小標本の理論(Ⅰ)：正規型分布に關する統計假説檢定法，Ⅰ

北川，敏男
九州帝國大學理學部

出版情報：統計数理研究. 1 (1), pp.66-81, 1941-10-15. 統計科学研究会

協同研究報告

小 標 本 の 理 論 (I)

正規型分布に關する統計假說檢定法, I

會員 北 川 敏 男 (九州帝大理學部)

(昭和十六年四月卅日受理)

§1. まへがき

極めて小數個(例へば10個足らず)の觀測値, 實驗値をもとにしこれから適當な方法により推量して所要の定數を estimate することは, 實驗科學では極めて普通に行ふ事である. 工業方面でも材料の分析, 製品の檢査に當つて, 小數個の見本についての結果から製作全般についての推斷を下す必要が起る. Samples を集める事が經濟や勞力上の問題であつて, これらを惜まず或は厭はなければ, 如何程でも多數の Samples を集め得る場合もあらうが, 然し, 氣象・地震・天文・衞生等の事象では, 如何にしても, 統計材料の個數に實際上制限がある場合がある. 斯る實際問題として必須な小數個の資料の統計學的處理法を與ふるものの一つとして, 所謂小標本 (Small Samples) の理論がある.

本稿では, 所謂平均値なるものに重點をおいてこれを小標本論の立場から考察して見たいと思ふ. この方面の諸研究に就いては, 吾國にては未だ充分に普及してゐない樣である. それで一つには論題のきつかけを提供する意味からも, 今回はこの方面の最も基本的な結果の紹介に止める. 主なる引用文獻は次の二つである.

〔1〕 J. Neyman and E. S. Pearson, On the Use and Interpretation of Certain Test Criterion for Purpose of Statistical Inference, Part I, Biometrika, 20A(1928), 175-240.

〔2〕 W. Edwards Deming and Raymond T. Birge, On the Statistical Theory of Errors, Review of Modern Physics, 6(1934), 119-161.

今回以下に述べる材料もすべてこれらの論文や其他の論文に負ふものである. 以下に述べる理論に關して關聯ある材料をおもちの方は事情の許す限り進んで本誌上に發表し, 同攻の士の參考に供されんことを望むものである

さて次に, 表題の如き方法が問題になるのは如何なる場合であるかを例を以つて示さう.

第一例 第26王朝より第30王朝迄のエジプト人の頭蓋骨884個に就いて, 頭蓋指數 (Cephalic Index) を計算したところ, 平均値 75.06, 標準偏差 2.68 であつた 今別に次の如き頭蓋指數をもつ10個の頭蓋骨を得た

$$(1.01)\qquad \begin{cases} 66.7, & 69.4, & 67.8, & 73.2, & 79.3, \\ 80.7, & 64.9, & 82.2, & 72.4, & 78.1 \end{cases}$$

然らば, これらの10個の頭蓋骨は上記王朝エジプト人の頭蓋骨と見なし得べきや否や. 1

第二例 生後120日より140日迄のハツカネヅミの多數について體重測定の結果，平均體重23.823 gr.，標準偏差3.137 gr. であり，且つその分布に就いて $\beta_1=0.086$, $\beta_2=2.687$ であつた．然らば次の如き體重をもつ夫々6匹，5匹のハツカネヅミは各々が上記の集團からの Sample と見做し得るか否か〔1〕.

(1.02) (a) 22.5, 26.0, 20.5, 24.0, 18.0, 24.5.

(b) 22.5, 23.5, 23.5, 25.0, 24.5.

第三例 或る所與の物質の化學分析法を方々の實驗室に依賴した所，或る成分の百分率について次表の樣な結果を得た．茲に t は實驗室の番號，n_t は第 t 號實驗室に於ける實驗回數，m_t は第 t 號實驗室にて n_t 回の實驗の結果得たる平均百分率とする．次表から全實驗室についての平均百分率 8.353，標準偏差 $\sigma=0.329$ を得る．次表から判斷して，全實驗室を通じて分析方法，材料等が一樣であつたと云ひ得るや否や〔1〕.

第 1 表

t	m_t	n_t	g_t	t	m_t	n_t	g_t
1	8.432	22	+0.46	7	8.239	9	−1.47
2	8.127	10	−2.63	8	8.531	16	+1.59
3	8.483	19	+1.10	9	8.163	4	−1.44
4	8.002	15	−4.69	10	8.405	16	+0.06
5	8.317	16	−1.01	11	8.391	23	−0.13
6	8.582	25	+2.77	12	7.976	12	−4.47

但し $g_t\equiv(m_t-8.4)\sqrt{n_t}/\sigma$.

§2. 標本論の要請

上述の樣なタイプの問題に解答を與へる統計學的方法を求める事が當面の目的ではあるが，そのため，茲で表題の如き根本問題に多少觸れそれからスタートする必要がある樣である．

今暫らく觀測に例をとる．n 回の觀測結果が得られたとする．各第 k 回の觀測値 x_k は，觀測環境 S_k のもとに於いて得られたとする．これら S_k は同じものでは勿論ない．同じ環境とは，それを規定する全條件に於いて一致する事を意味する限り，それは歴史的な唯一的なものであるからである．統計學の任務とするところの一つは，かゝる報告から，より普遍的な智識を讀みとることにある．も少し具體的に ——しかし尚多少漠然としてゐるが—— いへば "同樣な環境 S' に於いては如何なる結果を得るか" といふ問ひに答へなければならない．又上述の $S_1, S_2, \cdots\cdots, S_n$ は同樣な環境でなければならない．しかしこの表現は適當であらうか．

先づこの樣な設問の前に，同樣な觀測環境とは何かを調べなければならない．

S と S' とは共に，歴史的な唯一性をもつものである．從つて S と S' とが同樣な觀測環境であるといふのは，環境を規定するいくつかの條件に於いて或る程度に於いて夫々一致する，即ち部分的な條件の一致といふ事に外ならない．$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ の凡べてに共通して滿足される環境條件のうちの或るものを c で表はさう．c なる環境條件をみたすものは他にいくらもあらう．これ

らの全體を $\mathfrak{A}$ で表はす．$\mathfrak{A}$ は，觀測環境を規定するあらゆる條件のうちのいくらかの條件が指定され（即ち條件 (c) が滿足され），殘りの條件については規定されてゐない樣な環境の一つの集りに外ならないから，$\mathfrak{A}$ なる事情のもとで如何なる觀測結果を得るかは一義的には（一般には）定まらない．そこで上述の設問は，より精確にいへば“$\mathfrak{A}$ なる觀測環境の下に於いては如何なる觀測結果を得る可能性があるか”となすべきである．

量子統計力學等に於いては更に立ち入つた考察を必要とするであらう．今日は日常的な素朴な範圍に於いて問題の素描を試みることにする．

次に比喩的にこの事情を說明する（比喩であるから非本質的な點をも含んでゐる）．今玆に，$z=f(x,y)$ なる二變數の函數 z が $0\leqq x,\ y\leqq 1$ に於いて定義せられてゐたとする．x,y に任意に値を指定すれば z の値はそれに應じて一義的にきまる．例へば $x=x_0,\ y=y_0$ とすれば $z_0=f(x_0,y_0)$，これを觀測環境の全條件を與へる事に比喩するとすれば，觀測環境の部分的な規定といふのは例へば，$x=x_0$，但し y は任意，といふ樣な場合である．このときには $z=f(x_0,y)$ となり一般に y と共に變るから z の値は一義的にはきまらない．又 $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$，且つ $y_0-\varepsilon<y<y_0+\varepsilon$ といふ樣な條件も觀測環境の部分的な規定になぞらへ得よう．

上述の如く表現された設問も，その凡てが統計學の對象たり得るとは限らないのであつて，確率論を基礎とする數理統計學に限つて云へば，そうした設問に對して（原理上）解答の可能性のあるのは $\mathfrak{A}$ が確率的集團を形成すると見做し得べき場合である．玆に確率的集團を說明し始めるとながくなるから，その特別な場合である確率變數に限る事にする．蓋し當面の事象の表示が數量を以つて表現可能である場合には，確率的集團は確率變數と見做して論ぜられるからである．

確率變數 (Stochastic Variable, Chance Variable, Variable aléatoire) といふのは何か．先づ第一に變數である．即ち（一般に）いろいろちがつた數値をとる．而して第二にその値のとり方が確率で規定されて居る．この二つの性質を表現するものとして X の分布函數 $F_X(x)$ がある．$F_X(x)$ とは確率變數 X が或る數値 x を超へない確率──これを $Pr\{X\leqq x\}$ で表はす──である．即ち $F_X(x)=Pr.\{X\leqq x\}$．（明らかに (i) $F_X(-\infty)=0$；(ii) $F_X(x)$ は x の非減少の函數である；(iii) $F_X(+\infty)=1$）．

$\mathfrak{A}$ なる場合に於いて如何なる觀測値を得るかは事前的に一義的に指定出來ない．今得て居る $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ といふ値も，$\mathfrak{A}$ が現實として $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_n$ となつて具現した故に，かく確定した値を得たわけなのである．確率論に立脚する標本論が成立するため若干の要請が必要となる．そのうち最も根本的なものを列擧すると：

［**P.I.**］ $\mathfrak{A}$ なる事情の下に於いては，各第 k 回の觀測値は一義的に定まるものでなく，如何なる値になるかは確率變數 X_k として表現される．

［**P.II.**］ X_k の分布函數 $F_{X_k}(x)$ は皆一致する；即ち $F_{X_1}(x)=F_{X_2}(x)=\cdots\cdots=F_{X_n}(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ これを $F(x)$ とおく．

［**P.III.**］ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ なる確率變數は相互に獨立である．即ち任意の n 個の値 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ に對して，$X_k\leqq a_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ なる n 個の事象の悉くが同時に成立つ確率（次式左邊）は，

各々一つづつが成立つ確率の積（次式右邊）に等しい．即ち

$$pr.\left\{X_1 \leqq a_1, \cdots, X_n \leqq a_n\right\} = \prod_{k=1}^{n} Pr.\left\{X_k \leqq a_k\right\}.$$

〔P. III.〕は各回の觀測結果が他回の觀測に影響し合ふ事のない事を示すものであるが，同一人が觀測を幾回も行ふ場合，逐次精度を増す様に出來る場合もあるし，前の方の結果を知る事が後に影響を及ぼす事もあり得るのである．その場合に於ては，〔P.II.〕も〔P.III.〕も修正を要すると思ふ．私はこの方向に向つて標本論の進歩の要因の一つがあると信ずる者であり，そのためには，各方面の人々から如何なる修正を實際必要として居るかを伺ひたいと希望してゐる．

それは兎に角として，以上の三つを要請するならば $x_1, x_2, \cdots, x_n$ なる觀測結果は $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2$, ……, $X_n = x_n$ となつて，現實にあらはれた一つの特殊な場合に過ぎない．即ち可能なる場合の一つの標本である．

以上の様に確率變數を表面に立てゝ記述すると，標本論の立場や方法がはつきりすると思ふ．

普通は，母集團 (Parent Population) Π なるものを想定し，これは或る分布函數 $F(x)$ が附隨してゐる．$x_1, x_2, \cdots, x_n$ なるものは，この母集團から相互に無關係に且つ at random にとり出された見本（標本）と見做すといふことを標本論の要請にするのであるが，その內容を吟味分析すれば以上の〔P.I.〕,〔P.II.〕,〔P.III.〕なる三つの要請になると思ふのである．母集團の想定と抽出の任意且つ獨立とは不可分なものでない事は，前述の如く〔P. III.〕を修正しても確率論に立脚する標本論の樹立が考へ得る事に照應すべきことである．上記二つの表現方法が同一內容を意味するものであるから，吾々はその時々の便宜に從つて何れかを用ゐる事にすればよい．

次に理論統計學の多くの根本的問題が，以上の要請と如何なる關係にあるかを示さう．

(I) **特徵付の問題** (Problem of Specification) これは $x_1, x_2, \cdots, x_n$ から推量して，$F(x)$ の型を決定する問題である．例へば $F(x)$ は Pearson の何型の分布函數と見做すべきかといふ問題である．この問題に對しては單に上述の材料のみならず，それ以外の他からの智識（以下便宜上，該當標本以外のものに基く智識を a priori な智識と假りにいふ）が，大なる發言權を有する．例へば偶然誤差の法則に從ふと思惟さるべきものに對しては Gauss 型即ち正規型の分布法則

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx \tag{2.01}$$

の適用を，又稀事象に關するものならば Poisson 型の分布

$$h^k e^{-h}/k! \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots) \tag{2.02}$$

を一應考慮しなければならぬ．

(II) **推定問題** (Problem of Estimation) 特徵付けの問題が解けて $F(x)$ の型がきまつたとき，$F(x)$ のなかにあるパラメーターを $x_1, x_2, \cdots, x_n$ から推定するのがこの問題である．Gauss 型 (2.01) のときならば a と σ とを共に又はその一方を，Poisson 型分布ならば h を推定するといふ問題である

(III) **分布問題** (Problem of Distribution) [P. I.]〜[P. III.] の假定のもとに於いて, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の或る函數の分布函數を求めるといふ問題である. 例へば

$$\bar{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n},\quad S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\bar{X})^2} \tag{2.03}$$

の分布函數を知る事が問題なのである. これは (I), (II) の問題に對して有効な解決手段を提供する事になる.

(IV) **統計的假設檢定の問題** (Problem of Testing Statistical Hypotheses) 吾々は [P. I.]〜[P. III.] を假定するものであるが, しかし $F(x)$ そのものは未知であつて, これを知る手段としては, a priori な智識は別として, 只 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を利用するより外に方法はない. 今假りに $F(x)$ にある特定なものを採用せんとするならば, その適否は, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ なる材料と照應して, これに基き判定されねばならぬ. $F(x)$ がある特定のものなるべしといふ假說を統計的假說といふ. これを Sample $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に基いて採否を判定するのがこの問題である.

§3. 假定 (N) と標本分布 (Sampling Distribution)

以下本回は, 特徵付けの問題が何等かの根據から解決され, 次の假定

(N) 母集團の分布函數 F(x) は正規型である.

といふ事を出發點にしてよいとする. §1 で述べた諸例も皆大體この條件を充すとしてよいものとする. 之れらの諸例で課題として提出されて居る事を標本論の言葉で, もつと正確に表現するとどうなるか. 話しを具體的にするため, 例1を論題にとつてみる.

假定 (N) に依つて, 884個の材料によつて推定された平均値 a の推定値 75.06, 標準偏差 σ の推定値 2.68 をそのまゝ採用して, 問題の王朝期のエジプト人の Cephalic Index は次の正規型分布をもつとする:

$$\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{(x-75.06)^2/2(2.68)^2}}{\sqrt{2\pi}\times 0.268}\,dx. \tag{3.01}$$

問題は n 個の標本 (1.01) は (この分布法則に從ふ) この母集團からの標本と見なし得るや否やといふ事である.

玆では (1.01) なる10個の Sample の個々を一つづつ切り離して問題にして居るのではない. 10個を一つの組と考へての話である. 即ち正確には構成分子が n 個の一標本 (a sample of n) といふべきである. 組としての性質を表章するものには, 例へば

$$\left\{\begin{array}{ll} \bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} & \text{標本平均値 (Sample Mean)} \\ s=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2} & \text{標本標準偏差 (Sample Standard Deviation)} \end{array}\right. \tag{3.02}$$

等がある. $\bar{x}$ が 75.06, s が 2.68 に近ければ近い程, (1.01) が (3.01) なる母集團からの標本と見做してよいであらうといふことは常識的にも想像される. この様な考へを確率論的に明確にするには §2 の要請にあらわれた $F(x)$ は (3.01) で與へられるとし, (3.02) に對應して (2.03) なる確率變數

$\overline{X}, S$ をつくり，これに對する分布函數をもとめる事から出發するより外はない．他の例でも同様である．

そこで一般問題に立ち歸り，母集團の分布函數 $F(x)$ が (2.01) で與へられる場合，$\overline{X}, S$ の Sampling Distribution を求めて見よう．この問題は［P. I.］～［P. III.］なる要請に於て $F(x)$ が (2.01) で與へられる時，確率變數 $\overline{X}, S$ の分布函數を求める事と同一內容である．

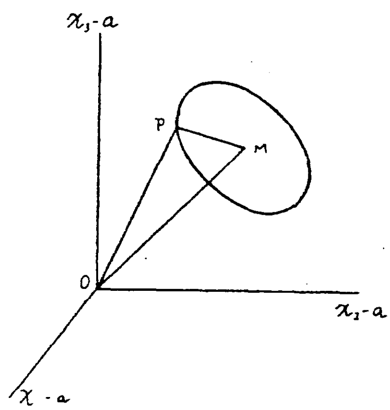
n 個の標本が上述の母集團から抽き出される場合，第 k 番目のものの値は (a_k, b_k) の範圍に屬するといふ n 個の事象が悉く成立する確率は，獨立事象の法則により，各々の事象の起る確率の積である．これを確率變數でいふと

(3.03)
$$\begin{aligned} & Pr.\{a_1 < X_1 \leqq b_1, \cdots\cdots, a_n < X_n \leqq b_n\} \\ &= \prod_{k=1}^{n} Pr.\{a_k < X_k \leqq b_k\} \qquad (\text{獨立性 [P. III.]}) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{a_k}^{b_k} e^{-(x_k-a)^2/2\sigma^2} dx_k \qquad (\text{假　定 (N)}) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^n} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-a)^2/2\sigma^2} dx_1 \cdots dx_n . \end{aligned}$$

以下便宜上

(3.04)
$$D_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n \equiv \frac{e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-a)^2/2\sigma^2}}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^n}\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

第１圖　標本空間 ($n=3$)



$O : (a, a, a)$
$P : (x_1, x_2, x_3)$
$OM : x_1 = x_2 = x_3$

とおく．$\bar{x}, s$ を用ゐると

(3.05)
$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2 = n((\bar{x}-a)^2 + s^2)$$

として表はされる．更に，簡單のため

(3.06)
$$\bar{x} - a = u$$

とおく．$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ なる變數の組を次の變換式に依つて $(u, v_1, v_2, \cdots, v_{n-1})$ なる變數の組へ移す．

(3.07)
$$\begin{cases} x_k = v_k + u & (k = 1, 2, \cdots, n-1) \\ x_n = u - \sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k . \end{cases}$$

すると

(3.08)
$$D_n\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n = \frac{n}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^n}\, e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(u^2+s^2)}\, du\, dv_1 \cdots dv_{n-1} .$$

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を n 次元のゆーくりつど空間の座標にとり，これを P で表はす．點 O の座標を $(a, a, \cdots, a)$ とする．PM なる線分は P から直線 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ への垂線とする．すると

$$(3.09)\quad \begin{cases} OM = \sum_{i=1}^{n} x_i/n^{1/2} = n^{1/2}(\bar{x}-a), \quad \overline{OP}^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2 \\ \overline{MP}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OM}^2 \\ \quad = \sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2-(n^{1/2}(\bar{x}-a))^2 = ns^2. \end{cases}$$

従つて或る所與の u, s^2 をもつ樣な點 P の軌跡は直線 OM に直交する $(n-1)$ 次元の球上に存在する事になる．そこで $u_0<u<u_0+du_0$, $s_0<s<s_0+ds_0$ となる樣な u, s の體積は $s_0^{n-2}\,ds_0\,du_0$ に比例する事がわかる．そこで $u<\bar{X}-a<u+du$, $s<S<s+ds$ となる確率は次式で與へられる：

$$(3.10)\quad Pr.\{u<\bar{X}-a<u+du,\quad s<S<s+ds\}$$
$$= C_n e^{-nu^2/2\sigma^2}du \times (s^2)^{(n-3)/2}e^{-ns^2/2\sigma^2}d(s^2).$$

C_n は勿論次の如くして容易に決定される．

$$(3.11)\quad C_n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nu^2/2\sigma^2}du\int_0^{\infty}(s^2)^{(n-3)/2}e^{-ns^2/2\sigma^2}d(s^2) = 1.$$

かく C_n をきめてそれを (3.10) に代入して結局

$$(3.12)\quad Pr.\{u<\bar{X}-a<u+du,\quad s<S<s+ds\}$$
$$\equiv E_n(u,s)\,du\,ds \qquad (\text{と置く})$$
$$= \frac{n^{n/2}}{\pi^{1/2}2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{s^{n-2}}{\sigma^n}e^{-\frac{n(u^2+s^2)}{2\sigma^2}}du\,ds$$
$$= \frac{n^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}\sigma}e^{-nu^2/2\sigma}du\cdot\frac{n^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{(n-3)/2}\sigma}\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{n-2}e^{-ns^2/2\sigma^2}ds.$$

(3.12) が以下に於いて中心的な役割をなす．茲では (3.12) から簡單に導かれる重要な事柄を二三列擧しておく．

(1°). (3.12) を s に關して 0 から ∞ まで積分して

$$(3.13)\quad Pr.\{u<\bar{X}-a<u+du\}$$
$$= \int_{s=0}^{\infty} Pr.\{u<\bar{X}-a<u+du,\quad s<S<s+ds\}$$
$$= \left(\int_0^{\infty} E_n(u,s)\,ds\right)du$$
$$= \frac{n^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}\sigma}e^{-nu^2/2\sigma^2}du.$$

これは平均値 0, 標準偏差 $\sigma/\sqrt{n}$ なる正規分布である．

(2°). (3.12) を u に關して $-\infty$ から $+\infty$ まで積分して

$$(3.14)\quad Pr.\{s<S<s+ds\}$$
$$=\int_{u=-\infty}^{\infty} Pr.\{u<\overline{X}-a<u+du,\ \ s<S<s+ds\}$$
$$=\left(\int_{-\infty}^{\infty} E_n(u,s)\,du\right)ds$$
$$=\frac{n^{(n-1)/2}}{2^{(n-3)/2}\sigma\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{n-2}e^{-ns^2/2\sigma^2}ds \quad \text{(Helmert の式)}.$$

これは正規分布ではない．しかし n が限りなく大になると標準偏差が $\sigma/(2n)^{1/2}$ なる正規分布に近づく．

(3°) (3.12)〜(3.14) に依つて知られる事は，

$$(3.15)\quad Pr.\{u<\overline{X}-a<u+du,\ \ s<S<s+ds\}$$
$$= Pr.\{u<\overline{X}-a<u+du\}\,Pr.\{s<S<s+ds\}$$

である．この關係は $u, u+du, s, s+ds$ を任意の四數 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ (但し $\alpha_1<\alpha_2$, $\beta_1<\beta_2$) でおきかへても成立つ．これは確率變數 $\overline{X}-a$ と S とは獨立であるといふ事に外ならない．この著しい性質は假定 (N) が成立たぬ場合即ち母集團の分布函數 $F(x)$ が正規型でなければ一般に成立しないといふ事が知られてゐる故，一層注意すべき事である．

(4°). $Z=(\overline{X}-a)/S$ なる確率變數を導入すると (3.12) から

$$(3.16)\quad Pr.\{z<Z<z+dz,\ \ s<S<s+ds\}$$
$$=\frac{n^{n/2}}{(2\pi)^{1/2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{(n-3)/2}\sigma^2}\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{n-2}e^{-\frac{ns^2(1+z^2)}{2\sigma^2}}s\,ds\,dz$$

を得る．そこで

$$(3.17)\quad Pr.\{z<Z<z+dz\}$$
$$=\int_{s=0}^{\infty} Pr.\{z<Z<z+dz,\ \ s<S<s+ds\}$$
$$=\frac{1}{B\left(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}\right)}(1+z^2)^{-\frac{n}{2}}dz \quad \text{(Student の分布)}.$$

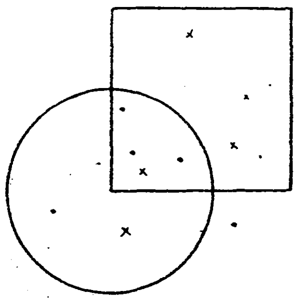
§4. 平均値に關する假說檢定法

統計的假說の採否に依り吾々がおかすかも知れぬ誤謬は論理上二つの種類のものが可能である．その一つは，該假說が眞なるにも係らずこれを僞なりとして棄却する誤謬であり，他は該假說が僞なるにも係らずこれを眞なりとして容認する誤謬である．前者を第一種の，後者を第二種の誤謬といふ．

今玆に模型的に簡單な例を述べよう．第2圖に於て・に依つて或る假說 H_0 から起り得るすべて

の標本を表現し，×に依つて他の假說から起り得るすべての標本を表はす．尙或る根據から H_0, H_1 以外の假說は確かに眞でないことが知られて居ると想定する．

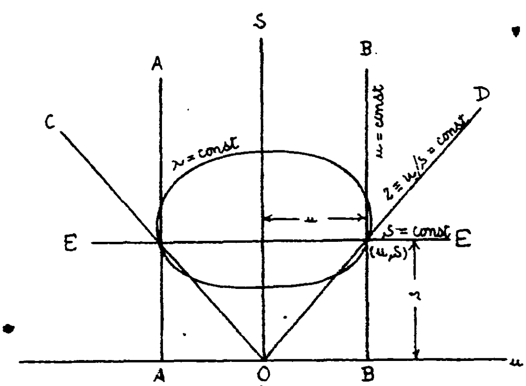
第 2 圖



今第2圖の如く圓を描き，この圓内に在る様な標本を得た場合には假說 H_0 は眞なりと推定し，圓外に在る様な標本を得た場合には假說 H_0 は僞なりと推定するとする．これに依り假說 H_0 に對する（從つて唯一の alternative たる假說 H_1 に對する）假說檢定法を提出した事になるのであるが，この場合，この檢定法に依り第一種の誤謬をおかす確率は 1/5，第二種の誤謬をおかす確率は 2/5 である．蓋し•が5個のうち圓外に•が1個あり，×が5個のうち，×が2個圓内に存在するからである．上の圖の如き正方形を描き，この正方形内に在る標本を得る場合には假說 H_1 は眞なりと推定し，正方形外に在る様な標本を得た場合には H_1 は僞なりとする．これも前と同様に，假說 H_1 に對する（從つて上述と同じ理由に依り H_0 に對する）假說檢定法を提供するものであるが，第一種，第二種の誤謬をおかす確率は夫々 1/5, 3/5 である．

これら圓と正方形とは第一種誤謬をおかす確率は相等しく，第二種誤謬をおかす確率は圓の方が小なる故，判定區域としては，他に考慮すべき事情がなければ，圓の方が正方形よりも有効と見られるわけである．第一種の誤謬をおかす確率は理論上如何程でも小さく出來るのであるが，第一種の誤謬をおかす確率を，ある指定値（例へば 0.01 或は 0.05）より小ならしめるもののうちで更に第二種の誤謬を出來るだけ小さくする様な區域を見出す事が望ましいのである．これは Testing Statistical Hypotheses の中心問題になる．

第 3 圖 (u, s) 平面と諸曲線



吾々が以下にのべるのは，第一種の誤謬をおかす確率を或る指定値を超へない様な區域を (u, s) 平面上に如何にして求められるかを示すのが問題である．上の例の圓周や正方形の周に對應して判定區域を規定する境界曲線を次の如く五種類つくつてみる（第3圖）．（但し δ- 曲線は描いてない．）

〔1〕 u-曲線 $\quad |u| = \text{Const.}$

〔2〕 s-曲線 $\quad s = \text{Const.}$

〔3〕 z-曲線 $\quad |z| = \text{Const.}$

〔4〕 λ-曲線 $\quad \lambda = \left(\frac{s}{\sigma}\right)^n \exp\left[-n(u^2+s^2-\sigma^2)/2\sigma^2\right] = \text{Const.}$

〔5〕 δ-曲線 $\quad \delta = \left(\frac{s}{\sigma}\right)^{n-2} \exp\left[-n(u^2+s^2)/2\sigma^2\right] = \text{Const.}$

吾々は以下次の様な確率を §3 の標本分布の結果を用ゐて計算する.

〔1〕 半直線 AA', BB' に圍まれた領域の外部に屬する確率

(4.01) $$P_u \equiv Pr.\{|\overline{X}-a|\geqq u\} = \int_u^\infty du \int_0^\infty E_n(u,s)\,ds$$

$$= 1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{u/\sqrt{(2\sigma^2/n)}} e^{-t^2}dt$$

$$= 1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma u/r} e^{-t^2}dt\ ,$$

但し $\gamma = 0.4769363$, $r = 0.6744898\,\sigma/n^{\frac{1}{2}}$. 値を計算するには, 所謂確率積分の表を用ゐればよろしい.

〔2〕 直線 EE' より上部に屬する確率

(4.02) $$P_s \equiv Pr.\{S\geqq s\} = \int_{-\infty}^\infty du \int_0^\infty E_n(u,s)\,ds$$

$$= 1-\frac{n^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{(n-3)/2}\sigma}\int_0^s \left(\frac{s}{\sigma}\right)^{n-2} e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}}ds$$

$$= 1-\Gamma_v\left(\frac{n-1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \quad (\text{但し } v = ns^2/2\sigma^2).$$

P_s の値を上式から求めるには次表を用ゐる.

K. Pearson, Tables of the Incomplete Γ-Function, London (1922).

然し, $\chi^2 = ns^2/\sigma^2$ とすれば $P_s = P(\chi^2)$ となるから次表に依つても宜しい.

K. Pearson, Tables for Statisticians and Biometricians, Part I (1924), Table XII. Test for Goodness of Fit. Values of P.

〔3〕 角 COD の外部に屬する確率 (勿論 AOB より上部にて)

(4.03) $$P_z \equiv Pr.\{|Z|\geqq z\} \equiv Pr.\{|\overline{X}-a|/S\geqq z\}$$

$$= 1-\frac{2}{B\left(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}\right)}\int_0^z (1+z^2)^{-\frac{n}{2}}dz\,.$$

これは有名な Student の分布だから多くの成書にその表がある.

〔4〕 λ-曲線の外部 $\mathfrak{D}_\lambda$ に屬する確率

(4.04) $$P_\lambda \equiv Pr.\{(\overline{X}-a, S)\in\mathfrak{D}_\lambda\}$$

$$= \frac{n^{n/2}}{(2\pi)^{1/2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{(n-3)/2}\sigma^2}\iint_{\mathfrak{D}_\lambda}\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{n-2}e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(u^2+s^2)}du\,ds.$$

この値を求めるには次の表に依れば宜しい.

K. Pearson, Tables for Statisticians and Biometricians, Part II, London (1931), Tables XXV and XXXVI, Tables to determine the Probability that a Sample has been drawn from a Normal Population with a Specified Mean and Standard Deviation, 221-223.

尙その説明に於いて次の事が述べられて居る.

(4.05)
$$M = \frac{\bar{x}-a}{\sigma}, \qquad S = \frac{s}{\sigma}$$

とおく (この S は前述の吾々の確率變數 S と混同せぬことを要する). すると

(4.06)
$$\lambda = S^n e^{-\frac{n}{2}(M^2+S^2-1)}$$

P_λ は同じ値を λ にあたへる様な (M, S) の軌跡, 即ち λ- 曲線の外部についての積分である. この曲線は

(4.07)
$$(M^2+S^2)\log_{10}e - \log_{10}S^2 = \log_{10}e - \frac{2}{n}\log_{10}\lambda = k$$

で與へられる. S/σ を横軸, m/σ を縦軸にとつて $k=$ 一定のグラフを描いたものが上述の表の説明に附加されて居る. これを利用すると簡便である.

〔5〕 δ- 曲線の外部 $\mathfrak{D}_\delta$ に屬する確率

(4.08)
$$P_\delta \equiv Pr.\{(\bar{X}-a, S) \in \mathfrak{D}_\delta\}$$
$$= \frac{n^{n/2}}{(2\pi)^{1/2}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{(n-3)/2}\sigma^2}\iint_{\mathfrak{D}_\delta}\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{n-2} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(u^2+s^2)}\,du\,ds.$$

この値を計算したものは未だ見た事がない.

次に以上, 計算した $P_u, P_s, \dot{P}_s, P_\lambda, P_\delta$ ——これらを P で代表させることもある——の値を如何にして假設檢定法に用ゐるかを次に示し, 尙それらの長短等を論じたい.

(1°). P の使用法は次の通りである. 先づ豫め, Significance-Level α なるものを定めておく. 通常 α は 0.01 とか 0.05 とかにする. さて P を計算して, $P \leqq \alpha$ ならば, 該檢定法に關する限り, 該假設は棄却すべきであるとし, $P > \alpha$ ならば, 該假設は該檢定法の判定では棄却すべしといふ結論を得られないとする.

(2°). 上述の使用法の根據は次の通りである. 若し當の假設が眞であるならば, 例へば P_u に就いてのべると Sampling Distribution で $|\bar{X}-a|$ が u より大になる確率は P_u なのであるからして, $P_u \leqq \alpha$ なる理由を以つて假設を棄却するならば, 吾々がおかすかも知れない誤謬のうち, 第一種の誤謬をおかす確率は α をこえない. 他の檢定法に於いても同樣であつて, 要するに第一種の誤謬をおかす確率を (夫々の立場に於いて) α をこえない樣にしたものである.

第二種の誤謬に對する關係は更に研究を要する. 以上の檢定法に就いては「P の値が小ならば大體に於いて安心して該假設を棄却して宜しい. P の値が大きいからと云つて, それだけで, すぐ該假設を容認することはいけない. 更に他の方法, 他の智識に照し合せて考察することを要する」と

思つてゐれば大過はないといふ事になる．

(3°). 上述五種類の検定法の特色，得失從つて用途等に就いて述べる．

(i) u-, s-, z- 検定法の何れも，標本の與へる智識を各々部分的にしか用ゐて居らない．各々は夫々，標本平均値 $\bar{x}$，標本標準偏差 s，これらの比 $(\bar{x}-a)/s$ に關する標本の與へる智識しか用ゐてゐない．標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を知れば，$\bar{x}, s$ はすぐ計算出來るのであるから，若し吾々が他に何等の理由がなければ，標本の與へる智識をなるべく多く用ゐるべきである．

(ii) δ- 曲線は (u, s) 平面上で確率密度の等しい點を結んだものに外ならぬ．しかしその立場は餘り論理的ではない．と云ふのは，(u,s)- 平面上の等確率密度曲線がテストとして重要な意義ありとすれば (u, s^2) 平面の，或は (u, s^k)- 平面の，更に一般に $(u, \varphi(s))$ 平面の ($\varphi(s)$ は s の増加函數，$\varphi(0)=0$, $\varphi(+\infty)=+\infty$)), 等確率密度曲線も同様，テストとして重要な役割をすることにならう．併し，この何れを採用するかに依り P の値は異つて來るわけであつて，何れが最も適切かと云ふ事の判斷が必要になる．恐らくそれは何か特別な假定，立場を豫想しない限り不可能であらう．

(iii) λ- 検定法の導入は Neyman-Pearson [1] の功績である．その根據については次節を參照せられたい．

(4°). 以上の検定を用ゐるに當つては，a priori な智識あればそれを參照する事が必要である．これに關しては §6 の諸例に就いて參照せられたい．[3]

§5. 統計假説の單純性，複合性．Maximum Likelihood 法と λ- 及び z- 検定法

統計的假説のうち，それに依り母集團の分布函數が一義的に確定する場合にはこれを單純 (simple) と云ひ，然らざる場合にはこれを複合(的) (composite) と云ふ．例へば平均値 a，標準偏差 σ を共に指定したる統計的假説は，母集團の分布函數が正規型の場合ならば，即ち條件 (N) の滿足される場合ならば simple である．これに反し，單に a 又は σ のみを指定する統計的假定は，正規型分布の場合でも composite である．

λ- 検定法，z- 検定法の意味や，それが單純な假説，複合的な假説の何れに關係したものであるか等を Maximum Likelihood の方法から明かにしたのは Neyman-Pearson [1] の功績である．以下二三の準備をしてからこれを述べる．

(1) **Maximum Likelihood 法**：母集團の確率分布法則を $F(x)$ とする．確率密度 $f(x)$ が意味があるとする．即ち $F(x)$ が微分が出來て $f(x)=F'(x)$ である．こういふ場合 Sample $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の Likelihood L ($\equiv L(x_1, x_2, \cdots, x_n; f)$ ともかく) は次式で定義される：

$$(5.01) \qquad L \equiv \prod_{k=1}^{n} f(x_k).$$

前述に依り

$$(5.02) \qquad Pr.\{x_1 < X_1 < x_1+\Delta x_1,\ x_2 < X_2 < x_2+\Delta x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n < X_n < x_n+\Delta x_n\}$$
$$= \prod_{k=1}^{n} Pr.\{x_k < X_k < x_k+\Delta x_k\}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_k+\Delta x_k} f(v)\,dv = \prod_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k + o\Big(\sum_{k=1}^{n} |\Delta x_k|\Big)$$

となるから，Lの大なる程，Sampleとして實現する可能性が大きいと見られる．吾々は，Likelihoodと云つてProbabilityとは云はない．何故ならば，それは確率の定義に一致しないからである．併し今この點に深入りは避ける事にする．

Lは勿論 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に關係するが，これらを指定すれば f に依つてその値が變る．統計的假設として母集團の確率密度を，$f(x)$ にすべきか $g(x)$ にすべきかと云ふ事を，所與の標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ から判定しようとする場合

(5.03) $$L_f \equiv \prod_{i=1}^{n} f(x_i), \qquad L_g \equiv \prod_{i=1}^{n} g(x_i)$$

を比較し $L_f > L_g$ ならば f を，$L_f < L_g$ ならば g を採用すると云ふ方法も可能であらう．[4]

推定問題に於いて，所要のパラメーターを求める方法の一つとして，この L を利用したMaximum Likelihood法といふのがある．即ち，母集團未知分布函數 $f(x)$ にパラメーター $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l$ が入つてゐるとき即ち $f(x) = f(x;\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l)$ なる場合，これを標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ から推定して最も適切に $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l$ をきめることが推定問題であるが

(5.04) $$L = \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l)$$

を最大にする $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l)$ を求めて，その最適値（委しく云へば最適な推定値）なりとする方法である．それには f が θ に關して連續微分可能ならば（一般に）

(5.05) $$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, l)$$

なる方程式を滿足する $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l)$ を求める事に歸着する．

(2) **條件 (N) と Maximum Likelihood 法**：條件 (N) が滿足される場合，換言すれば f が（a, σ は未知だが）とにかく

(5.06) $$f \equiv f(x;a,\sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$$

なる形で與へられた場合，上述の Maximum Likelihood 法で a と σ とを共にきめるには次の樣になる．先づ (3.04) を參照すると

(5.07) $$L \equiv \frac{1}{((2\pi)^{1/2}\sigma)^n} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\left\{(\bar{x}-a)^2 + s^2\right\}}.$$

だから $\partial L/\partial a = 0$, $\partial L/\partial \sigma = 0$ なる聯立方程式を立てこれを解けばよい．すると

(5.08) $$a = \bar{x}, \qquad \sigma = s$$

といふのが最適な推定値といふ事になる．

(3) **正規分布の母集團に對する單純假說と Maximum Likelihood 法**： 正規分布の母集團に對して，その平均値は指定値 a' で且つ標準偏差は指定値 σ' なりとの假說をなすとする．前述の如くこれは單純假說である．この假說を滿足する（換言すれば平均値 a', 標準偏差 σ' なる）正規型母集團を Π' と書き，一般に正規型母集團を Π であらわす．Π' は Π の一つの特別の場合である．

標本 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を與へれば，各 Π に對してその Likelihood $L(\Pi)$ がきまる．凡ゆる Π についての $L(\Pi)$ の最大値は (5.07) に依り

$$(5.09) \qquad \underset{(\Pi)}{\mathrm{Max.}}\, L(\Pi) = \left(\frac{1}{((2\pi)^{1/2}\sigma)^n}\, e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\left\{(\bar{x}-a)^2+s^2\right\}}\right)_{a=\bar{x},\,\sigma=s}$$

$$= \frac{1}{((2\pi)^{1/2}s)^n}\, e^{-\frac{n}{2s^2}s^2} = \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{((2\pi)^{1/2}s)^n}$$

で與へられる．

そこで Likelihood を利用する方法として

$$(5.10) \qquad L(\Pi') \Big/ \underset{(\Pi)}{\mathrm{Max.}}\, L(\Pi)$$

を計算し，この値が大なれば大なる程，前述の單純假說が尤らしいとする方法が考へられる．明らかに (5.10) なる値は 0 と 1 との間にあり，これに對して Significance-Level をつくる事も可能である．然るに (5.10) を計算してみると

$$(5.11) \qquad \frac{e^{-\frac{n}{2\sigma'^2}\left\{(\bar{x}-a')^2+s^2\right\}}\big/((2\pi)^{1/2}\sigma')^n}{e^{-\frac{n}{2}}\big/((2\pi)^{1/2}s)^n} = \left(\frac{s}{\sigma'}\right)^n e^{-\frac{n}{2}\left(\frac{(\bar{x}-a')^2+s^2}{\sigma'^2}-1\right)} = \lambda$$

となる．故に前述の λ- 檢査法の解釋が與へられたことになるわけである．

(4) **z- 檢定法 (Student 檢定法) と Maximum Likelihood 法**：〔3〕で述べた母集團 Π で，特に a が或る指定値 a' に等しいものを Π^* で表はさう．凡ゆる Π^* のうち $L(\Pi^*)$ のうち最大なものを求めるには，$a=a'$ で既に共通してきまつてゐる．だから σ をば次式からきめればよい．

$$(5.12) \qquad \frac{\partial L}{\partial \sigma} = 0 \qquad (\text{但し } a=a' \text{ とす}).$$

すると，$\sigma^2=(\bar{x}-a')^2+s^2$ を得る．換言すれば

$$(5.13) \qquad \underset{(\Pi^*)}{\mathrm{Max.}}\, L(\Pi^*) = \left(\frac{e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\left\{(\bar{x}-a')^2+s^2\right\}}}{((2\pi)^{1/2}\sigma)^n}\right)_{\sigma=((\bar{x}-a')^2+s^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{e^{-n/2}}{((2\pi)((\bar{x}-a')^2+s^2))^{n/2}}\,.$$

依つて次の様な比を以つて正規型母集團の平均値は a' なりといふ統計的複合假說に對する判定法を提供出來るであらう．

$$(5.14) \qquad \underset{(\Pi^*)}{\mathrm{Max.}}\, L(\Pi^*) \Big/ \underset{(\Pi)}{\mathrm{Max.}}\, L(\Pi)\,.$$

然るにこの値は (5.13) と (5.11) とに依り

$$\frac{s^2}{((\bar{x}-a')^2+s^2)} = (1+z^2)^{-\frac{n}{2}} \qquad ((\bar{x}-a)/s = z) \tag{5.15}$$

となる．故にこの檢定法は z- 檢定法に外ならない．

Student の檢定法は普通の解釋では標本平均 $\bar{x}$ について $\bar{x}-a'$ なる Deviation の Significance をテストするため，未知の Population Mean σ を s でおきかへ，$(\bar{x}-a')/s$ の分布を正確にもとめたといふ點に意義が認められてゐるのである．勿論それに相違ないが，上述の如き Neymann-Pearson の解釋も Testing Statistical Hypothese の立場から云つて極めて重要である．

§6. 諸　例

§1 で課題とした諸例に以上の方法を應用して見る．

第一例　$\bar{x} = 73.47,\quad s = 5.942,\quad n = 10$　である．

$a = 75.06$, $\sigma = 2.68$ といふ單純假說に對して λ- 檢定法を應用すると $P_\lambda < 0.0001$, 故にこの假說は λ- 檢定法では棄却すべしといふ結論をうる．

この場合 $\bar{x}-a=\bar{u}=73.47-75.06$ の絕對値はさほど大ではないが $s/\sigma = 5.942/2.68$ が比較的大である．この事が利いて P_λ が小さくなつたとも見られる．そこで次に $a = 75.06$ (σ は指定しない) といふ複合的假說に對して z- 檢定法を適用して見ると $P_z = 0.221$ となり，この複合的假說は z- 檢定法では棄却すべしといふ結論は得られない．z- 檢定法では σ に關する a priori な智識を假定してゐないが，一般に，一民族については Cephalic Index の分布の標準偏差は 2.5 から 4.0 の範圍のものである，即ち $2.5 \leqq \sigma \leqq 4.0$ であるべきであるといふ事を吾々が知つてゐるならば，上の z- 檢定法の結論は更にこれを反省することが必要となるであらう．今の例では $z = 0.268$ であるが，假りに $\sigma=4$ とすると，$S=s/\sigma=1.486$ となる．§3 の k- 曲線を描いて見れば明かな如く (S, M) 平面で，$S=1.486$ なる半直線上の點に對しては $k > 0.68$ であり，從つて $P_\lambda < 0.08$ となる．この事からみると，複合假說 $a=75.06$ に對して z- 檢定法が與へる有利な證言 $P_z=0.221$ なるものも，上述の $2.5 \leqq \sigma \leqq 4$ に照して考へるならば，割引して考へねばならぬ事になる．

若しもこの樣な σ に關する a priori な智識がなければ，この複合假說に關するかぎり z- 檢定法の結論に從はなければならない．他の一つの方法として $z = 0.268$ なる半直線に切する λ- 曲線を描いて P_λ を計算してみる．すると $k=0.47$, 從つて $P_\lambda=0.689$ となり，之に依つても a priori な上述の智識がないときには $a=75.06$ といふ複合假說をすてる根據が見出されない．

第二例 (a)　$n = 6,\quad M = (\bar{x}-a)/\sigma = -0.359,\quad S = s/\sigma = 0.851$;　故に

$$k = \log_{10} e - \frac{2}{n}\log_{10}\left\{S^n e^{-\frac{n}{2}(M^2+S^2-1)}\right\} = 0.52, \qquad P_\lambda = 0.607.$$

從つて P_λ 檢査では假說は棄却し得ない．

(b) 同樣にして，　$n = 5,\quad M = -0.007,\quad S = 0.278$;　故に

$$k = 1.15, \quad P_\lambda = 0.036.$$

假說は棄却すべきであらう (Significance-Level $\alpha = 0.05$ のとき).

第三例　$(m_t - 8.4)\sqrt{n_t}/\sigma$ $(t=1, 2, \cdots, 12)$ なる12個の値を得てゐるが，玆に問題になるのは，これの母集團が $a=0$, $\sigma=1$ なりとの單純假說である．これに對しては λ-檢定法を施す．

$$M = -821, \quad S = 2.192, \quad k = 1.70, \quad P_\lambda \leqq 0.0001.$$

依つて上記假說はこれを棄却しなければならぬ．即ち上記12個にあらわれる fluctuation はこれを同一母集團 (平均値 8.4, 標準偏差 0.329) からの Sampling Distribution のあらはれとは見難く，技術の優劣，材料の不均齊等の原因に基くものと見得るべき可能性があり，依つてそれらについて取調べを要すると思はれる．

註

(1) 勿論，頭蓋指數といふ一計測からの判斷としての問題であつて，實際に於いて「これら10個の頭蓋骨は上記王朝エヂプト人の頭蓋骨と見なし得べきか否か」といふ問題に對しては，各方面からの判斷を綜合する必要があり，頭蓋指數のみで判斷さるべきものでない事はいふまでもない．同樣な注意は第二例，第三例に就いても同樣に必要なことはいふまでもなからう．

(2) 觀測環境といふのは，こゝでは，假りに決定論的な立場をとつて，それを指定すれば觀測値が一意的に決定される樣な，觀測値を規定する全條件を意味する．それで，觀測者の主觀的乃至心理的 factor も勿論觀測環境に含まれるものといふ廣義の意味になる．

(3) 上述のテストを實際上用ひるための數表の事は更に適當な機會に詳述して，實用に供したいと考へてゐる．

(4) Maximum Likelihood の方法については，多くの批判が與へられてゐる．これは別の機會に讓り，こゝでは一應この立場に立脚して論じてみた．

附記：譯語はすべて暫定的のものである．