Alf Guldberg : Les fonctions de frequence discontinues et les series statistiques, Annales de L'innstitut Henri Poincare, 3(1932), 229-278.

丸山, 儀四郎
九州帝國大學理學部

出版情報：統計数理研究. 1 (1), pp.105-107, 1941-10-15. 統計科学研究会

Alf Guldberg

Les fonctions de fréquence discontinues et les séries statistiques,

Annales de L'innstitut Henri Poincaré, 3(1932), 229-278.

會員 丸 山 儀 四 郎（九州帝大理學部）

此の論文の後半に於て，次の諸分布：

(1) Poisson の分布 $f(x)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots)$

(2) 二 項 分 布 $f(x)={}_kC_x p^x q^{k-x},\quad p+q=1,$ $(x=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots k)$

(3) Pascal の分布 $f(x)={}_{k+x}C_k p^k q_x,\quad p+q=1,$ $(x=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots)$

を使用せんとする場合，その何れを用ふべきかに對する一つの判定法を與へてゐる．方法は (1), (2), (3) 何れに對しても同様であるから，以下 (2) に就いて考へる．(2) は次の定差方程式を滿足する

$$f(x+1)=\frac{p}{1-p}\,\frac{k-x}{x+1}\,f(x), \tag{4}$$

或は

$$(1-p)(x+1)f(x+1)=pkf(x)-pxf(x).$$

兩邊に $(x+1)^n$ を掛けて右邊を x の羃に展開すると

$$\begin{aligned}(1-p)(x+1)^{n+1}f(x+1)&=pkx^n f(x)+{}_nC_1pkx^{n-1}f(x)+\cdots\cdots+pkf(x)\\&\quad-px^{n+1}f(x)-{}^nC_1px^nf(x)-\cdots\cdots-pxf(x).\end{aligned}$$

σ_n を原點の周りの n 次の moment, 即ち

$$\sigma_n=\sum_{x=0}^{\infty}x^nf(x)$$

とすれば，上の式の兩邊を x に就き 0 から k 迄加へる事に依り次の回歸式が得られる．

$$\begin{aligned}(1-p)\sigma_{n+1}&=pk\sigma_n+{}_nC_1pk\sigma_{n-1}+\cdots\cdots+pk\\&\quad-p\sigma_{n+1}-{}_nC_1p\sigma_n-\cdots\cdots-p\sigma_1.\end{aligned}$$

特に $n=0,1$ と置き

$$\sigma_1=kp,\quad \sigma_2=pk\sigma_1+pk-p\sigma_1=p^2k^2-p^2k+pk.$$

最後に求める式の形を簡單にするために semiinvariants, 即ち

$$e^{\mu_1 it+\frac{\mu_2}{1\cdot 2}(it)^2+\cdots\cdots}=\sum_{x=0}^{\infty}e^{ixt}f(x)$$

なる如き μ_1, μ_2 を用ふれば良く知られてゐる公式に依つて

$$\mu_1 = \sigma_1 = kp, \quad \mu_2 = \sigma_2 - \sigma_1^2 = kp(1-p), \quad \mu_2 < \mu_1.$$

故に

$$p = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1}, \qquad k = \frac{\mu_1^2}{\mu_1 - \mu_2}.$$

之を (4) に代入すれば

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}(x+1) + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} x = \frac{\mu_1^2}{\mu_2}.$$

(1) 及 (3) に對しても全く同じ定差方程式が得られる．但し (1) に於ては，$\mu_1 = \mu_2 = \lambda$，從つて

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}(x+1) = \lambda$$

となる．又 (3) に對しては

$$\mu_1 = q\frac{k+1}{1-q}, \qquad \mu_2 = q\frac{k+1}{(1-q)^2}.$$

從つて $\mu_2 > \mu_1$ である．結局 (1), (2), (3) の各々に對して

$$a(x) = \left\{\frac{f(x+1)}{f(x)}(x+1) + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} x\right\} \Big/ \frac{\mu_1^2}{\mu_2} = 1.$$

而して (1) なるか，(2) なるか，(2) なるかに從ひ夫々

$$\mu_1 = \mu_2 = \lambda, \quad \mu_1 > \mu_2, \quad \mu_1 < \mu_2$$

である．故に (1), (2), (3) を用ひんとすれば，與へられた sample に就いて $a(x)$ の値を計算し，之が大略 1 に等しくなるか否かを見る．而して $a(x)$ の値が總べての x に對して大略 1 に等しい場合に μ_1, μ_2 が特に兩者の大小關係の何れを滿足してゐると見るべきかを知りて (1), (2), (3) の何れを用ふべきかを決定する．

例 1. Rutherford と Geiger は或る一定時間內に Polonium から出る α 粒子の數を觀測して次の結果を得た．x は α 粒子の數，$H(x)$ は x なる觀測値を得た觀測回數とする．

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$H(x)$	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	10	4	0	1	1

之から計算すると，$\mu_1 = 3.88 = \lambda$ を得る．

$$a(x) = \frac{H(x+1)}{H(x)}(x+1) \Big/ 3.88$$

の $x = 0, 1, \cdots\cdots, 13$ に對する値を計算すると

$a(0) = 0.92 \quad a(1) = 0.97 \quad a(2) = 1.05 \quad a(3) = 1.05 \quad a(4) = 0.94$

$a(5) = 1.04 \quad a(6) = 0.92 \quad a(7) = 0.67 \quad a(8) = 1.40 \quad a(9) = 0.96$

$a(10) = 1.14 \quad a(11) = 0 \quad a(12) = \infty \quad a(13) = 3.62.$

依つて $\lambda = 3.88$ として Poisson の分布 $f(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ を用ふれば

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$2608f(x)$	53	205	400	520	507	396	257	143	70	30	12	4	1	0	0

例 2. 2000頭の牝豚の Müller の腺の數に就いて次の様であつた.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$H(x)$	15	209	365	482	414	277	134	72	22	8	2

之に對しては $\mu_1 = 3.5$, $\mu_2 = 2.8$, $\mu_1 > \mu_2$ と見るべきである. 而して

$\alpha(0) = 4.00$ $\alpha(1) = 0.90$ $\alpha(2) = 1.10$ $\alpha(3) = 0.97$ $\alpha(4) = 0.93$

$\alpha(5) = 0.86$ $\alpha(6) = 1.10$ $\alpha(7) = 0.77$ $\alpha(8) = 0.97$ $\alpha(9) = 0.70$.

依つて (2) を用ふれば

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$200\,(x)$	41	177	364	468	423	286	150	62	21	6	1

例 3. v. Bortkiewicz に依ると 1869–1893 に於ける普魯西の子供の自殺者の數に就いて

x	0	1	2	3	4	5	6
$H(x)$	4	8	5	3	4	0	1

である, 但し x は某一年間に於ける自殺者數, $H(x)$ は自殺者 x を出した年の數. 之に就いては $\mu_1 = 1.96$, $\mu_2 = 2.46$, $\mu_2 > \mu_1$. 而して

$\alpha(0) = 1.3$ $\alpha(1) = 0.7$ $\alpha(2) = 0.9$ $\alpha(3) = 0.3$ $\alpha(4) = 0.1$

$\alpha(5) = \infty$ $\alpha(6) = 0.8$.

依つて Pascal の分布を用ひると

x	0	1	2	3	4	5	6
$25f(x)$	4.0	6.2	5.5	3.6	2.0	0.9	0.4

v. Bortkiewicz が Poisson の分布で計算した結果に依ると

x	0	1	2	3	4	5	6
$25f(x)$	3.4	6.8	6.8	4.5	2.2	0.9	0.3

Pascal の分布に依る方が良好である.