九州大学学術情報リポジトリ Kyushu University Institutional Repository

Truncated標本及びCensored標本による母数推定

村上,正康 ^{千葉大学文理学部}

https://doi.org/10.15017/12720

出版情報:統計科学研究. 1 (2), pp.15-35, 1956-05. Research Association of Statistical Sciences バージョン:

イーション: 権利関係:

綜合報告

Truncated標本及びCensored標本による母数推定^{®®®}

村 上 正 康 (千葉大・文理)

§ 1 序 論

49年頃から、その表題の中に"truncated"又は"censored" なる文字の入った論文が、主要な統計の雑誌に数多く発表されてきた。これらの論文は、いずれも、ある分布からの truncated 標本又は censored標本にもとづく母数の推定を取扱ったものである。

いま,ある母集団が与えられるとき,ある理由から,この母集团全体から標本抽出を行うことができず,標本は,母集团の一部分からのみとられているとしよう。これは,母集团の要素がある基準によって分類されて,標本は,分類が行われたあとで抽出されるときに起る。例えば,ある性質xについて一定の分布をするような,ある種の製品を要素とする母集团を考える。製品は売られる前に検査をうけ, $x < x_0$ なる製品はすべて母集团から除かれる。消費者が,その製品の任意標本をとるとき,彼は $x \ge x_0$ なる凡ての製品からなる不完全母集团から標本をとっていることになる。一般に,元の母集团から,そのなかのある一部分が除かれているとき,そのような不完全母集团は x0 ないのある一部分が除かれているとき,そのような不完全母集团は x1 ないのに意標本を x2 ないのに意味本を x3 ないのの任意標本を x4 ないのに

次に、標本は完全母集团から抽出されるが、(i)そのうち何個かの観測値は、 一定値x。より小さい(又は大きい)ことだけわかっているが、個々の観測値は知

⁽註1) "truncated"と"censored" については適切な邦訳が見出せなかったので、本文では、原語のまま用いた。

⁽註2) x < x。(又はx > x。)なる要素が除かれた不完全母集团は左側(又は右側)truncated 母集团 といい,それからの任意標本を左側(又は右側)truncated 標本という。 x。は切断点(point of truncation)と呼ばれる。両側 truncated 標本への拡張は今や明らかであろう。

られていない場合や、(ii) n 個の標本のうち、(n-a) 個の小さい方(又は大きい方)の観測値のみ知られていて、残りのa 個の観測値は、これらより大きい(又は小さい)ことだけしかわかっていないという場合が起る。(i) 及び(ii) で与えられる不完全標本は、それぞれ、Type I 及び Type II の Censored 標本と呼ばれる $\frac{(it^3)}{(it^3)}$ このようなタイプの標本は、各種の分野における、寿命試験や、反応時间の研究において、しばしばあらわれる。例えば、工場で生産された電狱の平均寿命を推定したいとする。若干個の電狱をえらび、それらをともす実験を中止する。全部の電狱が切れてしまうまで待たすに一定時间経過したら実験を中止する。このとき得られたデータは、Type I の Censored 標本となる。もし、実験時间を指定しないで、一定個数の電狱が切れたところで、実験をやめることにすれば、このときのデータは Type II の Censored 標本となる.

truncated標本又は censored 標本による,元の母集团の母数の推定において,基本的な推定法は勿論,最尤法である。しかしながら,一般に,導かれた最尤推定量は explicit な形では与えられない。従って与えられた標本から最尤推定量を計算することは,適当な表が利用されない限り,かなり面倒になる。又小標本の場合には,最尤推定量の分散を求めることは一般に困難である。このような事情から,ある母集团分布の場合には,積率法による推定量が考えられる。この推定量の効率がかなり高いときには,最尤解に代ってそれが用いられる。

以下において,元の母集团における分布を正規分布(\S 2),ポアソン分布(\S 3),その他の分布(\S 4)を仮定したときの,truncated 標本又はcensored 標本による母数推定が述べられる.

§2. 正現分布に対する母数推定

[1] truncated 標本による推定

基礎変量xが $N(\mu, \sigma^2)$ に従って分布するとき,左側truncated な正規分布は次の如くかける

(1)
$$f(x) = \frac{1}{I_o(\xi)\sqrt{2\pi} \ \sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \qquad x_o \le x < \infty$$

⁽註3) (i)では, x_0 より小さい(又は大きい)観測値が知られているときを,右側(又は左側) Type I censored 標本といゝ,(ii)では,小さい方(又は大きい方)の観測値が知られているとき,右側(又は左側) Type II consored 標本という。 x_0 は,この場合にも,切断点と呼ばれる。

$$\underline{\mathbf{U}} \cup , \quad \boldsymbol{\xi} = \frac{x_0 - \mu}{\sigma} , \quad I_0(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\boldsymbol{\xi}}^{\infty} \varphi(t) \, dt , \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

(1) からの、大きされの truncated 標本に対する尤度は

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[\frac{1}{I_0(\xi)\sqrt{2\pi} \sigma}\right]^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}$$

母数 μ 及び σ の 最 尤 推 定 量 を 与える 推定方程式 は , 简 単 な 計算 か ら , 次 の 如 く な る こ と が 容 易 に 示 さ れ る :

(2)
$$\sigma(Z-\xi) = \nu_{1}$$

$$\sigma^{2}\{1-\xi(z-\xi)\} = \nu_{2}$$

$$\Theta \cup_{i} \nu_{i} = \frac{1}{n} \Sigma(x_{i}-x_{0}), \quad \nu_{2} = \frac{1}{n} \Sigma(x_{i}-x_{0})^{2}$$

(2) より びを消去すれば

$$(3) \qquad \frac{\nu_2}{2\nu_1^2} = \frac{1}{2(Z-\xi)} \left(\frac{1}{Z-\xi} - \xi \right)$$

(3)の左辺は標本のみの函数であり、右辺はものみの函数であるから、標本が与えられたとき、(3)よりもの最尤推定量をが得られる。

従って、(2)と(1)から、 μとびの最尤推定量

$$\hat{\sigma} = \frac{v_i}{Z - \xi}$$

$$\hat{\mu} = x_c - \hat{\sigma} \hat{\xi}$$

が求められる.

次に、 û、 合の漸進的な分散行列は、

(5)
$$\frac{\sigma^2}{n} \| \mu_{ij} \|$$
 (i, j = 1, 2)

で与えられることが証明される。但し $\|\mu_{ij}(\xi)\| = \|y_{ij}(\xi)\|^{-1}$

$$\varphi_{\parallel} = \lim_{n \to \infty} \frac{\partial^2 \log L}{\partial u^2} = 1 - Z(\xi) \left[Z(\xi) - \xi \right]$$

(6)
$$\gamma_{12} = \lim_{n \to \infty} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu \partial \sigma} = Z(\xi) \left\{ 1 - \xi \left[Z(\xi) - \xi \right] \right\}$$

$$\gamma_{22} = \lim_{n \to \infty} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2} = 2 + \xi \gamma_{12}$$

truncated な正規分布におけるA とのの推定の问題は、Pearson & Lee [34], Fisher [19], Cohen [3], [4], Hald [25] 等によって考察された。Pearson & Lee

は,積率法によって,本衡的には,(3)及び(4)と同等な推定方程式を与え,を及びひの積率推定量の計算を容易にするため, $\Psi_1(\xi)=1+\frac{1}{Z-\xi}\left(\frac{1}{Z-\xi}-\xi\right)$ ヒ $\Psi_2(\xi)=\frac{1}{Z-\xi}$ の表を,をについて 0.1 の 间隔で与えた。 Fisher は積率法と最尤法とが同一の推定量を与えることを証明した。彼は,特殊な函数

$$I_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi}^{\infty} \frac{(t-\xi)^n}{n!} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

を使って, (3)と(4)を夫々

$$\frac{v_2}{2v_1^2} = \frac{I_0 I_2}{I_1^2} , \quad \hat{\sigma} = v_1 I_0 / I_1$$

で与え,Pearson & Lee の場合と同じく,をについて O.1 の间隔で, I_o , I_i 及び I_oI_2/I_i^2 の表を作った。これらの表は,をについての间隔が広いために,充分な精度の推定値を求めることはできない。 Cohen [3] は, (3) から,逐次近似法でをを求める方法を示し,オー近似値を得るために必要な $\Psi(\xi)$ のグラフを与えた。 Cohen [4]は, (5) と (6) で示した $\hat{\mu}$ と \hat{G} の 新近分散行列の代りに, \hat{G} と $\hat{\xi}$ の 新近 的 \hat{G} の $\hat{$

$$V(\hat{\sigma}) = \frac{\sigma^2}{n} \ \overline{W}'(\hat{\xi}) = \frac{\sigma^2}{n} \frac{1 - z(z - \xi)}{[1 - z(z - \xi)][2 - \xi(z - \xi)] - (z - \xi)^2}$$

$$V(\hat{\xi}) = \frac{w'(\hat{\xi})}{n} = \frac{1}{n} \frac{2 - \xi (Z - \xi)}{[1 - Z(Z - \xi)][2 - \xi (Z - \xi)] - (Z - \xi)^2}$$

$$\beta_{\hat{\sigma},\hat{\xi}} = \frac{z-\xi}{\sqrt{[1-z(z-\xi)][2-\xi(z-\xi)]}}$$

【II】 censored標本による推定

 $N(\mu,\sigma^2)$ からの大きされの標本において、切断点 x_0 より大きな値を $(x_1,\dots,x_{n-\alpha})$ とし、残りの α 個は、 x_0 より小さいことのみ知られているが、それらの観測値は得られていないとする。即ち左側に切断点をもつ type I consored 標本を考える。このとき、最尤推定量 $\hat{\mu}$ 及び $\hat{\sigma}$ を求める推定方程式は、次のように示される:

$$\sigma\left(\frac{\alpha}{n-\alpha} \frac{\varphi(\xi)}{i-I_0} - \xi\right) = \frac{1}{n-\alpha} \sum_{i=1}^{n-\alpha} (x_i - x_0) = \nu_i$$

$$\sigma^2\left[i - \xi\left(\frac{\alpha}{n-\alpha} \frac{\varphi(\xi)}{i-I_0} - \xi\right)\right] = \frac{1}{n-\alpha} \sum_{i=1}^{n-\alpha} (x_i - x_0)^2 = \nu_2$$

(8) からのを消去すれば

(9)
$$\frac{1}{2} \frac{v_2}{v_1^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{Y - \xi} \left(\frac{1}{Y - \xi} - \xi \right)$$

$$\xi = \frac{\alpha}{n}, \quad Y = \frac{h}{1 - h} \cdot \frac{\varphi(\xi)}{1 - 1 - h}$$

(9) は [I] の (3) に相等する式で、これから f が求められる、従って (8) より

(10)
$$\hat{\sigma} = \frac{V_1/Y - \hat{\xi}}{\hat{\mu}} = x_0 - \hat{\xi} \hat{\sigma}$$

ρ, φの漸近的分散行列は、[I]の場合と同称な計算から

(II)
$$\frac{\sigma^2}{n} \parallel \mu'_{ij}(\xi) \parallel \qquad (i,j = 1,2)$$

で得られる。但し $\|\mu_{ij}'(\xi)\| = \|\varphi_{ij}'(\xi)\|^{-1}$, $\|\varphi_{ij}'(\xi)\| + \|\varphi_{ij}'(\xi)\|^{-1}$,

(12)
$$y_{12} = z(\xi)\{1 + \xi[z(-\xi) + \xi]\},$$

 $y_{22} = 2 + \xi y_{12}$

Type Iの censored標本から,从, のの最尤推定量を求める问題は Stevens [44],Cohen [4],Hald [25],Halper in [27] によって取扱われた。 Cohen は (9) を満足する $\hat{\xi}$ のオー近似を彼の与えたグラフからボめて逐次精度を髙める方法を示した。 Hald は (9) の左辺を y で表わし, $y=0.5\,(0.005)\,I.50$, $h=0.05\,(0.05)\,0.50$ から $\hat{\xi}$ を ボめる表と, $\xi=-3.0\,(0.1)\,2.0$ から $\frac{1}{Y-\xi}$ と (II) の $\mu_{ij}'(\xi)$ を ボめる 表を作成した。 これらの表も又,彼の公式集 [26] におさめられている。 Halper in は $\hat{\xi}$ を 得るための方程式 (9) を 次の形に 変える:

(13)
$$\frac{\Psi(\xi)}{1 - I_0(\xi)} = -\frac{\rho}{\Psi + \rho \nabla_{\rho n}^2} \left[(2 - \nabla_{\rho n}^2) \xi - 2 \sqrt{\xi^2 + \nabla_{\rho n}^2} \right]$$

$$(\Box \cup \nabla_{\rho n}^2 = 4 \sum_{i=1}^{n-\alpha} \frac{(x_i - x_o)^2}{(n - \alpha)(x_o - \overline{x})^2},$$

$$\rho = 1 - h, \quad \overline{x} = \frac{1}{n - \alpha} \sum_{i=1}^{n-\alpha} x_i$$

彼は,p=0.1(0.1)1.0 と $4 \le \nabla_{pn}^2 \le 74$ なる範囲の p, ∇_{pn}^2 から $\hat{\xi}$ を見出す図表を与えた、 $\nabla_{pn}^2 = 8y$ であるから,Hald の表で用いた y の範囲を ∇_{pn}^2 で示すと, $4 \le \nabla_{pn}^2 \le 12$ となる.このことから Halperin の図表は,相当に広い y の範囲まで使える.

以上は,左側に切断点をもつ type I censored 標本からの μ , σ の最尤推定であるが,切断点が右側にある場合の μ , σ の最尤推定式は (9) と (10) に含まれる ξ を でおきかえることより,次の如くなる:

(14)
$$\frac{1}{2} \frac{v_2}{v_1^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{h}{1-h} 2 + \xi} \left(\frac{1}{\frac{h}{1-h} 2 + \xi} + \xi \right)$$

(15)
$$\hat{\sigma} = \nu_i / \frac{h}{1-h} z + \xi$$

$$\hat{\mu} = \chi_0 - \hat{\xi} \hat{\sigma}$$

$$(\underline{\hat{P}} \cup V_1 = \frac{1}{n-\alpha} \sum_{i=1}^{n-\alpha} (x_i - x_i), \quad V_2 = \frac{1}{n-\alpha} \sum_{i=1}^{n-\alpha} (x_i - x_i)^2$$

Type I censored の場合には,標本抽出の前に切断点が固定されていたが,Type I censored の場合では,censoredデータ^(は4)の個数が定められる。Type I においては,censoredデータのなかの最小(又は最大)観測値が,切断点となり,それは標本抽出のたびに変る変量である。

さて、 (x_1, x_2, \cdots, x_K) を $N(\mu, \sigma^2)$ からの,れ個の標本における,大きさKの Type \mathbb{I} censored データとし, x_K をこのデータのなかの最大値としよう。 腰りの (n-K) 個の標本は x_K より大きいことのみが知られているが, 観測値は得られていないとする。 このような, Type \mathbb{I} censored データからの,最尤推定量 $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ に対する推定式は, Gupta [24] によって次の如く与えられた:

(16)
$$\psi = \frac{S^2}{S^2 + d^2} = \frac{1 + \gamma w - w^2}{w^2}$$

$$\hat{\mu} = \overline{\chi} + (\hat{\sigma}^2 - S^2) / d$$

$$\hat{\sigma} = d / w$$

但し,
$$\eta = \frac{x_{K} - \mu}{\sigma}$$
, $\overline{x} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} x_{i}$, $S^{2} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} (x_{i} - \overline{x})^{2}$,
$$d = x_{K} - \overline{x}$$
, $w = \eta + (\frac{1}{P} - 1) Z(\eta)$, $p = \frac{K}{\eta}$.

(16) の左辺 ψ は標本のみの函数で、 $0 \le \psi \le 1$ 、そして石辺は、与えられたpに対しては、 η のみの函数であるから、 ψ と μ りから(16) を満す $\hat{\eta}$ がボめられる。従って(17) から $\hat{\mu}$ と $\hat{\mu}$ が得られる。Gupta は μ = 0.1(0.1)1.0 と ψ = 0.05(0.05)0.95に対する μ の値を小数 4 桁までボめた。

Aと合の新近分散行列は

(18)
$$\frac{\sigma^2}{n} \| \sigma_{ij} \|$$
 (i.j = 1.2)

で与えられる.但し, $\|\sigma_{ij}\| = \|v_{ij}\|^{-1}$,

$$v_{ij} = p + \varphi(\hat{\eta}) \left(z(\hat{\eta}) - \hat{\eta} \right)$$

$$v_{12} = -\varphi(\hat{\eta}) + \hat{\eta}\varphi(\hat{\eta})(Z(\hat{\eta}) - \hat{\eta})$$

$$v_{22} = 2p + \hat{\eta} v_{12}$$

p=0.05(0.05)0.95(0.01)0.99に対する σ_{ij} の表も、また彼によって与えられる。

Type I と Type II での最尤推定量を与える(I5)と(I7)は,切断点が夫々 x_0 と x_K であることを除けば,全く同じであることが証明される.故に Haldの表も,Guptaの表も,両方のタイプの censored 標本に使うことができる.いま,最尤推定量の効率を,完全標本からの最尤推定量の分散の比として定義するとき,Type II での最尤推定量の効率は pに依存するが,Type I での最尤推定量のそれは切断点に依存する.従って,Type I では,p の最大性定量の分散の比として定義するとき,Type II での最尤推定量のそれは切断点に依存する.従って,Type I では,p の最大性定量の効率をある一定値以上にするために必要な切断点を指定することが困難である.しかしながら,Type II ではこのような困難が生じない.Gupta は,p の函数として最尤推定量の効率を示すグラフを与えている.このグラフから,必要な精度を得るには,何時,実験を止めればよいか前以て決定することが可能となる.

Halperin [28] は一般に母集团分布が f(x, e)で、これからの Type II censored 標本による母数 θ の推定において、最尤推定量が一致性と有効性をもつという意味で最良推定量であることを示した。しかしながら、正規分布においてさえ、標本の

⁽註4) 本文では censored 標本と censored データを異なる意味で用いた。 censored 標本において、観測体の得られた個体の集りを censored データという。

数 n が小さいと不偏性は保たれないし,又分散行列の漸近公式は,厳密には使えない。この場合に, Gupta は,順序統計量にもとづく次のような最良線型不偏推定量を導出した。標本の大きさをれとし, $x_1,x_2,...,x_k$ を大きさんの Censored データとする。K個の観測値を大きさの順序にならべて

In < In < want

こって问題は、この を個の順序統計量を使って元の正規母集团の平均と標準偏差を推定することである。

 μ_{i} を N(0.I) からの大きされの標本の i 番目の順序統計量の期待値とするとき, $N(\mu,0^2)$ からの任意標本の i 番目の順序統計量 α_{iln} の期待値は

$$E(x_{iln}) = \mu + \sigma \mu_i \qquad (i = 1, 2, \dots, K)$$

そこで д と σ に対する線型推定量を

(20)
$$\mu^* = \sum_{i=1}^{K} \beta_i x_{i|n}$$
$$\sigma^* = \sum_{i=1}^{K} \gamma_i x_{i|n}$$

で表わし,これらが不偏であるという條件の下で,最小の分散をもつように,最小二乘法によって係数 β_i , γ_i を定めれば,最良線型不偏推定量が得られる。 Gupta は,Godwin[22] が与えた N(0.I) からの順序統計量の期待値,標準偏差及び共分散に対する数値表を使って,以上の意味で最適な係数 β_i , γ_i の値を $n=2,3,\cdots$, 10, $K=2,3,\cdots,n-I$ に対して計算した。 Saharan & Greenberg [42] は片側 censored と両側 censored のそれぞれに対する n=10 迄の β_i , γ_i の値を求めている。

Guptaは,更に,れが IO より大きいが,最尤推定量は未だ使えない位のれに対して、次のような線型不偏推定量を与えた:

(21)
$$\mu'^{*} = \sum_{i=1}^{K} b_{i} \chi_{i|n}$$

$$\sigma'^{*} = \sum_{i=1}^{K} C_{i} \chi_{i|n}$$

$$\Phi_{i} = \frac{1}{K} - \frac{\overline{\mu}_{K} (\mu_{i} - \overline{\mu}_{K})}{\frac{K}{2} (\mu_{i} - \overline{\mu}_{K})^{2}}$$

$$C_{i} = \frac{\mu_{i} - \overline{\mu}_{K}}{\frac{K}{2} (\mu_{i} - \overline{\mu}_{K})^{2}}$$

$$\overline{\mu}_{K} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} \mu_{i}$$

くみわけの影響: 正現母集团からの完全標本より以,のを推定する場合,も

しデータがくみわけされているときには,通常よく知られた "Sheppardの補正"が使われる。しかし,完全標本でなく,くみわけされた truncated 標本又はcensored 標本の場合には,この補正は明かに適切でない。 Grundy [23]は truncated 又はcensored データかくみわけされている場合に, "Sheppard の補正"に相当する近似的な補正公式を導き, μ , のの最尤推定量を得るには,単に, (3), (9) 又は (16) における 以と以の代りに,それぞれの補正積率 ν と ν をおきかえればよいことを証明した。彼は又,くみわけが最尤推定量の斬近分散行列に及ぼす影響について述べ, truncated の場合と censored の場合に対する,補正漸近分散行列の公式を与えた。

i 番目のくみを (x_{i-1},x_i) とし,そこに入るデータの個数を f_i ,くみの個数を g_i , $f_i=x_i-x_{i-1}$, $g_i=\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ とするとき,一次と二次の補正積率 y_i^* と y_i^* は,彼によって次の如く与えられた:

$$v_{i}^{*} = [q_{i}] - \frac{[R^{2}q]\mu}{12\sigma^{2}}$$

 $v_2^* = [q^2] + \frac{[h^2]\sigma^2 + 2[k^2] \mu - 2[k^2]}{12\sigma^2}$

但し記号『】は,度数fiを重みとする平均を表わす。例えば

$$[\mathbf{k}^2] = [\mathbf{k}_i^2] = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \mathbf{k}_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

くみの巾, れが等しいときには(22)はかなり前単になる。(22)には、母数 A 及び ひが入っているが、普通、罹率紙を使ってそれらの近似的な推定値を求め、その 値を代入して使われる。

管理図えの応用: type II censored 標本によってある製品の管理図を作りたいという場合は,実際においてかなり起ると考えられる。 Type II censored 標本による管理図法は,田口[45],戸田[47]によって考えられた。田口は,平均値と標準偏差の近似的な管理限界の定め方を述べる。戸田は,R-管理図^(版6)の管理限界係数 d_2^* , D_3^* 及び D_4^* を, Godwin の表を用いて計算した。但し, [47]には n=10 の場合のみが与えられている。

§3. ボアソン分布に対する母数推定

(22)

[[]註5] (16)の左辺は、ヤミー ½ とかける.

[[]註6] $R = \chi_{k|n} - \chi_{i|n}$

[I] truncated データによる推定 ポアソン分布を

(23)
$$P_i = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$$
 $(i = 0, 1, 2, \dots)$

とするとき, i>r なるiがtruncateした右側truncatedポアソン分布は

(24)
$$P'_{i} = \frac{\lambda^{i} e^{-\lambda}}{i!} / \sum_{j=0}^{r} \frac{\lambda^{j} e^{-\lambda}}{j!} \qquad (i = 0.1, 2, \dots, r)$$

で与えられる、

(24) からの大きされの標本において,」なる値をとる度数を n_i とすれば,標本の尤度は

$$(25) \qquad L = \prod_{i=0}^{r} P_i^{\prime n_i}$$

但l, $\Sigma n_i = n$.

(25)の対数をλで微分して零とおくことによって,λの最尤推定量を与える次の 方程式が得られる:

(26)
$$q_i = \frac{\sum_{i=0}^{r} i n_i}{n} = \hat{\lambda} \frac{\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\hat{\lambda}_i e^{-\hat{\lambda}}}{i!}}{\sum_{i=0}^{r} \frac{\hat{\lambda}_i e^{-\hat{\lambda}}}{i!}}$$

(26) を満す $\hat{\lambda}$ は,ポアソン分布の累積和を与えた数値を使って,逐次近似法で求めることができる.

えの漸近分散は

(27)
$$V(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda^2}{n} \left[\sum_{i=0}^{r} i^2 P_i' - \left(\sum_{i=0}^{r} i P_i' \right) \right]^{-1}$$

となることが証明される。 $V(\hat{\lambda})$ の推定値は (27) の P_i' の代りに $\frac{n_i}{n_i}$ を代入してボめられる。

truncated ポアソン分布で最も興味あるのは, i=0 において truncate した場合である。これは,例えば,ある地域である種の伝染病にかかった世帯の人数の分布や,工場における労仂者の事故の回数の分布において見られる。何故ならば,ある期间中,家族に一人も病人を出さなかった世帯や,一回も事故を起さなかった労仂者の数は,地域の世帯数や工場内の労仂者数の変動のために,一般に,わからないからである。

O点で truncate したポアソン分布の母数入の推定の向題は, David & Johnson[14],

Placket[35], Rider[38] によって取扱われた。David & Johnson はんの最尤解分を与える方程式として、(26)に対応する次の式を導いた:

(28)
$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} i n_i}{n} = \hat{\lambda} (1 - e^{-\hat{\lambda}})^{-1}$$

(28)の左辺を文とおき、文=1.1 (0.1)3.5 から入を得る表が与えられた。

えの漸近分散は

(29)
$$V(\hat{\lambda}) = \frac{1}{n} \frac{\lambda (1 - e^{-\lambda})^2}{1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}}.$$

彼等は、また入の積率推定量光を与え、その漸近分散をボめた。 Placketは極めて効率の高い(少くとも 95%以上)不偏推定量 λ^{**} と、その漸近分散を与え、更に λ^{**} を導いたのと同じ方法で漸近分散の不偏推定式を与えた。 λ^{**} 及びそれらの漸近分散は次の如く示される:

(30)
$$\lambda^* = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 n_i / \sum_{i=1}^{\infty} i n_i - 1$$

$$\lambda^{**} = \sum_{i=2}^{\infty} i n_i / n$$

(32)
$$V(\lambda^*) = (2+\lambda)(1-e^{-\lambda})/n$$

(33)
$$V(\lambda^{**}) = [\lambda + \lambda^2/(e^{\lambda} - 1)]/n$$

Placket が与えた V(X*)の不偏推定は

(34)
$$V(\lambda^{**})^* = (N\lambda^* + 2 \eta_2) / n^2$$

Rider [38] は i=0 から i=k-1 まで truncate した左側 truncated ポアソン分布について、母数人の最尤推定量と積率推定量を与える。この場合の最尤解を与える方程式は、 (26) の総和記号の添字もの範囲を適当に変えるだけで簡単に得られる。彼が与えた積率推定量光は

(35)
$$\lambda' = \frac{T_2 - kT_1}{T_1 - (k-1)T_0}$$

但し,
$$T_0 = \sum_{i=k}^{\infty} n_i$$
, $T_i = \sum_{i=k}^{\infty} i n_i$, $T_2 = \sum_{i=k}^{\infty} i^2 n_i$

Cohen[8]は,一般的な両側 truncated の場合の最尤推定を論じた.村上,決井,川村[33]は右側 truncate の最尤推定式(26)で,r=|(i)|15,0<q<10 に対する $\hat{\lambda}$ のグラフを与えた。

[II] Censored データによる推定

ポアソン分布 (23)からの大きされの標本において、そのうちの a. 個は観測値が得られてないが、ある一定値でよりも大きいことだけが知られているとしよう。このような、右側 censored 標本より、母数入の最尤解を得るための方程式は、次のようになることが示される。

(36)
$$q_i = \frac{\sum_{i=0}^{n} i n_i}{n} = \hat{\lambda} \left(1 - p \psi(\hat{\lambda}, r) \right)$$

$$\Psi(\hat{\lambda}, r) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{\lambda}^i e^{-\hat{\lambda}}}{i!} / \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{\lambda}^i e^{-\hat{\lambda}}}{i!}$$

$$p = \frac{n-a}{n}$$

与えられたアと、データから計算された q, とから、 (36) を満す分はポアソン分布の数値表を用いて逐次近似法で求めることができる。 しかしその計算は相当に面倒である、従って、ここでも又、効率は多少おちるが、 簡単に計算できる他の推定量が要求される。

介の新近分散は

(37)
$$V(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda^2}{n} \left[\sum_{i=0}^{\gamma} i^2 P_i - \lambda^2 + \left(\sum_{i=\gamma+1}^{\infty} i P_i \right)^2 / \sum_{i=\gamma+1}^{\infty} P_i \right]^{-1}$$

で与えられる.

Moore [31] は介にくらべて計算が極度に简単な推定量として

(38)
$$x = \sum_{i=0}^{r} i n_i / \sum_{i=0}^{r-1} n_i$$

を与える.この推定式は恒等式

$$\lambda = \sum_{i=0}^{r} i P_i / \sum_{i=0}^{r-i} P_i$$

から暗示される.

αの新近分散は

(39)
$$V(\chi) = \left[\sum_{i=0}^{\gamma} i^2 P_i - \left(\sum_{i=0}^{\gamma} i P_i\right)^2\right] / n \left(\sum_{i=0}^{\gamma-1} P_i\right)^2$$

で与えられる.

その後、Moore [32]は、左側及び両側censored の場合に対しても、この推定量と類似の推定量を与えた。しかし Moore の与えた推定量は、アが小さいか又はんが大きい場合には、効率がかなり悪くなる。

§ 3. その他の分布に対する母数排定

ピアソンのⅢ型分布

この分布からの truncated 標本又は censored 標本^(建7)による 日数推定は Cohen [5], Des. Raj [36], Den. Broeder [15] によって論ぜられた。 Cohen はピアソン 皿型分布を,平均値 μ ,標準偏差の及び三次の標準積率 α_3 を含む一般形で与え, α_3 が既知の場合と未知の場合について,左側 truncated 標本による μ とのの積率推定法を述べた。推定値の計算を容易にするためのグラフも与えられた。 Des. Raj は,極めて一般的な結果を与えた。即ち彼は α_3 が既知のとき,片側及び両側 truncated 標本の場合と,片側及び両側 censored 標本の場合において, μ とのの最尤推定と積率推定による推定式を与えた。 α_3 が未知の場合には,片側の場合について,同称な推定式を与えた。 Den. Broeder は,ガンマ型分布

$$\phi(t, \lambda) = \lambda f(\lambda t) = \left[\Gamma(p) \right]^{-1} \lambda^{p} t^{p-1} e^{-\lambda t}$$

(40)

$$(t \ge 0, d > 0, p > 0)$$

について、pが旣知であることを仮定して,右側 truncated,右側 censored ,左側 truncated ,左側 censored のそれぞれの場合における以の最尤推定法を与えた。

指数分布

指数分布

(41)
$$f(x) = ce^{-cx} \qquad 0 < x < \infty; c > 0$$

からの右側truncated標本と右側truncated標本と右側truncated標本と右側truncated標本と右側truncated標本と右側truncated標本と右側truncated標本と右側truncated標本と右側truncated標本と右側truncated標本と右側truncated標本と右側truncated標本による母数truncated である。

[[]註7] 本節で用いられる censored 標本はすべて Type I censored 標本である.

(28)

(42)
$$\frac{\overline{x}}{x_0} = \frac{1}{\hat{c}x_0} - \frac{1}{e^{\hat{c}x_0} - 1}$$

(43)
$$\hat{c} = a \left[(n-a) x_o + \sum_{i=1}^{a} x_i \right]^{-1}$$

ここに, x。は切断点, n は標本の大きさ, (n-a) は censored データの大きさである.

ĉと^Ĉのそれぞれの漸近分散は

(44)
$$V(\hat{c}) = \left[e^{-2} - \chi_0^2 e^{-cx_0} \left(1 - e^{-cx_0} \right)^{-2} \right]^{-1} \eta^{-1}$$

(45)
$$V(\hat{c}) = C^2 (1 - e^{c x_0})^{-1} n^{-1}$$

で与えられる。

(42)-(45) は Deemer & Votaw [50] によって導かれた、彼等は(42)から合を求める表を与えた。

指数分布はガンマ分布の特別な場合(p=1) であるから,(42)-(45) は Den Broeder が与えた,右側 truncate 及び censored の場合の最尤推定式で, p=1 とおいてもポめられる。ガンマ分布や指数分布からの censored 標本より,母数を推定する向題は,寿命試験や刺戟に対する反応時间の研究等においてしばしば起るであろう。

Cohen [9]は、標的分析への応用に関連して興味ある问題を論じた。

 x_j $(j=1,2\cdots p)$ を $N(0,0^2)$ に従う独立な変量とするとき, p 次元半径誤差 $\gamma=\sqrt{x_i^2+x_2^2+\cdots+x_p^2}$ の分布は

$$(46) f_{p}(\gamma) = \frac{2^{-(p-2)/2}}{\sigma \Gamma(P/2)} \left(\frac{\gamma}{\sigma}\right)^{p-1} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right)^{2}\right] 0 \le \gamma \le \infty$$

で与えられる.

Y=2 の場合には

(47)
$$f_2(\gamma) = (\gamma/\sigma^2) \exp[-(\gamma/\sigma)^2/2]$$

(47) は平面標的において,目標点と着弾点の距离を下としたときの,下の分布である。

Cohen はカイ分布(46)からのtruncated 標本とcensored 標本による母数のの最尤推定を述べる。p=2 でのcensored の場合には、最尤解が explicit な形で与えられ

二変数正規分布

一つの変数エについての検査の結果,その値が前以て定められた一定値 χ_0 より大きな個体は除去し, χ_0 より小さな個体は,もう一つの変数 χ について観測するいま, χ と χ 0分布が二次元正規分布をするときこのようにして得られた標本データは,二次元正規分布からの左側truncated 又は censored 標本と呼ばれる。truncated 又は censored 標本から,元の二次元正規分布の母数を推定する问題は,例えば,入学試験の点数が入学後の学期試験の点数に関係する相関の研究や,受入検查資料の分析等において必要となる。この場合の母数の推定は,Des. Raj [37] と Cohen [10] によって与えられた。Des. Raj は片側と両側の truncated 標本と censored 標本による,二次元正規分布の母数の,最尤推定を論じた。一次元正規分布の場合と同じ称に,最尤法と積率法が同一の推定量を与えることが証明された。truncated と censored のそれぞれの場合に対して,最尤解をボめる推定方程式と,最尤解の漸近分散行列が与えられる。Cohen は左側truncated 及びcensored の場合の最尤推定を大変うまい方法で与えた。元の二次元正規分布の母数を, χ_0 0分元。元の二次元正規分布の母数を, χ_0 1分元, χ_0 2分元。元の二次元正規分布の母数を, χ_0 3分元, χ_0 4分元。

$$\hat{m}_{y} = \overline{y} - \overline{Y} (\overline{S}_{y}/\overline{S}_{x}) (\overline{x} - \hat{m}_{x})$$

$$\hat{\sigma}_{y} = \overline{S}_{y} \sqrt{[1 - \overline{\lambda}(1 - \overline{Y}^{2})]/(1 - \hat{\lambda})}$$

$$\hat{\rho} = \overline{Y} / \sqrt{1 - \hat{\lambda}(1 - \overline{Y}^{2})}$$

$$\stackrel{\square}{=} 1 - \overline{S}_{x}^{2} / \hat{\sigma}_{x}^{2}.$$

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_{i}/n, \quad \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} y_{i}|n, \quad S_{x}^{2} = \sum_{i=1}^{n} (x_{i} - \overline{x})^{2}/n,$$

$$(49)$$

$$S_{y}^{2} = \sum_{i=1}^{n} (y_{i} - \overline{y})^{2}/n, \quad \overline{Y} = \sum_{i=1}^{n} (x_{i} - \overline{x})(y_{i} - \overline{y})/n\overline{S}_{x}\overline{S}_{y}$$

 $\hat{\mathfrak{m}}_x$ と $\hat{\mathfrak{G}}_x$ は一次元正規分布における truncated 又は censored の場合の推定式(3), (4)又は (9), (10)(或は (16), (17))によってボめられる。これを (48) に代入して, $\hat{\mathfrak{m}}_y$, $\hat{\mathfrak{G}}_y$, $\hat{\mathfrak{f}}$ がボまる。 (49) における n は truncated の場合には全標本数を, censored の場合には censored データの個数を表わすものとする。更に最尤推定量の漸近分散行列も一次元正規分布の場合の,分散行列の成分要素によって,比較的简単な形で与えられる。

二項分布

x=0 から x=k-1 までの & 個のクラスが truncate した truncated二項分布は

(50)
$$P'_{x} = \frac{N!}{N!(N-x)!} p^{x} (1-p)^{N-x} \qquad (x = 0,1,2,\dots,n)$$

この分布からの大きされのtruncated標本による,母数pの最尤解を求める方程式は

(51)
$$\frac{\sum_{x=K}^{N} x n_{x}}{n} = \frac{N\hat{p} - \sum_{o}^{K-1} \frac{N! x}{x!(N-x)!} \hat{p}^{x} (1-\hat{p})^{N-x}}{1 - \sum_{o}^{K-1} \frac{N!}{x!(N-x)!} \hat{p}^{x} (1-\hat{p})^{N-x}}$$

で与えられる。

truncated 二項分布の母数推定は、Fisher [20]、Finney [17]、Rider[39]、Hamada [29]、Moore [32] によって取扱われた。Fisher は最光解を与えた。Finney は(51)から p を逐次的にボめる方法を示し、それに必要な表を与える。Rider と Moore は truncated ポアソンの場合に用いた推定量と同称な考えで、それぞれ積率推定量を与える。Hamada は一般的なタイプの truncated 標本と censored 標本による、p の最尤推定を与える。

○点のみが観測されてない,いわゆる○点 truncated 二項分布は,遺伝学的研究で生する.例えば,親がある遺伝原質をもっているとき,ある異常性を受けつぐ子供の比率を推定したいとする.ところで,家族の子供のうち少くとも一人が,问題の性格をもつときにだけ,その遺伝原質の存在がわかる.故に親が原質をもち,子供がN人いる家族で,问題の性格をもつ子供は一人もいないという家族の数はわからない.従って,この場合には,○点 truncated 二項分布が適切なモデルとして用いられる.

Rider と Moore が与える推定量は、計算が至つて简単で、最尤解のように特別な表を必要としない。しかし分散は示されていない。それらの推定量をそれぞれ λ'_R 及び λ'_M とすれば

(52)
$$\lambda_{R}^{'} = \frac{T_{2} - \frac{1}{R}T_{1}}{(N-1)T_{1} - (\frac{1}{R}-1)NT_{0}}$$

$$\mathbb{U}_{L}, \quad T_{0} = \sum_{x=k}^{N} n_{x}, \quad T_{1} = \sum_{x=k}^{N} \chi n_{x}, \quad T_{2} = \sum_{x=k}^{N} \chi^{2} n_{x}.$$

(53)
$$\lambda'_{M} = \sum_{x=k+2}^{N} \frac{\chi n_{x}}{N-\chi+1} / \left\{ \sum_{x=k+1}^{N-1} n_{x} + \sum_{x=k+2}^{N} \frac{\chi n_{x}}{N-\chi+1} \right\}$$

員の二項分布

O点がtruncate した負の二項分布の母数推定は,David & Johnson [14],Sampford [40],Rider [39]によって取扱われた。David & Johnson は,最尤推定量と積率推定量を与えた。彼の積率推定量には3次の標本積率が含まれるので,最尤解に対する相対効率は,非常に悪い。彼はこの場合最尤解で推定すべきであることを述べ,最尤解の計算を容易にするための表を与えた。Sampford も最尤解と積率推定を与えた。彼の積率推定量は,一次と二次の標本積率のみを含むから,David & Johnson のそれ程には効率は悪くないが,推定値の計算は逐次近似か又は試行錯誤かのいずれかで,行われるので,简単であるとはいえない。Rider は,truncatedポアソン及びtruncated 二項分布の母数推定で用いた方法を,この場合にも適用して,一つの推定量を与える。しかし,この場合にも,推定量の精度に関して,理論的な考察を行っていない。

§ 5. 結 言

truncated 標本とcensored標本に関する理論は実際の具体的问題を背景にして、ここち、6年の间に急速に発展してきた新しい統計的手法である。発表された論文の多くは、これまで述べたように基本的な分布に対する母数の最尤推定法又は積率推定法に関するものであった。しかし、83でも指摘したように、小標本の場合には、最尤推定量は偏りがあるし、その漸近分散も使えない。小標本の場合には、最大推定量は偏りがあるし、その漸近分散も使えない。小標本のはおける推定の问題は、83で述べたように Gupta によってはじめて論ぜられたが、その後殆んど取上げられていない。 censored標本は本質的には順序統計量に関する理論が更に有効に利用できるのではないだろうか? Gupta の最良線型不偏推定量の理論もこの一つのあらわれと見做せるであろう。小標本の立場にたつとき、重要だが未解決の问題として、次の问題が考えられる。それは、truncatedな正規分布からの標本平均は、どれ位の標本数に対して実用上正規分布をすると見做し得るかという问題であるの場合、或は分布が二項分布、ポアソン分布の場合への拡張も当然必要となる。の場合、或は分布が二項分布、ポアソン分布の場合への拡張も当然必要となる。あろう。これが解決されれば、推定だけでなく検定にも利用できることになる。

- [1] Birnboum. Z.W. Effect of linear truncation on a multi-normal population. Ann. Mach. Statist. 21(1950).
- [2] Bliss.C.I. Estimation of the mean and its error from incomplete poisson distributions. Bull. Conn. Agric. Exp. Sta. no. 513 (1948).
- [3] Cohen A.C. Jr. On estimating the mean and standard deviation of truncated normal distributions. J. Amer. Statist. Ass. 44(1949).
- [4] Cohen. A.C. Jr. Estimating the mean and variance of a normal distribution from singly truncated and doubly truncated samples. Ann. Math. Statist. 21 (1950).
- [5] Cohen. A.C. Jr. Estimating parameters of Pearson type III population from truncated samples. J. Amer. Statist. Ass. 45(1950).
- [6] Cohen. A. C. Jr. Estimation of parameters in truncated Pearson frequency distributions. Ann. Math. Statist. 22(1951).
- [7] Cohen. A.C. Jr. Estimating parameters in truncated Pearson frequency distributions without resort to higher moments. Biometrika, 40(1953).
- [8] Cohen. A.C. Jr. Estimation of the Poisson parameter in truncated samples. J. Amer. Statist. Ass. 49 (1954).
- [9] Cohen. A. C. Jr. Maximum likelihood estimation of dispersion parameter of a chi-distributed radial error from truncated and censored samples with applications to target analysis. J. Amer. Statist. Ass. 50(1955).
- [10] Cohen A.C. Jr. Restriction and selection in samples from bivariate normal distributions. J. Amer. Statist. Ass. 50 (1955).
- [11] Cohen A.C. Jr. Censored samples from truncated normal distributions. Biometrika, 42 (1955).
- [12] Cohen. A. C. Jr. and Woodward J. Tables of Pearson-Lee-Fisher functions of singly truncated normal distributions. Biometrics, 9 (1953).
- [13] David. F. N. and Johnson. N.L. The truncated Poisson. Biometrics, 8 (1952).
- [14] David F.N. and Johnson N.L. Statistical treatment of censored data, Part 1.

 Fundamental formulae. Biometrika, 41 (1954).
- [15] Den Broeder. G. G. On parameter estimation for truncated Pearson type I dis-

- tributions. Ann. Math. Statist. 26 (1955).
- [16] Epstein B. and Sobel M. Life testing. J. Amer. Statist. Ass. 48 (1953).
- [17] Finney D. J. The truncated binomial distribution. Ann Eugen Lond. 14(1949).
- [18] Finney D. J. and Varley 6 C. An example of the truncated Poisson distribution.

 Biometrics, 11 (1955).
- [19] Fisher R.A. Contribution to the introduction to the British Association Mathematical Tables, 1, 1st ed. (1931) [Reprinted in "Contributions to mathematical statistics" 1950. New York: Wiley].
- [20] Fisher R. A. The effects of method of ascertainment upon estimation of frequencies. Ann. Eugen. Lond. 6(1936).
- [21] Gjeddebsek N.F. Contribution to the study of grouped observations application of the method of maximum likelihood in case of normally distributed observations. Skand Aktuar Tidskr. (1949).
- [22] Godwin, H. J. Some low moments of order statistics. Ann. Math. Statist. 20 (1949).
- [23] Grundy P.M. The fitting of grouped truncated and grouped censored normal distributions. Biometrika, 39(1952).
- [24] Gupta A.K. Estimation of the mean and standard deviation of a normal population from a censored sample. Biometrika, 39 (1952).
- [25] Hald.A. Maximum likelihood estimation of the parameters of a normal distribution which is truncated at a known point. Skand. Aktuar-Tidskr. (1949).
- [26] Hald A. "Statistical tables and formulas." John Wiley and Sons, New York. (1952).
- [27] Halperin M. Estimation in the truncated normal distribution. J. Amer. Statist. Ass. 47 (1952).
- [28] Halperin M. Maximum likelihood estimation in truncated samples. Ann. Math. Statist. 23 (1952).
- [29] Hamada J. Estimation of the binomial parameter from truncated samples. 香 川大学芸学部研究報告11(1955).
- [30] Ipsen Johannes. Jr. A practical method of estimating the mean and standard deviation of truncated normal distributions. Human Biology, 21 (1949).
- [31] Moore P.G. The estimation of the Poisson parameter from a truncated distribution. Biometrika, 39(1952).

- [32] Moore P.G. A note on truncated Poisson distributions. Biometrics, 10 (1954).
- [33] Murakami. M, Asai. A and Kawamura. M. The estimation of the poisson parameter from a truncated distribution and a censored sample. Journal of the College of Arts and Science, Chiba University, No. 3. (1954).
- [34] Pearson. K. and Lee. A. On the generalized probable error in multiple normal correlation. Biometrika, 6(1908).
- [35] Placket. R.L. The truncated Poisson distribution. Biometrics, 9(1953).
- [36] Raj. Des. Estimation of the parameters of type II populations from truncated samples. J. Amer. Statist. Ass. 48 (1953).
- [37] Raj Des. On estimating the parameters of bivariate normal populations from doubly and singly, linearly truncated samples. . Sankya, 12(1953).
- [38] Rider P.R. Truncated Poisson distributions. J. Amer. Statist. Ass. (1953).
- [39] Rider P. R. Truncated binomial and negative binomial distributions. J. Amer. statist. Ass. (1953).
- [40] Sampford M.R. The truncated negative binomial distribution. Biometrika, 42 (1954).
- [41] Sampford M.R. The estimation of response-time distributions. Il truncation and survival. Biometrics, 10 (1954).
- [42] Sarhan. A.E. and Greenberg B.G. Estimation of location and scale parameters by order statistics from singly and doubly censored samples. Part I. The normal distribution up to samples of size 10. (abstract) Ann. Math. Statist. 26 (1955).
- [43] Sarhan A.E. and Greenberg B.G. Estimation of the parameters of the one- and two-parameter single exponential distributions from singly and doubly censored samples. (abstract) Ann. Math. Statist. 26 (1955).
- [44] Stevens.W.L. The truncated normal distribution. (Appendix to paper by Bliss. C.

 I. on: The calculation of the time mortality curve.) Ann. Appl. Biol. 24(1937).
- [45] 田口玄一. "推計学による寿命実験と推定法" 科学新興社(1951).
- [46] 田坂誠男,中上節夫. truncated e censored sample の推定の问題に就ての文献、大阪産業能率研究所(1955).
- [47] 戸田英雄、正規母集团からの truncated の標本で母数を推定する问題の紹介、日本規格協会研究資料(1956).
- [48] Thompson. H. R. Truncated lognormal distribution I solution by moment. Bi-

ometrika 38 (1951).

- [49] Walsh J.E. Some estimate and test based on the r smallest values in a sample.

 Ann. Math. Statist. 21 (1950).
- [50] Deemer W.L.Jr. and Votaw.D.F.Jr. Estimation of parameters of truncated or censored exponential distributions. Ann. Math. Statist. 26(1955).
- [51] Tippett.L.H.C.: A modified method of couning particles. Proc.Roy Soc. Series A, 137 (1932).

誌 上 問 答

[1.2.1] 二つの茶品を併用した場合に、相加作用、相乗作用、拮抗作用などといいますが、この定義も色々とある旅ですし、その意味もはっきりしませんが、(福岡、M生)

【回答】 繁品の殺菌或は殺虫剤の効力などは Probit analysisという方法で統計解析が可能で, この方面の本としては

D.J. Finney: Probit Analysis. 1952 (CAMBRIDGE). があります。二つの荒品の併用の向題は、この本では非常に尚単な記述があるだけで、1948年及1950年に出た論文 (P.S. Hewlett & R.L. Plackett) が短く引用してあります。Probit Analysis では或る菜品を入だけ与えたことによる効果即ち死亡率をP(A)とすると、Log Normal の法則が成立する

(1)
$$P(\lambda) = \int_{-\infty}^{\log \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X-m)^2} d\lambda.$$

(但し、 m及びのは母集团及び茶品の種類により 定まる常数)となるというのが基本的仮定で、 前 述の論文はこれの直接的な二次元正規分布への拡 張がモデルになっているようです。

御質同の相加、相乗、拮抗を夫々二次元に拡張したモデルでの独立性、正相関、質相関と同じであるとすれば、前述の論文の方法を使うことも出
素るわけです、増山先生の拮抗作用と相乗作用の 刺り方(品質管理、Vol.6. No.4)に出ている方法が 使えるわけです.

今二つの菜品を夫々入,µ だけの量を,別々及び 併用して与えた時の死亡率を,夫々

 $P(\lambda, 0)$. $P(0, \mu)$. $P(\lambda, \mu)$

とすると、独立の時には

- (2) $P(\lambda,\mu) = P(\lambda,0) + (1-P(\lambda,0)) P(0,\mu)$ 80 5
- (3) I-P(λ,μ) = (I-P(λ,0))(I-P(0,μ))
 とな , 正相関、質相関の時には夫々石辺及左辺の方が大きくなります。

増山先生の論文には P(λ,μ) が二次元の Log normal ではうまくあてはまらなかった例が述べられておりますので(3) 関係を直接検定することが出来ることが望ましいのですが、その万法は現在の所ないなです。然し色々な入及μの値の組合せでデーターを取ってしらべて見ると、すべての場合に右辺が大きく出て正の相関性がはつきりあらわれることもあります。次に、相加性を独立性と同称に解することは何といっても理解し難いことで、今、α(λ)及b(μ)を入、及μの函数で

 $P(\lambda,0)=P(0,\alpha(\lambda)),\ P(0,\mu)=P(b(\mu),0)$ を以て定義されているとするとき

 $P(\lambda,\mu) = P(\lambda + b(\mu), 0)$

或は $P(\lambda,\mu) = P(0,\mu+\alpha(\lambda))$

を以て相加性の定義とすることも考えられます。この问題は今後考究されなければならぬ问題であります。