解は，必ずしも便利なものとは言へない場合もある．そうした場合には，最尤解に同等で，しかも計算上から見てとか又は他の理由から云つて便利なものを採用すると云ふ事になる．換言すれば，他の efficiency 1 なる推定法を採用する．これは試料の大きさ (今の場合 N を指す) が限りなく大になるにつれ，最尤解に限りなく近づく．χ_s^2 の問題に關聯しては，以下に順次項を追ふて説明する樣に，最尤法よりも最小 χ_s^2 法が便利である．

[1] 複合假說の適合度檢査に於ける最尤法　先づ當面の問題では，母集團は一定のものと考へて居る．繰返して云ふが，一定ではあるが，假說として問題に提出するものでは，母集團を規定すべき $p_1,p_2,\cdots,p_n$ を指定しないで論ずるのである．だから問題は，$\bar{\theta}_1,\bar{\theta}_2,\cdots,\bar{\theta}_k$ の推定法 H_a $(a=1,2,\cdots,k)$ の決定である．その一つの方法として，假りに H_a $(a=1,2,\cdots,k)$ が決定されたものとして，從つて n_i が既知のものとして

(3.51)　$$L=\frac{N!}{m_1!\,m_2!\cdots m_n!}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{n_i}{N}\right)^{m_i}$$

を考へれば，之は cell distributions が $(n_1,n_2,\cdots,n_n)$ なる母集團についての尤度である．(3.51)

は (3.50) を使ひて書きかへれば

(3.52)
$$L=\frac{N!}{m_1!m_2!\cdots m_n!}\prod_{i=1}^{n}\{f_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\}^{m_i}$$
$$=\frac{N!}{m_1!m_2!\cdots m_n!}\prod_{i=1}^{n}\{f_i(H_1(m_1,m_2,\cdots m_n),\cdots,H_k(m_1,\cdots,m_n))\}^{m_i}$$

であり，問題は $H_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,k)$ なる函數形式をきめる事である．その一つの解答として，(3.52) を最大にする $(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ を求めるといふ方法が考へられる．それには $\log L$ を最大にすればよい．それで $\partial\log L/\partial\theta_\alpha=0\ (\alpha=1,2,\cdots,k)$ なる方程式を立るのであるが，これは

(3.53)
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i-Nf_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)}{f_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)}\frac{\partial f_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)}{\partial\theta_\alpha}=0\quad(\alpha=1,2,\cdots,k)$$

で與へられる．これを解けば，その解を $(\theta_1^0,\theta_2^0,\cdots,\theta_k^0)$ と置くとき，これを最尤解といふ．これは (3.53) から明らかな様に $m_1,m_2,\cdots,m_n$ の函數である．即ち

(3.541)
$$\theta_\alpha^0=H_\alpha^0(m_1,m_2,\cdots,m_n)\quad(\alpha=1,2,\cdots,k).$$

これを使ひて $n_i^0=Nf_i(\theta_1^0,\theta_2^0,\cdots,\theta_k^0)\ (i=1,2,\cdots,n)$ が決定される．そして一つの特別な χ_s^2 として

(3.542)
$$\chi_{s,0}^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(m_i-n_i^0)^2}{n_i^0}$$

を論ずべき事も理論的には考へられよう．だが，これは實際には余り使用しない．その理由に就いては，以下の項で説明する．

〔2〕 最小 χ_s^2 法　玆では，$(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ の推定方法として，χ_s^2 を最小にする値 $(\theta_1',\theta_2',\cdots,\theta_k')$ をとる．即ち

(3.551)
$$\frac{\partial(\chi_s^2)}{\partial\theta_\alpha}=\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{(m_i-Nf_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k))^2}{Nf_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)}\right\}=0\quad(\alpha=1,2,\cdots,k).$$

即ち

(3.552)
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i^2-N^2f_i^2(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)}{N^2f_i^2(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)}\frac{\partial f_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)}{\partial\theta_\alpha}=0$$

を解くのである．かくして得られた値 $\theta_\alpha'(\alpha=1,2,\cdots,k)$ は $(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ に關係するから

(3.56)
$$\theta_\alpha'=H_\alpha'(m_1,m_2,\cdots,m_n)\quad(\alpha=1,2,\cdots,n)$$

の形にかける．これを基にして $n_i'=Nf_i(\theta_1',\theta_2',\cdots,\theta_n')\ (i=1,2,\cdots,n)$ を計算する．これに對應する χ_s^2 を χ_1^2 とする．即ち

(3.57)
$$\chi_1^2\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{(m_i-n_i')^2}{n_i^1}$$

となる．この方法を Neyman-Pearson〔1〕は最小 χ_1^2 (minimum χ_1^2) と稱したが，以上の如く考ふる限り，最小 χ_s^2 といふべきで，その値が即ち χ_1^2 であるといふべきであらう．言葉の相違かも知れない．

〔3〕 最小 χ_s^2 法と最尤法　試料の大きさ N が限りなく大になるに從ひ，$(\theta_1',\theta_2',\cdots,\theta_k')$ と $(\theta_1^0,\theta_2^0,\cdots,\theta_k^0)$ とは限りなく相近づき，N が無限大になる極限では兩者は一致する．それ故，そうした極限に於いては，最尤法に依る推定値 $(\theta_1^0,\theta_2^0,\cdots,\theta_k^0)$ のもつ理論上の特性（例へば，或る條件のもとで

Efficiency が 1) といふ事もそのまゝ，最小 χ_3^2 法に依る $(\theta_1', \theta_2', \cdots, \theta_k')$ についても成立つものと見做し得る場合もある．

上記の事實は次の如く證明される．[1] に依り

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i - Nf_i(\theta_1^0, \theta_2^0, \cdots, \theta_k^0)}{f_i(\theta_1^0, \theta_2^0, \cdots, \theta_k^0)} \frac{\partial f_i(\theta_1^0, \theta_2^0, \cdots, \theta_k^0)}{\partial \theta_a} = 0 \tag{3.58}$$

である．然るに，(i) 大數の法則により，N が限りなく大になるとき，m_i/N (委しくいへば m_i/N に對應する確率變數 $M^{(i)}/N$) は $f_i(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \cdots, \bar{\theta}_k)$ に法則收斂する事，(ii) 最尤法は通常の事情のもとに於いては (精しくは古屋，前掲論文 參照) のもとでは consistent な推定法である．$\theta_a^0 = H_a^0 (m_1, m_2, \cdots, m_n)$ に於いて各 m_i に確率變數 $M^{(i)}$ が對應するから，θ_a^0 にも亦勿論確率變數 $H_a^0(M^{(1)}, M^{(2)}, \cdots, M^{(n)})$ が對應する．それで，$f_i(\theta_1^0, \theta_2^0, \cdots, \theta_k^0)$ (委しくいへばこれに對應する確率變數 $f_i(H_1^0(M^{(1)}, M^{(2)}, \cdots, M^{(n)}), \cdots, H_k^0(M^{(1)}, M^{(2)}, \cdots, M^{(n)})$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ が $f_i(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \cdots, \bar{\theta}_k)$ といふ數に N が限りなく大になるとき法則收斂をする事，この (i) と (ii) とに依り，N が限りなく大になるとき，$m_i/N + f_i(\theta_1^0, \theta_2^0, \cdots, \theta_k^0)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ は $2f_i(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \cdots, \bar{\theta}_k)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に法則收斂する．即ち

$$\{m_i + Nf_i(\theta_1^0, \theta_2^0, \cdots, \theta_k^0)\} / Nf_i(\theta_1^0, \theta_2^0, \cdots, \theta_k^0) \tag{3.59}$$

$(i = 1, 2, \cdots, n)$ は何れも常數 2 に法則收斂する．上式 (3.58) の左邊に 2 をかけても勿論 0 であるが，2 の代りに (3.59) を掛けるならば，(3.58) の左邊は

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^2 - N^2 f_i(\theta_1^0, \theta_2^0, \cdots, \theta_k)}{f_i^2(\theta_1^0, \theta_2^0, \cdots, \theta_k^0)} \frac{\partial f_i(_1^0, \theta_2^0, \cdots, \theta_k^0)}{\partial \theta_a} \quad (a = 1, 2, \cdots, k) \tag{3.60}$$

となり，これは N が限りなく大になれば，(3.58) の左邊に 2 を掛けたものに近づくから，0 に法則收斂する．之に依つてみると，N が限りなく大になると，(3.552) 式で定義される $(\theta_1', \theta_2', \cdots, \theta_n')$ に限りなく近づく事がわかる．(證明終)

[4] χ_1^2 は $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$ の函數としての χ_3^2 の (最小値) である．この事實からして χ_1^2 の分布を求める事が容易になる．Fisher, R.A. [3] にその議論がある．

§14. Neyman-Pearson の最小 χ_3^2 法　Fisher, R. A. [3] は χ_1^2 の分布を論じたが，その記述は壓縮され過ぎて理解に困難であるとなし，それとはやゝ異る立場から，もつと精確に，χ_1^2 の分布を論じたものに Neyman-Pearson [1] の研究があり，此の方面に於ける理論的研究として，最も重要であるのみならず，同論文に發表された實驗的結果も，重要なもので，Yule [1] の實驗的結果と共に，該理論を裏書するものと云はねばならぬ．

[1] <u>χ_1^2 の理論</u>　次の簡單な豫備定理を使用する．

豫備定理 (Neyman-Pearson [1])　n 個の確率變數 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ があつて，各確率變數 X_k が夫々或る任意に與へられた數 x_k に等しい $(k = 1, 2, \cdots, n)$ といふ n 個の事象が同時に起るといふ事象の確率密度は，次の式で與へられるものとする．

$$D = D_0 e^{-\frac{1}{2}z^2}. \tag{3.61}$$

但し，D_0 は常數で且つ

$$(3.62)\qquad z^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

である．換言すれば，n 次元空間の各點 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に對して上記 (3.61) なる確率密度が對應するとする．次に，この n 次元空間に於いて，點 $Q:(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ は，次の s 個の平面の何れにも載つて居るものとする．即ち

$$(3.63)\qquad a_{1,t}q_1 + a_{2,t}q_2 + \cdots + a_{n,t}q_n = 0 \quad (t = 1, 2, \cdots, s).$$

但し，玆に $a_{i,t}\ (i = 1, 2, \cdots, n;\ t = 1, 2, \cdots, s)$ は何れも常數とする．且つこの s 個の一次形式は一次的に獨立とする．

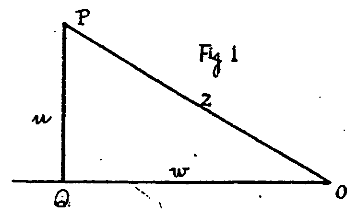
點 $P:(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は，n 次元空間の任意の點とし，次の如くおく．

$$(3.62)\qquad \begin{aligned} u^2 &= \overline{PQ}^2 = (x_1-q_1)^2 + (x_2-q_2)^2 + \cdots + (x_n-q_n)^2 \\ w^2 &= \overline{OQ}^2 = q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_u^2 = z^2 - u^2. \end{aligned}$$

然るとき，次の事が成立つ．

(i) 任意に與へられた P に對して，$\overline{PQ}$ を最小にする様な Q は唯一つある．(これを $Q_0 = Q(P)$ とおく．)

(ii) Q を任意に與へるとき $\overline{PQ} = u$ にして，且つこの Q を $Q(P)$ とするが如き P の軌跡は $n-s$ 次元の或る球であり，$PQ \perp OQ$.



第 1 圖

(iii) 點 $P:(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に對應する確率變數の組 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 即ち確率ベクトルを $\mathbf{X}$ とおき，點 $Q(P)$ に對應する確率ベクトルを $Q(\mathbf{X})$ とおく．然るとき $\overline{\mathbf{X}Q(\mathbf{X})}$ は確率變數である．これを U とおくと，或る任意の與へられた $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ をば $Q(P)$ とし，$\overline{PQ(P)}$ が $(u, u+du)$ なる如き P の生ずる確率，即ち，$u < U < u + du$ なる事象と $Q(\mathbf{X}) = Q(=(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ (所與)) なる事象とが同時に成立つ事象の起る確率は次の式で與へられる．

$$(3.65)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{Pr.}\{u < U < u+du,\ Q(\mathbf{X}) = (q_1, q_2, \cdots, q_n)\} \\ &\quad = \mathrm{Const} \times u^{s-1}du \times D_0 e^{-\frac{1}{2}(u^2+\sum_{i=1}^{n} q_i^2)} \end{aligned}$$

(iv)

$$(3.66)\qquad \mathrm{Pr.}\{u < U < u+du\} = \mathrm{Const} \times u^{s-1} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

(v) $Z = |\mathbf{X}| = (X_1^2 + X_2^2 + \cdots X_n^2)^{1/2}$ なる確率變數を考へると

$$(3.67)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{Pr.}\{u < U < u+du,\ z < Z < z+dz\} \\ &\quad = \mathrm{Const} \times u^{s-1} z (z^2 - u^2)^{\frac{n-s-2}{2}} e^{-\frac{1}{2}z^2} du\, dz. \end{aligned}$$

證明 (i) に就いて： (3.63) の式に依り，$q_1, q_2, \cdots, q_n$ のうちの s 個例へば $q_{n-s+1}, q_{n-s+2}, \cdots, q_n$ をば殘りの $n-s$ 個即ち $q_1, q_2, \cdots, q_{n-s}$ の一次式で表はして，これを (4.64) の u の右邊に代入する．すると，與へられた P に對して $\overline{PQ}$ を最小にする．問題は

$$(3.69)\qquad \frac{\partial(u^2)}{\partial q_t} = 0 \quad (t = 1, 2, \cdots, n-s)$$

なる $n-s$ 個の方程式を解くことで，これから $q_1, q_2, \cdots, q_{n-s}$ が，一意的に夫々決定され，從つて $q_{n-s+1}, \cdots, q_n$ も夫々一意的に決定される．

(ii) に就いて： Q を與へて上述の如き P を求めるには，$PQ=u$ といふ條件から，P は點 Q を中心とする半徑 u の $(n-1)$ 次元の球面上にある事がわかり，且つ，(3.66) なる關係がなければならぬ故，結局 $s-1$ 次元の球が求める P 點の軌跡となる．$PQ \perp OQ$ は (i) から明らかである．

(iii) に就いて： (ii) より明らかである．

(iv) に就いて：

(3.69)
$$\Pr.\{u < U < u+du\} = \iint_{D_Q}\cdots\int \Pr.\{u < U < u+du, Q(X) = (q_1, q_2, \cdots, q_n)\}\, dq_1, \cdots, dq_n$$

但し，積分の範圍 D_Q は (3.68) を滿足するすべての $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ に亘らなければならぬ．(iii) を用ゐると，上式は

(3.70)
$$\mathrm{Const} \times u^{s-1} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \times D_0 \iint_{D_Q}\cdots\int e^{-\frac{1}{2}w^2} dw$$

である．これは明らかに (vi) の右邊の如き形に書ける．

(v) に就いて： (iii) 及び (iv) からわかる事は $w=\sqrt{z^2-u^2}$ に對應する確率度數を W とすると

(3.71)
$$\Pr.\{u < U < u+du,\ w < W < w+dw\} = \mathrm{Const} \times u^{s-1} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \times w^{n-s-1} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw$$

である．ところが，$Z=U^2+W^2$ であり，$du\,dw = du\,dz\; z/w$ である事に注意すれば，(v) の關係は直ちに得られる．(證明 3)．

さて，この補助定理を，χ_1^2 に如何に應用するかを述べよう．それには，次の樣な假定を滿足するものとして置かねばならぬ．

(1°) 確率事象系 C に對して N 回の獨立試行を行ふとき，換言すれば，各組に入る個數の平均値が $\tilde{m}_i = Nf_i(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \cdots, \bar{\theta}_k)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ で定義された樣な母集團に對して任意試料抽出を行ふとき，試料分布即ち $x_i = (m_i - \tilde{m}_i)/\sqrt{\tilde{m}_i}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ とおいて $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の分布を求めるとこれは，§10 で述べた Pearson,K. [1] の場合の如くあたへられる．

(2°) 最小 χ_1^2 法で決定された n_i' $(i=1, 2, \cdots, n)$ に對しては，$\zeta_i = n_i' - \tilde{m}_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ と置く．又 $\varepsilon_i = m_i - \tilde{m}_i$ とおく．即ち

(3.72)
$$\chi_1^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\zeta_i - \varepsilon_i)}{\tilde{m}_i + \zeta_i}.$$

而して玆に，各 ζ_i は $\tilde{m}_i$ に比して小であつて，分母の $\tilde{m}_i+\zeta_i$ を $\tilde{m}_i$ におきかへたものの分布を論ずれば，χ_1^2 の分布が得られるとする．

(3°) 既述の如く，$n_\alpha^1 = Nf_\alpha(\theta_1', \theta_2', \cdots, \theta_k')$ であり，尙 $\tilde{m}_\alpha = Nf_\alpha(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \cdots, \bar{\theta}_k)$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, n)$ である．それ故

(3.73)
$$\zeta_\alpha = n_\alpha^1 - \tilde{m}_\alpha = Nf_\alpha(\bar{\theta}_1', \bar{\theta}_2', \cdots, \bar{\theta}_k') - Nf_\alpha(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \cdots, \bar{\theta}_k) \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, n)$$

から $(\theta_1', \theta_2', \cdots, \theta_k')$ を消去する事にすると

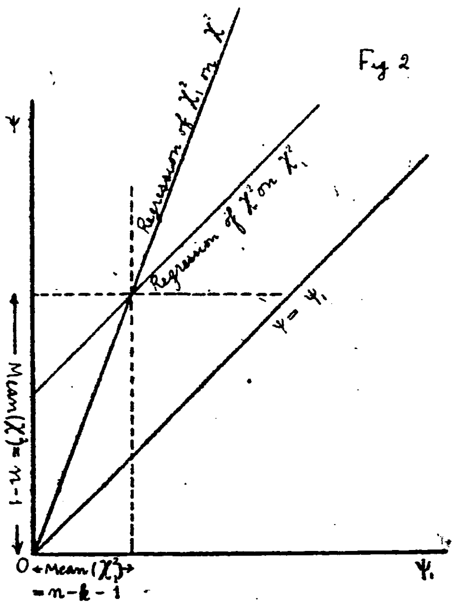
$$(3.74)\qquad \zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_n=0$$

の他に尚

$$(3.75)\qquad \Phi_j(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)=0 \quad (j=1,2,\cdots,k-1)$$

なる $k-1$ 個の關係式が存在する．今各 $\zeta_\alpha\ (\alpha=1,2,\cdots,n)$ は何れも充分に小で，この $k-1$ 個の關係式は，$k-1$ 個の一次式で置きかへ得るものと考へる．そして (3.74) と併せて，k 個の一次的に獨立な一次式が得られるものとする．

以上の (1°)—(3°) の假定のもとに於いて，上記補助定理を應用しうる．即ち $Z=\chi$, $U=\chi_1$ とし n の代りに $n-1$, s の代りに $n-k-1$ とおくべきである．すると



第 2 圖

$$(3.76)\qquad \Pr.\{x<\chi_1<x+dx\} = \mathrm{Const}\times x^{n-k-2}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx,$$

$$(3.77)\qquad \Pr.\{y<\chi<y+dy,\ x<\chi_1<x+dx\} = \mathrm{Const}\times y^{n-k-1}x(x^2-y^2)^{\frac{k-2}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dxdy.$$

或は，これらの式からして

$$\Pr.\{\psi_1<\chi_1^2<\psi_1+d\psi_1\} = \mathrm{Const}\times\psi_1^{\frac{n-k-3}{2}}e^{-\frac{1}{2}\psi_1}d\psi_1$$

$$(3.78)\qquad \Pr.\{\psi<\chi^2<\psi+d\psi,\ \psi_1<\chi_1^2<\psi_1+d\psi_1\} = \mathrm{Const}\times\psi_1^{\frac{n-k-3}{2}}(\psi-\psi_1)^{\frac{k-2}{2}}e^{-\frac{1}{2}\psi}d\psi d\psi_1$$

となる．又

$$(3.79)\qquad \Pr.\{\psi<\chi^2<\psi+d\psi\} = \mathrm{Const}\times\psi^{\frac{n-3}{2}}e^{-\frac{1}{2}\psi}d\psi.$$

これらの結果から得られる重要な注意を述べて置かう．

(a) $\chi^2\geqq\chi_1^2$

(b) χ^2 を與へられたとき，これに對應する χ_1^2 の平均値は次の式で與へられる．

$$(3.80)\qquad \mathrm{Mean}_{\chi^2}\{\chi_1^2\} = \chi^2(n-k-1)/(n-1).$$

即ち，χ^2 に對する χ_1^2 の相關は一次的である．χ^2 を與へられたとき，これに對應する χ_1^2 の分布は Pearson の Type III の分布である．

(c) χ_1^2 を與へられたとき，これに對應する χ^2 の分布は，Pearson の Type I の分布であり，χ_1^2 に對する χ^2 の相關は一次的である．

(d) $D\{\chi^2\}=\sqrt{2(n-1)}$, $D\{\chi_1^2\}=\sqrt{2(n-k-1)}$ である．そこで χ^2 と χ_1^2 との相關係數 r_{χ^2,χ_1^2} は次式で與へられる．

$$(3.81)\qquad r_{\chi^2,\chi_1^2}=\sqrt{\frac{n-k-1}{n-1}}$$

[2] χ^2 及び χ_1^2 に關する試料抽出實驗　前述の理論を，試料抽出實驗を行つて，實驗的にも驗證した結果が，Neyman-Pearson [1] に掲げられて居る．これは貴重な結果であるが茲では略する．

[3] 尤度に依る批判　尤度に依る批判 (criterion of likelihood) の立場から，複合假説の場合に於ける適合度の問題を論じてゐる．これは，單純假説の場合に P_λ を用ゐた考へ方 (I, §3, [5] 參照) に對應するものである．

今 n 個の個所に關する凡ゆる可能な組別分布を考へ，その全體の集合を Ω とする．檢査しようとする假説は，かゝる Ω のうちで特に n 個の既知の函數 $f_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ を用ゐて，$p_i=f_i(\theta_1, \theta_2,\cdots,\theta_k)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ としてあらはし得る様なものの全體を ω とする．この場合，$(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ の値は指定してゐない形式で考へてゐるのであるから，複合假説である．

そこで，I, §3, [5] (1.14) で定義した $L(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ を想起し，ω のうちでこれを最大にするものを求め，その値を $L(\omega_{\max})$ と書く事にする．(1.15) をも用ゐて，次の如き λ_1 を導入する．

$$\lambda_1\equiv\frac{L(\omega_{\max.})}{L(\Omega_{\max.})}=\left(\frac{n_1'}{m_1}\right)^{m_1}\left(\frac{n_2'}{m_2}\right)^{m_2}\cdots\left(\frac{n_n'}{m_n}\right)^{m_n} \tag{3.82}$$

但し，茲に $(n_1',n_2',\cdots,n_n')$ は如何にして定めたものを用ゐたかと云へば，それは $n_i=Np_i=Nf_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)\,(i=1,2,\cdots,n)$ なる形であらはされる $(n_1,n_2,\cdots,n_n)$ のうちで，λ_1 を最大にするものであるといへる．既に示した如く，N が充分大であり且つ $p_1,p_2,\cdots,p_n$ が何れも餘りに小でないといふ條件のもとでは，λ_1 は近似的に $\exp\{-\chi_1^2/2\}$ で表はされる．(II, §4, [2] の議論を參照)　故に λ_1 を最大にする $(n_1',n_2',\cdots,n_n')$ は，χ_1^2 を最小にする $(n_1',n_2',\cdots,n_n')$ に，近似的に等しい．この事から，この複合假説に對する $\lambda_1=\mathrm{Const}$ なる閉曲面 (contours) の群は，$\chi_1^2=\mathrm{Const}$ なる閉曲面の群に近似的に一致する．

幾何學的に言へば次の如くにも表はされる．組別分布が $(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ なる母集團を n 次元空間の一點として，その座標を $(Np_1,Np_2,\cdots,Np_n)$ で表はす．實驗事實を $(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ とする．すると $\lambda^2=\mathrm{Const}$ は，n 次元空間に於いて $(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ なる點を中心とする楕圓體である．さて複合假説の場合には，一つの母集團換言すれば，上述 n 次元空間の一點を問題にするのではなくして，$Np_i=Nf_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ にて任意の $(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ に對應する様な母集團の集合が問題である．かゝる個々の母集團に就いて上述の楕圓體をつくり，その envelope をもとめれば，$\lambda_1=\mathrm{Const}$ なる閉曲面と一致するであらう．

[4] χ_1^2 の分布に關して，上述の結果を，もつと一般な條件のもとに於いて證明出來る事が Neyman-Pearson [1] の附錄にある．

§15. 自由度の概念，總括　複合假説に關する適合度檢査に關する全般的な見透しは，既にこれを，§9 の史的回顧に於いて與へたから，茲では繰返さない．繰返し注意を喚起して置きたい事は自由度 (degree of freedom) の概念が，どれだけの役割をなしてゐるかといふ事である．極く大雜把に言つて，複合假説の場合，未定の (從つて sample から推定すべき) parameters の個數が k 個であれば，自由度 $n-k-1$ なる分布を使はなければならぬ事は誰しも知つてゐる事であらう．然し，この事は嚴密に言ふと，§14 で述べるが如く可成り多くの條件のもとで始めて主張出來る

事であつて，しかもそれは，一般の χ_s^2 に就いて言へるのでなくして，χ_1^2 に就いて言へるのに過ぎない．勿論 §13 で述べた如く，χ_1^2 でなくとも，最尤法に依る推定法の場合にも近似的には言へる．併し，慣用されるモーメント法に依る推定方法に基き，$(n_1, n_2, \cdots, n_n)$ を計算して χ_s^2 をつくつた場合の如きものにあつては，該推定法の efficiency が 1 でなければ，理論的には，自由度 $n-k-1$ なる分布の適用といふ事の妥當性を保證されない．それにも係らず，その妥當性を當然成立つものの如く取扱つてゐるのが現狀であらう．これは，モーメント法に依る推定値が，最小 χ_s^2 法によるものに實際上極めて良い近似を示すことが多いといふ事情に由つて，暗默裡に許されるに依るものである事は，忘れてはならぬ點である．若し將來この方面の理論を，更に精密にする必要が起るならば，もつと一般の立場から χ_s^2 の分布を論究する必要があるであらう．現在のところ出來てゐるのは，χ_1^2 の分布に過ぎないと言つても過言ではなく，他の χ_s^2 であつても，恰もそれを χ_1^2 であるかの如くに取扱つて，自由度 $n-k-1$ なる χ^2 分布を適用してゐるのが現狀であると言へよう．

次に，各組に入る頻度に關しては，5 以上たるべきことと言ふ様な事柄に關しては，II, §6 の注意が，この場合に於いてもあてはまる．若し，組の頻度が 5 に達せぬものがあるならば，組の合併 (grouping of cells) を行ふ事も，適合度檢査法の常識である．ところで，この組の合併といふ事は，單純假說の場合には何等の困難も惹起しないが，複合假說の場合には注意を肝要とする點がある．先づ組の合併を行ひ，初め n 組にありしものを $n-l$ 組にして，それが所與のものとし，この $n-l$ 組の頻度から推定値をつくり，χ_s^2, χ_1^2 等をこの $n-l$ 組に關して行ふのならば，複合假說の場合と雖も，組の合併に依る問題はない．然るに實際には，始めの n 組から推定値を計算し，かくして，n 組の實驗値と n 組の理論値とを比較する段に至つて，組の合併を行ひ $n-l$ 組にして，χ_s^2 を計算するといふことをよく行ふのである．かゝるとき，自由度 $n-l-k-1$ の χ^2 分布に從ふといふ事は，上述の理論から斷言出來る事ではない．この點を指摘して，實驗的な研究を發表したものに Neyman-Pearson [2] がある．その理論的解明は殘された問題である．

第二例 (I, §1 前出)　この場合は確かに複合假說が問題である．併し，この場合に對して，χ_1^2 の理論を適用する事は，理論上困難である．先づ上述の所論に依り，組の合併を行ふ必要があり，死亡者數 0, 1, 2 及び 3 以上の四組にまとめる必要があらう．

次に，parameters の推定方法が問題である．Lüders, R. (前出, I, §1) に依れば，Poisson (I) の分布では h, Pólya-Eggenberger の分布では h, d, Poisson (I, II, III) の分布では h_1, h_2, h_3 を推定したのであるが，その推定法は，若干の工夫を加へた Moment 法で，通常のものとは，第一次のモーメントの計算では一致するが，第二次以上のモーメントについては一致しない．かゝる場合理論的には當然該推定法の efficiency が問題になる．以上，自由度，推定法の efficiency に就いての問題に對して，解決が與へられないならば，χ^2 分布の適用は理論的には保證されないと言はねばならぬ．今吾々は，これらの問題を回避して，通例の如く無批判的に，χ^2 分布を適用した結果を參考のため揭げて置かう．

(a) Poisson の分布 (I)　$\chi_s^2=3.687$, 自由度 $4-1-1=2$ とすると考へて $P=0.30$.

(b) Pólya-Eggenberger に依る分布　h と d と，二つ parameters を推定した．$\chi_s^2=0.197$, 自由

度 4−2−1=1 と考へて，$P=0.91$.

(c) Poisson (I, II, III) に依る分布 (Poisson (I, II, III)) の分布とは，その特性函數が，$\exp\{h_1(e^{iu}-1)+h_2(e^{2iu}-1)+h_3(e^{3iu}-1)\}$ で與へられる樣なものを指す．從つて三個の parameters を推定するから $\chi_s^2=0.85$. ところで自由度は 4−3−1=0 と考へれば P は定義出來ない．

むすび

適合度検査の問題は，單純假說の場合と複合假說の場合とに分かれる．兩者を通じて，χ^2 分布が果す役割を說明した．總括的な事は，夫々 §8 及び §15 に於いて，括めて述べて置いた．適合度檢査の方法としては尙 Neyman の Smooth Test や，Mises の ω-test 等があるが，これらは χ^2 分布を用ゐるものではないから，便宜上，全然觸れなかつた．上述の方法は，これらの方法と比較する事に依り，更にその特性を明かにし得るであらう．然しこれは他の機會にしたい．

引用文献

(1) Berkson, J. [1], Some difficulties of interpretation encountered in the application of the chi-square test, Journ. Amer. Stat. Assoc., 33 (1938), 526−536.

(2) Bortkiewicz, L.v., [1], Das Helmertsche Verteilungsgesetz für die Quadratsumme zufälliger Beobachtungsfehler, Zeitschr. für angew. Math. u. Mech., 2 (1922), 358—375.

(3) Bowley, A. L., and R. L. Connor [1], Tests of Correspondence between Statistical grouping and Formulae, Economica, 7 (1923).

(4) Brownlee, J. [1], Some Experiments to Test the Theory of Goodness of Fit, Journ. Roy. Stat. Soc. 87 (1924), 76—82.

(5) Camp, Burton H. [1], Further interpretations of the chi-square test, Journ. Amer. Stat. Assoc., 33 (1938), 537−542.

(6) Cochran, W. G. [1], The χ^2 distribution for the binomial and Poisson series, with small expectations, Annals of Eugen., 7 (1936).

(7) Fisher, R. A. [1], On the Interpretation of χ^2 from Contingency Tables, and the Calculation of P, Journ. Roy. Stat. Soc., 85 (1922), 87—94.

(8) Fisher, R. A. [2], The goodness of fit of regression formulae, and the distribution of regression coefficients, Journ. Roy. Stat. Soc., 85 (1922), 597−612.

(9) Fisher, R. A. [3], The conditions which χ^2 measures the discrepancy between observation and hypothesis, Journ. Roy. Stat. Soc., 87 (1924), 442−449.

(10) Fisher, R. A. [4], Theory of statistical estimation, Proc. Cambridge Phil. Soc., 22 (1925), 700—725.

(11) Fisher, R. A. [5], Statistical Tests of Agreement between Observation and Hypothesis (with a note in reply by A. L. Bowley), Economica 7 (1923).

(12) Fisher, R. A. [6], Statistical Methods for Research Workers, Oliver & Boyd, Edinburgh, (1932), Fourth Edition.

(13) Fürth, R. [1], Schwankungserscheinungen in der Physik, (1920),

(14) Grünerberg, H. and Haldane, J. B. S. [1], Test of goodness of fit applied to records of Mendelian segregation in mice, Biometrika 29 (1937), 144−153.

(15) Haldane, J. B. S. [1], The Exact Value of Moments of the Distribution of χ^2, used as a Test of Goodness of Fit, when Experimentations are small, Biometrika 29 (1937), 133—143.

(16) Haldane, J. B. S. [2], Correction to Formulae in Papers on the Moments of χ^2, Biometrika, 3 (1939), 220.

(17) Hoel, Paul G. [1], On the Chi-square Distribution for Small Samples, Ann. of Math., Stat., 9 (1938), 158—165.

(18) Irwin, J. O. [1], Note on the χ^2 Test for Goodness of Fit, Journ. Roy. Stat. Soc. 92 (1929), 264—

(19) Neyman, J., and E. S. Pearson [1], On the Use and Interpretation of Certain Test Criteria for Purposes of Statistical Inference, Biometrika 20 A (1928), 263—294.

(20) Neyman, J., and E. S. Pearson [2], Further Notes on the χ^2 Distribution, Biometrika 22 (1931), 298—305.

(21) Pearson, K. [1], On the Criterion that a Given System of Deviations from the Probable in the case of a Correlated System of Variables in such that it can be reasonably supposed to have arisen from Random Sampling, Phil. Mag., 50 (1900), 157—175.

(22) Pearson, K. [2], Experimental Discussion of the Test for Goodness of Fit, Biometrika 24 (1932), 351—381.

(23) Robinson, S. [1], An Experiment regarding the χ^2 Test Ann. Math. Stats., 4 (1933), 285—

(24) Sheppard, W. F. [1], The Fit of a Formula for Discrepant Observations, Phil. Trans., Series A_2 228 (1927), 115—

(25) Wilson, E. B., Margaret M. M. Hilferty and H. C. Mahler [1], Goodness of fit, Journ. Amer. Stats. Assoc., 26 (1931), 443—448.

(26) Wilson, E. B. and M. M. Hilferty [1], The distribution of chi-square, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 17 (1931), 684—688.

(27) Yule, G. U. [1], On the Application of the χ^2 Method to Association and Contingency Tables, with Experimental Illustrations, Journ. Roy. Stat. Soc., 85 (1922), 95—104.

(28) Yule, G. U. and M. G. Kendall [1] An Introduction to the Theory of Statistics, Edition 11 (1937).