統計的複合假説検定の理論

佐藤, 良一郎
東京高等師範學校

出版情報：統計数理研究. 1 (1), pp.38-52, 1941-10-15. 統計科学研究会

統計的複合假說檢定の理論

會員 佐藤良一郎（東京高師）

1. 概　說

一つの事象 E の性質が n 個の變數

(1) $$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n$$

の値（觀察によつて定まる）の組によつて正確に記述され，且 n 次元空間 W に於ける點

(2) $$E(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)$$

によつて代表せしめられるものとし，又一つの領域 w が可測であつて空間 W に屬するとき，點 E が w 內に落ちる確率を $P\{E\epsilon w\}$ で表すこととする．そして Neyman-Pearson に從ひ，空間 W を見本空間 (Sample Space) と呼び，點 E を見本點 (Sample Point) と呼ぶことにする〔1〕〔2〕.

確率 $P\{E\epsilon w\}$ の從ふ法則の性質に關して吾々が設定する假說は何れもこれを統計的假說といひ，見本空間 W 內に於ける何れの可測領域 w に對しても唯一通りに $P\{E\epsilon w\}$ が定められるやうな統計的假說を單一假說，然らざる假說をすべて複合假說といふ．例へば

(3) $$P\Big\{E\epsilon w\Big\}=\iint\limits_{\Sigma(x_i-a)^2<r^2}\cdots\cdots\int\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(x_i-a)^2}dx_1dx_2\cdots\cdots dx_n$$

なるとき，a 及び σ に格段なる値を與へるやうな假說を設ければ，その假說に對して，點 $(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$ が領域 $\sum(x_i-a)^2<r^2$ 內に落ちる確率は唯一通りに確定することは明白である．故に若しこの場合 $a=a_0$, $\sigma=\sigma_0$（但し a_0, σ_0 は或る格段なる値である）と假定して，$P\{E\epsilon w\}$ を算出したとするならば，吾々の計算が基いた統計的假說は單純假說である．これに對して單に $a=a_0$（又は $\sigma=\sigma_0$）と假定し，σ（又は a）には何等の値をも假定しないで $P\{E\epsilon w\}$ を計算するならば，その値は確定しない．この場合に於ては吾々の假說は複合假說である．記述を簡單にするために $P\{E\epsilon w|H\}$ を以て假說 H が眞なるときに見本點 E が領域 w 內に落ちる確率を表す事にする．

一體或る統計的假說 H を檢定するとはどういふことを意味するか．人或は統計的假說 H の眞否を確めることであるといふかも知れない．若しこのやうな期待を統計法に對して懷くならば，人は恐らく永遠に失望するであらう．統計法にはさういふ能力はないからである．統計法が統計的假說 H の檢定に於て用ひてゐるところの方法なるものは，何れも H の眞否を確かめることにはなくて，或る一つの領域 w を見本空間 W 內に選擇することと，觀察に依つて得られた變數 (1) の値の組で定まるところの見本點 E が，檢定しようとする假說 H の下に於て領域 w 內に落ちるときにはいつでも H を棄てるといふ規則とから成つてゐる．それ故，必然的に二つの過誤を犯す．即ち

第一種の過誤　檢査しようとする假說 H_0 が眞なるときにこれを棄てる過誤

第二種の過誤　檢定しようとする假說 H_0 が眞でなくて他の假說 H が眞なるときに H_0 を採擇する過誤

である．この二つの過誤のあることに注意することは，統計的假說検定の問題を考へる上に極めて大切なことであるのみならず，統計的推論の性質を考へる上に於ても非常に重要なことである．

上述のやうな風に用ひられる領域 w を危険域（Critical region）といひ，その補領域 $W\text{-}w$ を採擇域（Region of Acceptance）といふ．そして検定せんとする假說 H_0 と矛盾する假說はすべて H_0 と離接的であるといひ，H_1 で記す．

α を以て1より小さい與へられた正數とするとき，方程式

$$P\{E \epsilon w \mid H_0\} = \alpha \tag{4}$$

を満足させるやうに危険域 w を選んだときには，危険域 w の大さは α であるといふ．

w を危険域とすれば確率 $P\{E \epsilon w \mid H_1\}$ は，検定せんとする假說 H_0 が，その離接的假說 H_1 が眞なるときに棄てられる確率である．この確率のことを Neyman-Pearson は H_1 に關する領域 w の検定力（Power）と呼び，$\beta(H_1 \mid w)$ で表してゐる．即ち

$$\beta(H_1 \mid w) = P\{E \epsilon w \mid H_1\} \tag{5}$$

である〔1〕〔2〕．$\beta(H \mid w)$ は假說 H の函數と考へられる．このやうに考へたときには，これを検定力函數（Power function）といふ．

領域 w_0 が方程式

$$\beta(H_0 \mid w) = \alpha \tag{6}$$

を満足させ，且つ $H = H_0$ に對して $\beta(H \mid w)$ を最小ならしめるときには，これを不偏危険域（Unbiassed critical region）といひ，他の領域を偏頗危険域（Biassed critical region）といふ．そして若し大さ α なるすべての不偏危険域の中で，H_0 と離接的な假說 H_1 の何れに對しても，又大さ α なる不偏危険域 w_1 の何れに對しても

$$\beta(H_1 \mid w_0) \geqq \beta(H_1 \mid w_1) \tag{7}$$

なる如き領域 w_0 を假說 H_0 の検定に對する最良不偏危険域（the best critical region）と呼ぶ．

今個々の格段な場合に於て，吾々の採擇し得べき單一假說の組 Ω が定義出來，且つ Ω に屬する何れの單一假說も，變數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ の確率法則 $P\{E \epsilon w\}$ を，幾箇かの未知の常數 $\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_l$ を含み解析的に同一な形式を有する函數として定めることが出來るものとする．從つて危険域 w_0 の検定力は，$\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_l$ の函數と考へることが出來るとする．さうすると，統計的假說検定に關する問題は次のやうな問題となるであらう．即ち

〔i〕 $\theta_1 = \theta_1^0, \theta_2 = \theta_2^0, \cdots\cdots, \theta_l = \theta_l^0$ なるときに方程式

$$\beta(\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_l \mid w) = \alpha \tag{8}$$

を満足させ且 $\beta(\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_l \mid w)$ を最小ならしめるやうな領域 w の中で，領域 w_0 を $\{\theta_1 = \theta_1^0, \theta_2 = \theta_2^0 \cdots\cdots, \theta_l = \theta_l^0\}$ ならざるとき

$$\beta(\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_l \mid w_0) \geqq \beta(\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_l \mid w) \tag{9}$$

なるやうに選ぶこと．但し $\theta_1^0, \theta_2^0, \cdots\cdots, \theta_l^0$ はそれぞれ假說に於て吾々が $\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_l$ に附與

する格段な値を表す.

〔ii〕 $\theta_1=\theta_1^0$, $\theta_2=\theta_2^0$, ……, $\theta_c=\theta_c^0$ $(c<l)$ なるとき, θ_{c+1}, ……, θ_l の値の如何にかかはらず常に方程式

$$\beta(\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_l \mid w) = \alpha \tag{10}$$

を満足させ, 且 $\beta(\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_l \mid w)$ を最小ならしめるやうな領域 w の中で, 領域 w_0 を, $\{\theta_1=\theta_1^0, \theta_2=\theta_2^0, \cdots\cdots, \theta_c=\theta_c$ であつて $\theta_{c+1}, \cdots\cdots, \theta_l$ には別に値を指定しない$\}$ なる假說と離接的な假說に對し

$$\beta(\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_l \mid w_0) \geqq \beta(\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_l \mid w) \tag{11}$$

であるやうに選ぶこと. 但し θ_i^0 の意味は〔i〕の場合と同じである.

いふまでもなく〔i〕は統計的單純假說檢定の問題であり, 〔ii〕は複合假說檢定の問題である.

〔i〕の問題は, Neyman-Pearson に依つて可なり徹底的に解決されてゐる (Statistical Research Memoirs Vol. I 及び Vol. II に現れてゐる兩氏の論文は殆んど皆これに關係してゐる). 〔ii〕の問題は, その一部が稍解決を見てゐるだけであつて大部分が取殘されてゐるといつてよい〔3〕. 以下述べようとするところは, 〔ii〕の問題に關係するのであるが, 上とは少しく條件を異にする次の問題の解決についてである.

いふまでもなく, 〔ii〕の問題の最も簡單なのは, $l=2$ の場合であるが, この場合の部分的な解決方法は J. Neyman に依つて與へられた〔3〕. その外の場合についてはまだ十分なる解決がついてゐない. 唯だ l が任意の正整數で $c=1$ なる場合については, 問題を次に述べるやうな形にして筆者がその解き方を得た〔4〕. 今述べようとするのはその解き方の大要である.

2. 複合假說檢定のために用ひられる B 型の不偏危險域の一種

問題: $\beta(\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_l \mid w)$ は, θ_1 に關して二回微分可能であると假定するとき, $\theta_2, \theta_3, \cdots\cdots, \theta_l$ の値の如何にかかはらず

$$\beta(\theta_1^0, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_l \mid w) = \alpha \qquad (0<\alpha<1) \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}\beta(\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_l \mid w)\Big|_{\theta_1=\theta_1^0} = 0 \tag{13}$$

を滿足させ, 且 (12), (13) を滿足させる如何なる領域 w_1 に對しても

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}\beta(\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_l \mid w_0)\Big|_{\theta_1=\theta_1^0} \geqq \frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}\beta(\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_l \mid w_1)\Big|_{\theta_1=\theta_1^0}$$

ならしめるやうな領域 w_0 を求めよ.

このやうな w_0 が求められたとすると, これは少くとも普通によく出て來る確率法則に對しては θ_1^0 を含む θ_1 の或る區間に於けるすべての値に關しての H_0 の最良不偏危險域であるといへるし, 又 H_0 と離接的な假說 H_1 のすべてに關して H_0 の最良不偏危險域が存在するとするならば, 上述の

條件が滿足させられてゐなければならないといへる．上のやうに定義した危險域の事を Neyman に從つて B 型の不偏危險域と呼ばう〔3〕.

さて上の問題は，このままではまだ一般的過ぎるので，確率法則 $P\{E\epsilon w\mid H\}$ に少しく條件を加へる〔記述を簡單にするために $l=3$ とする．このやうにしても l に關する限りに於ては一般性を失はないといふことが確められてゐるからである〕.

I〕 見本空間 W 內の任意の領域 w に對し，又採擇し得べき假設 H に對する $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ の値の任意の組に對して

(14) $$\beta(\theta_1, \theta_2, \theta_3\; w) = P\{E\epsilon w\mid H\} = \iint\cdots\int_w p(x_1, x_2, \cdots, x_n\; \theta_1, \theta_2, \theta_3)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

但し $p(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\mid\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ は或る定つた非負可積分函數である.

函數 $p(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\mid\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ を變數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ の同時的元確率法則 (Simultaneous elementary probability law) といふこととし，簡單のために $p(E\mid\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ と書くこととする.

II〕 w が W 內の領域である限り

(15) $$\left.\frac{\partial\beta}{\partial\theta_1}\right|_{\theta_1=\theta_1^0} = \frac{\partial}{\partial\theta_1}\iint\cdots\cdots\int_w p(E\mid\theta_1, \theta_2, \theta_3)\, dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_n\Big|_{\theta_1=\theta_1^0}$$

$$= \iint\cdots\cdots\int_w \frac{\partial}{\partial\theta_1} p(E\mid\theta_1, \theta_2, \theta_3)\Big|_{\theta_1=\theta_1^0}\, dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_n$$

(16) $$\left.\frac{\partial^2\beta}{\partial\theta_1^2}\right|_{\theta_1=\theta_1^0} = \frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}\iint\cdots\cdots\int_w p(E\mid\theta_1, \theta_2, \theta_3)\, dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_n\Big|_{\theta_1=\theta_1^0}$$

$$= \iint\cdots\cdots\int_w \frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} p(E\mid\theta_1, \theta_2, \theta_2)\Big|_{\theta_1=\theta_1^0}\, dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_n$$

と書くことが出來る．但し β は $\beta(\theta_1, \theta_2, \theta_3\mid w)$ の略記號である．以下同樣.

この條件を $p(E\mid\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ の正則性と呼ばう．實際問題を解くに際しては當面の格段な函數がこの條件を滿足させてゐるかどうかを檢べなければならないのであるが，この目的のために利用出來る定理は完全なものではないが既に得られてある〔1〕,〔2〕,〔3〕,〔4〕.

III〕 w が W 內の領域である限り

(17) $$\left.\frac{\partial^{i+k+l}\beta}{\partial\theta_1^i\partial\theta_2^k\partial\theta_3^l}\right|_{\theta_1=\theta_1^0} = \iint\cdots\cdots\int_w \frac{\partial^{i+k+l}}{\partial\theta_1^i\partial\theta_2^k\partial\theta_3^l} p(E\mid\theta_1, \theta_2, \theta_3)\Big|_{\theta_1=\theta_1^0}\, dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_n$$

$$(i = 0, 1, 2, \qquad k, l = 1, 2, \cdots\cdots)$$

が成立つ.

IV〕 φ_i, φ_{ij} をそれぞれ

(18) $$\varphi_i = \partial\log p(E\mid\theta_1, \theta_2, \theta_3)/\partial\theta_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

(19) $$\varphi_{ij} = \partial\varphi_i/\partial\theta_j \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

と定義するとき，これ等の間に

(20) $$\varphi_{1i} = A_{i0} + A_{i1}\varphi_1 + A_{i2}\varphi_2 + A_{i3}\varphi_3 \quad (i = 2, 3)$$

(21) $$\varphi_{ij} = B_{ij0} + B_{ij2}\varphi_2 + B_{ij3}\varphi_3 = \varphi_{ji} \quad (i, j = 2, 3)$$

が成立つ．但し A, B は何れも $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ には無關係であるが，$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を含むかも知れない．

V〕 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ は代數的に獨立である．即ち測度零なる點集合を除外すれば，W 內に於て ヤコービの行列式

(22) $$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(x_k, x_l, x_m)} \neq 0$$

ならしめるやうな三つの變數 x_k, x_l, x_m が存在する．

VI〕 函數 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ は何れもこれを一つの變數と考へ，新なる變數の組

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, y_4, \cdots\cdots, y_n$$

を導入するならば，前述の條件 V〕によりヤコービの行列式

(23) $$\triangle = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots\cdots, x_n)}{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, y_4, \cdots\cdots, y_n)}$$

が零とならず，且つ符號を變じないやうに，y なる變數を選ぶことが出來る筈であるから，檢定せんとする假說 H_0 が，眞なるときに於ける $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ の同時的元確率法則 $p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 | H_0)$，即ち $p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 | \theta_1^0, \theta_2, \theta_3)$ 及び φ_2, φ_3 の同時的元確率法則 $p(\varphi_2, \varphi_3 | H_0)$ 即ち $p(\varphi_2, \varphi_3 | \theta_1^0, \theta_2, \theta_3)$ はそれぞれ次のやうに求められる．即ち

(24) $$p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 | H_0) = \iint\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\cdots\cdots}}\int p(E' | H_0) \,|\triangle|\, dy_4 \cdots\cdots dy_n$$

(25) $$p(\varphi_2, \varphi_3 | H_0) = \iint\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\cdots\cdots}}\int p(E' | H_0) \,|\triangle|\, d\varphi_1 dy_4 \cdots\cdots dy_n$$

但し $p(E' | H_0)$ は $p(E | H_0)$ に於て $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ の代りに $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, y_4, \cdots\cdots, y_n$ を代入したものを表す．

そこで

(26) $$\iint_{+\infty}^{-\infty} p^3(\varphi_2, \varphi_3 | H_0)\, d\varphi_2 d\varphi_3 < +\infty$$

であるとする．

VII〕 $p(\varphi_2, \varphi_3 | H_0)$ の乘積モーメント

(27) $$M_{k,l} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2^k \varphi_3^l p(\varphi_2, \varphi_3 | H_0)\, d\varphi_2 d\varphi_3 \quad (k, l = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

が存在する．

VIII〕 $p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 | H_0)$ の乘積モーメント

$$(28)\qquad \lambda_{k,l} = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1 \varphi_2^k \varphi_3^l p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 | H_0)\, d\varphi_1\, d\varphi_2\, d\varphi_3 \quad (k, l = 0, 1, 2 \cdots\cdots)$$

が存在する.

IX〕

$$(29)\qquad \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^2 p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 | H_0)\, d\varphi_1\, d\varphi_2\, d\varphi_3 < +\infty$$

X〕

$$(30)\qquad \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{k} \left\{ \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ |\varphi_2| + |\varphi_3| \right\}^k p(\varphi_2, \varphi_3 | H_0)\, d\varphi_2\, d\varphi_3 \right\}^{\frac{1}{2k}} < +\infty$$

以上 10 個の條件の下に於て問題の領域 w_0 を求めてみると，以下述べるやうなこととになる.

先づ，吾々の求めようとする領域 w_0 は，條件 II〕, III〕, IV〕により，

θ_2, θ_3 の値の如何にかかはらず

$$(31)\qquad \iint \cdots\cdots \int_w p(E | \theta_1^0, \theta_2, \theta_3)\, dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_n = \alpha \ .$$

$$(32)\qquad \iint \cdots\cdots \int_w \varphi_1 p(E | \theta_1, \theta_2, \theta_3) \Big|_{\theta_1 = \theta_1^0} dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_n = 0$$

を滿足させ，且 (31), (32) を滿足させる如何なる領域 w_1 に對しても

$$(33)\qquad \iint \cdots\cdots \int_{w_0} (\varphi_{11} + \varphi_1^2)\, p(E | \theta_1, \theta_2, \theta_3) \Big|_{\theta_1 = \theta_1^0} dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_n$$

$$\geqq \iint \cdots\cdots \int_{w_0} (\varphi_{11} + \varphi_1^2)\, p(E | \theta_1, \theta_2, \theta_3) \Big|_{\theta_1 = \theta_1^0} dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_n$$

を滿足させるやうな領域である

といふことになるのであるが，さてこれを解くと，領域 w_0 は次の不等式に依つて定義されるところの領域であるといふことがわかる．即ち

$$(34)\qquad \varphi_1 \leqq k_1(\varphi_2, \varphi_3) \qquad 及び \qquad k_2(\varphi_2, \varphi_3) \leqq \varphi_1$$

但し $k_1(\varphi_2, \varphi_3) < k_2(\varphi_2, \varphi_3)$ であつて，これ等は

$$(35)\qquad \int_{k_1(\varphi_2, \varphi_3)}^{k_2(\varphi_2, \varphi_3)} p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 | H_0)\, d\varphi_1 = (1-\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 | H_0)\, d\varphi_1$$

及び

$$(36)\qquad \int_{k_1(\varphi_2, \varphi_3)}^{k_2(\varphi_2, \varphi_3)} \varphi_1 p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 | H_0)\, d\varphi_1 = (1-\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1 p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 | H_0)\, d\varphi_1$$

を滿足させねばならない.

方程式 (35), (36) は

$$(37)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 | H_0)\, d\varphi_1 = p(\varphi_2, \varphi_3 | H_0)$$

なることに注意し，又

(38) $$p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 | H_0)/p(\varphi_2, \varphi_3 | H_0)$$

は，φ_2, φ_3 が與へられてゐるときの φ_1 の元確率法則を表すから，これを $p(\varphi_1 | \varphi_2, \varphi_3; H_0)$ と記すこと丶すれば，それぞれ

(39) $$\int_{k_1}^{k_2} p(\varphi_1 | \varphi_2, \varphi_3; H_0)\, d\varphi_1 = 1-\alpha$$

(40) $$\int_{k_1}^{k_2} \varphi_1 p(\varphi_1 | \varphi_2, \varphi_3; H_0)\, d\varphi_1 = (1-\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1 p(\varphi_1 | \varphi_2, \varphi_3; H_0)\, d\varphi_1$$

とすることが出來る．

3. 二つの見本平均の差の著しさを検定するための B 型危險域

以上の所論を說明するために，一つの具體的な例をとる．今

(41) $$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n,$$

(42) $$y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m$$

は，それぞれ分布が正常なる母集團 (Normal population) から手當り次第に取つた二組の見本であつて，この二つの母集團に於ける標準偏差は相等しいといふことが知られてゐるとき，兩母集團に於ける平均が相等しいかどうかを檢定するといふ問題は，統計的複假說檢定の問題の一つであるが，これを前に述べた形式に表してみると次のやうになる．

見本 (41), (42) の取られた母集團をそれぞれ

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2}}$$

とし，又既に $\sigma_1=\sigma_2$ なることは知られてゐるのであるから，この共通の値を σ（未知ではある）とすると，

(43) $$p(x_1, \cdots\cdots, x_n, y_1, \cdots\cdots, y_m | H) = p(E | H)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\theta_3}\right)^N e^{-\frac{1}{2\theta_3^2}\left\{\sum^n (x_i-\theta_2)^2 + \sum^m (y_i-\theta_2+\theta_1)^2\right\}}$$

但し $N=m+n,\ \ \theta_1=b-a,\ \ \theta_2=a,\ \ \theta_3=\sigma,$

とすることが出來るが，吾々の檢定すべき假說は「θ_2, θ_3 の値は問はない．θ_1 が 0 であるかどうか」といふにある．

この假說を檢定するには，從來 "Student Test" なるものが用ひられてゐる．"Student Test" とは

(44) $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$$

(45) $$s^2 = \frac{1}{n+m-2}\left\{\sum^n (x_i-\bar{x})^2 + \sum^m (y_i-\bar{y})^2\right\}$$

とするとき

$$t = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{s}\sqrt{\frac{nm}{n+m}} \tag{46}$$

に依つて定義されるところのものであつて，$P\{|t|\geqq|t_0|\}=\alpha$（$\alpha$ は 0 と 1 との間にある豫め定められた常數で，實際家は α の値として 0.01 又は 0.05 を採用してゐる）なる如き t_0 に比べて當面の格段なる見本に對する t の絶對値が大なるときは，假說を棄て，然らざるときはこれを採用し或は棄てずに置くといふやうにして用ひられる．

"Student Test" に對して定められた危險域が如何なる性質のものであるかは，以前には明になつてゐなかつたのであるが，次に述べるやうに B 型の不偏危險域であるといふことが，筆者に依つて證明されたのである．即ち

$$p(E\cdot H) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\theta_3}\right)^N e^{-\frac{1}{2\theta_3^2}\left\{\Sigma(x-\theta_2)^2+\Sigma(y-\theta_2+\theta_1)^2\right\}} \tag{47}$$

について，§2 に於ける條件が滿足させられてゐるかどうかを檢べてみると，悉く滿足させられてゐることが確められるので，前條の方法に從ひ w_0 を求めてみると，w_0 は次の不等式に依つて定義されるといふことがわかる〔4〕．即ち

$$\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{n+m}{nm}\left(ns_1^2+ms_2^2\right)}} \geqq \frac{2k-1}{2\sqrt{k(1-k)}} \tag{48}$$

但し　$\bar{x}=\frac{1}{n}\Sigma x_i,\quad \bar{y}=\frac{1}{m}\Sigma y_i,\quad s_1^2=\frac{1}{n}\Sigma(x_i-\bar{x})^2,\quad s_2^2=\frac{1}{m}\Sigma(y_i-\bar{y})^2$

であつて，k は

$$\int_{1-k}^{k} z^{\frac{n+m-4}{2}}(1-z)^{\frac{n+m-4}{2}}dz = (1-\alpha)\int_0^1 z^{\frac{n+m-4}{2}}(1-z)^{\frac{n+m-4}{2}}dz \tag{49}$$

を滿足させるやうに選んだ常數である．

不等式 (48) の左邊は，(46) に於ける "Student" の t に $\sqrt{n+m-2}$ を乘じたものになつてゐる．即ち

$$t = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{n+m}{nm}\left(ns_1^2+ms_2^2\right)}} \times \sqrt{n+m-2} \tag{50}$$

である．故に "Student Test" を用ひるときの危險域は不偏危險域であつて，§2 で定めた w_0 の性質を持つてゐるといふことが出來る．

4. 二つの見本標準偏差の差の著しさを檢定するための B 型不偏危險域（本節の所論は昭和十六年四月四日廣島文理科大學に於ける日本數學物理學會年會に於て報告したものである）

二つの見本 $(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ 及び $(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m)$ があつてそれぞれ正常母集團

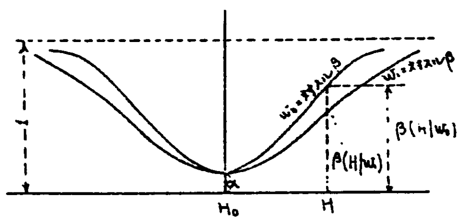
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}},\quad p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma_2^2}} \tag{51}$$

から手當り次第に取つた見本であるとき，この二組の見本に於ける標準偏差の差の著しさを檢定することは，これ等の見本を通して，「a, b, σ_1 の値は問はない $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ が1に等しいかどうか」といふことを檢定することであるといへる．前に述べた一般的の問題に對應させるために，$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$，$a$, b, σ_1 をそれぞれ $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ で表すならば，統計的複合假說

$$H_0\{\theta_1 = \theta_1^0 = 1, \quad \theta_2, \theta_3, \theta_4 \text{ の値は問はない}\}$$

を檢定することである．

そこでこの假說 H_0 に對する B 型不偏危險域 w_0 を求めることが出來れば，H_0 が眞なるときに見本點 $E(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m)$ が w_0 に落ちる確率は α で，而かも H_0 以外の假說 H が眞なるときに E が w_0 內に落ちる確率 β は α よりも大きいのみならず，これと同樣な性質を持つ他の領域 w_1 に對するよりも β の値が大きい．これを說明圖的に示せば，次のやうな性質を持つ領域である．



$\beta(H|w_0)$ が θ_1 に關して微分可能であるとき，B 型の不偏領域 w_0 が求まつたとすれば，w_0 は假說 H_0 のその隣接的假說 H_1 に關する最良不偏危險域であるといへる．

さて吾々の只今當面する問題に對する $p(E|H)$ は次のやうに書ける．

$$(52) \qquad p(E|H) = p(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m|H)$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\right)^n e^{-\frac{\Sigma(x_i-a)^2}{2\sigma_1^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\right)^m e^{-\frac{\Sigma(y_i-b)^2}{2\sigma_1^2\theta_1^2}}$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\right)^N \frac{1}{\theta_1^m}\, e^{-\frac{ns_1^2+n(\bar{x}-a)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{ms_2^2+m(\bar{y}-b)^2}{2\sigma_1^2\theta_1^2}}$$

ここに

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\sum y_i, \quad s_1^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2,$$
$$s_2^2 = \frac{1}{m}\sum(y_i-\bar{y})^2, \quad N = n+m$$

である．故に w が可測領域であるならば

$$(53) \qquad P\{E \in w|H\} = \iint\cdots\cdots\int_w p(E|H)\,dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_n\,dy_1\,dy_2\cdots dy_m$$

と書くことが出來るといふことは明である．即ち§2に於ける條件 I が滿たされてゐる．

又 $p(E|H)$ を p と略記すれば

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{\partial \log p}{\partial \theta_1} = -\frac{m}{\theta_1} + \frac{ms_2^2 + m(\bar{y}-b)^2}{\sigma_1^2 \theta_1^3} \\
\varphi_2 &= \frac{\partial \log p}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \log p}{\partial a} = \frac{n(\bar{x}-a)}{\sigma_1^2} \\
\varphi_3 &= \frac{\partial \log p}{\partial \theta_3} = \frac{\partial \log p}{\partial b} = \frac{m(\bar{y}-b)}{\sigma_1^2 \theta_1^2} \\
\varphi_4 &= \frac{\partial \log p}{\partial \theta_4} = \frac{\partial \log p}{\partial \sigma_1} = -\frac{N}{\sigma_1} + \frac{ns_1^2 + n(\bar{x}-a)^2}{\sigma_1^3} + \frac{ms_2^2 + m(\bar{y}-b)^2}{\sigma_1^3 \theta_1^2} \\
\varphi_{11} &= \frac{m}{\theta_1^2} - \frac{3m\{s_2^2 + (\bar{y}-b)^2\}}{\sigma_1^2 \theta_1^4}, \quad \varphi_{12} = \varphi_{21} = 0 \\
\varphi_{13} &= \varphi_{31} = -\frac{2m(\bar{y}-b)}{\sigma_1^2 \theta_1^3}, \quad \varphi_{14} = \varphi_{41} = -\frac{2m\{s_2^2 + (\bar{y}-b)^2\}}{\sigma_1^3 \theta_1^3} \\
\varphi_{22} &= -\frac{n}{\sigma_1^2}, \quad \varphi_{23} = \varphi_{32} = 0, \quad \varphi_{24} = \varphi_{42} = -\frac{2n(\bar{x}-a)}{\sigma_1^3} \\
\varphi_{33} &= -\frac{m}{\sigma_1^2 \theta_1^2}, \quad \varphi_{34} = \varphi_{43} = -\frac{2m(\bar{y}-b)}{\sigma_1^3 \theta_1^2} \\
\varphi_{44} &= \frac{N}{\sigma_1^2} - \frac{3n\{s_1^2 + (\bar{x}-a)^2\}}{\sigma_1^4} - \frac{3m\{s_2^2 + (\bar{y}-b)^2\}}{\sigma_1^4 \theta_1^2}
\end{aligned}
\tag{54}
$$

であつて，これ等の間には，§2 に於ける條件 III] が成立つてゐることは簡單な代數計算で驗證出來る．

§2 に於ける條件 II] が滿足させられるためには

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \theta_1} \iint_w \cdots \int p(E|\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n dy_1 dy_2 \cdots dy_m \Big|_{\theta_1=1} \\
&= \iint_w \cdots \int \frac{\partial}{\partial \theta_1} p(E|\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n dy_1 dy_2 \cdots dy_m \Big|_{\theta_1=1}
\end{aligned}
\tag{55}
$$

なること及び

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \iint_w \cdots \int p(E|\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n dy_1 dy_2 \cdots dy_m) \Big|_{\theta_1=1} \\
&= \iint_w \cdots \int \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} p(E|\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n dy_1 dy_2 \cdots dy_m \Big|_{\theta_1=1}
\end{aligned}
\tag{56}
$$

なることを示さねばならないが，これには $1-\Delta_0 < \theta_1 < 1+\Delta_0$ (但し $0 < \Delta_0$) なる如き θ_1 に對して常に

$$
p'_{\theta_1}(E|\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4), \quad p''_{\theta_1}(E|\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4), \quad p'''_{\theta_1}(E|\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)
$$

が存在して且見本空間 W 内の任意の領域に於て積分可能であること．及び $\sum_{i=1}^{n}(x_i-k)^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-l)^2 \geqq r_0^2$ なる如き領域 (r) に於て積分可能なる $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m$ の負ならざる函數 $f(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ (但し θ_1 には無關係) が存在し，又 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-k)^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-l)^2 < r^2$ なる如き領域に於ける任意の點 E に於て

$$|p_{\theta_1}'''(E|\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)| < M$$

なる如き一數 $M>0$ が求められ且 (r) に於ては $1-\Delta_0<\theta_1<1+\Delta_0$ なる如何なる θ_1 に對しても

$$|p_{\theta_1}'''(E|\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)| \leqq f(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$$

なることを示せばよいといふことが證明されてあるので〔4〕，この條件が滿足させられてゐるかどうかを檢べてみると確に滿足させられてゐることが知られる (證明は略する)．故に §2 條件 II〕が滿足させられてゐる．

$p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4|H)$ を得るには，(52) から $\bar{x}, \bar{y}, s_1^2, s_2^2$ の同時的元確率法則 $p(\bar{x}, \bar{y}, s_1^2, s_2^2|H)$ が得られて

$$p(\bar{x}, \bar{y}, s_1^2, s_2^2|H)=\frac{C}{\sigma_1^N\theta_1^m}s_1^{n-3}s_2^{m-3}e^{-\frac{n\{s_1^2+(\bar{x}-a)^2\}}{2\sigma_1^2}-\frac{m\{s_2^2+(\bar{y}-b)^2\}}{2\sigma_1^2\theta_1^2}} \tag{57}$$

(但し C は常數であつて $N=m+n$)

なること及び (54) に於ける最初の四方程式に對するヤコービの行列式は

$$\triangle=\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)}{\partial(\bar{x}, \bar{y}, s_1^2, s_2^2)}=-\frac{m^2n^2}{\theta_1^5\sigma_1^9}<0 \tag{58}$$

であるといふことに注意すればよい．即ち

$$p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4|H)=C\left\{1-\frac{\theta_1}{n}\varphi_1-\frac{\sigma_1^2}{n^2}\varphi_2^2+\frac{\sigma_1}{n}\varphi_4\right\}^{\frac{n-3}{2}} \times\left\{1+\frac{\theta_1}{m}\varphi_1-\frac{\sigma_1^2\theta_1^2}{m^2}\varphi_3^2\right\}^{\frac{m-3}{2}}e^{-\frac{\sigma_1}{2}\varphi_4} \tag{59}$$

(但し C は一つの常數)

である．

それから φ_1 は常に $\varphi_1'=\frac{\sigma_1^2}{m}\varphi_3^2-m$ と $\varphi_1''=n+\sigma_1\varphi_4-\frac{\sigma^2}{n}\varphi_2^2$ との間にあることは容易に證明出來るから

$$p(\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4|H)=\int_{\varphi_1'}^{\varphi_1''}p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4|H)\,d\varphi_1 =Ce^{-\frac{\sigma_1}{2}\varphi_4}\left\{N-\frac{\sigma_1^2}{n}\varphi_2^2-\frac{\sigma_1^2}{m}\varphi_3^2+\sigma_1\varphi_4\right\}^{\frac{N-4}{2}} \tag{60}$$

(但し C は一つの常數)

である．

便宜上 φ_4 の代りに $\phi_4 = N + \sigma_1\varphi_4$ を取り，従つて $p(\varphi_2, \varphi_3, \phi_4 | H)$ を $p(\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 | H)$ の代りに考へると，

$$(61)\qquad \iiint_{-\infty}^{+\infty} p^3(\varphi_2, \varphi_3, \phi_4 | H)\, d\varphi_2 d\varphi_3 d\phi_4$$

$$= C_1^3 \iiint_{(D)} e^{-\frac{3\phi_4}{2}} \left\{\phi_4 - \frac{\sigma_1^2}{n}\varphi_2^2 - \frac{\sigma_1^2}{m}\varphi_3^2\right\}^{\frac{3(N-4)}{2}} d\varphi_2 d\varphi_3 d\phi_4 \quad < +\infty$$

$$(62)\qquad M_{klm} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2^k \varphi_3^l \phi_4^m\, p(\varphi_2, \varphi_3, \phi_4 | H)\, d\varphi_2 d\varphi_3 d\phi_4$$

$$= C_2 \iiint_{(D)} e^{-\frac{\phi_4}{2}} \varphi_2^k \varphi_3^l \left\{\phi_4 - \frac{\sigma_1^2}{n}\varphi_2^2 - \frac{\sigma_1^2}{m}\varphi_3^2\right\}^{\frac{N-4}{2}} d\varphi_2 d\varphi_3 d\phi_4 \quad < +\infty$$

$$(63)\qquad \lambda_{klm} = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1 \varphi_2^k \varphi_3^l \phi_4^m\, p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \phi_4 | H)\, d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 d\phi_4$$

$$= C_3 \iiiint_{(D')} \varphi_1 \varphi_2^k \varphi_3^l \phi_4^m\, e^{-\frac{\phi_4}{2}} \left\{1 - N - \frac{1}{n}\varphi_1 - \frac{\sigma_1^2}{n^2}\varphi_2^2 + \frac{1}{n}\phi_4\right\}^{\frac{n-3}{2}}$$

$$\times \left\{1 + \frac{\theta_1}{m}\varphi_1 - \frac{\sigma_1^2\theta_1^2}{m^2}\varphi_3^2\right\}^{\frac{m-3}{2}} d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_2 d\phi_4 \quad < +\infty$$

但し C_1, C_2, C_3 は常數で，(D) 及び (D') はそれぞれ $\varphi_2, \varphi_3, \phi_4$ の全變域及び $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \phi_4$ の全變域を示す．そして k, l, m は負ならざる正數である

なることが容易に證明出來る．故に §2 條件 V], VI], VII] が滿足せられてゐる．

更に又

$$(64)\qquad \iiiint_{-\infty}^{-\infty} \varphi_1^2\, p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \phi_4 | H)\, d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 d\phi_4$$

$$= \iiiint_{(D)} \varphi_1^2\, e^{-\frac{\phi_4}{2}} \left\{1 - N - \frac{1}{n}\varphi_1 - \frac{\sigma_1^2}{n^2}\varphi_2^2 + \frac{1}{n}\phi_4\right\}^{\frac{n-3}{2}}$$

$$\times \left\{1 + \frac{\theta_1}{m}\varphi_1 - \frac{\sigma_1^2\theta_1^2}{m^2}\varphi_3^2\right\}^{\frac{m-3}{2}} d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 d\phi_4 \quad < +\infty$$

但し (D) は $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \phi_4$ の全變域を表す

なること及び

$$(65)\qquad \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{k}\left[\iiint_{(D)} \left\{|\varphi_2| + |\varphi_3| + |\phi_4|\right\}^k e^{-\frac{\phi_4}{2}} \left\{\phi_4 - \frac{\sigma_1^2}{n}\varphi_2^2 - \frac{\sigma_1^2}{m}\varphi_3^2\right\}^{\frac{N-4}{2}} d\varphi_2 d\varphi_3 d\phi_4\right]^{\frac{1}{2k}}$$

$$< 2^{\frac{1}{2}} e^{-1}\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{N}{2k}\right)\left(k + \frac{N}{2}\right)^{\frac{N}{2k}} \quad < +\infty$$

なることも証明出来るから，§2 條件 VIII〕及び IX〕が満足せられてゐる．

そこで k_1, k_2 を

$$(66)\qquad \int_{k_1}^{k_2} p(\varphi_1 | \varphi_3, \varphi_3, \varphi_4;\, H_0)\, d\varphi_1 = 1-\alpha$$

$$(67)\qquad \int_{k_1}^{k_2} \varphi_1 p(\varphi_1 | \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4;\, H_0)\, d\varphi_1 = (1-\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1 p(\varphi_1 | (\varphi_2\ \varphi_3, \varphi_4;\, H_0)\, d\varphi_1$$

を満足させるやうに定めれば，求める B 型不偏危険域は

$$(68)\qquad k_1 \geqq \varphi_1 \quad \text{及び} \quad k_2 \leqq \varphi_1$$

で與へらるべきである．

ところで

$$(69)\qquad p(\varphi_1 | \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4;\, H_0) = p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 | H_0) \Big/ p(\varphi_2, \varphi_3, \varphi_3 | H_0)$$
$$= C\left\{1-\frac{1}{n}\varphi_1-\frac{\sigma_1^2}{n^2}\varphi_2^2+\frac{\sigma_1}{n}\varphi_4\right\}^{\frac{n-3}{2}}\left\{1+\frac{1}{m}\varphi_1-\frac{\sigma_1^2}{m^2}\varphi_3^2\right\}^{\frac{m-3}{2}}$$
$$\times\left\{N-\frac{\sigma_1^2}{n}\varphi_2^2-\frac{\sigma_1^2}{m}\varphi_3^2+\sigma\varphi_4\right\}^{-\frac{N-4}{2}}$$

であるから，k_1, k_2 は

$$(70)\qquad \int_{k_1}^{k_2}\left\{1-\frac{1}{n}\varphi_1-\frac{\sigma_1^2}{n^2}\varphi_2^2+\frac{\sigma_1}{n}\varphi_4\right\}^{\frac{n-3}{2}}\left\{1+\frac{1}{m}\varphi_1-\frac{\sigma_1^2}{m^2}\varphi_3^2\right\}^{\frac{m-3}{2}}d\varphi_1$$
$$=(1-\alpha)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left\{1-\frac{1}{n}\varphi_1-\frac{\sigma_1^2}{n}\varphi_2^2+\frac{\sigma_1}{n}\varphi_4\right\}^{\frac{n-3}{2}}\left\{1+\frac{1}{m}\varphi_1-\frac{\sigma_1^2}{m^2}\varphi_3^2\right\}^{\frac{m-3}{3}}d\varphi_1$$

及び

$$(71)\qquad \int_{k_1}^{k_2}\varphi_1\left\{1-\frac{1}{n}\varphi_1-\frac{\sigma_1^2}{n^2}\varphi_2^2+\frac{\sigma_1}{n}\varphi_4\right\}^{\frac{n-3}{2}}\left\{1+\frac{1}{m}\varphi_1-\frac{\sigma_1^2}{m^2}\varphi_3^2\right\}^{\frac{m-3}{2}}d\varphi_1$$
$$=(1-\alpha)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\varphi_1\left\{1-\frac{1}{n}\varphi_1-\frac{\sigma_1^2}{n^2}\varphi_2^2+\frac{\sigma_1}{n}\varphi_4\right\}^{\frac{n-3}{2}}\left\{1+\frac{1}{m}\varphi_1-\frac{\sigma_1^2}{m^2}\varphi_3^2\right\}^{\frac{m-3}{2}}d\varphi_1$$

$$\text{但し}\quad \lambda_1=\frac{\sigma_1^2}{m}\varphi_3^2-m, \quad \lambda_2=n+\sigma_1\varphi_4-\frac{\sigma_1^2}{n}\varphi_2^2$$

を満足させなければならない．茲に $\lambda_2 > \lambda_1$ なることは，$\lambda_2-\lambda_1=\frac{n}{\sigma_1^2}s_1^2+\frac{m}{\sigma_1^2}s_2^2$ なることから知られる．

さて

$$(72)\qquad \frac{\varphi_1-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}=t \qquad \text{従つて} \qquad \frac{\lambda_2-\varphi_1}{\lambda_2-\lambda_1}=1-t$$

$$(73) \qquad k_1' = \frac{k_1-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}, \qquad k_2' = \frac{k_2-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}$$

と置けば，(70) から

$$(74) \qquad \int_{k_1'}^{k_2'} t^{\frac{m-3}{2}}(1-t)^{\frac{n-3}{2}}dt = (1-\alpha)\int_0^1 t^{\frac{m-3}{2}}(1-t)^{\frac{n-3}{2}}dt$$

$$= (1-\alpha)\frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n-2}{2}\right)}$$

を得. (71) から

$$\int_{k_1'}^{k_2'}(\lambda_2-\lambda_1)^{\frac{N-2}{2}}t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-3}{2}}dt + \int_{k_1'}^{k_2'}\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)^{\frac{N-4}{2}}t^{\frac{m-3}{2}}(1-t)^{\frac{n-3}{2}}dt$$

$$= (1-\alpha)\left\{\int_0^1(\lambda_2-\lambda_1)^{\frac{N-2}{2}}t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-3}{2}}dt + \int_{k_1'}^{k_2'}\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)^{\frac{N-4}{2}}t^{\frac{m-3}{2}}(1-t)^{\frac{n-3}{2}}dt\right\}$$

が得られ，これは (74) により

$$(75) \qquad \int_{k_1'}^{k_2'} t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-3}{2}}dt = (1-\alpha)\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-3}{2}}dt$$

$$= (1-\alpha)\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$$

となる.

そこで (74), (75) から k_1', k_2' を定めると，(73) に依り

$$k_1 = (\lambda_2-\lambda_1)\,k_1' + \lambda_1, \qquad k_2 = (\lambda_2-\lambda_1)\,k_2' + \lambda_1$$

であり，$\lambda_2-\lambda_1 = \frac{n}{\sigma_1^2}s_1^2 + \frac{m}{\sigma_2}s_2^2$ であるから

$$(76) \qquad k_1 = k_1'\left(\frac{ns_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{ns_2^2}{\sigma_1^2}\right) + m\left\{\frac{(\bar{y}-b)^2}{\sigma_1^2} - 1\right\}$$

$$(77) \qquad k_2 = k_2'\left(\frac{ns_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{ms_2^2}{\sigma_1^2}\right) + m\left\{\frac{(\bar{y}-b)^2}{\sigma_1^2} - 1\right\}.$$

(54) により $\theta_1 = 1$ なるときは，$\varphi_1 = -m + m\{s_2^2 + (\bar{y}-b)^2\}/\sigma_1^2$ であるから，求める不偏危険域は，次の二つの不等式で定義される.

$$(75) \qquad \begin{cases} -m + \dfrac{m}{\sigma_1^2}\left\{s_2^2 + (\bar{y}-b)^2\right\} \leqq k_1'\left(\dfrac{ns_1^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{ms_2^2}{\sigma_1^2}\right) + m\left\{\dfrac{(\bar{y}-b)^2}{\sigma_1^2} - 1\right\} \\[2ex] -m + \dfrac{m}{\sigma_1^2}\left\{s_2^2 + (\bar{y}-b)^2\right\} \geqq k_2'\left(\dfrac{ns_1^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{ms_2^2}{\sigma_1^2}\right) + m\left\{\dfrac{(\bar{y}-b)^2}{\sigma_1^2} - 1\right\} \end{cases}$$

これを書直せば

$$\text{(79)}\qquad \frac{ms_2^2}{ns_1^2+ms_2^2} \geqq k_1' , \qquad k_2' \leqq \frac{ms_2^2}{ns_1^2+ms_2^2}$$

或は

$$\text{(80)}\qquad \frac{ns_1^2}{ms_2^2} \geqq \frac{1-k_1'}{k_1'} , \qquad \frac{1-k_2'}{k_2'} \geqq \frac{ns_1^2}{ms_2^2}$$

となる．即ち二つの正常母集團に於ける標準偏差の相等しきや否やを檢定するための B 型不偏危險域 w_0 は

$$\int_{k_1'}^{k_2'} t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-3}{2}}dt = (1-\alpha)\frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n-2}{2}\right)}$$

$$\int_{k_1'}^{k_2'} t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-3}{2}}dt = (1-\alpha)\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$$

を滿足させる k_1', k_2' を以て定められる次の領域である．

$$\frac{ns_1^2}{ms_2^2} \geqq \frac{1-k_1'}{k_1'} , \qquad \frac{1-k_2'}{k_2'} \geqq \frac{ns_1^2}{ms_2^2} .$$

R.A. Fisher は $z = \frac{1}{2}\left\{\log\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1} - \log\frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{m-1}\right\} = \left\{\log\frac{ns_1^2}{n-1} - \log\frac{mS_2^2}{m-1}\right\}$ を用ひて二つの見本標準偏差の差の著しさを檢定する方法を示してゐるが〔5〕，これは $P\{z \geqq z_0\} = \alpha$ なる如き z_0 に比べて，見本から得た z の値が大なるときには假說を棄て然らざるときにこれを採用するのである．

文　獻

〔1〕 J. Neyman and E. S. Pearson. On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Series. A, Vol. 231 (1933), P. 293.

〔2〕 J. Neyman and E. S. Pearson, Contributions to the Theory of Testing Statistical Hypotheses, Statistical Research Memoirs, Vol. I (1936), P. 4.

〔3〕 J. Neyman, Sur la vérification des hypothèses statistiques composées, Bull. de la Soc. Math. de France, Tome 63 (1935).

〔4〕 Ryoichiro Sato, Contributions to the Theory of Testing Statistical Composite Hypotheses. (Ph. D. の學位論文として倫敦大學に提出した).

〔5〕 R. A. Fisher, Statistical Methods for Research Workers, 6th ed. (1936).