ベクトル量の相關測度に就いて(Ⅰ)

増山, 元三郎
中央氣象臺調査課

出版情報：統計数理研究. 1 (1), pp.20-37, 1941-10-15. 統計科学研究会

原　　著

ベクトル量の相關測度に就いて (I)

會員　増山元三郎（中央氣象臺調査課）

（昭和十六年四月五日總會講演）

目　次

§1. 緒　論

新しい現象を研究するに際しまして，屢々二つ又は夫以上の事象間に關係が有るか否か，若し有るとすれば，その程度はどの位かと云つた問題，即ち相關測度の問題が起ります．

スカラー量即ち一つの數で表現される量の間の相關測度の理論は多くの學者の手に依り開拓され實用に供されて居りますが，理論上の取扱ひの容易さと，計算の簡單さの爲に，實際は關聯係數・相關係數が主として用ゐられ，僅かに相關比も使はれることが有ると云つた有樣であります．

併し乍らベクトル量，即ち座標變換に際して或る一つの決つた法則に從つて變換される一組の數で表現される量に關する相關測度の理論は，從來殆ど未開拓の儘取殘されて來たのであります．

この理由を考へて見ますと，先づ第一に數學者はベクトルは殆んどスカラーと同じ樣に取扱へるだらうと考へて興味を持たない．例へて申しますと，スカラー量の理論とベクトル量の理論とは，大凡單獨微分方程式論と聯立微分方程式論位の困難さの差があり，その上單なる聯立方程式論では濟まないで，不變式論的制限が加はつて參ります．併し乍ら確率論，數理統計學の分野には，實函數論方面の飛躍的發達に伴つて，もつと基礎的な抽象的な面白い問題が澤山出て居りますので，放置されて居たのだらうと思はれます．一方相關測度を最もよく利用する生物界，社會經濟界方面には，ベクトル量が對象と成ることは殆んど全く無いのでありますから，問題にならない．尤も全然問題に成り得ないのではなく，二個體の類似の測度や多くの目印で表現される二量間の相關測度として研究の必要性はあるのであります．最も必要を感ずる地球物理學者は，ベクトル量の相關測度論の研究は手段であつて目的ではないので餘り手を出さなかつたのであります．

併し乍ら，學問として未だ幼い段階に在る天氣豫報術にとつては，或る地點の氣壓傾度とその土地での地上風とのなす角を統計的に定める問題，又一般流が地形の影響でどう歪められるかと云ふ問題，又地上風から上層風を豫測すると云ふ問題，一地點の風から他地點の風を豫測する問題，又局地的な風の日變化が概週期函數の一組で表現することが出來るかどうかの問題等々，何れも定量

豫報術の基礎的問題として現れて参り，この際この種の豫報法がどれ位うまくゆくかの判定に，ベクトル量の相關測度が必要と成るのであります．例へば理想流體に對する簡單な地形は，流速を線型微分方程式で定める程度の近似では，理論的には風の場の歪みで置換へて取扱ふことが出來，地形性障碍物の存在する場合の解は，存在しない場合の解に線型演算を施して得られることに成りますが，實際の風は理想氣體の流れでもありませんし，又理論で取扱ふやうな簡單な地形は實在しないと云つて良い位のものでありますから，實際どの位この理論公式が正確に成立するかを調べて見ないと，其儘定量豫報に使へないわけであります．又二組のベクトルのなす角の平均値を求める問題でも，角を測つて平均すれば良さそうでありますが，そうして得た平均角がどれ位定量豫報に役立つかを調べて置く必要があります．從來實用に供されて居ました平均角を求める二三の方法[1][3]は，何れも有意義な角の存在する爲の必要且つ十分條件のことを全く考へて居らず，從つて實用上全く無意義な角を兎も角も平均角として採用して居た場合があるのであります．[14] 强いて云へば之は得られた平均角の適否を判定するに適當な相關測度論が無かつた爲に無意義なことに氣附かなかつたとも云へるのであります．

元へ戻ります．實際調べて見ますと，ベクトル量の相關測度論の必要を認め，之に手を着けた人に Dietzius[2]，Sverdrup[4] の二氏が在り，前者は氣象學者，後者は著名な海洋學者でありまして，共に地球物理學の畑に屬する人であります．以下先づ兩氏の理論の概要之に對する私の批判，ついで未完成ではありますが私の理論を述べ皆様の御批判を仰ぎたいと存じます．

§2. 從 来 の 理 論

1916 年に Dietzius は Yule の方針に從ひ最小自乘法を用ゐ，一つの相關係數を求めました．

今二組のベクトル系を $\{\mathbf{x}_1(t)\}$, $\{\mathbf{x}_2(t)\}$ とし，t に就いての和（又は積分）を［ ］で表し，“・”で內積を表すとして，

$$[(\mathbf{x}_1-\lambda_{12}\mathbf{x}_2)\cdot(\mathbf{x}_1-\lambda_{12}\mathbf{x}_2)] = \text{最小} \tag{2.1}$$

として，未定常數 λ_{12} を定め，下標 1, 2 を取換へて未定常數 λ_{21} を定め，この二つの常數の幾何平均を採り，符號を適當に約束して，次式を得ました．

$$r_D(\mathbf{x}_1;\mathbf{x}_2) = \frac{[\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2]}{\sqrt{[\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_1][\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x}_2]}} \tag{2.2}$$

この相關係數は，如何にもスカラーの場合の Pearson の相關係數の無理の無い擴張に成つて居りますが，併し $r_D{}^2=1$ と成るのは，r_D の作り方から直ぐ解るやうに

$$\mathbf{x}_1(t) = \lambda\mathbf{x}_2(t), \qquad \lambda = \text{常數} \tag{2.3}$$

の成立する時，而もこの時に限るのであります．これでは夫々一定の大きさをもち，而も對應二平面ベクトル間の角が符號をも考へに入れて一定である場合でも，必ずしも相關係數の平方は 1 と成らないのでありますから，實用上甚だ應用の狹いもので，先づ役立たぬものと云つてよいと思はれます．

彼自身この致命的缺點に氣附いて居たらしく，その原著の終りの方に，一方が他方の似眞寫像で

ある時1と成るやうな相關測度を求めようとした形跡は窺へるのでありますが，變換式の係數の集りが一つのテンソルとして現れて來ることを考へなかつたらしく，このテンソルの陽な形を求めることさへ成功せず，從つて又相關測度を作り上げることも出來なかつたのであります．

翌年 Sverdrup は，對應二平面ベクトルの一方から他方へ一定角の廻轉と一定倍率の伸縮で移れる場合，而もこの場合に限つて1になる相關測度を求めることに成功しました．彼の考へ方は $\mathbf{x}_2$ の絶對値を x_2 とすると，

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{k}_{12} x_2 \tag{2.4}$$

と云ふベクトルを考へ，$\mathbf{k}_{12}$ と云ふベクトルは一般に方向を變へるが，$\mathbf{x}_2$ とは符號をも考へに入れて一定角を爲す一定の大きさのベクトルと致します．この $\mathbf{k}_{12}$ の大きさを

$$[(\mathbf{x}_1-\mathbf{y}_2)\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{y}_2)] = \text{最小} \tag{2.5}$$

滿足するやうに定めるのであります．次に下標 1, 2 を取換へて $\mathbf{k}_{21}$ と云ふベクトルの大きさを定め最後にこの二つのベクトルの大きさの幾何平均を採り，之を相關測度とするのであります．之を元のベクトル系の要素を用ゐて表しますと，"x" で外積を表すとして，

$$r_s(\mathbf{x}_1\,;\mathbf{x}_2) = \sqrt{\frac{[\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2]^2+[\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2]^2}{[\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_1][\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x}_2]}} \tag{2.6}$$

と成ります．根號の中の分子の第一項は Dietzius の式の時に現れたものと全く同じであつて，云はば $\mathbf{x}_1$ の方を規準としたとき，$\mathbf{x}_2$ の $\mathbf{x}_1$ 方向の分ベクトルと $\mathbf{x}_1$ との相關程度を表して居り，第二項は $\mathbf{x}_2$ の $\mathbf{x}_1$ に垂直な方向の分ベクトルと $\mathbf{x}_1$ との相關程度を表して居り，確かに Dietzius の致命的缺點を幾分救つた形に成つて居ります．

この測度論の第一の缺點は，線型變換一般を考へて居ないことであります．例へば山頂の風と山脈から十分離れた地點の風とは，一方から他方へ線型變換で移れるのですが，この變換は廻轉と伸縮の組合せに成らないのでありますから，r_s は1に成り得ないのであります.[14] 第二の缺點は，導き方が甚だ技巧的なので r_s の解析的性質がよく解らないことであります．例へば $r_s=0$ が何を意味するか，$r_s=0.99$ が何を意味するか，甚だ不明瞭であります．之は獨立の定義と相關測度の絶對規準が與へられてないからであります．$r_s=0$ の場合から申しますと，彼は至極單純に之は統計的獨立を意味すると述べて居るのでありますが，彼の公式を一次元の場合に當填めますと，根號内の第二項は消え，內積は普通の乘算に歸着しますから，外見上 r_s は Pearson の公式と全く一致します．併し乍ら Sverdrup は $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ の計算に偏差を用ゐないのが自說の特色であると述べて居ますから，正規分布をする場合に統計的獨立でも必ずしも r_s は零でなく，その上 Sverdrup の公式では同一の二現象が測定の規準點の採り方で種々の相關値を採ることに成りますから，之は明かに誤りであります．この點は Sverdrup の主張を取消して偏差をとることとして，修正した r_s を採用すればよいわけですが，それでも絶對規準の無い點は矢張り困ります.[12] 例へて申しますと，百度だから熱いと云へるかと申しますと，そうとは限らない．その目盛が何を規準にして作つてあるかが解らないからであります．同じ百度でも華氏の百度は攝氏の三十何度にしか當りません．同樣に $r_s=0.99$ でも相關程度が大きいかどうか解らないわけです．第三の缺點は彼の技巧を重相關測度

論に擴張することの困難なことであります.

私がベクトル量の相關測度論に就いて調べ出しました頃は,[5] この様な先輩の業績は相關論に關する單行本中には見當らず，大分後に成つて氣候學に關する文獻を調べて居る時に偶然之等の先覺者の業績を知つた様な次第であります．從つて最初から之等の兩氏の論文の行詰つた處から出發したわけではないのでありますが，考への筋道は原著を見て頂くとして，此處ではベクトル系の獨立の問題から出發致します.

§ 3. 相關測度に對する要請[5]

實用上の見地から，相關測度に對して，次の7箇の條件を要請してよいだらうと思ひます．電氣回路を統計的に分析し，等價回路を求める場合への適應性を考慮して，以下斷らない限りベクトルは總て n 次元のビベクトル即ち n 箇の複素成分をもつベクトルを考へる事に致します.[15] パラメーター t に對して一組のビベクトル $\mathbf{z}_1(t)$, $\mathbf{z}_2(t)$ 等が得られるものとし，二つのビベクトル系 $\{\mathbf{z}_1(t)\}$, $\{\mathbf{z}_2(t)\}$ 間の相關係數を $r(\mathbf{z}_1;\mathbf{z}_2)$ で表します．要請は次の通りです.

1° $r(\mathbf{z}_1;\mathbf{z}_2)$ は實數不變量であること，（變換群は線型變換として).

實數でないと，$\mathbf{z}_1$ に對する $\mathbf{z}_2$ の關係と $\mathbf{z}_3$ の關係との大小の比較が出來ないし，不變量でないと，我々が觀測の爲假りに用ゐた座標系に關係することに成つて，事象そのものの相關測度と云へないから困ります.

2° $r(\mathbf{z}_1;\mathbf{z}_2)$ は規矩不變性をもつこと.

之は相關測度は二つの事象そのものの相關の程度を表すもので，その事象を測定するに用ゐた物指及び規準點の選び方に依つては困るからです.

3° $r(\mathbf{z}_1;\mathbf{z}_2)=r(\mathbf{z}_2;\mathbf{z}_1)$

之は $\mathbf{z}_1$ に對する $\mathbf{z}_2$ の相關程度と，$\mathbf{z}_2$ に對する $\mathbf{z}_1$ の相關程度とが異ると，相關測度の常識と矛盾するからです.

4° $1\geqq r^2\geqq 0$ であること.

之は 0 と 1 とに特別な意味はなく，實數の閉區間ならよいわけです．r^2 を考へた一つのわけは，Pearson の相關係數を r_p で表しますと，r_p の自乘が $[0,1]$ 間の値を採るからで，他の一つのわけは適當な條件の下で，r^2 を $\mathbf{z}_2$ から $\mathbf{z}_1$ を豫測した場合の適中確率と見做せるやうにしたいからです.

5° $r^2=1$ は $\{\mathbf{z}_1\},\{\mathbf{z}_2\}$ 間に線型式が成立する場合，而もこの場合に限る.

線型關係の在る場合だけを相關の完全な場合と認めるわけですが，線型式でなくても重相關の概念を利用して，この場合に歸着させることが出來る場合が實用上少くないのであります.

6° $r=0$ は $\{\mathbf{z}_1\},\{\mathbf{z}_2\}$ が獨立な場合，而もこの場合に限る.

此處では多事象の獨立とはどんな意味かが問題となりますが，$\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\cdots\cdots\mathbf{z}_m$ の同時に起る確率を $P(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2\cdots\cdots\mathbf{z}_m)$ とし，$\mathbf{z}_j\,(j=1,2\cdots\cdots m)$ の起る確率を $P(\mathbf{z}_j)$ とする時,

$$P(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\cdots\cdots\mathbf{z}_m)=P(\mathbf{z}_1)\,P(\mathbf{z}_2)\cdots\cdots P(\mathbf{z}_m)$$

であることと致します．併し之でも $P(\mathbf{z})$ の陽な形が問題になります．

7° $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \cdots\cdots \mathbf{z}_m$ が御互に獨立で，而も $\mathbf{z}$ が之等の線型式で表現される場合には，$r_j = r(\mathbf{z}; \mathbf{z}_j)$ の函數 $f(r_j)$ が存在し，次式が成立すること．

$$1 = \sum_{j=1} f(r_j)^{\,12)}$$

之は r の數値の絶對規準を與へるのに必要で，この様な函數 $f(r)$ が存在して初めて $\mathbf{z}$ への $\mathbf{z}_j$ の寄與或ひは $\mathbf{z}_j$ の線型式を用ゐて $\mathbf{z}$ を豫測するときの適中率は $f(r_j) \times 100\%$ と云へると思ひます．

以上の要請だけからは，勿論 r の陽な形は定まらないのでありますから，更に假定を加へて行きます．以上の要請から r の形を求めて行く際，中心に成るものは，$r^2=1$ の場合の線型式の意味と $r=0$ の場合の獨立の意味とであります．後者は $P(\mathbf{z})$ の陽な形の決定に關係します．大凡の見通しを先づ申しますと，獨立な二つのビベクトル系は，直交する二つのビベクトル系に對應しますから，之を基にして直交函數論の言葉に飜譯して見ますと，規矩不變性は先づ偏差を採つた上で規準化の操作で規準系を作り之れを利用すれば自ら満足され，7° の式は正に Parseval の等式に對應して居るわけであります．從つて相關測度は Fourier 係數と密接な關係を持つことが豫想されるのであります．但しこの場合利用されるのは，通常の Fourier 係數論と準同型な理論ではありますが係數自身はスカラーでなくテンソルとして現れて來ます．

§ 4. 正規分布函數

スカラーの場合から類推すると，ビベクトルの場合の相關測度で線型式の成立する時1と成る量は，先づ Gauss の正規分布函數を一般化し之れを利用することに依つて達し得られそうに思はれます．

今一つの n 次元の實ベクトル $\mathbf{x}$ を與へることを，一先づ直交規準デカルト座標系 (*O.N.C.* 系) を固定して考へて見ますと，$\mathbf{x}$ の座標成分である一組の實數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を與へることと等價であります．從つてこの一組の實數の正規分布函數を求めれば $P(\mathbf{x})$ が知れるわけであります．ところがこの一組の實數の正規分布函數の陽な式は既に得られて居りますから，殘る問題は夫をベクトルを用ゐて不變式の形に表現することだけです．之を行ひますと，$\overline{\mathbf{x}} = 0$ として

$$P(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det \mathfrak{B})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}\cdot\mathfrak{B}^{-1}\cdot\mathbf{x}}, \quad \mathfrak{B} = \overline{\mathbf{x}\mathbf{x}} \tag{4.1}$$

と成ります．"—" は t に關する平均を意味し，$\mathbf{xx}$ はベクトル $\mathbf{x}$ から作つた二階のテンソルであります．[11]

ビベクトル $\mathbf{z}$ の場合には $P(\mathbf{z})$ が實數でなければいけないので，$\mathbf{xx}$ の代りに $\mathbf{zz}^*$ を用ゐます．この時は e の肩に來る二次形式はエルミート二次形式と成ります．

以上の結果を m 箇のビベクトル系に擴張するには，mn 次元の複素空間即ち $2mn$ 次元の實數空間を考へればよさそうですが，$2mn$ 次元空間の一般の正規分布では必ずしも P が實にならないので，mn 次元空間の *O.N.C.* 系で書いて見ますと，丁度この空間で一つのビベクトル $\mathbf{Z}$ を與へる分布函數を考へればよいのであります．之は $\overline{\mathbf{Z}} = 0$ として

$$P(\mathbf{Z}) = P(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \cdots\cdots, \mathbf{z}_m)$$

(4.2) $$= (2\pi)^{-mn}(\det \mathfrak{U})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}\cdot\mathfrak{U}^{-1}\cdot\mathbf{z}^*}, \quad \mathfrak{U} = \overline{\mathbf{ZZ}^*}$$

成分を O.N.C. 系での超行列の形に書けば，

(4.3) $$\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \cdots\cdots, \mathbf{z}_m)$$

(4.4) $$\overline{\mathbf{ZZ}^*} \longleftrightarrow \frac{1}{N}\begin{pmatrix} [\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1] & [\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2] & \cdots\cdots & [\mathbf{z}_1\mathbf{z}_m] \\ [\mathbf{z}_2\mathbf{z}_1] & [\mathbf{z}_2\mathbf{z}_2] & \cdots\cdots & [\mathbf{z}_2\mathbf{z}_m] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\mathbf{z}_m\mathbf{z}_1] & [\mathbf{z}_m\mathbf{z}_2] & \cdots\cdots & [\mathbf{z}_m\mathbf{z}_m] \end{pmatrix}$$

此處に［］は t に就いての N 箇の和を表しますが，便宜上以下特に斷らなくても括弧內の第二のビベクトルは共軛複素量をとるものと決めて置きます．又實用上は t に就いての積分は總て和に直しますから［］は和だけを考へて行きます．

(4.5) $$[\mathbf{z}_k\mathbf{z}_l]^\dagger = [\mathbf{z}_l\mathbf{z}_k]$$

ですから，$\overline{\mathbf{ZZ}^*}$ と云ふテンゾルはエルミート性であることがわかります．$\overline{\mathbf{ZZ}^*}$ を $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \cdots\cdots, \mathbf{z}_m\}$ 又は $\{\mathbf{Z}\}$ の<u>分散テンゾル</u>と名附けます.[9] $\overline{\mathbf{Z}} \neq 0$ なら $\overline{\mathbf{ZZ}^*}$ を<u>撒布テンゾル</u>と名附けます.[5]

以上の形から，$\{\mathbf{z}_1\}, \{\mathbf{z}_2\}, \cdots\cdots, \{\mathbf{z}_m\}$ が御互ひに獨立なこと，即ち

(4.6) $$P(\mathbf{Z}) = P(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \cdots\cdots, \mathbf{z}_m) = P(\mathbf{z}_1)P(\mathbf{z}_2)\cdots\cdots P(\mathbf{z}_m)$$

が成立するのは，

(4.7) $$[\mathbf{z}_k\mathbf{z}_l] = 0 \qquad (k \neq l)$$

の成立する時，しかもこの時に限ることがわかります．テンゾルの代りに行列の理論の言葉を用ゐますと，$\{\mathbf{z}_1\}, \{\mathbf{z}_2\}, \cdots\cdots, \{\mathbf{z}_m\}$ が御互ひに獨立であることは，正規分布を假定すれば，$\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \cdots\cdots, \mathbf{z}_m\}$ の分散行列が夫々の要素 $\mathbf{z}_l$ の分散行列の直接和に成ることと等價であります．

之で獨立と云ふ言葉を具體的に式で表すことが出來たわけですが，在來のベクトル函數の直交と區別する爲，

(4.8) $$[\mathbf{z}_k\mathbf{z}_l] = 0 \quad \text{従つて又} \quad [\mathbf{z}_l\mathbf{z}_k] = [\mathbf{z}_k\mathbf{z}_l]^\dagger = 0$$

ならば $\{\mathbf{z}_k\}$ と $\{\mathbf{z}_l\}$ とは<u>全直交する</u>と名附けます．$\{\mathbf{z}_k\}\{\mathbf{z}_l\}$ が全直交すれば，夫々に任意の線型變換 $\mathfrak{L}_k, \mathfrak{L}_l$ を施した $\{\mathfrak{L}_k\cdot\mathbf{z}_k\}, \{\mathfrak{L}_l\cdot\mathbf{z}_l\}$ も全直交致します．之は

(4.9) $$[(\mathfrak{L}_k\cdot\mathbf{z}_k)(\mathfrak{L}_l\cdot\mathbf{z}_l)] = \mathfrak{L}_k\cdot[\mathbf{z}_k\mathbf{z}_l]\cdot\mathfrak{L}_l^\dagger$$

だからであります．この性質が 1° の要請を調べる時役立ちます．

§5. 線型全獨立

スカラーの場合に完全な線型關係の成立する時は，我々の言葉で述べますと，分散テンゾルが特異に成る場合であります．之を我々の場合に擴張して見ますと

$$\det [\mathbf{ZZ}] = 0 \tag{5.1}$$

の場合であります．之を *O.N.C.* 系での成分式に直して見ますと，この式は正に

$$\mathfrak{T}_1 \cdot \mathbf{z}_1(t) + \mathfrak{T}_2 \cdot \mathbf{z}_2(t) \cdots\cdots + \mathfrak{T}_m \cdot \mathbf{z}_m(t) = 0 \tag{5.2}$$

と云ふテンソル係數を持つビベクトル式の *O.N.C.* 系での成分式の Gram の行列式に成つて居るのであります．從つて我々の線型式は二階テンソルを係數とするビベクトル間の一次式であることが解ります．この事實から逆に線型獨立の定義を致します．即ちどの様に二階の一定テンソル $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2, \cdots\cdots \mathfrak{T}_m$ を選んでも，之等が悉く零である場合を除いて (5.2) が成立たないならば，$\{\mathbf{z}_1\}, \{\mathbf{z}_2\}, \cdots\cdots, \{\mathbf{z}_m\}$ は線型全獨立と名附けます．さうでない場合には線型全聯關であると云ひます．[7]

この定義から直ちに線型全獨立なビベクトル系の中には，撒布テンソルの行列式が零に成るものが一つも存在し得ないことがわかります．之は *O.N.C.* 系では

$$[\mathbf{zz}] \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z_1(1) & z_2(2) \cdots\cdots & z_1(N) \\ z_2(1) & z_2(2) \cdots\cdots & z_2(N) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ z_n(1) & z_n(2) \cdots\cdots & z_n(N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^*(1) & z_2^*(1) & \vdots & z_n^*(1) \\ z_1^*(2) & z_2^*(2) & \vdots & z_n^*(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^*(N) & z_2^*(N) & \vdots & z_n^*(N) \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

と對應づけられますから，$[\mathbf{zz}]$ は或る n 次元行列 $\mathfrak{A}$ とその複素共軛行列 $\mathfrak{A}^\dagger$ との積に對應するからです．從つて $[\mathbf{zz}]$ の固有値は實數であることは勿論負ではあり得ないのであります．零になるのは $[\mathbf{zz}]$ の行列の階數，從つて又 $\mathfrak{A}$ の行列の階數が n より低い時で，固有値中の零の數即ち縮退の度合を k としますと，$\{\mathbf{z}(t)\}$ は $(n-k)$- 次元の部分空間を作ることとなり，ビベクトルの撒布が或る限られた範圍內に收まることを意味します．この様な場合には，特異ではあるが零ではないテンソル $\mathfrak{T}$ を適當に選ぶと

$$\mathfrak{T} \cdot \mathbf{z}(t) = 0 \tag{5.4}$$

とすることが出來ます．從つて若し $\{\mathbf{z}_1(t)\}$ の散布テンソルが特異なら，$\mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3 \cdots\cdots \mathfrak{T}_m$ は總て零と取ると，零でないテンソル $\mathfrak{T}_1$ を用ゐて (5.2) 形の式が成立つことに成り，之は假定と矛盾致します．

以上のことから，線型全獨立なビベクトル系 $\{\mathbf{z}_1\}, \{\mathbf{z}_2\}, \cdots\cdots \{\mathbf{z}_m\}$ から，系列 $\{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{u}_2\}, \cdots\cdots \{\mathbf{u}_m\}$ を線型結合で作り出し，御互ひに全直交する様にすることが出來ます．方針は Schmidt の直交化法と全く同様であります．その前に計算の簡單さと，見通しの容易さとから先づ我々の意味での規準化法を考へませう．[13]

我々の場合にはスカラー函數の積が二階のテンソルに對應するのでありますから，$\{\mathbf{z}(t)\}$ の規準化も

$$\mathfrak{S} \cdot \mathbf{z}(t) = \mathbf{u}(t) \tag{5.5}$$

なる二階テンソル $\mathfrak{S}$ が存在して

$$[\mathbf{uu}] = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{E} \text{ は單位テンソル} \tag{5.6}$$

と成ると好都合の様に思はれます．

$[\mathbf{zz}]$ がエルミート性で，而も特異でなければ，之は前に述べたことから正定値形に對應するテンソルであります．從つてその逆テンソル $[\mathbf{zz}]^{-1}$ が存在し，$[\mathbf{zz}]^{-1}$ もエルミート正定値形に對應しますから，$[\mathbf{zz}]^{-1}$ の固有値 λ^2 の正なる平方根 λ を固有値とし，λ^2 に對する固有ベクトルを固有ベクトルとするテンソルを $\mathfrak{S}$ と致しますと，$\mathfrak{S}$ はエルミート正定値形に對應し，勿論特異ではあり得ないわけであります．この $\mathfrak{S}$ を用ゐますと，

$$
(5.7)\qquad
\begin{aligned}
[\mathbf{uu}] &= \mathfrak{S}\cdot[\mathbf{zz}](\mathfrak{S}^*)', &\qquad (\mathfrak{S}^*)' &= \mathfrak{S}^\dagger = \mathfrak{S}\\
&= \mathfrak{S}\cdot\mathfrak{S}^{-2}\cdot\mathfrak{S}\quad, & \det\mathfrak{S} &\neq 0\\
&= \mathfrak{E}
\end{aligned}
$$

と成り，規準化の目的は達し得ます．この操作を<u>全規準化法</u>と名附けます．$\mathbf{z}$ の成分函數系列から見ますと，この函數列を通常の意味で直交規準化したことに相當しますが，之は Schmidt の直交規準化法とは一般に異ります．

以上のことから線型全獨立なビベクトル系から線型結合で全直交規準化系 $\{\mathbf{v}_1\},\{\mathbf{v}_2\},\cdots\cdots,\{\mathbf{v}_m\}$ が作られます．

$$
(5.8)\qquad \mathbf{u}_1(t) = \mathbf{z}_1(t)\ ,\qquad \mathbf{v}_1(t) = \mathfrak{S}_1\cdot\mathbf{u}_1(t)
$$

として $\mathfrak{S}_1$ を前の様に定めて $[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1]=\mathfrak{E}$ とします．次に

$$
(5.9)\qquad \mathbf{u}_2(t) = \mathbf{z}_2(t) - \mathfrak{W}_{21}\cdot\mathbf{v}_1(t)
$$

として，未定テンソル $\mathfrak{W}_{21}$ を $[\mathbf{u}_2\mathbf{v}_1]=0$ と成る様に定めますと，

$$
(5.10)\qquad \mathfrak{W}_{21} = [\mathbf{z}_2\mathbf{v}_1].
$$

之を (5.9) に入れた上，

$$
\mathbf{v}_2(t) = \mathfrak{S}_2\cdot\mathbf{u}_2(t)\ ,\qquad [\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2] = \mathfrak{E}
$$

と成る様に $\mathfrak{S}_2$ を定めます．以下同様です．この場合 $[\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2]$ が特異だと困りますが，若し特異なら，特異ではあるが零でない $\mathfrak{T}_2$ を適當に選ぶと $\mathfrak{T}_2\cdot\mathbf{u}_2=0$ 即ち

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{T}_2\cdot\mathbf{z}_2 - \mathfrak{T}_2\cdot[\mathbf{z}_2\mathbf{v}_1]\cdot\mathbf{v}_1 &= \mathfrak{T}_2\cdot\mathbf{z}_2 - \mathfrak{T}_2\cdot[\mathbf{z}_2\mathbf{z}_1]\cdot\mathfrak{S}_1\cdot\mathfrak{S}_1\cdot\mathbf{z}_1(t)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

と成り，$\{\mathbf{z}_1\},\{\mathbf{z}_2\}$ は線型全獨立でないことに成り，假定と矛盾します．

§ 6. 相關テンソル

之れから次第に主題に戻ります．今 $\mathbf{g}(t)$ と云ふビベクトルが在り，之れを線型全獨立なビベクトル系 $\mathbf{z}_1(t),\mathbf{z}_2(t),\cdots\cdots,\mathbf{z}_m(t)$ の線型函數で，最小自乗法の意味で近似させることを問題と致します．$\{\mathbf{z}\}$ の代りに全直交化系 $\{\mathbf{u}\}$ 又は全直交規準化系 $\{\mathbf{v}\}$ を用ゐても，話の本筋には變りはありませんから，先づ

$$
(6.1)\qquad \mathbf{g}(t)\sim\mathfrak{G}_1\cdot\mathbf{v}_1(t)+\mathfrak{G}_2\cdot\mathbf{v}_2(t)+\cdots\cdots+\mathfrak{G}_m\cdot\mathbf{v}_m(t)\equiv\mathbf{h}(t),\ [\mathbf{v}_i\mathbf{v}_k]=\delta_{ik}\mathfrak{E}
$$

と置きます．すると $\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_2,\cdots\cdots,\mathfrak{G}_m$ は，線型全獨立の定義と最小自乗法を基にして一意的に確定

することが出來ます．夫にはベクトルの内積はベクトルから作つた二階テンソルを縮約したものに等しいことを利用します.[13]

$$
\begin{aligned}
(6.2)\qquad J &\equiv [(\mathbf{g}-\mathbf{h})\cdot(\mathbf{g}-\mathbf{h})] \qquad \geqq 0\\
&= \mathrm{Sp}\cdot[(\mathbf{g}-\mathbf{h})(\mathbf{g}-\mathbf{h})]\\
&= \mathrm{Sp}\cdot\{[\mathbf{gg}]-\sum\mathfrak{C}_k\cdot[\mathbf{v}_k\mathbf{g}]-\sum[\mathbf{gv}_k]\cdot\mathfrak{C}_k{}^\dagger+\sum\mathfrak{C}_k\cdot\mathfrak{C}_k{}^\dagger\}\\
&= \sum\mathrm{Sp}\cdot(\mathfrak{G}_k-[\mathbf{gv}_k])\cdot(\mathfrak{G}_k-[\mathbf{gv}_k])^\dagger+\mathrm{Sp}\cdot[\mathbf{gg}]-\sum\mathrm{Sp}\cdot[\mathbf{gv}_k]\cdot[\mathbf{gv}_k]^\dagger
\end{aligned}
$$

最後の二項は一定ですから，J の最小は

$$(6.3)\qquad \mathfrak{G}_k=[\mathbf{gv}_k]$$

の時，而もこの時にだけ起り，この時には Bessel の不等式として

$$(6.4)\qquad \mathrm{Sp}\cdot[\mathbf{gg}]\geqq\sum\mathrm{Sp}\cdot[\mathbf{gv}_k]\cdot[\mathbf{gv}_k]^\dagger$$

が得られます．等號は $J=0$ の時，而もこの時に限りますから，之は $\mathbf{g}(t)$ が $\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \cdots\cdots \mathbf{v}_m(t)$ の線型函數として表された場合，而もこの場合に限ります．元へ戻しますと

$$
\begin{aligned}
(6.5)\qquad \mathbf{h}(t) &= \sum[\mathbf{gv}_k]\cdot\mathbf{v}_k\\
&= \sum[\mathbf{gu}_k]\cdot[\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k]^{-1}\cdot\mathbf{u}_k
\end{aligned}
$$

テンソル $[\mathbf{gg}_k]\cdot[\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k]^{-1}$ を $\mathbf{g}(t)$ を $\{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{u}_2\}, \cdots\cdots \{\mathbf{u}_m\}$ で近似させた時の第 k 項の Fourier 係數と見ることが出來ます．以上の導き方では $\mathbf{g}$ とか $\mathbf{u}_k$ とかの平均値が零である必要はありませんが，統計學へ應用する場合には偏差を用ゐますから，統計の方へ用ゐる時は平均値は零であるものと約束します．この場合 $[\mathbf{gu}_k]\cdot[\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k]^{-1}$ を $\mathbf{g}$ を $\mathbf{u}_k$ で近似させた時の回歸テンソルと云ひます．一般の場合には $\mathbf{g}$ と $\mathbf{u}_k$ との結合テンソルと云ひます．

以上の定義から $\mathbf{g}$ を $\mathbf{h}$ で近似させた時の回歸テンソルは

$$(6.6)\qquad \mathfrak{C}_{12}=[\mathbf{gh}]\cdot[\mathbf{hh}]^{-1}$$

逆に $\mathbf{h}$ を $\mathbf{g}$ で近似させた時の回歸テンソルは

$$(6.7)\qquad \mathfrak{C}_{12}=[\mathbf{hg}]\cdot[\mathbf{gg}]^{-1}$$

處が $\mathbf{h}$ として (6.5) を用ゐますと，$\mathfrak{C}_{12}=\mathfrak{C}$ と成り

$$(6.8)\qquad [\mathbf{hg}]=\sum[\mathbf{gv}_k]\cdot[\mathbf{v}_k\mathbf{g}]$$

ですから，

$$
\begin{aligned}
(6.9)\qquad \mathfrak{M}(\mathbf{g}\,;\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots\cdots,\mathbf{u}_m) &\equiv \mathfrak{C}_{12}\cdot\mathfrak{C}_{21}\\
&= [\mathbf{gh}]\cdot[\mathbf{hh}]^{-1}\cdot[\mathbf{hg}]\cdot[\mathbf{gg}]^{-1}\\
&= \sum[\mathbf{gv}_k]\cdot[\mathbf{v}_k\mathbf{g}]\cdot[\mathbf{gg}]^{-1}\\
&= \sum[\mathbf{gu}_k]\cdot[\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k]^{-1}\cdot[\mathbf{u}_k\mathbf{g}]\cdot[\mathbf{gg}]^{-1}
\end{aligned}
$$

之を $\{\mathbf{g}\}$ と $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots\cdots, \mathbf{u}_m\}$ 間の重相關テンソルと名附けます．又

$$(6.10)\qquad \mathfrak{R}(\mathbf{g}\,;\mathbf{u}_k)\equiv[\mathbf{gu}_k]\cdot[\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k]^{-1}\cdot[\mathbf{u}_k\mathbf{g}]\cdot[\mathbf{gg}]^{-1}$$

を $\{\mathbf{g}\}$, $\{\mathbf{u}_k\}$ 間の 相關テンソル と名附けます．名前は同じですが，流體力學で慣用する相關テンソルは我々の云ふ回歸テンソルの特別の場合と考へられるのであります．又，一般に $\Re(\mathbf{g};\mathbf{u}_k) \neq \Re(\mathbf{u}_k;\mathbf{g})$ です．

この形式を用ゐますと，

$$\begin{aligned}(6.11)\qquad \Re(\mathbf{g};\mathbf{h}) &= \mathfrak{M}(\mathbf{g};\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots\cdots,\mathbf{u}_m)\\ &= \sum\Re(\mathbf{g};\mathbf{u}_k)\end{aligned}$$

ですから，$J=0$ の場合即ち $\mathbf{g}=\mathbf{h}$ の場合には

$$(6.12)\qquad \mathfrak{E} = \sum\Re(\mathbf{g};\mathbf{u}_k)$$

となります．之は正に Parseval の式に相當するものであります．[7]

§ 7. 加算性相關係數

(6.12) 式が正に 7° の要請で求めて居る式に對應するものと考へられますから，之からどんな不變量を作るかが問題です．一番簡單なのは，テンソルの行列式を利用する方法又はテンソルの縮約したものを用ゐる方法です．處が行列式を用ゐたのでは，一般に

$$\det(\Re_1+\Re_2)-\det\Re_1-\det\Re_2 \neq 0$$

ですから，縮約する方法即ちテンソルに對應する行列の跡を利用する方法を調べて見ます．[12] Sp. $\mathfrak{E}=n$ ですから

$$(7.1)\qquad r_M(\mathbf{g};\mathbf{u}_k) \equiv \frac{1}{n}\mathrm{Sp}.\Re(\mathbf{g};\mathbf{u}_k)$$

と置きますと，r_M は相關テンソルの固有値の算術平均で r_M は形式的には夫自身で 7° の要請を滿足して居ます．

r_M の性質を知るために，先づ相關テンソルの構造を調べて見ます．分散テンソルの特異でない二つのビベクトルを $\mathbf{z}_1(t)$, $\mathbf{z}_2(t)$ としますと，定義から

$$(7.2)\qquad \Re(\mathbf{z}_1;\mathbf{z}_2) = [\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2]\cdot[\mathbf{z}_2\mathbf{z}_2]^{-1}\cdot[\mathbf{z}_2\mathbf{z}_1]\cdot[\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1]^{-1}.$$

之では複雜で見通しが效かないので，$\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2$ を全規準化して見ます．之を

$$(7.3)\qquad \mathbf{u}_1(t) = \mathfrak{S}_1\cdot\mathbf{z}_1(t)\ ,\qquad \mathbf{u}_2(t) = \mathfrak{S}_2\cdot\mathbf{z}_2(t)$$

としますと，$\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2$ は共にエルミート性でしかも特異でない様に定め得るのですから

$$\begin{aligned}\Re(\mathbf{u}_1;\mathbf{u}_2) &= [\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2]\cdot[\mathbf{u}_2\mathbf{u}_1]\\ (7.4)\qquad &= \mathfrak{S}_1\cdot[\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2]\cdot[\mathbf{z}_2\mathbf{z}_2]^{-1}\cdot[\mathbf{z}_2\mathbf{z}_1]\cdot[\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1]^{-1}\cdot\mathfrak{S}_1^{-1}\\ &= \mathfrak{S}_1\cdot\Re(\mathbf{z}_1;\mathbf{z}_2)\cdot\mathfrak{S}_1^{-1}\end{aligned}$$

即ち $\Re(\mathbf{u}_1;\mathbf{u}_2)$ は $\Re(\mathbf{z}_1;\mathbf{z}_2)$ と等價であり

$$(7.5)\qquad r_M(\mathbf{u}_1;\mathbf{u}_2) = r_M(\mathbf{z}_1;\mathbf{z}_2)\,.$$

從つて $\Re(\mathbf{z}_1;\mathbf{z}_2)$ の代りに $\Re(\mathbf{u}_1;\mathbf{u}_2)$ で調べて良いわけです．(4.9) に依れば，$\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2$ に夫々特異で

ない線型變換を施したものを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ とすると，$r_M(\mathbf{z}_1;\mathbf{z}_2) = r_M(\mathbf{a}_1;\mathbf{a}_2)$ ですから，(7.5) はこの特別な場合と見られます．$[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2]$, $\mathfrak{R}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ を夫々 $\{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{u}_2\}$ 間の回歸テンソル，相關テンソルの<u>規準形</u>と呼びます．

$$\mathfrak{R}(\mathbf{u}_1;\mathbf{u}_2) = [\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2]\cdot[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2]^\dagger \tag{7.6}$$

ですから，規準形の相關テンソルは規準形の回歸テンソルのノルムとなつて居り，エルミート性であるばかりでなく，固有根は正數又は零に限ることがわかります．從つて確かに

$$r_M(\mathbf{z}_1;\mathbf{z}_2) \geqq 0 \tag{7.7}$$

であります．此處で等號の成立するのは，$\mathfrak{R}(\mathbf{u}_1:\mathbf{u}_2)=0$ 即ち $\mathfrak{R}(\mathbf{z}_1;\mathbf{z}_2)=0$ の時而もこの時に限りますから，結局 $r_M(\mathbf{z}_1;\mathbf{z}_2)=0$ は $[\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2]=0$ と等價です．云ひ換へると正規分布をする二つのベクトル系では獨立な場合而もこの場合に限つて $r_M=0$ であります．之で r_M は 6° を滿足することがわかりました．又 (7.5) から直ちに

$$\begin{aligned} r_M(\mathbf{z}_1;\mathbf{z}_2) &= \frac{1}{n}\mathrm{Sp.}[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2]\cdot[\mathbf{u}_2\mathbf{u}_1] \\ &= \frac{1}{n}\mathrm{Sp.}[\mathbf{u}_2\mathbf{u}_1]\cdot[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2] \\ &= r_M(\mathbf{z}_2;\mathbf{z}_1) \end{aligned} \tag{7.8}$$

即ち 3° の要請をも滿足して居ます．殘るのは 4°, 5° だけです．

今第6節に用ゐた $\mathbf{g}$ を全規準化したものを $\mathbf{f}$ とし

$$\mathbf{f} = \mathfrak{F}\cdot\mathbf{g}\,, \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}^\dagger\,, \qquad \det\mathfrak{F} \neq 0 \tag{7.9}$$

この $\mathbf{f}$ を全直交系 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots\cdots, \mathbf{u}_m$ で近似させたとしますと，(6.4) の Bessel の不等式に相當して次の式を得ます．

$$n \geqq \sum\mathrm{Sp.}[\mathbf{f}\mathbf{v}_k]\cdot[\mathbf{v}_k\mathbf{f}] \tag{7.10}$$

この式の右邊を書直しますと

$$\begin{aligned} \sum\mathrm{Sp.}[\mathbf{f}\mathbf{v}_k]\cdot[\mathbf{v}_k\mathbf{f}] &= \sum\mathrm{Sp.}\,\mathfrak{F}\cdot[\mathbf{g}\mathbf{u}_k]\cdot\mathfrak{S}_k{}^\dagger\cdot\mathfrak{S}_k\cdot[\mathbf{u}_k\mathbf{g}]\cdot\mathfrak{F}^\dagger \\ &= \sum\mathrm{Sp.}[\mathbf{g}\mathbf{u}_k]\cdot[\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k]^{-1}\cdot[\mathbf{u}_k\mathbf{g}]\cdot[\mathbf{g}\mathbf{g}]^{-1} \\ &= \sum\mathrm{Sp.}\,\mathfrak{R}(\mathbf{g};\mathbf{u}_k) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad 1 \geqq \sum r_M(\mathbf{g};\mathbf{u}_k)\,. \tag{7.11}$$

處が $r_M \geqq 0$ ですから，この式から r_M そのものが 1 を超え得ないことがわかります．即ち

$$1 \geqq r_M\,. \tag{7.12}$$

之で 4° を滿足することがわかりました

(7.12) で等式の成立する場合には，(7.11) 式の右邊の一つの項が 1 に等しい場合ですから，他の總ての項は零でなければならないわけです．例へば

$$1 = r_M(\mathbf{g};\mathbf{u}_1)\,, \qquad r_M(\mathbf{g};\mathbf{u}_k) = 0 \qquad (k \geqq 2)\,.$$

としませう．元へ戻つて見ると，之は

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{R}(\mathbf{g}\,;\,\mathbf{u}_l)\ ,\qquad \mathfrak{R}(\mathbf{g}\,;\,\mathbf{u}_k) = 0$$

を意味します．左側の式と (6.2) (6.3) の等號の成立する場合へ更に戻つて見ますと，

(7.13) $$\mathbf{g} = [\mathbf{g}\mathbf{u}_l]\cdot[\mathbf{u}_l\,\mathbf{u}_l]^{-1}\cdot\mathbf{u}_l$$

即ち $\mathbf{g}$ が $\mathbf{u}_l$ に正常な一次變換を施した場合，而もこの場合に限ることがわかります．このことは全規準化系 $\mathbf{f}$, $\mathbf{v}_l$ を用ゐて見るともつと明瞭になります．この場合には

(7.14) $$\mathbf{f} = [\mathbf{f}\mathbf{v}_l]\cdot\mathbf{v}_l\ ,\qquad [\mathbf{f}\mathbf{v}_l]\cdot[\mathbf{f}\mathbf{v}_l]^\dagger = \mathfrak{E}$$

ですから，$r_M(\mathbf{f}\,;\,\mathbf{v}_l)=1$ なら，$\mathbf{f}$ は $\mathbf{v}_l$ に $[\mathbf{f}\mathbf{v}_l]$ と云ふウニテール變換を施して得られると云つてもよいと思ひます．

元へ戻りませう．正常な線型變換の場合而もこの場合に限つて $r_M=1$ と成りましたが，一般に線型式

(7.15) $$\mathfrak{G}\cdot\mathbf{g} + \mathfrak{G}_1\cdot\mathbf{v}_1 + \mathfrak{G}_2\cdot\mathbf{v}_2 + \cdots\cdots + \mathfrak{G}_m\cdot\mathbf{v}_m = 0$$

の成立つ場合を考へて見ませう．[8] 之から直ちに

$$\mathfrak{G}\cdot[\mathbf{g}\mathbf{g}] + \sum\mathfrak{G}_k\cdot[\mathbf{v}_k\mathbf{g}] = 0\ ,$$
$$\mathfrak{G}\cdot[\mathbf{g}\mathbf{v}_k] + \sum\mathfrak{G}_l\cdot[\mathbf{v}_l\mathbf{v}_k] = 0\ ,$$

後の式で $[\mathbf{v}_l\mathbf{v}_k]=\delta_{lk}\mathfrak{E}$ を利用して $\mathfrak{G}_l$ を求め前の式に代入しますと

$$\mathfrak{G}\cdot\{[\mathbf{g}\mathbf{g}] - \sum[\mathbf{g}\mathbf{v}_k]\cdot[\mathbf{v}_k\mathbf{g}]\} = 0$$

$[\mathbf{g}\mathbf{g}]$ が特異でないなら

$$\mathfrak{G}\cdot\{\mathfrak{E} - \sum[\mathbf{g}\mathbf{v}_k]\cdot[\mathbf{v}_k\mathbf{g}]\cdot[\mathbf{g}\mathbf{g}]^{-1}\} = 0$$

(7.16) $$\therefore\quad \mathfrak{G}\cdot\{\mathfrak{E} - \mathfrak{M}(\mathbf{g}\,;\,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots\cdots,\mathbf{v}_m)\} = 0\ ,$$

即ち $\mathfrak{G}$ が特異でなければ $\mathfrak{E}=\mathfrak{M}$ ですが，特異だと必ずしも $\mathfrak{E}=\mathfrak{M}$ と云へません．$\mathfrak{G}=0$ は無意味ですから，この場合を除きますと，$\mathfrak{G}$ が特異なら必ず

(7.17) $$\det(\mathfrak{E} - \mathfrak{M}) = 0$$

即ち重相關テンソルは少くとも1つ $\lambda=1$ と云ふ固有根を有して居ります．$\mathfrak{M}\neq\mathfrak{E}$ ならば (7.15) が成立つ以上 $\mathfrak{G}$ は必ず特異でなければならないのであります．このことは，$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots\cdots,\mathbf{v}_m$ が既知で (7.15) 式の陽な形を知つて居ても $\mathbf{g}$ を一意的に確定し得ないことを意味します．確定し得ないと云つても全く不確定と云ふわけではないのでありまして，

(7.18) $$\mathbf{r} = \mathbf{g} - \sum\mathfrak{G}_k\cdot\mathbf{v}_k$$

として $[\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}]$ が最小に成る様に $\mathfrak{G}_k$ を定めると，Fourier 係數のところで申しました通り

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} - \sum[\mathbf{g}\mathbf{v}_k]\cdot\mathbf{v}_k$$

と成ります．之から

$$[\mathrm{rr}] = [\mathrm{gg}] - \sum[\mathrm{g}\mathrm{v}_k]\cdot[\mathrm{v}_k\mathrm{g}]$$

が得られますから，$[\mathbf{gg}]$ が正常なら

$$\begin{aligned}[\mathrm{rr}]\cdot[\mathrm{gg}]^{-1} &= \mathfrak{E} - \sum[\mathrm{g}\mathrm{v}_k]\cdot[\mathrm{v}_k\mathrm{g}]\cdot[\mathrm{gg}]^{-1}\\ &= \mathfrak{E} - \mathfrak{M}(\mathrm{g}\,;\,\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\cdots\cdots\mathrm{v}_m)\end{aligned}$$

従つて $\det(\mathfrak{E}-\mathfrak{M})=0$ なら $\det[\mathbf{gg}]^{-1}\neq 0$ ですから必ず

$$\det[\mathbf{rr}] = 0\,.$$

このことは，$\mathbf{g}$ を $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \cdots\cdots, \mathrm{v}_m$ で近似させた時，最良近似値と $\mathbf{g}$ との差である $\mathbf{r}$ と云ふビベクトルの散布テンゾルに縮退のあることを意味します．言葉を換へると $\mathbf{r}$ は n 次元空間の線型部分空間内に全く収まるのですが，この部分空間の次元数は必ずしも零でない場合であります．この様な場合は同じく線型式が成立するにしても關聯性が低いので線型亞關聯と名附けます．すると r_M は豫測のうまくゆかない線型亞關聯の場合を除いて，5° の要請を滿たして居ることがわかります．

以上で我々が作つた r_M がビベクトルの相關測度として好ましい性質を持つことが知れました．この r_M を加算性相關係數と呼んで居ります．

§ 8. 比 較 と 批 判

Dietzius の r_D は Sverdrup の r_S より應用の狹いものでありますから，r_S と我々の r_M との比較を主として申します．我々の研究に依り，先づ線型關係の意義が擴張され，實用上便利なものに成りました．一つのベクトル量から他の一つのベクトル量を豫報するに當つては回歸テンゾルの形が陽に求めてありますので，圖計算で一方から他を容易に求め得るのであります．この際この豫想法の信頼度は加算性相關係數が絶對規準を有するので容易に判定出來ることになりました．又正規分布の假定を基にしましたので，更に角獨立の意味は r_S の場合より明瞭に成つて居ります．又重相關係數への擴張も全直交規準化系の導入で容易に陽な形で實行出來ました．

此處に注意を要するのは，實は我々の修正した Sverdrup の r_S は r_M の特別な場合に屬することであります．[15] 即ち Sverdrup の考へた線型變換が一定角の廻轉と一定比の伸縮との二つだけでしたが，之は正に複素數の乘算の時現れる操作であります．今我々の理論を一次元のビベクトル即ち複素數に適用しますと，

$$r_M(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2) = \frac{[\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2][\mathbf{z}_2\mathbf{z}_1]}{[\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1][\mathbf{z}_2\mathbf{z}_2]} \tag{8.1}$$

$\mathbf{z}$ の實部と虚部とを夫々 *O.N.C.* 系の成分とする平面ベクトルを $\mathbf{x}$ としますと，

$$r_M(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2) = \frac{[\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2]^2 + [\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2]^2}{[\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_1][\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x}_2]} = r_S^2(\mathbf{x}_1\,;\,\mathbf{x}_2) \tag{8.2}$$

この結果から r_S の解析的性質は鮮明に成り，例へば修正した r_S 自身は加算性を有しないことがわかります．又 Sverdrup の方法で重相關係數を定義し難いのですが，複素數を用ゐて平面ベクトルを表せば，直ぐ出來ることがわかります．併し，之は勿論我々の理論を實數の平面ベクトルに適用したものより應用は狹いものしか得られないのであります．又當然期待される通りこの場合に

は平面ベクトルに對する線型變換の形を，廻轉と伸縮とに限つた上で我々の加算性相關係數を求めると，之が r_S^2 に一致することがわかります.[15]

r_M 自身に對する批判に移りませう. r_M が加算性を有することは，結合の程度を表す量として缺くことの出來ない性質でありますが，その代り一次元實數の場合に Pearson の r_P の自乘に一致することから知れる樣に，r_P と異り符號の正負で一致·不一致を表現することは出來なくなりました. 併し之は本質的な缺點ではなく，實ベクトルの場合には，回歸テンゾルの行列式の符號がこの役を演じて呉れるのであります.[5] 即ち正ならば兩系は同配位，負ならば異配位であることが直ぐ證明出來ます. この回歸テンゾルは r_M の計算途中に現れるものですから，特別に計算する必要はないのであります. も一つ負にならない r_M を相關測度として採用した理由を述べて置きたいと思ひます. 先づ (7.14) 式を見て

$$\mathfrak{P}_{[\mathbf{v}]}\mathbf{f} = [\mathbf{f}\mathbf{v}]\cdot\mathbf{v} \tag{8.3}$$

で定義される<u>全射影演算子</u> $\mathfrak{P}_{[\mathbf{v}]}$ を定義します. 定義から直ちに次の性質がわかります.

$$\mathfrak{P}_{[\mathbf{v}_k]}\mathfrak{P}_{[\mathbf{v}_l]}\mathbf{f} = [\mathbf{f}\mathbf{v}_l]\cdot[\mathbf{v}_l\mathbf{v}_k]\cdot\mathbf{v}_k = \delta_{lk}[\mathbf{f}\mathbf{v}_k]\cdot\mathbf{v}_k = \delta_{lk}\mathfrak{P}_{[\mathbf{v}_k]}\mathbf{f}, \tag{8.4}$$

$$[\mathfrak{P}_{[\mathbf{v}]}\mathbf{f}\mathbf{v}] = [\mathfrak{P}_{[\mathbf{f}]}\mathbf{v}\mathbf{f}]^{\dagger}. \tag{8.5}$$

この射影演算子を用ゐると，$\{\mathbf{v}_1\}, \{\mathbf{v}_2\}, \cdots\cdots, \{\mathbf{v}_m\}$ の線型式のうちに最小自乘法の意味で最もよい $\mathbf{f}$ の近似式は (6.5) から

$$\sum_k \mathfrak{P}_{[\mathbf{v}_k]}\mathbf{f} \tag{8.6}$$

と成ります. 之を次の樣に說明してよいと思はれます. $\{\mathbf{v}_1\}, \{\mathbf{v}_2\}, \cdots\cdots, \{\mathbf{v}_m\}$ の如き全直交規準型の線型式を用ゐて，$\mathbf{f}$ の最も良い推測を行ふには，$\mathbf{f}$ にこの系に相當する全射影演算子を作用させればよい. 之は言葉としはて綺麗ですが具體的には豫め從來の測定値から，回歸テンゾルを計算して置く必要があります. この場合適中確率乃至適中率は，

$$\frac{1}{n}\mathrm{Sp.}[\mathfrak{P}_{[\mathbf{v}_k]}\mathbf{f}\mathbf{f}] = r_M(\mathbf{f};\mathbf{v}_k) \tag{8.7}$$

が完全加算性を有して居ますから，

$$\sum_k r_M(\mathbf{f};\mathbf{v}_k) = \frac{1}{n}\mathrm{Sp.}[\sum_k \mathfrak{P}_{[\mathbf{v}_k]}\mathbf{f}\mathbf{f}] \tag{8.8}$$

と解釋して良いだらうと思はれます. 勿論實際にはこの種の方法又は解釋が成立つ爲には，一種の外挿法を行ふわけですから，問題の過程が恒常性を持つて居ることを假定しなければ成りません. 尙ほこの方法の根本に一般の線型變換と，最小自乘法とを用ゐて居ますから，特定の一次式を用ゐて豫想した場合には，この方法で豫想した場合より近似は良くは成り得ないことがわかります.

殘された大きな問題は，高次のモメントのことは全く考慮して居ないので，$r_M = 0$ が必ずしも素朴な獨立の概念と一致しない點をどう改めるか，又上述の函數關係の議論を統計關係の議論にどう擴張するかと云つた問題だと思ひます. 又目的に依つては他の變換群に對して不變と成る相關測度論も必要と成るかも知れません.

§9. 結　語

以上で未完成な拙い話を終ります．細いことは原著に就いて御覽願ふこととして，此處ではこの種の研究の必要であること，並びに地球物理學者の手で現在迄に開拓されて居るのはこの程度であることを御報告し，合せてこの方面の實用的問題の解決に各隣接域からの御協力を御願ひする積りで述べました．忌憚ない御意見を承ることが出來れば幸ひです．

註　實際の講演では，緒論の部分をも少し詳しく具體的に御話しましたが，纒つた話ではないので機會を見て個々の問題として書いて見たいと思ひます．

文 献 表 (I)：

1) Dietzius R.; Anwendung der Vektorrechnung in der statistischen Meteorologie. Meteorol. Zeitschr., **32** (1915), 433.
2) Dietzius R.; Ausdehnung der Korrelationsmethode und der Methode der kleinsten Quadrate auf Vektoren, Wien. Berichte, Abt. IIa, **125** (1916), 3.
3) Sverdrup H. U.; Ueber Mittelwerte von Vektorpaaren mit Anwendungen auf meteorologische Aufgaben, Meteorol. Zeitschr., **33** (1916), 411.
4) Sverdrup H. U.; Ueber die Korrelation zwischen Vektoren mit Anwendungen auf meteorologische Aufgaben, Meteorol. Zeitschr., **34** (1917), 285.
5) Masuyama M.; Correlation between Tensor Quantities, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **21** (1939), 638.
6) Masuyama M.; Tensor Characteristic of Vector Set and its Application to Geophysics, ibid. **21** (1939), 647.
7) Masuyama M.; On the Meaning of the Symmetric Correlation Coefficient between Vector Sets, ibid. **22** (1940), 579.
8) Masuyama M.; On the Subdependency, ibid. **22** (1940), 855.
9) Masuyama M.; The Variance Tensor of Vector Set and a Nature of the Symmetric Correlation Coefficient, ibid. **22** (1940), 858.
10) Masuyama M.; The Standard Error of the Mean Vector, ibid. **23** (1941), 194.
11) Masuyama M.; The Normal Law of Frequency for Vector Quantities, ibid. **23** (1941), 196.
12) Masuyama M.; On the Characteristic Values of the Correlation Tensor and a Measure of Correlation between Vector Quantities, ibid. **23** (1941), 199.
13) Masuyama M., The Totally Orthonormalised Vector Set and the Normal Form of Correlation Tensor, ibid. **23** (1941), 346.
14) Masuyama M.; The Mean Angle between Two Vector Sets, ibid. **23** (1941), 351.
15) Masuyama M.; Correlation Coefficient between Two Sets of Complex Vectors, ibid. **23** (1941).

附 記： 本論文の理解を深くするため，編輯部は著者に依賴して次の計算例をのせて頂くことにしました．(編輯部)

計 算 例. 地上風と千米上層風との相關程度　第1表は B 地で冬期朝7時に觀測した地上風 (U_0, V_0) と，之と同時に測風氣球で觀測した1粁上空の風 (U, V) とが擧げてあります．氣象學界

の習慣で，この例では方位を表す角 θ は北を規準とし，時計廻りに 10° 單位で表してあり，風速の絕對値 V は通常秒速何米として表してあります．

第 1 表

t	地	上			1000 米 上 層			
	θ_0	V_0	N_0	E_0	θ_1	V_1	N_1	E_1
1	04	10	-7.7	-6.4	28	12	-2.1	11.8
2	02	04	-3.8	-1.4	31	16	-10.0	12.3
3	00	02	-2.0	0.0	35	13	-12.8	2.3
4	00	06	-6.0	0.0	27	09	0.0	9.0
5	02	04	-3.8	-1.4	34	06	-5.6	2.1
6	02	06	-5.6	-2.1	00	06	-6.0	0.0
7	00	04	-4.0	0.0	35	16	-15.8	2.8
平 均 値			-4.7	-1.6			-7.5	5.7

通常觀測で得られるのは θ, V の二量ですが，r_{xy} の計算にはベクトルの直交成分を用ゐる方が一般に便利です．此處では矢張り氣象學界の習慣に從ひ北分 (N) と東分 (E) に分けて計算しませう．計算の順序は次の通りです．

(1°) 先づ各成分の和を求め，之を平均して夫々の平均値を求める．(第 1 表)．

(2°) 次に夫々の成分に就いて偏差――對應する小文字 n_0, e_0, … 等で表はす――を求め，之を第 2 表の如き樣式で書き並べる．

第 2 表

t	n_0	n_0^2	n_0e_0	n_0n_1	n_0e_1	e_0	e_0^2	e_0n_1	e_0e_1	n_1	n_1^2	n_1e_1	e_1	e_1^2
1	-30	900	1440	-1620	-1830	-48	2304	-2592	-2928	54	2916	3294	61	3721
2	9	81	18	-225	594	2	4	-50	132	-25	625	-1650	66	4356
3	27	729	432	-1431	-918	16	256	-848	-544	-53	2809	1802	-34	1156
4	-13	169	-208	-975	-429	16	256	1200	528	75	5625	2475	33	1089
5	9	81	18	171	-324	2	4	38	-72	19	361	-684	-36	1296
6	-9	81	45	-135	513	-5	25	-75	285	15	225	-855	-57	3249
7	7	49	112	-581	-203	16	256	-1328	-464	-83	6889	2407	-29	841
平 均 値		299	265	-685	-371		444	-522	-438		2779	970		2244

(3°) 一般に二次元質ベクトルの場合には，ベクトル $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b}(t)$ の直交成分を夫々 $a_1(t)$, $a_2(t)$; $b_1(t)$, $b_2(t)$ とすると；テンソル $\mathbf{a}(t)\,\mathbf{b}(t)$ に對應する行列は次の形に成ります．

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

從つて t に就いての平均を "‾" で表しますと，相關テンソル $\mathfrak{R}(\mathbf{v}_0; \mathbf{v}_1)$ に對應する行列は

$$\begin{pmatrix} \overline{n_0 n_1} & \overline{n_0 e_1} \\ \overline{e_0 n_1} & \overline{e_0 e_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{n_1^2} & \overline{n_1 e_1} \\ \overline{e_1 n_1} & \overline{e_1^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \overline{n_1 n_0} & \overline{n_1 e_0} \\ \overline{e_1 n_0} & \overline{e_1 e_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{n_0^2} & \overline{n_0 e_0} \\ \overline{e_0 n_0} & \overline{e_0^2} \end{pmatrix}^{-1}$$

と成ります．この式を見ると，一般に k 次元の相關テンゾルを N 回の觀測値から計算するには $N(k+k)^2$ 回の乘算が必要ではなく，同じものがあるので $Nk(2k+1)$ で十分であることがわかります．乘算表や計算器を利用するには第２表の樣に欄を作る方が便利でせう．乘算した結果の表には正負が入り混るので見誤りを生じ易いので，之を防ぐため乘算をする前に一瞥して負號の現れるべき場所へは豫め赤鉛筆でハッチを入れて置くとよいと思ひます．そうすると後で縦に加へる時も，負量を加へることは赤い陰影のついて居る部分だけ加へることですから見易くて好都合です．尚ほ r_M の計算に $n_0^2, n_0e_0 \cdots\cdots$ 等の平均値を用ゐる必要はなく，和そのものでよいのですが，そうすると一般に數値の桁數が多くなり不便なので平均値を用ゐて置きます．求める相關テンゾルに對應する行列は第３表の通りです，

第　３　表

$$\Re(\mathbf{V}_0;\mathbf{V}_1) = \begin{pmatrix} -6.85 & -3.71 \\ -5.22 & -4.38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27.8 & 9.7 \\ 9.7 & 22.4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -6.85 & -5.22 \\ -3.71 & -4.38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.99 & 2.65 \\ 2.65 & 4.4 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1.000}{528.6 \times 6.253} \begin{pmatrix} 6.85 & 3.71 \\ 5.22 & 4.38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22.4 & -9.7 \\ -9.7 & 27.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.85 & 5.22 \\ 3.71 & 4.38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.44 & -2.65 \\ -2.65 & 2.99 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1.000}{3309} \begin{pmatrix} 117.5 & 36.7 \\ 74.4 & 71.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15.4 & -2.5 \\ 4.9 & 3.3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1.000}{3309} \begin{pmatrix} 1989 & * \\ * & 48 \end{pmatrix}$$

$$r_M(\mathbf{V}_0;\mathbf{V}_1) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp.}\,\Re(\mathbf{V}_0;\mathbf{V}_1) = \frac{1989+48}{2\times 3309} = 0.308\,.$$

(4°) 行列の乘算を行ふには，最初の二項と最後の二項とを先づ乘け，得られた二行列を次に乘けます．之は最初の二項，最後の二項は夫々回歸テンゾルに對應する行列ですから，回歸テンゾルを知つて置くと，r_M 大きい場合に一方の組のベクトルから他の組のベクトルを豫測するに役立つからです．此處では r_M だけを求めることにしました．先づ第二項第四項の逆行列の計算から始めます．３次元以上のベクトルの場合には Frazer, Duncan & Collar* の著書にある方法で計算すると便利ですが，２次元ベクトルなら第３表に見る通り，要素の位置の入れ換へと符號の附け換へと割算とで逆行列が得られます．例へば第二項で見る通り行列の (1-1) 要素と (2-2) 要素を交換し，(1-2), (2-1) 兩要素は符號を變へます．その上，元の行列の行列式 (＝528.6) で各要素を割らねばなりませんが，r_M を求めるだけなら，各要素を一々割るのは面倒ですから一番前へ纒めて出して置きます．

(5°) 前半，後半を別々に計算してから得られた二つの行列の乘算を行ひます．この際 r_M を得るだけなら相關テンゾルの各成分を知る必要はなく，之に對應する行列の主對角線上の二つだけ計算すれば十分です．不要な要素は * で示してあります．

(6°) 主對角線に沿ふ要素の算術平均を求め，前に括り出した行列式の値で割れば，求むる r_M が得られるわけです．

この結果の信頼度が實際問題となりますが，この樣な小數例の誤差論は未完成なのでハツキリした誤差の限界を極められないのは殘念です．若し資料數が十分多いならば，r_M の計算は重相關係

數の計算の組合せに引直せせるので，この方から大約の判定は出來ます．

假りに誤差が無いとしませう．この結果から云へることは，地上風と1粁上層風とは相關關係はあるが，一方から他方を線型式を用ゐて豫想してもあまり適中しないことです．適中率がよいと云ふには r_M～0.85 位でないと困りませう．このことは r_M が r_P^2 に相當し，Pearson の相關係數 r_P ～0.9 以上ないと餘り適中率はよくないことからの類推に過ぎませんが，實際，上の計算に現れる回歸テンソルを用ゐ，一方から他方を推測して見ると餘り良くは一致しません．

R. A. Frazer, W. J. Duncan & A. R. Collar: Elementary Matrices. 1938. p. 108.