Truncated標本及びCensored標本による母数推定

村上, 正康
千葉大学文理学部

https://doi.org/10.15017/12720

出版情報：統計科学研究. 1 (2), pp.15-35, 1956-05. Research Association of Statistical Sciences

綜合報告

Truncated標本及びCensored標本による母数推定(註1)

村上正康 (千葉大・文理)

§1 序論

49年頃から，その表題の中に"truncated"又は"censored"なる文字の入った論文が，主要な統計の雑誌に数多く発表されてきた。これらの論文は，いずれも，ある分布からのtruncated標本又はcensored標本にもとづく母数の推定を取扱ったものである．

いま，ある母集団が与えられるとき，ある理由から，この母集団全体から標本抽出を行うことができず，標本は，母集団の一部分からのみとられているとしよう。これは，母集団の要素がある基準によって分類されて，標本は，分類が行われたあとで抽出されるときに起る。例えば，ある性質xについて一定の分布をするような，ある種の製品を要素とする母集団を考える。製品は売られる前に検査をうけ，$x<x_0$なる製品はすべて母集団から除かれる。消費者が，その製品の任意標本をとるとき，彼は$x\geqq x_0$なる凡ての製品からなる不完全母集団から標本をとっていることになる．一般に，元の母集団から，そのなかのある一部分が除かれているとき，そのような不完全母集団はtruncated母集団(truncated分布)と呼ばれ，それからの任意標本をtruncated 標本という。(註2)

次に，標本は完全母集団から抽出されるが，(i) そのうち何個かの観測値は，一定値x_0より小さい(又は大きい)ことだけわかっているが，個々の観測値は知

(註1) "truncated"と"censored" については適切な邦訳が見出せなかったので，本文では，原語のまま用いた．

(註2) $x<x_0$ (又は$x>x_0$) なる要素が除かれた不完全母集団は左側(又は右側) truncated 母集団といい，それからの任意標本を左側(又は右側) truncated 標本という．x_0は切断点(point of truncation)と呼ばれる．両側truncated 標本への拡張は今や明らかであろう．

られていない場合や，(ii) n 個の標本のうち，$(n-a)$ 個の小さい方（又は大きい方）の観測値のみ知られていて，残りの a 個の観測値は，これらより大きい（又は小さい）ことだけしかわかっていないという場合が起る．(i) 及び (ii) で与えられる不完全標本は，それぞれ，Type I 及び Type II の Censored 標本と呼ばれる．(註3) このようなタイプの標本は，各種の分野における，寿命試験や，反応時間の研究において，しばしばあらわれる．例えば，工場で生産された電球の平均寿命を推定したいとする。若干個の電球をえらび，それらをともす実験をはじめる。全部の電球が切れてしまうまで待たずに一定時間経過したら実験を中止する．このとき得られたデータは，Type I の Censored 標本となる．もし，実験時間を指定しないで，一定個数の電球が切れたところで，実験をやめることにすれば，このときのデータは Type II の Censored 標本となる．

truncated標本又はcensored 標本による，元の母集団の母数の推定において，基本的な推定法は勿論，最尤法である．しかしながら，一般に，導かれた最尤推定量は explicit な形では与えられない．従って与えられた標本から最尤推定量を計算することは，適当な表が利用されない限り，かなり面倒になる．又小標本の場合には，最尤推定量の分散を求めることは一般に困難である．このような事情から，ある母集団分布の場合には，積率法による推定量が考えられる．この推定量の効率がかなり高いときには，最尤解に代ってそれが用いられる．

以下において，元の母集団における分布を正規分布(§2)，ポアソン分布(§3)，その他の分布(§4)を仮定したときの，truncated 標本又はcensored 標本による母数推定が述べられる．

§2．正規分布に対する母数推定

[1] truncated 標本による推定

基礎変量 x が $N(\mu,\sigma^2)$ に従って分布するとき，左側 truncated な正規分布は次の如くかける

$$(1)\qquad f(x)=\frac{1}{I_0(\xi)\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\qquad x_0\leqq x<\infty$$

(註3) (i) では，x_0 より小さい（又は大きい）観測値が知られているときを，右側（又は左側）Type I censored 標本といゝ，(ii) では，小さい方（又は大きい方）の観測値が知られているとき，右側（又は左側）Type II consored 標本という．x_0 は，この場合にも，切断点と呼ばれる．

但し，$\xi=\dfrac{x_0-\mu}{\sigma}$，$I_0(\xi)=\int_{\xi}^{\infty}\varphi(t)\,dt$，$\varphi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$

(1) からの，大きさnの truncated 標本に対する尤度は

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\left[\frac{1}{I_0(\xi)\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right]^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n (x_i-\mu)^2} .$$

母数μ及びσの最尤推定量を与える推定方程式は，簡単な計算から，次の知くなることが容易に示される：

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\sigma(Z-\xi)=\nu_1 \\ &\sigma^2\{1-\xi(Z-\xi)\}=\nu_2 \end{aligned}$$

但し，$\nu_1=\frac{1}{n}\Sigma(x_i-x_0)$，$\nu_2=\frac{1}{n}\Sigma(x_i-x_0)^2$

(2) よりσを消去すれば

$$(3)\qquad \frac{\nu_2}{2\nu_1^2}=\frac{1}{2(Z-\xi)}\left(\frac{1}{Z-\xi}-\xi\right)$$

(3) の左辺は標本のみの函数であり，右辺はξのみの函数であるから，標本が与えられたとき，(3) よりξの最尤推定量$\hat{\xi}$が得られる．

従って，(2) と (1) から，μとσの最尤推定量

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\hat{\sigma}=\frac{\nu_1}{Z-\hat{\xi}} \\ &\hat{\mu}=x_0-\hat{\sigma}\hat{\xi} \end{aligned}$$

が求められる．

次に，$\hat{\mu}$，$\hat{\sigma}$の漸進的な分散行列は，

$$(5)\qquad \frac{\sigma^2}{n}\|\mu_{ij}\| \qquad (i, j=1, 2)$$

で与えられることが証明される．但し $\|\mu_{ij}(\xi)\|=\|\varphi_{ij}(\xi)\|^{-1}$，

$$\varphi_{11}=\lim_{n\to\infty}\frac{\partial^2\log L}{\partial\mu^2}=1-Z(\xi)\,[Z(\xi)-\xi]$$

$$(6)\qquad \varphi_{12}=\lim_{n\to\infty}\frac{\partial^2\log L}{\partial\mu\partial\sigma}=Z(\xi)\left\{1-\xi[Z(\xi)-\xi]\right\}$$

$$\varphi_{22}=\lim_{n\to\infty}\frac{\partial^2\log L}{\partial\sigma^2}=2+\xi\varphi_{12}$$

truncated な正規分布におけるμとσの推定の問題は，Pearson & Lee [34], Fisher [19], Cohen [3], [4], Hald [25] 等によって考察された．Pearson & Lee

は，積率法によって，本質的には，(3) 及び (4) と同等な推定方程式を与え，ξ 及び σ の積率推定量の計算を容易にするため，$\psi_1(\xi)=1+\frac{1}{z-\xi}\left(\frac{1}{z-\xi}-\xi\right)$ と $\psi_2(\xi)=\frac{1}{z-\xi}$ の表を，ξ について 0.1 の間隔で与えた。Fisher は積率法と最尤法とが同一の推定量を与えることを証明した．彼は，特殊な函数

$$I_n(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi}^{\infty}\frac{(t-\xi)^n}{n!}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

を使って，(3) と (4) を夫々

$$\frac{\nu_2}{2\nu_1^2}=\frac{I_0 I_2}{I_1^2}, \quad \hat{\sigma}=\nu_1 I_0/I_1$$

で与え，Pearson & Lee の場合と同じく，ξ について 0.1 の間隔で，I_0，I_1 及び I_0I_2/I_1^2 の表を作った．これらの表は，ξ についての間隔が広いために，充分な精度の推定値を求めることはできない。Cohen [3] は，(3) から，逐次近似法で ξ を求める方法を示し，オ一近似値を得るために必要な $\psi_1(\xi)$ のグラフを与えた。Cohen [4]は，(5) と (6) で示した $\hat{\mu}$ と $\hat{\sigma}$ の漸近分散行列の代りに，$\hat{\sigma}$ と $\hat{\xi}$ の漸近的な分散及びそれらの相関係数を次の如く与えた：

$$V(\hat{\sigma})=\frac{\sigma^2}{n}W'(\hat{\xi})=\frac{\sigma^2}{n}\,\frac{1-z(z-\xi)}{[1-z(z-\xi)][2-\xi(z-\xi)]-(z-\xi)^2}$$

(7) $$V(\hat{\xi})=\frac{w'(\hat{\xi})}{n}=\frac{1}{n}\,\frac{2-\xi(z-\xi)}{[1-z(z-\xi)][2-\xi(z-\xi)]-(z-\xi)^2}$$

$$\rho_{\hat{\sigma},\hat{\xi}}=\frac{z-\xi}{\sqrt{[1-z(z-\xi)][2-\xi(z-\xi)]}}$$

Cohen & Woodward [12]は (3) の右辺を ξ の函数として $\frac{m_2(\xi)}{2m_1(\xi)}$ で表わし，$\xi=-0.40(0.1)-2.5(0.01)\,0.5(0.1)3.0$ に対する $m_2(\xi)/2m_1(\xi)$ と $1/z-\xi$ の値を小数 8 桁まで与える表を作成した。彼等は又，$\xi=-3.0(0.1)2.0$ に対する $W'(\xi)$, $w'(\xi)$ 及び ρ の表も与えた。Hald [25] は (3), (4), (5) 及び (6) を導き，(3) の左辺を y で表わし，y から直接 $\hat{\xi}$ の求まる便利な表を与えた。彼の表における y の範囲は $y=0.550(0.001)0.910$ で，ξ は $-3.145\leqq\xi\leqq1.994$ となっている.☆ 又 $\xi=-3.0(0.1)2.0$ に対する分散行列の要素 $\mu_{ij}(\xi)$ と $\frac{1}{z-\xi}$ の表も与えている．$\hat{\mu}$ 及び $\hat{\sigma}$ の実際の計算には，Hald の表の方が Cohen & Woodward の表よりも，使い易いように思われる．以上は切断点が左側にある場合であるが，右側 truncated の場合は，(3) から (6) までの式に含まれる ξ を $-\xi$ とおいて得られる．

☆ これらの表は，すべて Hald [26] におさめられている．

[II] censored標本による推定

$N(\mu,\sigma^2)$ からの大きさnの標本において，切断点 x_0 より大きな値を $(x_1,\cdots,x_{n-a})$ とし，残りのa個は，x_0より小さいことのみ知られているが，それらの観測値は得られていないとする．即ち左側に切断点をもつ type I consored 標本を考える．このとき，最尤推定量$\hat{\mu}$及び$\hat{\sigma}$を求める推定方程式は，次のように示される：

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&\sigma\left(\frac{a}{n-a}\,\frac{\varphi(\xi)}{1-I_0}-\xi\right)=\frac{1}{n-a}\sum_{1}^{n-a}(x_i-x_0)=\nu_1\\
&\sigma^2\left[1-\xi\left(\frac{a}{n-a}\,\frac{\varphi(\xi)}{1-I_0}-\xi\right)\right]=\frac{1}{n-a}\sum_{1}^{n-a}(x_i-x_0)^2=\nu_2
\end{aligned}
$$

(8) からσを消去すれば

$$
(9)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{\nu_2}{\nu_1^2}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{Y-\xi}\left(\frac{1}{Y-\xi}-\xi\right)
$$

但し　$h=\dfrac{a}{n}$，　$Y=\dfrac{h}{1-h}\cdot\dfrac{\varphi(\xi)}{1-I_0}$．

(9) は [I] の (3) に相等する式で，これから$\hat{\xi}$が求められる．従って (8) より

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
&\hat{\sigma}=\nu_1/Y-\hat{\xi}\\
&\hat{\mu}=x_0-\hat{\xi}\,\hat{\sigma}
\end{aligned}
$$

$\hat{\mu}$，$\hat{\sigma}$の漸近的分散行列は，[I]の場合と同称な計算から

$$
(11)\qquad \frac{\sigma^2}{n}\left\|\mu'_{ij}(\xi)\right\| \qquad (i,j=1.2)
$$

で得られる．但し　$\|\mu'_{ij}(\xi)\|=\|\varphi'_{ij}(\xi)\|^{-1}$，

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
&\varphi_{11}=1+Z(\xi)\,[Z(-\xi)+\xi],\\
&\varphi_{12}=Z(\xi)\{1+\xi\,[Z(-\xi)+\xi]\},\\
&\varphi_{22}=2+\xi\ \varphi_{12}
\end{aligned}
$$

Type I の censored標本から，μ，σの最尤推定量を求める問題は Stevens [44], Cohen [4], Hald [25], Halperin [27]によって取扱われた．Cohen は (9) を満足する$\hat{\xi}$の才一近似を彼の与えたグラフから求めて逐次精度を高める方法を示した．Hald は (9) の左辺をyで表わし，$y=0.5\,(0.005)\,1.50$，$h=0.05\,(0.05)\,0.50$ から$\hat{\xi}$を求める表と，$\xi=-3.0\,(0.1)\,2.0$ から $\frac{1}{Y-\xi}$ と (11) の $\mu'_{ij}(\xi)$ を求める表を作成した．これらの表も又，彼の公式集 [26] におさめられている．Halperin は$\hat{\xi}$を得るための方程式 (9) を次の形に変える：

$$\frac{\psi(\xi)}{1-I_0(\xi)} = -\frac{p}{1+p\nabla_{pn}^2}\left[(2-\nabla_{pn}^2)\xi - 2\sqrt{\xi^2+\nabla_{pn}^2}\right] \tag{13}$$

但し $\nabla_{pn}^2 = 4\sum_1^{n-a}\frac{(x_i - x_0)^2}{(n-a)(x_0-\bar{x})^2}$,

$$p = 1-h, \quad \bar{x} = \frac{1}{n-a}\sum_1^{n-a} x_i$$

彼は，$p=0.1(0.1)1.0$ と $4 \leqq \nabla_{pn}^2 \leqq 74$ なる範囲の p, ∇_{pn}^2 から $\hat{\xi}$ を見出す図表を与えた．$\nabla_{pn}^2 = 8y$ であるから，Haldの表で用いた y の範囲を ∇_{pn}^2 で示すと，$4 \leqq \nabla_{pn}^2 \leqq 12$ となる．このことからHalperinの図表は，相当に広い y の範囲まで使える．

以上は，左側に切断点をもつ type I censored 標本からの μ, σ の最尤推定であるが，切断点が右側にある場合の μ，σ の最尤推定式は(9)と(10)に含まれる ξ を $-\xi$ でおきかえることより，次の如くなる：

$$\frac{1}{2}\frac{\nu_2}{\nu_1^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{h}{1-h}Z+\xi}\left(\frac{1}{\frac{h}{1-h}Z+\xi}+\xi\right) \tag{14}$$

$$\hat{\sigma} = \nu_1 \Big/ \frac{h}{1-h}Z+\xi \tag{15}$$

$$\hat{\mu} = x_0 - \hat{\xi}\hat{\sigma}$$

但し $\nu_1 = \frac{1}{n-a}\sum_1^{n-a}(x_0 - x_i)$, $\nu_2 = \frac{1}{n-a}\sum_1^{n-a}(x_0 - x_i)^2$

Type I censored の場合には，標本抽出の前に切断点が固定されていたが，Type II censored の場合では，censoredデータ(注4)の個数が定められる．Type II においては，censoredデータのなかの最小（又は最大）観測値が，切断点となり，それは標本抽出のたびに変る変量である．

さて，$(x_1, x_2, \cdots, x_K)$ を $N(\mu, \sigma^2)$ からの，n 個の標本における，大きさKのType II censored データとし，x_K をこのデータのなかの最大値としよう．残りの $(n-K)$ 個の標本は x_K より大きいことのみが知られているが，観測値は得られていないとする．このような，Type II censoredデータからの，最尤推定量 $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$ に対する推定式は，Gupta [24]によって次の如く与えられた：

$$\psi \equiv \frac{S^2}{S^2+d^2} = \frac{1+\eta w - w^2}{w^2} \tag{16}$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} + (\hat{\sigma}^2 - S^2)/d \tag{17}$$

$$\hat{\sigma} = d/w$$

但し，　$\eta=\dfrac{x_K-\mu}{\sigma}$，　$\bar{x}=\dfrac{1}{K}\sum_1^K x_i$，　$S^2=\dfrac{1}{K}\sum_1^K(x_i-\bar{x})^2$，

$$d=x_K-\bar{x},\quad w=\eta+\left(\frac{1}{p}-1\right)z(\eta),\quad p=\frac{K}{n}.$$

(16)の左辺ψは標本のみの函数で，$0\leqq\psi\leqq 1$，そして右辺は，与えられたpに対しては，ηのみの函数であるから，ψとpから(16)を満す$\hat{\eta}$が求められる．従って(17)から$\hat{\mu}$と$\hat{\sigma}$が得られる．Guptaは$p=0.1(0.1)1.0$と$\psi=0.05(0.05)0.95$に対するwの値を小数4桁まで求めた．

$\hat{\mu}$と$\hat{\sigma}$の漸近分散行列は

(18)　$$\frac{\sigma^2}{n}\|\sigma_{ij}\|\qquad(i.j=1.2)$$

で与えられる．但し，$\|\sigma_{ij}\|=\|v_{ij}\|^{-1}$，

(19)
$$\begin{aligned}v_{11}&=p+\varphi(\hat{\eta})(z(\hat{\eta})-\hat{\eta})\\ v_{12}&=-\varphi(\hat{\eta})+\hat{\eta}\varphi(\hat{\eta})(z(\hat{\eta})-\hat{\eta})\\ v_{22}&=2p+\hat{\eta}\,v_{12}\end{aligned}$$

$p=0.05(0.05)0.95(0.01)0.99$に対する$\sigma_{ij}$の表も，また彼によって与えられる．

Type IとType IIでの最尤推定量を与える(15)と(17)は，切断点が夫々x_0とx_Kであることを除けば，全く同じであることが証明される．故にHaldの表も，Guptaの表も，両方のタイプのcensored標本に使うことができる．いま，最尤推定量の効率を，完全標本からの最尤推定量の分散の比として定義するとき，Type IIでの最尤推定量の効率はpに依存するが，Type Iでの最尤推定量のそれは切断点に依存する．従って，Type Iでは，$\mu.\sigma$に関する先験的な情報がない限り，実験をはじめる前に，推定値の効率をある一定値以上にするために必要な切断点を指定することが困難である．しかしながら，Type IIではこのような困難が生じない．Guptaは，pの函数として最尤推定量の効率を示すグラフを与えている．このグラフから，必要な精度を得るには，何時，実験を止めればよいか前以て決定することが可能となる．

Halperin[28]は一般に母集団分布が$f(x,\theta)$で，これからのType II censored標本による母数θの推定において，最尤推定量が一致性と有効性をもつという意味で最良推定量であることを示した．しかしながら，正規分布においてさえ，標本の

（註4）　本文ではcensored 標本とcensored データを異なる意味で用いた．censored 標本において，観測体の得られた個体の集りをcensored データという．

数nが小さいと不偏性は保たれないし，又分散行列の漸近公式は，厳密には使えない。この場合に，Gupta は，順序統計量にもとづく次のような最良線型不偏推定量を導出した．標本の大きさをnとし，$x_1, x_2, \cdots, x_K$ を大きさKの censored データとする．K個の観測値を大きさの順序にならべて

$$x_{1|n} < x_{2|n} < \cdots < x_{K|n}$$

こゝで問題は，このk個の順序統計量を使って元の正規母集団の平均と標準偏差を推定することである。

μ_i を N(0.1) からの大きさnの標本のi番目の順序統計量の期待値とするとき，$N(\mu, \sigma^2)$からの任意標本のi番目の順序統計量$x_{i|n}$の期待値は

$$E(x_{i|n}) = \mu + \sigma\mu_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, K)$$

そこで μ と σ に対する線型推定量を

$$(20) \quad \mu^* = \sum_1^K \beta_i \, x_{i|n}, \qquad \sigma^* = \sum_1^K \gamma_i \, x_{i|n}$$

で表わし，これらが不偏であるという條件の下で，最小の分散をもつように，最小二乗法によつて係数β_i, γ_i を定めれば，最良線型不偏推定量が得られる．Gupta は，Godwin[22] が与えた N(0.1) からの順序統計量の期待値，標準偏差及び共分散に対する数値表を使って，以上の意味で最適な係数β_i, γ_i の値を$n=2, 3, \cdots, 10$，$K=2, 3, \cdots, n-1$に対して計算した．Saharan & Greenberg [42]は片側 censored と両側 censored のそれぞれに対する$n=10$ 迄のβ_i, γ_i の値を求めている。

Gupta は，更に，nが 10 より大きいが，最尤推定量は未だ使えない位のnに対して，次のような線型不偏推定量を与えた：

$$(21) \quad \mu'^* = \sum_1^K b_i \, x_{i|n}, \qquad \sigma'^* = \sum_1^K c_i \, x_{i|n}$$

但し，

$$b_i = \frac{1}{K} - \frac{\bar{\mu}_K(\mu_i - \bar{\mu}_K)}{\sum_1^K (\mu_i - \bar{\mu}_K)^2}$$

$$c_i = \frac{\mu_i - \bar{\mu}_K}{\sum_1^K (\mu_i - \bar{\mu}_K)^2}$$

$$\bar{\mu}_K = \frac{1}{K}\sum_1^K \mu_i$$

<u>くみわけの影響</u>：　正規母集団からの完全標本よりμ，σを推定する場合，も

しデータがくみわけされているときには，通常よく知られた "Sheppardの補正" が使われる．しかし，完全標本でなく，くみわけされたtruncated 標本又はcensored 標本の場合には，この補正は明かに適切でない．Grundy [23]はtruncated又はcensored データかくみわけされている場合に，"Sheppard の補正" に相当する近似的な補正公式を導き，μ，σ の最尤推定量を得るには，単に，(3),(9) 又は (16)[註5] におけるν_1とν_2の代りに，それぞれの補正積率 ν_1^* と ν_2^* をおきかえればよいことを証明した．彼は又，くみわけが最尤推定量の漸近分散行列に及ぼす影響について述べ，truncated の場合とcensored の場合に対する，補正漸近分散行列の公式を与えた。

i 番目のくみを(x_{i-1}, x_i) とし，そこに入るデータの個数をf_i，くみの個数を S，$h_i = x_i - x_{i-1}$，$q_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ とするとき，一次と二次の補正積率 ν_1^* と ν_2^* は，彼によって次の如く与えられた：

$$
\begin{aligned}
\nu_1^* &= [\![q]\!] - \frac{[\![h^2 q]\!]\mu}{12\sigma^2} \\
\nu_2^* &= [\![q^2]\!] + \frac{[\![h^2]\!]\sigma^2 + 2[\![h^2 q]\!]\mu - 2[\![h^2 q^2]\!]}{12\sigma^2}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

但し記号$[\![\ \ ]\!]$は，度数f_iを重みとする平均を表わす。例えば

$$[\![h^2]\!] = [\![h_i^2]\!] = \frac{\sum_1^S f_i h_i^2}{\sum_1^S f_i}$$

くみの巾，h_iが等しいときには(22)はかなり簡単になる．(22)には，母数μ及びσが入っているが，普通，確率紙を使ってそれらの近似的な推定値を求め，その値を代入して使われる．

<u>管理図えの応用</u>：　type Ⅱ censored 標本によってある製品の管理図を作りたいという場合は，実際においてかなり起ると考えられる．Type Ⅱ censored 標本による管理図法は，田口[45]，戸田[47]によって考えられた．田口は，平均値と標準偏差の近似的な管理限界の定め方を述べる。戸田は，R－管理図[註6]の管理限界係数 d_2^*，D_3^* 及び D_4^* を，Godwinの表を用いて計算した．但し，[47]には $n=10$ の場合のみが与えられている．

§3．ポアソン分布に対する母数推定

[註5]　(16)の左辺は，$\psi = 1 - \frac{\nu_1^2}{\nu_2}$ とかける．

[註6]　$R = x_{k|n} - x_{1|n}$

[I] truncated データによる推定

ポアソン分布を

$$P_i = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots) \tag{23}$$

とするとき，$i > r$ なる i が truncate した右側 truncated ポアソン分布は

$$P_i' = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \Big/ \sum_{j=0}^{r} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, r) \tag{24}$$

で与えられる．

(24)からの大きさ n の標本において，i なる値をとる度数を n_i とすれば，標本の尤度は

$$L = \prod_{i=0}^{r} P_i'^{\,n_i} \tag{25}$$

但し，$\Sigma n_i = n$.

(25)の対数を λ で微分して零とおくことによって，λ の最尤推定量を与える次の方程式が得られる：

$$q \equiv \frac{\sum_{i=0}^{r} i n_i}{n} = \hat{\lambda} \frac{\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\hat{\lambda}_i e^{-\hat{\lambda}}}{i!}}{\sum_{i=0}^{r} \frac{\hat{\lambda}_i e^{-\hat{\lambda}}}{i!}} \tag{26}$$

(26)を満す $\hat{\lambda}$ は，ポアソン分布の累積和を与えた数値を使って，逐次近似法で求めることができる．

$\hat{\lambda}$ の漸近分散は

$$V(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda^2}{n} \left[\sum_{i=0}^{r} i^2 P_i' - \left(\sum_{i=0}^{r} i P_i' \right) \right]^{-1} \tag{27}$$

となることが証明される．$V(\hat{\lambda})$ の推定値は(27)の P_i' の代りに $\frac{n_i}{n}$ を代入して求められる．

truncated ポアソン分布で最も興味あるのは，$i=0$ において truncate した場合である．これは，例えば，ある地域である種の伝染病にかかった世帯の人数の分布や，工場における労仂者の事故の回数の分布において見られる．何故ならば，ある期間中，家族に一人も病人を出さなかった世帯や，一回も事故を起さなかった労仂者の数は，地域の世帯数や工場内の労仂者数の変動のために，一般に，わからないからである．

0点で truncate したポアソン分布の母数 λ の推定の問題は，David & Johnson[14], Placket[35], Rider[38] によって取扱われた．David & Johnson は λ の最尤解 $\hat{\lambda}$ を与える方程式として，(26)に対応する次の式を導いた：

(28) $$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} i n_i}{n} = \hat{\lambda}(1-e^{-\hat{\lambda}})^{-1}$$

(28)の左辺を $\bar{x}$ とおき，$\bar{x}=1.1\,(0.1)\,3.5$ から $\hat{\lambda}$ を得る表が与えられた。

$\hat{\lambda}$ の漸近分散は

(29) $$V(\hat{\lambda}) = \frac{1}{n}\,\frac{\lambda(1-e^{-\lambda})^2}{1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}} .$$

彼等は，また λ の積率推定量 λ^* を与え，その漸近分散を求めた．Placketは極めて効率の高い（少くとも95%以上）不偏推定量 λ^{**} と，その漸近分散を与え，更に λ^{**} を導いたのと同じ方法で漸近分散の不偏推定式を与えた．λ^* と λ^{**} 及びそれらの漸近分散は次の如く示される：

(30) $$\lambda^* = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 n_i \Big/ \sum_{i=1}^{\infty} i n_i - 1$$

(31) $$\lambda^{**} = \sum_{i=2}^{\infty} i n_i / n$$

(32) $$V(\lambda^*) = (2+\lambda)(1-e^{-\lambda})/n$$

(33) $$V(\lambda^{**}) = [\lambda+\lambda^2/(e^{\lambda}-1)]/n$$

Placket が与えた $V(\lambda^{**})$ の不偏推定は

(34) $$V(\lambda^{**})^* = (N\lambda^* + 2n_2)/n^2$$

Rider[38]は $i=0$ から $i=k-1$ まで truncate した左側truncatedポアソン分布について，母数 λ の最尤推定量と積率推定量を与える．この場合の最尤解を与える方程式は，(26)の総和記号の添字 i の範囲を適当に変えるだけで簡単に得られる．彼が与えた積率推定量 λ' は

(35) $$\lambda' = \frac{T_2 - kT_1}{T_1-(k-1)T_0}$$

但し，$T_0 = \sum_{i=k}^{\infty} n_i$，$T_1 = \sum_{i=k}^{\infty} i n_i$，$T_2 = \sum_{i=k}^{\infty} i^2 n_i$.

Cohen[8]は，一般的な両側truncatedの場合の最尤推定を論じた．村上，浅井，川村[33]は右側truncate の最尤推定式(26)で，$r=1(1)15,\ 0<q<10$ に対する $\hat{\lambda}$ のグラフを与えた。

[II] Censored データによる推定

ポアソン分布(23)からの大きさnの標本において，そのうちのa個は観測値が得られてないが，ある一定値rよりも大きいことだけが知られているとしよう．このような，右側censored標本より，母数λの最尤解を得るための方程式は，次のようになることが示される．

$$(36)\qquad q \equiv \frac{\sum_{i=0}^{r} i n_i}{n} = \hat{\lambda}\,(1-p\,\psi(\hat{\lambda}, r))$$

但し，
$$\psi(\hat{\lambda}, r) = \sum_{i=r}^{\infty} \frac{\hat{\lambda}^i e^{-\hat{\lambda}}}{i!} \Big/ \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\hat{\lambda}^i e^{-\hat{\lambda}}}{i!}$$

$$p = \frac{n-a}{n}$$

与えられたrと，データから計算されたqとから，(36)を滿す$\hat{\lambda}$はポアソン分布の数値表を用いて逐次近似法で求めることができる．しかしその計算は相当に面倒である．従って，ここでも又，効率は多少おちるが，簡単に計算できる他の推定量が要求される．

$\hat{\lambda}$の漸近分散は

$$(37)\qquad V(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda^2}{n}\left[\sum_{i=0}^{r} i^2 P_i - \lambda^2 + \Big(\sum_{i=r+1}^{\infty} i P_i\Big)^2 \Big/ \sum_{i=r+1}^{\infty} P_i\right]^{-1}$$

で与えられる．

censoredデータによるλの最尤推定は，Tippet [51]，Bliss [2]，Cohen [8]，及び著者達[33]によって論じられた。Tippetは(36)のqとrから$\hat{\lambda}$を見出すことのできるノモグラフを与えた．Blissは$\hat{\lambda}$を求めるのに必要な二つの表を作成した．しかし，これらのグラフと表は，いずれも$r=0.1.2.3$の場合のみ与えられているにすぎない。著者達は(36)にもとづいて，$r=1(1)10$, $0<q<10$に対して適用できる$\hat{\lambda}$のノモグラフを与えた．以上は，いずれも右側censoredについて述べているが，Cohenは一般的な両側censoredの場合の最尤推定法を与えている．

Moore [31]は$\hat{\lambda}$にくらべて計算が極度に簡単な推定量として

$$(38)\qquad x = \sum_{i=0}^{r} i n_i \Big/ \sum_{i=0}^{r-1} n_i$$

を与える．この推定式は恒等式

$$\lambda = \sum_{i=0}^{r} i P_i \Big/ \sum_{i=0}^{r-1} P_i$$

から暗示される.

xの漸近分散は

(39) $$V(x)=\left[\sum_{i=0}^{r} i^2 P_i-\left(\sum_{i=0}^{r} iP_i\right)^2\right] \Big/ n\left(\sum_{i=0}^{r-1} P_i\right)^2$$

で与えられる.

その後, Moore [32]は, 左側及び両側censoredの場合に対しても, この推定量と類似の推定量を与えた. しかしMooreの与えた推定量は, rが小さいか又はλが大きい場合には, 効率がかなり悪くなる.

§3. その他の分布に対する母数推定

<u>ピアソンのⅢ型分布</u>

この分布からのtruncated 標本又はcensored標本[註7]による母数推定はCohen[5], Des. Raj [36], Den. Broeder[15] によって論ぜられた. CohenはピアソンⅢ型分布を, 平均値μ, 標準偏差σ及び三次の標準積率α_3を含む一般形で与え, α_3が既知の場合と未知の場合について, 左側truncated標本によるμとσの積率推定法を述べた. 推定値の計算を容易にするためのグラフも与えられた. Des. Raj は, 極めて一般的な結果を与えた. 即ち彼はα_3が既知のとき, 片側及び両側truncated 標本の場合と, 片側及び両側censored標本の場合において, μとσの最尤推定と積率推定による推定式を与えた. α_3が未知の場合には, 片側の場合について, 同様な推定式を与えた. Den. Broeder は, ガンマ型分布

(40) $$\phi(t,\alpha)=\alpha f(\alpha t)=[\Gamma(p)]^{-1}\alpha^p t^{p-1} e^{-\alpha t}$$

$$(t\geq 0,\quad \alpha>0,\quad p>0)$$

について, pが既知であることを仮定して, 右側truncated, 右側censored, 左側truncated, 左側censored のそれぞれの場合におけるαの最尤推定法を与えた.

<u>指数分布</u>

指数分布

(41) $$f(x)=ce^{-cx} \qquad 0<x<\infty\ ;\ c>0$$

からの右側truncated標本と右側censored 標本による母数cの最尤推定量をそれぞれ$\hat{c}$及び$\hat{\hat{c}}$とするとき, それらが次の如くなることは容易に証明できる.

[註7] 本節で用いられるcensored標本はすべてTypeⅠcensored標本である.

(42) $$\frac{\bar{x}}{x_0} = \frac{1}{\hat{c}x_0} - \frac{1}{e^{\hat{c}x_0}-1}$$

(43) $$\hat{\hat{c}} = a\left[(n-a)x_0 + \sum_{1}^{a} x_i\right]^{-1}$$

ここに，x_0 は切断点，n は標本の大きさ，$(n-a)$ はcensoredデータの大きさである．

$\hat{c}$ と $\hat{\hat{c}}$ のそれぞれの漸近分散は

(44) $$V(\hat{c}) = \left[c^{-2} - x_0^2\, e^{-cx_0}\left(1-e^{-cx_0}\right)^{-2}\right]^{-1} n^{-1}$$

(45) $$V(\hat{\hat{c}}) = c^2\left(1-e^{-cx_0}\right)^{-1} n^{-1}$$

で与えられる．

(42)-(45) は Deemer & Votaw [50] によって導かれた。彼等は (42) から $\hat{\sigma}$ を求める表を与えた。

指数分布はガンマ分布の特別な場合(p=1) であるから，(42)-(45) は Den Broeder が与えた，右側truncate 及び censored の場合の最尤推定式で，p=1 とおいても求められる．ガンマ分布や指数分布からのcensored 標本より，母数を推定する問題は，寿命試験や刺戟に対する反応時間の研究等においてしばしば起るであろう．

<u>χ - 分布</u>

Cohen [9]は，標的分析への応用に関連して興味ある問題を論じた．

$x_j\ (j=1,2\cdots p)$ を $N(0,\sigma^2)$ に従う独立な変量とするとき，p 次元半径誤差 $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2}$ の分布は

(46) $$f_p(r) = \frac{2^{-(p-2)/2}}{\sigma\Gamma(p/2)}\left(\frac{r}{\sigma}\right)^{p-1} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2\right] \qquad 0 \leqq r \leqq \infty$$

で与えられる．

$r=2$ の場合には

(47) $$f_2(r) = (r/\sigma^2)\ \exp\left[-(r/\sigma)^2/2\right]$$

(47) は平面標的において，目標点と着弾点の距離を r としたときの，r の分布である．

Cohen はカイ分布 (46) からの truncated 標本と censored 標本による母数 σ の最尤推定を述べる．p=2 でのcensored の場合には，最尤解が explicit な形で与えられ

る．更に彼は p=2 と p=3 での truncated の場合に，最尤解の計算を容易にするため，表とグラフを与えた。そして，最尤解の漸近分散が示された．

二変数正規分布

一つの変数 x についての検査の結果，その値が前以て定められた一定値 x_0 より大きな個体は除去し，x_0 より小さな個体は，もう一つの変数 y について観測する．いま，x と y の分布が二次元正規分布をするときこのようにして得られた標本データは，二次元正規分布からの左側 truncated 又は censored 標本と呼ばれる．truncated 又は censored 標本から，元の二次元正規分布の母数を推定する問題は，例えば，入学試験の点数が入学後の学期試験の点数に関係する相関の研究や，受入検査資料の分析等において必要となる．この場合の母数の推定は，Des. Raj [37] と Cohen [10] によって与えられた．Des. Raj は片側と両側の truncated 標本と censored 標本による，二次元正規分布の母数の，最尤推定と積率推定を論じた．一次元正規分布の場合と同じ様に，最尤法と積率法が同一の推定量を与えることが証明された．truncated と censored のそれぞれの場合に対して，最尤解を求める推定方程式と，最尤解の漸近分散行列が与えられる．Cohen は左側 truncated 及び censored の場合の最尤推定を大変うまい方法で与えた．元の二次元正規分布の母数を，$m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho$ で表わすとき，それらの最尤推定量は次のように示された：

$$
\begin{aligned}
\hat{m}_y &= \bar{y} - \bar{r}(\bar{s}_y/\bar{s}_x)(\bar{x} - \hat{m}_x) \\
\hat{\sigma}_y &= \bar{s}_y \sqrt{[1-\bar{\lambda}(1-\bar{r}^2)]/(1-\hat{\lambda})} \\
\hat{\rho} &= \bar{r} / \sqrt{1-\hat{\lambda}(1-\bar{r}^2)}
\end{aligned} \tag{48}
$$

但し，$\bar{\lambda} = 1 - \bar{s}_x^2 / \hat{\sigma}_x^2$ ．

$$
\begin{aligned}
&\bar{x} = \sum_1^n x_i/n, \quad \bar{y} = \sum_1^n y_i/n, \quad S_x^2 = \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2/n, \\
&S_y^2 = \sum_1^n (y_i - \bar{y})^2/n, \quad \bar{r} \doteq \sum_1^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})/n\bar{s}_x\bar{s}_y
\end{aligned} \tag{49}
$$

$\hat{m}_x$ と $\hat{\sigma}_x$ は一次元正規分布における truncated 又は censored の場合の推定式(3), (4) 又は (9), (10)（或は (16), (17)）によって求められる。これを (48) に代入して，$\hat{m}_y$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\rho}$ が求まる．(49) における n は truncated の場合には全標本数を，censored の場合には censored データの個数を表わすものとする。更に最尤推定量の漸近分散行列も一次元正規分布の場合の，分散行列の成分要素によって，比較的簡単な形で与えられる。

二項分布

$x=0$ から $x=k-1$ までのk個のクラスがtruncateしたtruncated二項分布は

$$(50)\qquad P'_x=\frac{N!}{N!(N-x)!}\,p^x(1-p)^{N-x}\qquad (x=0,1,2,\cdots,n)$$

この分布からの大きさnのtruncated標本による，母数pの最尤解を求める方程式は

$$(51)\qquad \frac{\sum_{x=K}^{N} x n_x}{n}=\frac{N\hat{p}-\sum_{0}^{K-1}\frac{N!\,x}{x!(N-x)!}\hat{p}^x(1-\hat{p})^{N-x}}{1-\sum_{0}^{K-1}\frac{N!}{x!(N-x)!}\hat{p}^x(1-\hat{p})^{N-x}}$$

で与えられる。

truncated二項分布の母数推定は，Fisher [20]，Finney [17]，Rider [39]，Hamada [29]，Moore [32] によって取扱われた。Fisherは最尤解を与えた。Finneyは(51)から$\hat{p}$を逐次的に求める方法を示し，それに必要な表を与える。RiderとMooreはtruncatedポアソンの場合に用いた推定量と同様な考えで，それぞれ積率推定量を与える。Hamada は一般的なタイプのtruncated 標本とcensored標本による，pの最尤推定を与える。

0点のみが観測されてない，いわゆる0点truncated二項分布は，遺伝学的研究で生ずる。例えば，親がある遺伝原質をもっているとき，ある異常性を受けつぐ子供の比率を推定したいとする。ところで，家族の子供のうち少くとも一人が，問題の性格をもつときにだけ，その遺伝原質の存在がわかる。故に親が原質をもち，子供がN人いる家族で，問題の性格をもつ子供は一人もいないという家族の数はわからない。従って，この場合には，0点truncated 二項分布が適切なモデルとして用いられる。

RiderとMooreが与える推定量は，計算が至って簡単で，最尤解のように特別な表を必要としない。しかし分散は示されていない。それらの推定量をそれぞれλ'_R及びλ'_Mとすれば

$$(52)\qquad \lambda'_R=\frac{T_2-kT_1}{(N-1)T_1-(k-1)NT_0}$$

但し，$T_0=\sum_{x=k}^{N} n_x$，$T_1=\sum_{x=k}^{N} x n_x$，$T_2=\sum_{x=k}^{N} x^2 n_x$.

$$(53)\qquad \lambda'_M=\sum_{x=k+2}^{N}\frac{x n_x}{N-x+1}\Big/\left\{\sum_{x=k+1}^{N-1} n_x+\sum_{x=k+2}^{N}\frac{x n_x}{N-x+1}\right\}$$

負の二項分布

0点がtruncateした負の二項分布の母数推定は，David & Johnson[14]，Sampford[40]，Rider[39]によって取扱われた．David & Johnsonは，最尤推定量と積率推定量を与えた．彼の積率推定量には3次の標本積率が含まれるので，最尤解に対する相対効率は，非常に悪い。彼はこの場合最尤解で推定すべきであることを述べ，最尤解の計算を容易にするための表を与えた．Sampfordも最尤解と積率推定を与えた．彼の積率推定量は，一次と二次の標本積率のみを含むから，David & Johnsonのそれ程には効率は悪くないが，推定値の計算は逐次近似か又は試行錯誤かのいずれかで，行われるので，簡単であるとはいえない。Riderは，truncatedポアソン及びtruncated二項分布の母数推定で用いた方法を，この場合にも適用して，一つの推定量を与える．しかし，この場合にも，推定量の精度に関して，理論的な考察を行っていない．

§5. 結　言

truncated 標本とcensored標本に関する理論は実際の具体的問題を背景にして，ここ5，6年の間に急速に発展してきた新しい統計的手法である．発表された論文の多くは，これまで述べたように基本的な分布に対する母数の最尤推定法又は積率推定法に関するものであった．しかし，§3でも指摘したように，小標本の場合には，最尤推定量は偏りがあるし，その漸近分散も使えない．小標本の場合における推定の問題は，§3で述べたようにGuptaによってはじめて論ぜられたが，その後殆んど取上げられていない．censored標本は本質的には順序統計量であるから，例えば正規分布の場合，順序統計量に関する理論が更に有効に利用できるのではないだろうか？　Guptaの最良線型不偏推定量の理論もこの一つのあらわれと見做せるであろう．小標本の立場にたつとき，重要だが未解決の問題として，次の問題が考えられる．それは，truncatedな正規分布からの標本平均は，どれ位の標本数に対して実用上正規分布をすると見做し得るかという問題である．勿論その個数は，標準切断点ξに関係するであろう．この問題の，censored標本の場合，或は分布が二項分布，ポアソン分布の場合への拡張も当然必要となるであろう．これが解決されれば，推定だけでなく検定にも利用できることになる．

文　　献

[1] Birnboum. Z. W. *Effect of linear truncation on a multi-normal population.* Ann. Mach. Statist. 21 (1950).

[2] Bliss. C. I. *Estimation of the mean and its error from incomplete poisson distributions.* Bull. Conn. Agric. Exp. Sta. no. 513 (1948).

[3] Cohen. A. C. Jr. *On estimating the mean and standard deviation of truncated normal distributions.* J. Amer. Statist. Ass. 44 (1949).

[4] Cohen. A. C. Jr. *Estimating the mean and variance of a normal distribution from singly truncated and doubly truncated samples.* Ann. Math. Statist. 21 (1950).

[5] Cohen. A. C. Jr. *Estimating parameters of Pearson type III population from truncated samples.* J. Amer. Statist. Ass. 45 (1950).

[6] Cohen. A. C. Jr. *Estimation of parameters in truncated Pearson frequency distributions.* Ann. Math. Statist. 22 (1951).

[7] Cohen. A. C. Jr. *Estimating parameters in truncated Pearson frequency distributions without resort to higher moments.* Biometrika, 40 (1953).

[8] Cohen. A. C. Jr. *Estimation of the Poisson parameter in truncated samples.* J. Amer. Statist. Ass. 49 (1954).

[9] Cohen. A. C. Jr. *Maximum likelihood estimation of dispersion parameter of a chi-distributed radial error from truncated and censored samples with applications to target analysis.* J. Amer. Statist. Ass. 50 (1955).

[10] Cohen. A. C. Jr. *Restriction and selection in samples from bivariate normal distributions.* J. Amer. Statist. Ass. 50 (1955).

[11] Cohen. A. C. Jr. *Censored samples from truncated normal distributions.* Biometrika, 42 (1955).

[12] Cohen. A. C. Jr. *and* Woodward. J. *Tables of Pearson-Lee-Fisher functions of singly truncated normal distributions.* Biometrics, 9 (1953).

[13] David. F. N. *and* Johnson. N. L. *The truncated Poisson.* Biometrics, 8 (1952).

[14] David. F. N. *and* Johnson. N. L. *Statistical treatment of censored data, Part 1. Fundamental formulae.* Biometrika, 41 (1954).

[15] Den Broeder. G. G. *On parameter estimation for truncated Pearson type III dis-*

tributions. Ann. Math. Statist. 26 (1955).

[16] Epstein. B. *and* Sobel. M. *Life testing.* J. Amer. Statist. Ass. 48 (1953).

[17] Finney. D. J. *The truncated binomial distribution.* Ann. Eugen. Lond. 14 (1949).

[18] Finney. D. J. *and* Varley. G. C. *An example of the truncated Poisson distribution.* Biometrics, 11 (1955).

[19] Fisher. R. A. *Contribution to the introduction to the British Association Mathematical Tables,* 1, 1st ed. (1931) [Reprinted in "*Contributions to mathematical statistics*" 1950. New York: Wiley].

[20] Fisher. R. A. *The effects of method of ascertainment upon estimation of frequencies.* Ann. Eugen. Lond. 6 (1936).

[21] Gjeddebsek. N. F. *Contribution to the study of grouped observations application of the method of maximum likelihood in case of normally distributed observations.* Skand. Aktuar Tidskr. (1949).

[22] Godwin. H. J. *Some low moments of order statistics.* Ann. Math. Statist. 20 (1949).

[23] Grundy. P. M. *The fitting of grouped truncated and grouped censored normal distributions.* Biometrika, 39 (1952).

[24] Gupta. A. K. *Estimation of the mean and standard deviation of a normal population from a censored sample.* Biometrika, 39 (1952).

[25] Hald. A. *Maximum likelihood estimation of the parameters of a normal distribution which is truncated at a known point.* Skand. Aktuar-Tidskr. (1949).

[26] Hald. A. "*Statistical tables and formulas.*" John Wiley *and* Sons, New York. (1952).

[27] Halperin. M. *Estimation in the truncated normal distribution.* J. Amer. Statist. Ass. 47 (1952).

[28] Halperin. M. *Maximum likelihood estimation in truncated samples.* Ann. Math. Statist. 23 (1952).

[29] Hamada. J. *Estimation of the binomial parameter from truncated samples.* 香川大学学芸学部研究報告 11 (1955).

[30] Ipsen. Johannes. Jr. *A practical method of estimating the mean and standard deviation of truncated normal distributions.* Human. Biology, 21 (1949).

[31] Moore. P. G. *The estimation of the Poisson parameter from a truncated distribution.* Biometrika, 39 (1952).

[32] Moore. P. G. *A note on truncated Poisson distributions.* Biometrics, 10 (1954).

[33] Murakami. M, Asai. A *and* Kawamura. M. *The estimation of the poisson parameter from a truncated distribution and a censored sample.* Journal of the College of Arts and Science, Chiba University, No. 3. (1954).

[34] Pearson. K. *and* Lee. A. *On the generalized probable error in multiple normal correlation.* Biometrika, 6 (1908).

[35] Placket. R.L. *The truncated Poisson distribution.* Biometrics, 9 (1953).

[36] Raj. Des. *Estimation of the parameters of type III populations from truncated samples.* J. Amer. Statist. Ass. 48 (1953).

[37] Raj. Des. *On estimating the parameters of bivariate normal populations from doubly and singly, linearly truncated samples.* . Sankya, 12 (1953).

[38] Rider. P.R. *Truncated Poisson distributions.* J. Amer. Statist. Ass. (1953).

[39] Rider. P. R. *Truncated binomial and negative binomial distributions.* J. Amer. Statist. Ass. (1953).

[40] Sampford. M. R. *The truncated negative binomial distribution.* Biometrika, 42 (1954).

[41] Sampford. M.R. *The estimation of responce-time distributions. III truncation and survival.* Biometrics, 10 (1954).

[42] Sarhan. A.E. *and* Greenberg. B. G. *Estimation of location and scale parameters by order statistics from singly and doubly censored samples. Part I. The normal distribution up to samples of size 10. (abstract)* Ann. Math. Statist. 26 (1955).

[43] Sarhan. A.E. *and* Greenberg. B. G. *Estimation of the parameters of the one- and two-parameter single exponential distributions from singly and doubly censored samples. (abstract)* Ann. Math. Statist. 26 (1955).

[44] Stevens. W.L. *The truncated normal distribution. (Appendix to paper by Bliss. C. I. on : The calculation of the time mortality curve.)* Ann. Appl. Biol. 24 (1937).

[45] 田口玄一. ”推計学による寿命実験と推定法“ 科学新興社 (1951).

[46] 田坂誠男, 中上節夫. *truncated* と *censored sample* の推定の問題に就ての文献. 大阪産業能率研究所 (1955).

[47] 戸田英雄. 正規母集団からの *truncated* の標本で母数を推定する問題の紹介, 日本規格協会研究資料 (1956).

[48] Thompson. H. R. *Truncated lognormal distribution I. solution by moment.* Bi-

ometrika 38 (1951).

[49] Walsh. J. E. *Some estimate and test based on the r smallest values in a sample.* Ann. Math. Statist. 21 (1950).

[50] Deemer. W. L. Jr. *and* Votaw. D. F. Jr. *Estimation of parameters of truncated or censored exponential distributions.* Ann. Math. Statist. 26 (1955).

[51] Tippett. L. H. C.: *A modified method of couning particles.* Proc. Roy. Soc. Series A, 137 (1932).

誌　上　問　答

［1.2.1］　二つの薬品を併用した場合に，相加作用，相乗作用，拮抗作用などといいますが，この定義も色々とある杯ですし，その意味もはっきりしませんが．（福岡；M生）

［回答］　薬品の殺菌或は殺虫剤の効力などはProbit analysisという方法で統計解析が可能で，この方面の本としては

D. J. Finney: Probit Analysis. 1952 (CAMBRIDGE).

があります．二つの薬品の併用の問題は，この本では非常に簡単な記述があるだけで，1948年及1950年に出た論文（P. S. Hewlett & R. L. Plackett）が短く引用してあります．Probit Analysis では或る薬品をλだけ与えたことによる効果即ち死亡率を$P(\lambda)$とすると，Log Normal の法則が成立する

(1) $P(\lambda)=\int_{-\infty}^{\log\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}d\lambda.$

（但し，mおよびσは母集団及び薬品の種類により定まる常数）となるというのが基本的仮定で，前述の論文はこれの直接的な二次元正規分布への拡張がモデルになっているようです．

御質問の相加，相乗，拮抗を夫々二次元に拡張したモデルでの独立性，正相関，負相関と同じであるとすれば，前述の論文の方法を使うことも出来るわけです．増山先生の拮抗作用と相乗作用の測り方（品質管理，Vol. 6. No. 4）に出ている方法が使えるわけです．

今二つの薬品を夫々λ, μだけの量を，別々及び併用して与えた時の死亡率を，夫々

$P(\lambda, 0).\ P(0, \mu).\ P(\lambda, \mu)$

とすると，独立の時には

(2) $P(\lambda,\mu)=P(\lambda,0)+(1-P(\lambda,0))P(0,\mu)$

即ち

(3) $1-P(\lambda,\mu)=(1-P(\lambda,0))(1-P(0,\mu))$

とな　，正相関，負相関の時には夫々右辺及左辺の方が大きくなります．

増山先生の論文には$P(\lambda,\mu)$が二次元のLog normalではうまくあてはまらなかった例が述べられておりますので(3)関係を直接検定することが出来ることが望ましいのですが，その方法は現在の所ない杯です．然し色々なλ及μの値の組合せでデーターを取ってしらべて見ると，すべての場合に右辺が大きく出て正の相関性がはっきりあらわれることもあります．次に，相加性を独立性と同杯に解することは何といっても理解し難いことで，今，$a(\lambda)$及$b(\mu)$をλ，及μの函数で

$P(\lambda,0)=P(0,a(\lambda)),\ P(0,\mu)=P(b(\mu),0)$

を以て定義されているとするとき

$P(\lambda,\mu)=P(\lambda+b(\mu),0)$

或は　$P(\lambda,\mu)=P(0,\mu+a(\lambda))$

を以て相加性の定義とすることも考えられます．この問題は今後考究されなければならぬ問題であります．