

分散分析法に於ける随時併合検定の検定力

田坂, 誠
田辺製薬株式会社

<https://doi.org/10.15017/12731>

出版情報 : 統計科学研究. 2 (2), pp. 32-48, 1958-04. 統計科学研究会
バージョン :
権利関係 :



分散分析法に於ける 随時併合検定の検定力

田 坂 誠 (田辺製薬)

1. 序 論

最近 Bancroft [1], Kitagawa [2] によって平均平方の随時併合推定 (*sometimes pool estimation*) の問題が研究された. ここでは分散 σ_1^2 及び σ_2^2 の独立な推定値を u_1^2 及び u_2^2 とし, $n_i u_i^2 / \sigma_i^2$ ($i=1, 2$) 夫々自由度 n_i なる χ^2 分布に従うものと仮定し, $\sigma_2^2 \geq \sigma_1^2$ が既知なる場合が考えられている. F 検定によって u_2^2 / u_1^2 を検定し, 若し有意でなければ σ_2^2 の推定値として

$(n_1 u_1^2 + n_2 u_2^2) / (n_1 + n_2)$ を用い, 有意でなければ u_2^2 を用いる. 以上が随時併合推定の手法であるが, Bancroft はこの推定値の期待値を求め, その偏りを研究し, Kitagawa はこれを拡張して, 随時併合推定値のモーメントを与えた. 斯る併合問題は実験データの不備な場合, 或は, 変量分析の際に交互作用項と誤差項の平均平方の併合を行う場合等に於て屢々生ずるものである. 但し, 後者の場合, 母数模型の変量分析に於ける平均平方の併合の為には, σ_2^2 の推定値ではなく, σ_1^2 の推定値を求める必要がある. 但し, $n_2 u_2^2 / \sigma_2^2$ は非心 χ^2 分布になる. これに就ては終りに補注として簡単に述べる.

上記随時併合推定と共に, 随時併合検定 (*sometimes pool test*) の問題が考えられるが, これに就ては Paul [3] が最初に研究を行った. 彼は変量模型に於ける変量分析の処理平均平方 u_3^2 を上記随時併合推定値により検定する為の検定力を $n_3 = 2$ の場合に就て考察した. ここで $n_3 u_3^2 / \sigma_3^2$ は自由度 n_3 の χ^2 分布に従い, $\sigma_3^2 \geq \sigma_2^2 \geq \sigma_1^2$ である. 尚, 更に最近, Bozivich, Bancroft and Hartley [4] によって n_3 が偶数の場合及び, 漸近的な検定力に対する種々の数値的考察が行われ, 変量模型の場合のみでなく, 混合模型の場合に対する近似的検定力に就ての拡張が行われた. 尚, 変量模型の場合に就ては Tasaka [5] が検定力の理論的結果を求め, 又, Otani [6] が母数模型の場合に就ての検討を行

ったが、これ等は数値計算が行われていなかった。

この論文に於ては、母数、変量、混合模型での主効果或は同次交互作用の或る特殊な随時併合検定を行う場合の検定力を求める。更に、母数模型の変量分析法に於ける随時併合検定の検定力を求める。又、一部の数値計算により、これ等の検定力に就ての考察を行う。

2. 随時併合検定手法

Paull [3], Bozivich etc [4], Tasaka [5] の考えた型は、構造模型が

$$(1) \quad x_{ijk} = \mu + a_i + b_{ij} + z_{ijk} \quad (i=1, \dots, g; j=1, \dots, r; k=1, \dots, s)$$

の場合であり、 a_i は $N(0, \sigma_a^2)$, b_{ij} は $N(0, \sigma_b^2)$, z_{ijk} は $N(0, \sigma_z^2)$ に従って夫々独立に分布する変量模型を考え、対立仮説 $H'_1: \sigma_a^2 > 0$ に対し、仮説 $H_0: \sigma_a^2 = 0$ を検定しようとした。即ち、変量分析表は次表の枠になる：

オ 1 表 変量分析表 (変量模型) $\sigma_3^2 \geq \sigma_2^2 \geq \sigma_1^2$

変動因	自 由 度	平均平方	平方平均の期待値
A 間	$n_3 = g-1$	u_3^2	$\sigma_3^2 = \sigma_z^2 + s\sigma_b^2 + rs\sigma_a^2$
A 内 B 間	$n_2 = g(r-1)$	u_2^2	$\sigma_2^2 = \sigma_z^2 + s\sigma_b^2$
B 内	$n_1 = gr(s-1)$	u_1^2	$\sigma_1^2 = \sigma_z^2$

更に、Bozivich etc. [4] は次の枠な型の混合模型を考えた。

$$(2) \quad x_{tij} = \mu + a_t + b_i + d_{ti} + z_{tij} \quad (t=1, \dots, k; i=1, \dots, n; j=1, \dots, m)$$

ここで、 b_i , d_{ti} , z_{tij} は夫々 $N(0, \sigma_b^2)$, $N(0, \sigma_d^2)$, $N(0, \sigma_z^2)$ に従い、 a_t は母数であり、 $\theta_{(a)} = \sum (a_t - \bar{a})^2 / (k-1)$ とする。この場合、変量分析表はオ 2 表の枠な型になっている：

オ 2 表 変量分析表 (混合模型) $\sigma_3^2 \geq \sigma_2^2 \geq \sigma_1^2$

変動因	自 由 度	平均平方	平均平方の期待値
A 間	$n_3 = k-1$	u_3^2	$\sigma_3^2 = \sigma_z^2 + m\sigma_d^2 + mn\theta_{(a)}$
交互作用	$n_2 = (k-1)(n-1)$	u_2^2	$\sigma_2^2 = \sigma_z^2 + m\sigma_d^2$
誤 差	$n_1 = nk(m-1)$	u_1^2	$\sigma_1^2 = \sigma_z^2$

これ等の変量並びに混合模型に於て対立仮説 $H'_1: \sigma_3^2 > \sigma_2^2$ に対して仮説

$H'_0: \sigma_3^2 = \sigma_2^2$ を検定する為の随時併合検定手法は次の如くなる：若し

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{ u_2^2/u_1^2 \geq F_{n_1}^{n_2}(\alpha_1) \quad \text{and} \quad u_3^2/u_2^2 \geq F_{n_2}^{n_3}(\alpha_2) \} \\ \text{或は} \{ u_2^2/u_1^2 < F_{n_1}^{n_2}(\alpha_1) \quad \text{and} \quad u_3^2/u_2^2 \geq F_{n_2+n_1}^{n_3}(\alpha_3) \} \end{array} \right.$$

の何れかが成立すれば H'_0 を棄却する。但し、 $u^2 = (n_1 u_1^2 + n_2 u_2^2)/(n_1 + n_2)$

又、 $F_{n_i}^{n_j}(\alpha)$ は自由度 n_i, n_j の F 分布の上部 $100\alpha\%$ 点である。

この型の検定力に就ては Paull, Bozivich etc. によってくわしく数値的考察が為されているので、以下に於て、母数模型の場合に就て考える事にする。

$$(4) \quad x_{ijk} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij} + z_{ijk} \quad (i=1, \dots, p; j=1, \dots, q; k=1, \dots, r)$$

なる構造模型を考え、 $a_i, b_j, (ab)_{ij}$ は凡て母数 z_{ijk} は $N(0, \sigma_z^2)$ に従うものとする。この場合の変量分析表は次表の如くなる：

表 3 変量分析表 (母数模型) $\sigma_3^2 \geq \sigma_1^2, \sigma_2^2 \geq \sigma_1^2$			
変動因	自 由 度	平均平方	平均平方の期待値
A 間	$n_3 = p-1$	u_3^2	$\sigma_3^2 = \sigma_z^2 + q r \sigma_a^2$
交互作用	$n_2 = (p-1)(q-1)$	u_2^2	$\sigma_2^2 = \sigma_z^2 + r \sigma_{a\beta}^2$
誤 差	$n_1 = pq(r-1)$	u_1^2	$\sigma_1^2 = \sigma_z^2$

表中に於て $\sigma_a^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 / (p-1)$, $\sigma_{a\beta}^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (\alpha\beta)_{ij}^2 / (p-1)(q-1)$, $\alpha_i = a_i - \bar{a}$, $(\alpha, \beta)_{ij} = (ab)_{ij} - (\bar{a}\bar{b})$ である。即ち、 u_1^2 は $\chi_1^2 \sigma_1^2 / n_1$ に従つて分析し、 u_2^2, u_3^2 は夫々 $\chi_i'^2 \sigma_i^2 / n_i$ ($i=2, 3$) に従つて分布する。ここで χ_1^2 は自由度 n_1 の中心 χ^2 統計量、 $\chi_i'^2$ は自由度 n_i で、偏心率

$$\lambda_i = \frac{n_i}{2} \left(\frac{\sigma_i^2}{\sigma_1^2} - 1 \right) = \frac{n_i}{2} (\theta_{i1} - 1)$$

なる非心 χ^2 統計量である。但し、 $\theta_{i1} = \sigma_i^2 / \sigma_1^2$ ($i=2, 3$)

この場合、対立仮説 $H_1: \sigma_3^2 > \sigma_1^2$ に対し、仮説 $H_0: \sigma_3^2 = \sigma_1^2$ を検定する為の随時併合検定手法は次の如くなる：若し

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{ u_2^2/u_1^2 \geq F_{n_1}^{n_2}(\alpha_1) \quad \text{and} \quad u_3^2/u_1^2 \geq F_{n_1}^{n_3}(\alpha_2) \} \\ \text{或は} \{ u_2^2/u_1^2 < F_{n_1}^{n_2}(\alpha_1) \quad \text{and} \quad u_3^2/u_1^2 \geq F_{n_1+n_2}^{n_3}(\alpha_3) \} \end{array} \right.$$

の何れかが成立すれば仮説 H_0 を棄却する。

以上が Otani [6] の研究した母数模型の変量分析の場合であるが、この随時併合検定法の検定力に就てはオ 4 節で述べる。

最後に、特殊な随時併合検定法を考える。例えば要因が A と B なる二元配置法に於て、変量模型の変量分析を行う時、 A 及び B の効果は交互作用によって検定される。又、多元構成の要因配置計画に於ては交互作用の効果はそれより一次高次の交互作用によって検定される。この時前者では主効果の一部、後者では検定さるべき交互作用の一部が實際上余り意味のない事があり、これを誤差項（上例では一次高次の交互作用）と併合する事が考えられる。一例として次の様な変量模型を考える。

$$(6) \quad x_{ijk} = \mu + a_i + b_j + c_{ij} + z_{ijk}, \quad (i=1, \dots, p; j=1, \dots, q; k=1, \dots, r)$$

ここで $a_i, b_j, c_{ij}, z_{ijk}$ は夫々 $N(0, \sigma_a^2), N(0, \sigma_b^2), N(0, \sigma_c^2)$ 及び $N(0, \sigma_z^2)$ に従って分布するものと仮定する。この場合の変量分析表は次表の如くなる：

オ 4 表 変量分析表（変量模型） $\sigma_3^2 \geq \sigma_1^2, \sigma_2^2 \geq \sigma_1^2$

変 動 因	自 由 度	平 方 平 均	平 均 平 方 の 期 待 値
A 間	$n_3 = p-1$	u_3^2	$\sigma_3^2 = \sigma_z^2 + r\sigma_c^2 + q r \sigma_a^2$
B 間	$n_2 = q-1$	u_2^2	$\sigma_2^2 = \sigma_z^2 + r\sigma_c^2 + p r \sigma_b^2$
交 互 作 用	$n_1 = (p-1)(q-1)$	u_1^2	$\sigma_1^2 = \sigma_z^2 + r\sigma_c^2$
誤 差	$n_0 = pq(r-1)$	u_0^2	$\sigma_0^2 = \sigma_z^2$

我々は対立仮説 $H_1: \sigma_3^2 > \sigma_1^2$ に対して仮説 $H_0: \sigma_3^2 = \sigma_1^2$ を検定しようとするのであって、その為の随時併合検定手法は先の母数模型の (5) 式の場合と全く同称であり、検定力 $\alpha_s(\theta_{31}, \theta_{21})$ は

$$(7) \quad \alpha_s(\theta_{31}, \theta_{21}) = \alpha'_s(\theta_{31}, \theta_{21}) + \alpha''_s(\theta_{31}, \theta_{21})$$

$$\text{ここで} \quad \alpha'_s(\theta_{31}, \theta_{21}) = P_r \{ u_2^2 / u_1^2 \geq F_{n_1}^{n_2}(\alpha_1) \text{ and } u_3^2 / u_1^2 \geq F_{n_1}^{n_3}(\alpha_2) \}$$

$$\alpha''_s(\theta_{31}, \theta_{21}) = P_r \{ u_2^2 / u_1^2 < F_{n_1}^{n_2}(\alpha_1) \text{ and } u_3^2 / u_1^2 \geq F_{n_1}^{n_3}(\alpha_3) \}$$

によって与えられる。

この様な型の検定は余り一般的ではないかも知れないが、母数模型の場合と非常に密接な関係があり、母数模型での随時併合検定の検定力の近似にも利用出来る。従って次節に於てこの型の検定力を求める事にする。

3. 検定力の誘導

u_1^2 , u_2^2 及び n_3^2 の同時確率密度関数は

$$\prod_{i=1}^3 \left[\Gamma\left(\frac{n_i}{2}\right) \right]^{-1} \left(\frac{n_i}{2\sigma^2} \right)^{n_i/2} u_i^{n_i-2} e^{-n_i u_i^2 / 2\sigma^2}$$

によって与えられる。今

$$v_1 = n_2 u_2^2 / n_1 u_1^2, \quad v_2 = n_3 u_3^2 / n_1 u_1^2, \quad d = n_1 u_1^2$$

と置き, d に就て積分すれば, v_1 と v_2 の同時確率密度関数は

$$(8) \quad p(v_1, v_2; \theta_{31}, \theta_{21}) = \frac{C}{\theta_{21}^{\frac{1}{2}n_2} \theta_{31}^{\frac{1}{2}n_3}} \cdot \frac{v_1^{\frac{1}{2}n_2-1} v_2^{\frac{1}{2}n_3-1}}{\left(1 + \frac{v_1}{\theta_{21}} + \frac{v_2}{\theta_{31}}\right)^{\frac{1}{2}(n_1+n_2+n_3)}}$$

となる。ここで $C = 1/B(\frac{1}{2}n_1, \frac{1}{2}n_2) \cdot B(\frac{1}{2}(n_1+n_2), \frac{1}{2}n_3)$ 。

対立仮説 $H_1: \theta_{31} > 1$ に対して仮説 $H_0: \theta_{31} = 1$ を検定する為の検定力 (7) は次の如くに与えられる。

$$(9) \quad \begin{aligned} \alpha'_s(\theta_{31}, \theta_{21}) &= \int_{v_{10}}^{\infty} \int_{v_{20}}^{\infty} p(v_1, v_2; \theta_{31}, \theta_{21}) dv_2 dv_1 \\ \alpha_s^2(\theta_{31}, \theta_{21}) &= \int_0^{v_{10}} \int_{\omega}^{\infty} p(v_1, v_2; \theta_{31}, \theta_{21}) dv_2 dv_1 \end{aligned}$$

ここで

$$v_{10} = n_2 F_{n_1}^{n_2}(\alpha_1), \quad v_{20} = n_3 F_{n_1}^{n_3}(\alpha_2)/n_1,$$

$$v_{30} = n_3 F_{n_1+n_2}^{n_3}(\alpha_3)/(n_1+n_2), \quad \omega = v_{30}(1+v_1).$$

この (9) 式の積分を行う為に, 以下に於ては n_3 が偶数の場合に就て計算する。先ず

$$X = \frac{v_1}{\theta_{21}}, \quad Y = \left(1 + \frac{v_1}{\theta_{21}}\right) / \left(1 + \frac{v_1}{\theta_{21}} + \frac{v_2}{\theta_{31}}\right)$$

なる変換を行えば

$$\begin{aligned} \alpha_s^i(\theta_{31}, \theta_{21}) &= C \iint_{D_i} X^{\frac{1}{2}n_2-1} (1+X)^{-\frac{1}{2}(n_1+n_2)} Y^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)-1} (1-Y)^{\frac{1}{2}n_3-1} dY dX \\ &= C \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}n_3-1} (-1)^r \binom{\frac{1}{2}n_3-1}{r} \iint_{D_i} X^{\frac{1}{2}n_2-1} (1+X)^{-\frac{1}{2}(n_1+n_2)} Y^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)+r-1} dY dX \end{aligned}$$

となる。ここで積分域 D_i は

$$D_1 : \frac{v_{10}}{\theta_{21}} \leq X < \infty, \quad 0 \leq Y \leq (1+X)/(1+X + \frac{v_{20}}{\theta_{31}})$$

$$D_2 : 0 \leq X \leq \frac{v_{10}}{\theta_{21}}, \quad 0 \leq Y \leq (1+X)/[1+X + \frac{v_{30}}{\theta_{31}}(1+\theta_{21}X)]$$

次に $\alpha_s^1(\theta_{31}, \theta_{21})$ に於て

$$\xi = X/(\theta_{31} + v_{20} + \theta_{31}X)$$

$\alpha_s^2(\theta_{31}, \theta_{21})$ に於て

$$\eta = (\theta_{31} + \theta_{21}v_{30})X/[\theta_{31} + v_{30} + (\theta_{31} + \theta_{21}v_{30})X]$$

なる変換を行えば

$$(10) \quad \alpha_s^1(\theta_{31}, \theta_{21}) = C \sum_{r=0}^{f_3-1} (-1)^r \binom{f_3-1}{r} (f_1 + f_2 + r)^{-1} \\ \cdot \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \frac{B_x(f_1+r-s, f_2+s)}{(1 + \frac{v_{20}}{\theta_{31}})^{f_1+r-s}}$$

$$(11) \quad \alpha_s^2(\theta_{31}, \theta_{21}) = C \sum_{r=0}^{f_3-1} (-1)^r \binom{f_3-1}{r} (f_1 + f_2 + r)^{-1} \\ \cdot \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \frac{B_y(f_2+s, f_1+r-s)}{(1 + \frac{\theta_{21}v_{30}}{\theta_{31}})^{f_2+s} (1 + \frac{v_{30}}{\theta_{31}})^{f_1+r-s}}$$

ここで $f_i = n_i/2$ ($i=1, 2, 3$)

$$C = 1/B(f_1, f_2) B(f_1+f_2, f_3)$$

$$x = 1/(1+Z), \quad Z = \frac{v_{10}}{\theta_{21}} / (1 + \frac{v_{20}}{\theta_{31}})$$

$$y = Z'/(1+Z'), \quad Z' = \frac{v_{10}}{\theta_{21}} (1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{31}} v_{30}) / (1 + \frac{v_{30}}{\theta_{31}})$$

$$B_x(m, n) = \int_0^x t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt.$$

これが(9)式の結果であるが, $\theta_{31}=1$ なる特別な場合, $\alpha_s(1, \theta_{21})$ は仮説 H_0 が真なる時これを棄却する確率, 即ちオ一種の過誤を犯す確率(以下に於てはT. I. E.と略)に外ならない.

4. 母数模型の場合の検定力

オ2節オ3表に示した柳な母数模型の変量分析に於ける随時併合検定法はOtani [6] によって考えられた. この場合, 対立仮説 $H_1(\lambda_2): \lambda_2 > 0$ に対して, 仮説 $H_0(\lambda_2): \lambda_2 = 0$ を検定するものであるが, Otani はその場合の随時併合

検定の検定力 $\alpha_s(\lambda_2; \lambda_1)$ を次の如く与えた.

$$(12) \quad \alpha_s(\lambda_2, \lambda_1) = \int_{v_{10}}^{\infty} \int_{v_{20}}^{\infty} g(v_1, v_2; \lambda_1, \lambda_2) dv_2 dv_1 \\ + \int_0^{v_{10}} \int_{\omega}^{\infty} g(v_1, v_2; \lambda_1, \lambda_2) dv_2 dv_1$$

ここで

$$g(v_1, v_2; \lambda_1, \lambda_2) \\ = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{\ell} \lambda_2^m \Gamma(\frac{1}{2}(n_1 + n_2 + n_3) + \ell + m)}{\Gamma(\ell+1) \Gamma(m+1) \Gamma(\frac{n_1}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2} + \ell) \Gamma(\frac{n_3}{2} + m)} \\ \cdot \frac{v_1^{\frac{1}{2} n_2 + \ell - 1} v_2^{\frac{1}{2} n_3 + m - 1}}{(1 + v_1 + v_2)^{\frac{1}{2}(n_1 + n_2 + n_3) + \ell + m}}$$

又, v_{10} , v_{20} , ω はオ3節(9)式と同様である. ここで前節(10), (11)式を利用すれば

$$(13) \quad \alpha_s(\lambda_2, \lambda_1) \\ = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{\ell} \lambda_2^m \Gamma(f_1 + f_2 + f_3 + \ell + m)}{\Gamma(\ell+1) \Gamma(m+1) \Gamma(f_1) \Gamma(f_2 + \ell) \Gamma(f_3 + m)} \\ \cdot \sum_{r=0}^{f_3+m-1} (-1)^r \binom{f_3+m-1}{r} (f_1 + f_2 + \ell + r)^{-1} \\ \cdot \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \left[\frac{B_x(f_1+r-s, f_2+\ell+s)}{(1+v_{20})^{f_1+r-s}} + \frac{B_y(f_2+\ell+s, f_1+r-s)}{(1+v_{30})^{f_1+f_2+\ell+r}} \right]$$

となる. ここで n_3 は偶数, $f_i = n_i/2$, 又

$$x' = (1 + v_{20}) / (1 + v_{10} + v_{20}), \quad y' = v_{10} / (1 + v_{10})$$

である.

$\lambda_2 = 0$ (i.e. $\theta_{31} = 1$) なる時, $\alpha_s(0, \lambda_1)$ は仮説 $H_0(\lambda_2)$ が真なる時これを棄却する確率即ち, T.I.E. に外ならない.

5. 検定力の近似

Bozivich, Bancroft and Hartley [4] は Patnaik の近似を用いる事によって混合模型に対する随時併合検定の検定力が, 変量模型のそれに帰せられる事を示した. 同様の考え方より, 母数模型の場合を, 変量模型の場合に帰納する事が可能である. オ4節の(13)式は非常に複雑になるので, 簡単な近似方式を考え

る事は非常に便利である。

オ2節オ3表で示した型の母数模型の場合を考える。ここでの $\chi_i'^2 (i=2,3)$ を $C_i \chi_i^2$ に変えればよい。 $\chi_i^2 (i=2,3)$ は天々自由度 ν_i なる中心 χ^2 統計量で

$$\nu_i = n_i + \frac{4\lambda_i^2}{n_i + 4\lambda_i}$$

$$C_i = 1 + \frac{2\lambda_i}{n_i + 2\lambda_i}$$

である。Patnaik のこの近似を利用するのは、非心 χ^2 統計量を中心 χ^2 統計量に帰する事であるから、これにより、オ2節オ4表で示した型の変量模型の場合の手法及びオ3節の結果がそのまま使用出来る。この時、対応する母数は次表の如くなる：

オ5表 (オ3表とオ4表での) 対応する母数

母数模型で定めた母数	変量模型に変形した母数
n_1	$n'_1 = n_1$
n_2	$n'_2 = \nu_2 = n_2 + \frac{4\lambda_2^2}{n_2 + 4\lambda_2}$
n_3	$n'_3 = \nu_3 = n_3 + \frac{4\lambda_3^2}{n_3 + 4\lambda_3}$
α_1	$\alpha'_1 : F_{n_1}^{n_2}(\alpha_1) = F_{n_1}^{\nu_2}(\alpha'_1)$ の根
α_2	$\alpha'_2 : F_{n_1}^{n_3}(\alpha_2) = F_{n_1}^{\nu_3}(\alpha'_2)$ の根
α_3	$\alpha'_3 : F_{n_1+n_2}^{n_3}(\alpha_3) = F_{n_1+\nu_2}^{\nu_3}(\alpha'_3)$ の根
$\theta_{21} = \sigma_2^2 / \sigma_1^2$	$\theta'_{21} = (2\lambda_2 + n_2) / n_2$
$\theta_{31} = \sigma_3^2 / \sigma_1^2$	$\theta'_{31} = (2\lambda_3 + n_3) / n_3$

(この表でダッシュを附けたのは混同を避ける為で実際にはこれを除きオ3, 4表の記号と同一と考えればよい)。尚オ2節(6)式で考えた変量模型が混合模型となった場合にも同様にPatnaikの近似を用い、検定力を求め得る。この場合には $\lambda_2 = 0$ とすれば良い事になる。

上記母数模型の随時併合検定に於てT.I.E.を求める為には $\lambda_3 = 0$ とおけばよい。即ち $\theta_{31} = 1$ とすればよい。

オ3表及びオ4表では $\sigma_3^2 \geq \sigma_1^2$, $\sigma_2^2 \geq \sigma_1^2$ が既知であるとの仮定が置かれたが、特に $\sigma_3^2 \geq \sigma_2^2$ が判明している場合、即ち、 $\sigma_3^2 \geq \sigma_2^2 \geq \sigma_1^2$ なる仮定を置けば、 $\theta_{31} = 1$ の時、常に $\theta_{21} = 1$ となり、T.I.E.は θ_{21} に関係しない。これは(6)式が混合模型である場合とも一致する。

次節に於ては各種の T.I.E. を考えるが、便宜上

$$\text{仮定 } A_1 : \sigma_3^2 \geq \sigma_1^2, \quad \sigma_2^2 \geq \sigma_1^2$$

$$\text{仮定 } A_2 : \sigma_3^2 \geq \sigma_2^2 \geq \sigma_1^2$$

なる二つの場合を考える事にする。

6. オ ー 種 の 過 誤

オ 2 節 (5) で示した型の随時併合検定によるオ一種の過誤は $\theta_{31}=1$ なる場合、即ち、仮説 $H_0: \theta_{31}=1$ が真なる時これを棄却する事であり、その確率 T.I.E. は $\alpha_s(1, \theta_{21})$ によって与えられる。以下に於てこれを求めるが、別に、無併合検定 (*never pool test*) 及び常時併合検定 (*always pool test*) の T.I.E. を夫々求める事にする。

(i) 随時併合検定

オ 3 節 (10) (11) 式に於て $\theta_{31}=1$ と置けば T.I.E. $\alpha_s(1, \theta_{21})$ が求まるが、特に仮定 A_2 の下では F 積分と不完全ベータ函数との間のよく知られた関係を利用する事により、その T.I.E. $\alpha_s = \alpha_s^1 + \alpha_s^2$ を簡単な型に改める事が出来る。この関係は

$$\alpha_1 = I y''(f_1, f_2)$$

$$\alpha_2 = I x'''(f_1, f_2)$$

$$\alpha_3 = I y'''(f_1+f_2, f_3)$$

によって表わされる。但し

$$I_x(m, n) = B_x(m, n) / B(m, n)$$

$$y'' = 1 / (1 + v_{10})$$

$$x''' = 1 / (1 + v_{20})$$

$$y''' = 1 / (1 + v_{30})$$

である。 α_s^1 に就ては (9) 式の $\alpha_s^1(\theta_{31}, \theta_{21})$ に於て $\theta_{31} = \theta_{21} = 1$ とおき、部分積分法により次の漸化式が得られる。

$$(14) \quad \alpha_s^1(f_3) = \alpha_s^1(f_3-1) + \frac{v_{20}^{f_3-1}}{(1+v_{20})^{f_1+f_3-1}} \cdot \frac{I x''(f_1+f_3-1, f_2)}{(f_1+f_3-1) B(f_1, f_3)}$$

$$\text{但し, } x'' = (1 + v_{20}) / (1 + v_{10} + v_{20}).$$

$f_3 = 1$ なる時は

$$\alpha_s^1(1) = I x''(f_1, f_2) / (1 + v_{20})^{f_1} = \alpha_2 I x''(f_1, f_2)$$

となる。次に (9) 式の $\alpha_s^2(\theta_{31}, \theta_{21})$ に於て $\theta_{31} = \theta_{21} = 1$ とおき

$$\xi = 1/(1+u_1), \quad \eta = (1+u_1)/(1+u_1+u_2)$$

なる変換を行えば

$$(15) \quad \alpha_s^2 = (1 - \alpha_1) \alpha_3$$

が得られる。

(ii) 無併合検定

これは通常の F 検定であり、予備検定を必要としない。即ち、これは $\alpha_1=1$ 従って $u_{10}=0$ の時に相当し、比 u_2^2/u_1^2 が常に有意となる場合で、(5) 式の上部のみの場合である。T.I.E. α_n は (9) 式の $\alpha_s^1(\theta_{31}, \theta_{21})$ に於て $\theta_{31}=1, u_{10}=0$ と置いたもので

$$\alpha_n = \int_0^\infty \int_{u_{20}}^\infty p(u_1, u_2; 1, \theta_{21}) du_2 du_1$$

によって与えられる。今、ここで

$$\xi = \frac{u_1}{\theta_{21}} \left/ \left(1 + \frac{u_1}{\theta_{21}} + u_2 \right) \right., \quad \eta = u_2 / (1+u_2)$$

なる変換を行えば

$$(16) \quad \alpha_n = \alpha_2$$

なる当然の結果が得られる。これは仮定 A_1, A_2 の如何に不拘、 θ_{21} には無関係なる事が分る。

(iii) 常時併合検定

有意水準 $\alpha_1=0$ なる時、即ち、 $u_{10}=\infty$ なる時には、比 u_2^2/u_1^2 は常に有意でない故に随時併合法に従えば常に u_2^2 と u_1^2 が併合され、(5) 式の下部のみの場合となる。これは常時併合検定法と云われ、その T.I.E. $\alpha_a(\theta_{21})$ は (11) 式に於て $\theta_{31}=1, u_{10}=\infty$ と置いたものである。但し、仮定 A_2 の下では、即ち、 $\theta_{21}=1$ の時には、T.I.E. α_a は (15) 式に於て $\alpha_1=0$ となる故

$$(17) \quad \alpha_a = \alpha_3$$

である。

7. 考 察

以上述べて来た様に、変量分析法に於ける随時併合検定の検定力は構造模型が、

母数型, 変量型, 混合型の何れになるかにより, 又, 検定法の差異により異って来る上に, 自由度 n_1, n_2, n_3 , 有意水準 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 分散比 θ_{21} 及び θ_{31} 又は θ_{32} の函数となっているので, 非常に複雑である. 変量模型の場合に就ては Paull [3], Bozivich, Bancroft and Hartley [4] により充分数値的考察が行われているが, ここでは (5) の型の検定を行う場合に就て考察する.

仮定 A_2 の下, 或は仮定 A_1 で $\theta_{21}=1$ の下での随時併合検定に於て自由度 n_1, n_2, n_3 , 有意水準 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を変えに時の T. I. E. の変動の例がオ 5 ~ 9 表に与えられる.

オ 5 ~ 9 表 T. I. E. ($\theta_{21}=1$)

オ 5 表 $f_3=1, \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=.05$

$f_1 \backslash f_2$	1	3	6
2	.0634	.0672	.0689
6	.0544	.0564	.0579
10	.0525	.0538	.0548
20	.0512	.0519	.0524

オ 6 表 $f_3=2, \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=.05$

$f_1 \backslash f_2$	1	3	6
2	.0735	.0798	.0826
6	.0601	.0640	.0667
10	.0568	.0593	.0612
20	.0544	.0562	.0568

オ 7 表 $f_3=1, \alpha_1=.01, \alpha_2=\alpha_3=.05$

$f_1 \backslash f_2$	1	3	6
2	.0550	.0559	.0563
6	.0516	.0518	.0526
10	.0509	.0513	.0515
20	.0504	.0506	.0507

オ 8 表 $f_3=1, \alpha_1=.05, \alpha_2=\alpha_3=.01$

$f_1 \backslash f_2$	1	3	6
2	.0150	.0167	.0173
6	.0116	.0125	.0130
10	.0109	.0114	.0118
20	.0104	.0106	.0108

オ 9 表 $f_3=1, \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=.01$

$f_1 \backslash f_2$	1	3	6
2	.0127	.0135	.0138
6	.0107	.0110	.0113
10	.0103	.0105	.0107
20	.0101	.0102	.0103

これ等のオ 5 ~ 9 表は (6) 式の変量模型で $\theta_{21}=1$ の場合であり, 母数又は混合模型ではオ 5 節の如く Patnaik の近似を行わねばならない. 従つてこれ等の場合には有意水準が幾分小さくなるものと考えられる. 即ち, 混合模型では α_i は

変わらないが, d_2, d_3 は小となり, 母数模型では n_2 が余り小でないところでは (大約 $n_2 > 2$) d_1, d_2, d_3 共に小となるものと考えられる.

各表からは次の様な傾向が認められる.

- i) n_1 が増加するに従って T.I.E. は減少し, n_2, n_3 が増加すると共に T.I.E. は増加する.
- ii) $d_2 = d_3 = .05$ の時は d_1 の小なる方が T.I.E. の変化は少い.
 $d_2 = d_3 = .01$ の時も同様である. 但し, d_2, d_3 が小なる方が, この関係をよく成立させる.

これより, $\theta_{21} = 1$ の場合のみを考えれば, T.I.E. に就ては d_1 を d_2, d_3 に等しいか, それ以下にするのが良いのではないかと思われる.

次に, $d_2 = d_3 = .05$ の時に, d_1 を .01 及び .05 に変えた為の検定力の変化が無併合検定の場合と比較して才 6 ~ 7 図に与えられる.

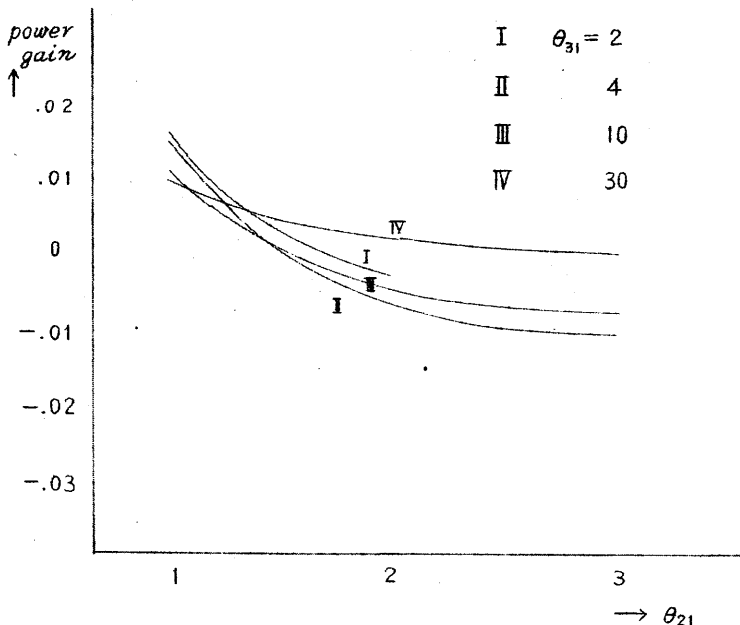
これ等の図表より

- iii) $d_1 = .01$ より $d_1 = .05$ を用いた方が随時併合検定の検定力は無併合検定のそれに比して増加度が大となり, 然もその変化の度合が少い.

尙 $\theta_{21} = 1$ の近傍に於てはこの図表の例では無併合検定の場合より, 随時検

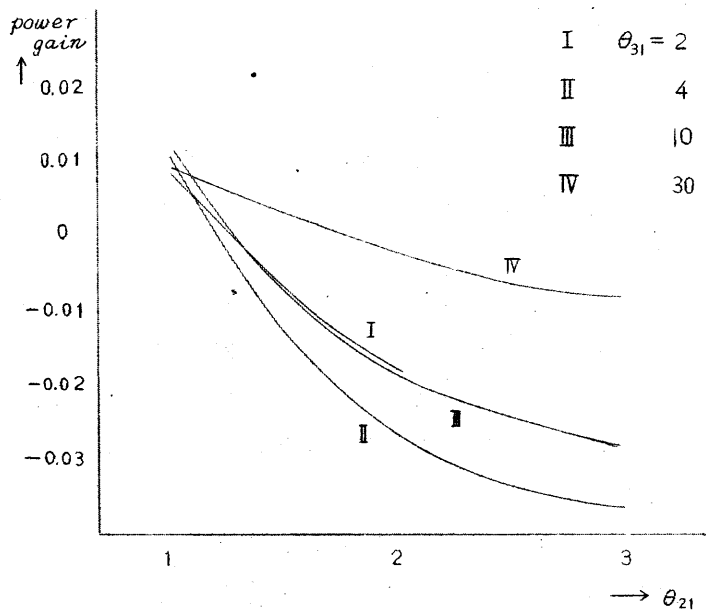
才 6 図 随時併合検定の無併合検定に対する検定力の増加

$$f_1 = 9, \quad f_2 = 2, \quad f_3 = 1, \quad d_1 = d_2 = d_3 = .05$$



オ 7 図 随時併合検定の無併合検定に対する検定力の増加

$$f_1 = 9, f_2 = 2, f_3 = 1, \quad d_1 = .01, \quad d_2 = d_3 = .05$$

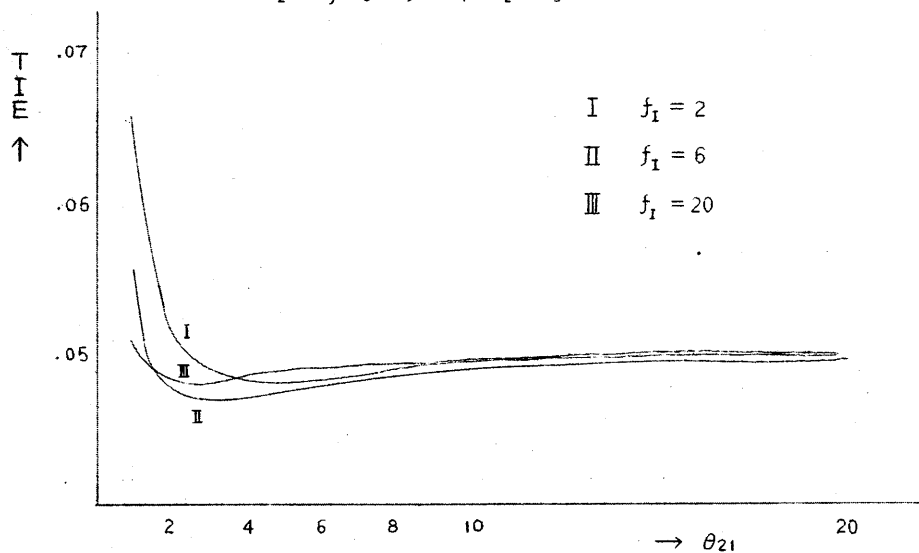


定の方が検定力が大となっているが、 θ_{21} が大なるに従ってこの関係は逆転している。

1 例だけしかないので全体の傾向はつかめないが、この例だけで考えれば、上

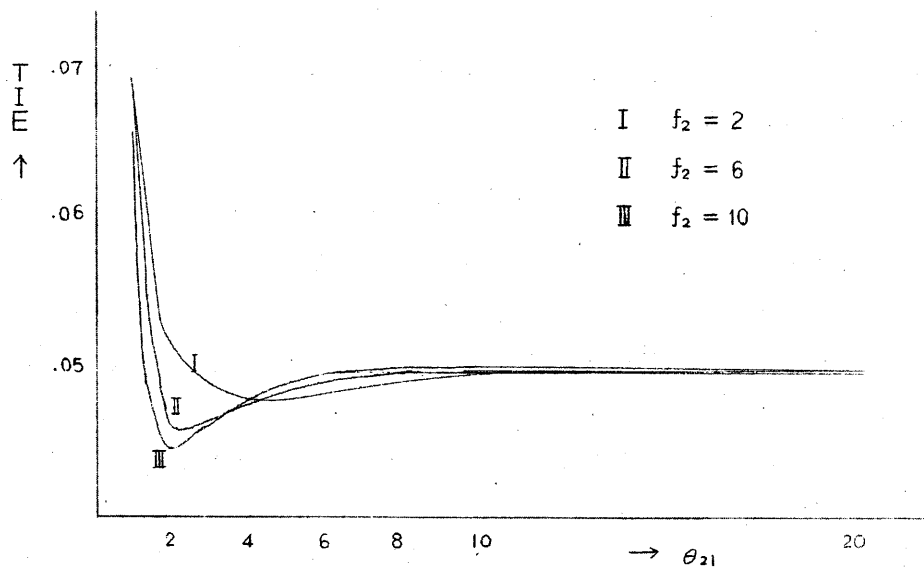
オ 3 図 T. I. E. に対する f_1 の効果

$$f_2 = 2, f_3 = 1, \quad d_1 = d_2 = d_3 = .05$$



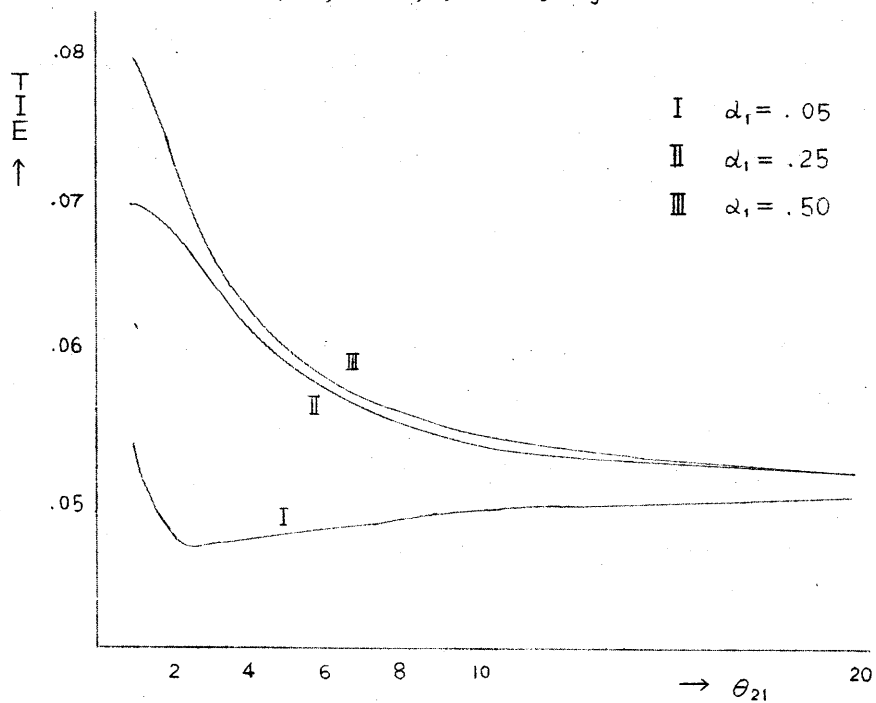
オ4図 T. I. E. に対する f_2 の効果

$$f_1 = 2, f_3 = 1, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = .05$$



オ5図 T. I. E. に対する α_1 の効果

$$f_1 = 9, f_2 = 2, f_3 = 1 \quad \alpha_2 = \alpha_3 = .05$$



記 iii) の結果より, α_1 を大にした方が良い様に出て居り, $\theta_{21}=1$ での T.I.E. とは逆の結果を示している.

次に仮定 A_1 の下での自由度 f_1, f_2 及び予備検定の有意水準 α_1 の変化による T.I.E. の変動をオ 3~5 図に示す. この場合には T.I.E. は θ_{21} の函数であるが, (10) (11) 式に於て $\theta_{31}=1$ とおいた結果より

$$\lim_{\theta_{21} \rightarrow \infty} \alpha_s(1, \theta_{21}) = \alpha_2$$

なる関係のある事が判る.

このオ 3, 4 図に於て $\theta_{21}=1$ のところでは当然 i) の結果と一致する. 特に重要な事はピークが凡て下向きにある事で, 変量模型で検定法 (3) の場合に対する Paull [3], Bozivich etc. [4] が研究した結果では, この逆の結果を示していた. 従って, この型の随時併合検定では T.I.E. の最大値が $\theta_{21}=1$ の時に取られるのではないかと考えられる.

オ 5 図より予備検定の有意水準 α_1 が増加するに従って T.I.E. が増加する事が分る. これも Paull, Bozivich etc. の結果と逆の傾向を示している.

以上の結果を要約すれば, 検定法 (5) の場合には, 予備検定の有意水準 α_1 を大にすれば T.I.E. は増加する. 又一例ではあるが, この時無併合検定に対して検定力の増加度が大となりその変動が小となる. 従って, ここで与えた結果のみから考えれば α_1 は α_2, α_3 に等しくするか, やや小にするのが良いのではないかと考えられる. 但し, 正確にはこれ以上の数値計算が必要である.

最後に, 御指導下された九州大学理学部北川敏男教授に厚く感謝する.

補注 1) 随時併合検定 (sp) と無併合検定 (np) の検定力の例が下表に示される. 但し, 後者は

$$\alpha_n(\theta_{31}) = (1 + \theta_{31}^{-1} u_{20})^{-f_1}$$

であり, θ_{21} に関係しない.

オ 5 表 sp と np の検定力

$$f_1=9, f_2=2, f_3=1, \quad \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=.05$$

θ_{31} θ_{21}		1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
2	sp	.2134	.1997	.1940		
	np	.1975				
4	sp	.4431	.4781	.4210	.4180	.4171
	np	.4285				
10	sp	.7165	.7057	.7003	.6978	.6972
	np	.7056				
30	sp	.8935	.8884	.8856	.8842	.8834
	np	.8840				

オ 6 表 sp と np の検定力

$$f_1=9, f_2=2, f_3=1, \quad \alpha_1=.01, \alpha_2=\alpha_3=.05$$

θ_{31} θ_{21}		1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
2	sp	.2091	.1893	.1787		
	np	.1975				
4	sp	.4385	.4157	.4017	.3941	.3917
	np	.4285				
10	sp	.7136	.6972	.6866	.6803	.6771
	np	.7056				
30	sp	.8925	.8853	.8804	.8771	.8751
	np	.8840				

この表で sp の検定力から np のそれを引いたものが、オ 1, 2 図に与えてある。

補注 2) 随時併合推定値

u_1^2 及び u_2^2 は夫々分散 σ_1^2 及び σ_2^2 の独立な推定値とし、 $\frac{n_i u_i^2}{\sigma_i^2}$ ($i=1, 2$) は夫々自由度 n_i の中心 χ^2 分布に従って独立に分布するものと仮定する。又、 $\sigma_2^2 \geq \sigma_1^2$ なる事が既知であるとする。この時 σ_1^2 の推定値 e^* として

- (i) $u_2^2/u_1^2 < F_{n_1}^{n_2}(\alpha)$ なる時 $(n_1 u_1^2 + n_2 u_2^2)/(n_1 + n_2)$
 (ii) $u_2^2/u_1^2 \geq F_{n_1}^{n_2}(\alpha)$ なる時 u_1^2

を用いる。この随時併合推定値 e^* の期待値は

$$E(e^*) = \frac{1}{f_1 + f_2} \left[f_1 I_x(f_1 + 1, f_2) + (f_1 + f_2) I_y(f_1 + 1, f_2) + f_2 I_x(f_1, f_2 + 1) \theta_{21} \right] \sigma_1^2$$

故に e^* に於ける偏りは

$$\frac{1}{f_1 + f_2} \left[f_1 I_x(f_1 + 1, f_2) - (f_1 + f_2) I_{y'}(f_2, f_1 + 1) + f_2 I_x(f_1, f_2 + 1) \theta_{21} \right]$$

となる。ここで

$$f_i = n_i / 2 \quad (i = 1, 2)$$

$$x = n_1 \theta_{21} \lambda / (n_2 + n_1 \theta_{21} \lambda)$$

$$y = n_1 \theta_{21} / (n_2 \lambda + n_1 \theta_{21}) \quad y' = 1 - y$$

$$\theta_{21} = \sigma_2^2 / \sigma_1^2$$

$$\lambda = F_{n_1}^{n_2}(\alpha)$$

ここでは χ_1^2 , χ_2^2 共に中心 χ^2 統計量と考えたが, χ_2^2 が非心 χ^2 統計量の場合は Patnaik の近似を利用すればよい。

参 考 文 献

- [1] T.A. Bancroft, "On biases in estimation due to the use of preliminary test of significance," Ann. Math. Stat., Vol. 15, (1944)
- [2] T. Kitagawa, "Successive process of statistical inference," Mem. Faculty of Sci., Kyusyu University Series A. Vol. 6, No. 2 (1950)
- [3] A.E. Paull, "On a preliminary test for pooling mean squares in the analysis of variance," Ann. Math. Stat. Vol. 21, (1950)
- [4] H. Bozovich, T.A. Bancroft and H.O. Hartley, "Power of analysis of variance test procedures for certain incompletely specified models I," Ann. Math. Stat., Vol. 27, (1956)
- [5] 田坂誠男「変量模型の変量分析法に於ける随時併合検定」九大卒業論文, (1952年度)
- [6] 大谷賢二「母数模型の変量分析法に於ける随時併合検定」九大卒業論文, (1952年度)
- [7] 北川敏男『実験計画法講義』I. II. 培風館, 1955~56.