ある確率過程についての推測と予報

小河原, 正巳
東京女子大学 | 気象研究所

https://doi.org/10.15017/12716

出版情報：統計科学研究. 1 (1), pp.10-20, 1956-01. Research Association of Statistical Sciences
バージョン：
権利関係：

ある確率過程についての推測と予報

小河原正巳（気象研・東京女子大）

1. 緒言

$x(t)$ は（広義）定常な実確率過程で $Ex(t)=0$, $Vx(t)=1$ とする．われわれがこれから取扱うのはこれが次の性質をもつ場合である：

1）スペクトル函数は絶対連続で

$$F'(\lambda)=1/\left|\sum_{j=0}^{h} a_j (i\lambda)^j\right|^2, \quad (-\infty<\lambda<\infty) \tag{1.1}$$

$$a_0\ a_h \neq 0$$

と表わせる．こゝに $a_j\,(j=0,1,\cdots,h)$ は実常数で

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{j=0}^{h} a_j (i\lambda)^j = 0 \text{ の根は全部上半} \\ \text{平面上にある（実根はない）}\end{array}\right\} \tag{1.2}$$

とする．もちろん，全部下半平面上にあるとしてもよいのであるが，こゝでは一応上のように仮定する．

2）自己相関函数は

$$\rho(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda}\frac{d\lambda}{|\Sigma a_j (i\lambda)^j|^2} \tag{1.3}$$

と表わされ，従ってこれは $\tau\neq 0$ では何回でも可微分であるが，$\tau=0$ では

$$\left.\begin{array}{ll}\rho^{(j)}(0+)-\rho^{(j)}(0-)=0 & j=0,1,\cdots,2h-2 \\ \qquad =(-1)^h/a_h^2, & j=2h-1.\end{array}\right\} \tag{1.4}$$

$$\sum_{j=0}^{h} a_j\, \rho^{(j)}(\tau)=0, \qquad \tau>0, \tag{1.5}$$

$$\sum_{j=0}^{h} (-1)^j a_j\, \rho^{(j)}(\tau)=0, \quad \tau<0. \tag{1.6}$$

なお (1.3) でも実常数 $a_j\,(j=0,1,\cdots,h)$ は条件 (1.2) を満すものとしているのである．

以上２つの性質 (1.1) と (1.3) は同等であって一方から他が導かれることはいうまでもない[1]．

M. Ogawara, *Statistical Inference and Prediction of a Stochastic Process.*

こゝでは，このような確率過程の，有限な時間において与えられた， 1つの標本函数に基いて母数 $a_0, a_1, \cdots, a_k$ あるいは自己相関函数 $\rho(\tau)$ を推測することと，$x(+)$ を予報することを問題にする．そのために結局われわれは以下において，上記の性質に加えて，$x(t)$ の確率法則の正規性を仮定する．

なお，本稿の一部分に関連した事柄を，筆者は既に発表したことがあるが，[2]それには不適当な点があったので，この際訂正しておきたいと思う。

2．確率過程の方向

正規確率過程の確率法則は2次までのモメント函数で定まるから，[3]前節の性質をもつ定常正規実過程は1つ唯1つ存在する．しかしその過程を直接解析的に記述する方法は2つある．物理的に言えば，その1つは将来に向つての過程で，他の1つは過去へ向っての過程と言うことができよう．

$Z(t)$ を $(-\infty,\infty)$での Brown 運動とし

$E(Z(t_2)-Z(t_1))=0,\ E(|Z(t_2)-Z(t_1)|^2)=2\pi(t_2-t_1),\ (t_1<t_2)$ として，この$Z(t)$ の Fourier 変換を $\overset{*}{Z}(t)$ とすれば，これも Brown運動で，周知のように

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\ \frac{dZ^*(\lambda)}{\Sigma a_j(i\lambda)^j} \tag{2.1}$$

は前節の性質をもち，確率1で次の方程式を満足

$$\sum_{j=0}^{k-1}a_j\int_{-\infty}^{\infty}f^*(t)x^{(j)}(t)dt+a_k\int_{-\infty}^{\infty}f^*(t)dx^{(k-1)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f^*(t)\,dZ(t), \tag{2.2}$$

この方程式は任意のある有限閉区間で連続で，かつ連続な導函数をもち，その区間の外で0であるような任意の函数 $f^*(t)$ に対して成立つものである．またこの

$$E\{[Z(t_2)-Z(t_1)]\,x(t)\}=0,\quad t\leqq t_1<t_2. \tag{2.3}$$

方程式(2.2)は簡単のため形式的にこれを

$$a_0x(t)+a_1x'(t)+\cdots+a_kx^{(k)}(t)=Z'(t) \tag{2.2'}$$

とかくことがある．

$$\Psi(\lambda)=1\Big/\sum_{j=1}^{k}a_j(i\lambda)^j \tag{2.4}$$

は実軸および下半平面上で正則で零点をまたないから[4],[5]

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi}\ \underset{A\to\infty}{l.i.m}\int_{-A}^{A} e^{i\lambda t}\,\Psi(\lambda)\,d\lambda=0,\quad t<0 \tag{2.5}$$

であって,

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}\psi(t-\tau)\,dZ(\tau) \tag{2.6}$$

はスペクトラム(1.1),自己相関(1.3)をもつ.すなわち,この $x(t)$ は方程式(2.2)の1つの解である.そしてこの $\psi(t)$ は初期条件

$$\psi^{(j)}(0+)=0\ (j=0,1,\cdots,h-2),\quad \psi^{(h-1)}(0+)=1/a_h \tag{2.7}$$

の下での,微分方程式

$$a_0\psi(t)+a_1\psi'(t)+\cdots+a_h\psi^{(h)}(t)=0,\ t>0 \tag{2.8}$$

の解になっている.

そこでこんどは

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda}\frac{dZ^*(\lambda)}{\Sigma a_j(-i\lambda)^j} \tag{2.9}$$

を考えると,これもわれわれの指定したスペクトラムと自己相関をもつもので,微分方程式

$$a_0x(t)-a_1x'(t)+\cdots+(-1)^h a_h x^{(h)}(t)=Z'(t) \tag{2.10}$$

を満足し,$Z(t)$ の過去の増分は将来の $x(t)$ とは独立である:

$$E\{[Z(t_2)-Z(t_1)]x(t)\}=0,\quad t_1<t_2\leqq t. \tag{2.11}$$

何んとなれば,(2.10)を(2.2)のように書き $f^*(t)=1$ $(t_1<t<t_2)$, $=0$ $(t\leqq t_1$ 又は $t_2\leqq t)$ とすれば

$$E\{[Z(t_2)-Z(t_1)]x(s)\}$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=0}^{h-1}(-1)^j a_j(-1)^j\rho^{(j)}(s-t)dt+(-1)^h a_h\left[(-1)^{h-1}\rho^{(h-1)}(s-t_2)-(-1)^{h-1}\rho^{(h-1)}(s-t_1)\right]$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}dt\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sum_{j=0}^{h-1}a_j(i\lambda)^j}{|\sum_j a_j(i\lambda)^j|^2}\,e^{i\lambda(s-t)}d\lambda+\int_{t_1}^{t_2}dt\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a_h(i\lambda)^h}{|\sum_j a_j(i\lambda)^j|^2}\,e^{i\lambda(s-t)}d\lambda$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(s-t)}}{\Sigma a_j(-i\lambda)^j}\,d\lambda$$

こゝで被積分函数は上半平面で正則であるから,$t_1<t<t_2\leqq s$ に対しては,留数

計算によりこの積分が0となることがわかる．なお上の計算で $E\{x^{(j)}(t)x(s)\} = (-1)^j \rho^{(j)}(s-t)$ なる公式を使っている（この式の証明は次節で述べる）。次に(2.5)に対応して，こんどは $\overline{\Psi}(\lambda)=1/\Sigma a_j(-i\lambda)^j$ は実軸および上半平面上で正則で零点をもたないから

$$\psi_1(t)=\frac{1}{2\pi}\ \underset{A\to\infty}{l.i.m.}\int_{-A}^{A} e^{i\lambda t}\ \overline{\Psi}(\lambda)\,d\lambda=0,\quad t>0. \tag{2.12}$$

従って

$$x(t)=\int_t^{\infty}\psi_1(t-\tau)\,dZ(\tau) \tag{2.13}$$

が性質(1.1), (1.3)をもつものとなる．明かに

$$\psi_1(t)\equiv\psi(-t) \tag{2.14}$$

である．

なお，これは当然のことではあるが，$x_1(t)\equiv x(-t)$ なる過程を作ったのでは，同じものを時間座標の向きを変えて表現しただけで，本質的に逆向きの過程にはならない。

3．条件付独立

初期条件

$$x^{(j)}(t_1)=x_{t_1}^{(j)}\qquad (j=0,1,\cdots,k-1) \tag{3.1}$$

の下での方程式(2.2)の解は $t>t_1$ に対し

$$x(t)=\sum_{j=1}^{k}\Big(\sum_k c_{jk}\,e^{u_k(t-t_1)}\Big)x_{t_1}^{(j-1)}+\int_{t_1}^{t}\psi(t-\tau)\,dZ(\tau) \tag{3.2}$$

で与えられる[1] こゝに u_k は $\sum_{j=0}^{k}a_j u^j=0$ の根で，(1.2)によりその実数部分は負である．u_k が m 重根のとき c_{jk} は t の m-1 次の多項式で，その係数は t_1 と u_k $(k=1,2,\cdots)$ の函数である．

(2.3)により，この $x(t)$ $(t>t_1)$ は $x(s)$ $(s<t_1)$ とは独立である．

全く同様にして，初期条件

$$x^{(j)}(t_2)=x_{t_2}^{(j)}\qquad (j=0,1,\cdots,k-1) \tag{3.3}$$

の下での，逆向き方程式(2.10)の解は，$t<t_2$ に対し

$$x(t)=\sum_{j=1}^{k}\Big(\sum_k c_{jk}^{*}\,e^{u_k(t_2-t)}\Big)x_{t_2}^{(j-1)}+\int_t^{t_2}\psi_1(t-\tau)\,dZ(\tau), \tag{3.4}$$

こゝに c_{jk}^{*} は c_{jk} で u_k の代りに $-u_k$ をおきかえたものである．また(2.14)に

により $\psi_1(t-\tau)$ は $\psi(\tau-t)$ でおきかえてもよい．この(3.4)と(2.11)とから，(3.3)の條件の下では，$x(t)\,(t<t_2)$ は $x(s)\,(s>t_2)$ と独立である．

これを要するに，

$$x^{(j)}(t_0)=x_{t_0}^{(j)} \quad (j=0,1,\cdots,h-1) \tag{3.5}$$

を与えれば $s<t_0<t$ に対し $x(s)$ と $x(t)$ は独立になるのであるが，(3.5)の $x(t)$ に対する影響は(2.2′)の解(3.2)（$t_1=t_0$ とおく）で示され，(3.5)の $x(s)$ に対する影響は(2.10)の解(3.4)（$t_2=t_0$ とおく）で与えられることになるのである．

更に次の定理が成立つ．

定理1．定常正規実過程 $x(t)$ のスペクトラムが(1.1)で与えられたとする．$t_1<t_2$ に対し

$$C:\ x^{(j)}(t_1)=x_{t_1}^{(j)},\quad x^{(j)}(t_2)=x_{t_2}^{(j)} \quad (j=0,1,\cdots,h-1) \tag{3.6}$$

を与えたとき，(i) $x(t)\ (t_1<t<t_2)$ は正規分布に従いその條件付期待値は

$$E\{x(t)|C\}=m+\sum_{j=1}^{h}\left\{C_j(t)(x_{t_1}^{(j-1)}-m)+C_{h+j}(t)\left(x_{t_2}^{(j-1)}-m\right)\right\} \tag{3.7}$$

條件付分散は

$$V\{x(t)|C\}=\sigma^2\Delta/\Delta_{11} \tag{3.8}$$

で与えられる．たゞしこゝに $m=Ex(t),\ \sigma^2=Vx(t)$ で，

$$\Delta=\begin{vmatrix}
1 & \rho(t-t_1) & -\rho'(t-t_1) & \cdots & (-1)^{h-1}\rho^{(h-1)}(t-t_1) & \rho(t_2-t) & \rho'(t_2-t) & \cdots & \rho^{(h-1)}(t_2-t)\\
\rho(t-t_1) & 1 & (-1)^{\frac{1}{2}}\rho'(0) & \cdots & (-1)^{\frac{h-1}{2}}\rho^{(h-1)}(0) & \rho(t_2-t_1) & \rho'(t_2-t_1) & \cdots & \rho^{(h-1)}(t_2-t_1)\\
-\rho'(t-t_1) & (-1)^{\frac{1}{2}}\rho'(0) & (-1)^{\frac{2}{2}}\rho''(0) & \cdots & (-1)^{\frac{h}{2}}\rho^{(h)}(0) & -\rho'(t_2-t_1) & -\rho''(t_2-t_1) & \cdots & -\rho^{(h)}(t_2-t_1)\\
\rho''(t-t_1) & (-1)^{\frac{2}{2}}\rho''(0) & (-1)^{\frac{3}{2}}\rho'''(0) & \cdots & (-1)^{\frac{h+1}{2}}\rho^{(h+1)}(0) & \rho''(t_2-t_1) & \rho'''(t_2-t_1) & \cdots & \rho^{(h+1)}(t_2-t_1)\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
(-1)^{h-1}\rho^{(h-1)}(t-t_1) & (-1)^{\frac{h-1}{2}}\rho^{(h-1)}(0) & (-1)^{\frac{h}{2}}\rho^{(h)}(0) & \cdots & (-1)^{h-1}\rho^{(2h-2)}(0) & (-1)^{h-1}\rho^{(h-1)}(t_2-t_1) & (-1)^{h-1}\rho^{(h)}(t_2-t_1) & \cdots & (-1)^{h-1}\rho^{(2h-2)}(t_2-t_1)\\
\rho(t_2-t) & \rho(t_2-t_1) & -\rho'(t_2-t_1) & \cdots & (-1)^{h-1}\rho^{(h-1)}(t_2-t_1) & 1 & (-1)^{\frac{1}{2}}\rho'(0) & \cdots & (-1)^{\frac{h-1}{2}}\rho^{(h-1)}(0)\\
\rho'(t_2-t) & \rho'(t_2-t_1) & -\rho''(t_2-t_1) & \cdots & (-1)^{h-1}\rho^{(h)}(t_2-t_1) & (-1)^{\frac{1}{2}}\rho'(0) & (-1)^{\frac{2}{2}}\rho''(0) & \cdots & (-1)^{\frac{h}{2}}\rho^{(h)}(0)\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\rho^{(h-1)}(t_2-t) & \rho^{(h-1)}(t_2-t_1) & -\rho^{(h)}(t_2-t_1) & \cdots & (-1)^{h-1}\rho^{(2h-2)}(t_2-t_1) & (-1)^{\frac{h-1}{2}}\rho^{(h-1)}(0) & (-1)^{\frac{h}{2}}\rho^{(h)}(0) & \cdots & (-1)^{h-1}\rho^{(2h-2)}(0)
\end{vmatrix} \tag{3.9}$$

Δ_{pq} は Δ における (p,q) 元の余因子で

$$C_j(t)=-\Delta_{1,j+1}/\Delta_{11} \quad (j=1,2,\cdots,2h) \tag{3.10}$$

(ii) この条件付確率変数 $x(t)$ は $x(s)(s<t_1)$ とも $x(s)(s>t_2)$ とも独立である．

$$x(t),\ x(t_1),\ x'(t_1),\ \cdots,\ x^{(h-1)}(t_1),\ x(t_2),\ x'(t_2),\ \cdots,\ x^{(h-1)}(t_2)$$

が $2h+1$ 次元正規分布に従うことは明かであるから，この定理の前半の証明には，次の補題を証明すれば十分である．

補題．定常過程 $x(t)\,(-\infty<t<\infty)$ が何回か自乗平均可微分ならば，$Ex(t)=0$, $Vx(t)=1$ とするとき，

$$E\{x^{(n)}(t)\,x^{(n')}(t-\tau)\}=(-1)^{n'}\rho^{(n+n')}(\tau),\quad \tau>0 \tag{3.11}$$

$$E\{x^{(n)}(t)\,x^{(n')}(t)\}=\begin{cases}0, & n+n'=\text{奇数のとき}\\ (-1)^{\frac{n+n'}{2}}\rho^{(n+n')}(0), & n+n'=\text{偶数のとき}\end{cases} \tag{3.12}$$

証明．　$E\{x(t+\tau)\,x(t)\}=\rho(\tau)\quad(\tau>0)$.

両辺を τ で n 回微分すると，左辺では E と微分とは交換できるから

$$E\{x^{(n)}(t+\tau)\,x(t)\}=\rho^{(n)}(\tau).$$

$x^{(n)}(t)$ も定常であるから

$$E\{x^{(n)}(t)\,x(t-\tau)\}=\rho^{(n)}(\tau).$$

τ で n' 回微分すると

$$(-1)^{n'}E\{x^{(n)}(t)\,x^{(n')}(t-\tau)\}=\rho^{(n+n')}(\tau).$$

すなわち (3.11) を得る．次に

$$(-1)^{n}\rho^{(n+n')}(-\tau)=(-1)^{n'}\rho^{(n+n')}(\tau),\quad \tau>0$$

であるから，$\rho^{(n+n')}(\tau)$ の $\tau=0$ における連続性を使えば (3.12) を得る．(3.9) で $(-1)^{\frac{1}{2}}\rho'(0)$, $(-1)^{\frac{3}{2}}\rho'''(0)$ などは実はすべて 0 である．

定理の後半の証明は次のような方針でなされる．$x(t),\ x(t_1),\ x'(t_1),\ \cdots,\ x^{(h-1)}(t_1)$, $x(s)$ なる $2h+2$ 変数の分散行列式は (3.9) に於て第 $2h+2$ 行と第 $2h+2$ 列に

$$\rho(s-t),\ \rho(s-t_1),\ -\rho'(s-t_1),\ \cdots,\ (-1)^{h-1}\rho^{(h-1)}(s-t_1),\ \rho(s-t_2),\ \cdots,\ (-1)^{h-1}\rho^{(h-1)}(s-t_2),\ 1$$

を追加したものに比例する．その行列式を再び Δ とするとき，その $(1, 2h+2)$ 元の余因子 $\Delta_{1,2h+2}$ が 0 となることを示せばよい．方程式 $\sum_{j=0}^{h} a_j u^j=0$ の根 u_k がすべての単根の場合には

$$\rho^{(j)}(\tau)=\sum_{k=1}^{h} c_k\, u_k^j\, e^{u_k\tau}$$

によって，$\Delta_{1,2h+2}$ の元をすべて指数函数の 1 次結合でおきかえ，その行列式をその 1 次式の各項を元とする行列式の和に書くとき，その各々の行列式で，$s>t_2$ なら第 $h+1$ 行から $2h$ 行までの中に第 $2h+2$ 行と比例するものがあり，$s<t_1$ なら第 1 行から第 h 行までの中に，これに比例するものがあるから $\Delta_{1,2h+2}$

=0 となる．u_k の中に重根があるときも，行列式を若干変形することによって，同様に証明される．

この定理は補間法に関するものであって，特に単純マルコフ過程の場合には $Ex(t)=0$, $Vx(t)=1$ とし，$a_0/a_1=\beta>0$ とおくと $t_1<t<t_2$ に対し

$$E\{x(t)|x(t_1),\ x(t_2)\}$$
$$=\frac{(1-e^{-2\beta(t_2-t)})e^{-\beta(t-t_1)}}{1-e^{-2\beta(t_2-t_1)}}x(t_1)+\frac{(1-e^{-2\beta(t-t_1)})e^{-\beta(t_2-t)}}{1-e^{-2\beta(t_2-t_1)}}x(t_2), \tag{3.13}$$

$$V\{x(t)|x(t_1),x(t_2)\}=\frac{(1-e^{-2\beta(t-t_1)})(1-e^{-2\beta(t_2-t)})}{1-e^{-2\beta(t_2-t_1)}}. \tag{3.14}$$

系．定理1の條件の下に，$x(t)(t_1<t<t_2)$ の任意の線型汎函数 $L_{(t_1,t_2)}(x(\cdot))$ は $x(s)(s<t_1)$ および $x(s)(s>t_2)$，従ってまたそれ等の汎函数と独立であって $E\{L_{(t_1,t_2)}(x(\cdot))|C\}$ は $x^{(j-1)}_{t_1}$, $x^{(j-1)}_{t_2}$ $(j=1,\cdots,k)$ の1次結合であり，$V\{L_{(t_1,t_2)}(x(\cdot))|C\}$ はこれらには無関係である．

（注） 筆者はかつて文献[2]で，$\int_{t_{k-1}}^{t_k}x(t)dt\ (k=1,2,\cdots,N)$ が $x^{(j-1)}(t_{k-1})$, $x^{(j-1)}(t_k)$ $(k=1,2,\cdots,N)$ を与えるとき，独立となることが，k 次の自己回帰過程の場合から極限移行によって導かれると述べたが，それは単純マルコフ過程の場合を除いて間違いである．いまわれわれが取扱っている確率過程に対応する離散過程 $x_j=x(t_0+j\Delta t)$ $(t_0,\Delta t$ は一定）は $\sum_{j=0}^{k}a_jx_{t-j}=\sum_{j=0}^{k-1}b_jy_{t-j}$（$y_t$ は独立過程）なる定差方程式を満足するものであり，逆に $x_j=x(t_0+j\Delta t)$ が任意の t_0 に対して k 次の自己回帰過程となるような $x(t)$ のスペクトラム密度は $F'(\lambda)=|\sum_{j=0}^{k-1}b_j(i\lambda)^j|^2/|\sum_{j=0}^{k-1}a_j(i\lambda)^j|^2$ となる．$x_j=x(t_0+j\Delta t)$ が任意の Δt に対しすべて k 次自己回帰過程とはなり得ない*．しかし[2]で導いた(3.9)のような結果には間違いはない．極限移行をする前後で k 次自己回帰という仮定は使っていないからである．

4．相関函数の検定法

$x(t)$ が §1 で述べた性質をもつ正規過程のとき，その相関函数（あるいはコレログラム）$\rho(\tau)$ に関する仮説 $H[\rho(\tau)]$ を検定することは，微分方程式(1.5), (1.6)および条件(1.4)により，$a_0:a_1:\cdots:a_k$ なる係数の比に関する仮説の検定と同等である．この微分方程式に関する限り $a_k=1$ としも一般性を失わないから，このときは

---

* 1955 年 5 月の数学会で講演

$$H[\rho(\tau)] \sim H[a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}]. \tag{4.1}$$

さて，(0,T) において標本函数

$$x(t), \quad 0 \leqq t \leqq T \tag{4.2}$$

が与えられたとき，これによって (4.1) を検定する方法として2つの立場がある.

$$N\Delta t = T, \quad t_i = (i-1)\Delta t, \quad i = 1, 2, \cdots, N+1 \tag{4.3}$$

とし，各区間 (t_i, t_{i+1}) における $x(t)$ の同型の線型汎函数を

$$L_i \equiv L_{(t_i, t_{i+1})}(x(\cdot)), \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{4.4}$$

とするとき，

(I) その才一の方法は，

$$L_i\ (i=1,2,\cdots,N),\ x^{(j-1)}(t_i) \quad (j=1,2,\cdots,k;\ i=1,2,\cdots,N+1)$$

の全体を $N+k(N+1)$ 次元確率変数とし，条件

$$C:\ x^{(j-1)}(t_i) = x^{(j-1)}_{t_i} \quad j=1,2,\cdots,k; \quad i=1,2,\cdots,N+1$$

を与えたときの $L_1, \cdots, L_N$ の独立性を利用し，(4.1) の検定を L_i の $x^{(j-1)}(t_i)$, $x^{(j-1)}(t_{i+1})$ $(j=1,2,\cdots,k)$ に対する回帰係数に関する検定に帰着させるのである. この場合の母回帰係数は

$$b_j = L_{(t_i, t_{i+1})}(c_j(\cdot)) \quad j=1,2,\cdots,2k \ (\ i\ には無関係) \tag{4.5}$$

の $2k$ 個あるがこれ等は $\rho^{(i)}(\tau)$ から定まるもので，結局 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ の函数である. 従って (4.5) には k 個の条件式が存在する筈である. しかし検定が実施可能なためには，それが線型条件式になるように汎函数 L を選ぶ必要がある. そうすれば (4.1) は適当な k 個の回帰係数に関する仮説 $H[b_1, b_2, \cdots, b_k]$ と同等になる.

(II) その才二は，方向づけられた過程を考え，条件

$$C_i:\ x^{(j-1)}(t_i) = x^{(j-1)}_{t_i} \quad j=1,2,\cdots,h$$

は将来にだけ影響するものとする. すなわち C_i なる条件の下での $L_i\ (i=1,2,\cdots,N)$ を別々な確率空間で考え，全体としてそれらの直積確率空間で取扱うのである. これは $C_j\ (j<i)$ が L_i に関係しないことによって許される. この場合には，(3.2) の $x^{(j-1)}_{t_1}$ の係数を $c_j(t)$ とするとき (4.5) によって与えられる $b_j\ (j=1,2,\cdots,k)$ が母回帰係数で，(4.1) はこれに関する仮説と同等になる.

実際に使われそうな簡単な線型汎函数としては

$$L_i = x((t_i + t_{i+1})/2) \tag{4.6}$$

$$L_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t)\,dt \tag{4.7}$$

などがある．（I）の方法においては，このいずれの場合にも(4.5)の係数の間に

$$b_j = (-1)^{j-1}\ b_{h+j} \qquad (j=1,2,\cdots,h) \tag{4.8}$$

なる関係があることが(3.9)から証明される．

なお(4.6)の場合には(3.10)の分子において $\rho^{(j)}(t-t_1)=\rho^{(j)}(t_2-t)=\rho^{(j)}(\Delta t/2)$ とおいたものが b_j となり，(4.7)に対しては $\rho^{(j)}(t-t_1)$, $\rho^{(j)}(t_2-t)$ がいずれも $\rho^{(j-1)}(\Delta t)-\rho^{(j-1)}(0)$ （$j=0$ に対しては $\int_0^{\Delta t}\rho(\tau)d\tau$）でおきかえられる．(4.7)は既に筆者が文献[2]で述べたものである．

検定を実施する手順は正規回帰論から導かれる次の定理によればよい．

定理2．線型汎函数 L は上記(II)の場合には任意でよいが，（I）の場合には(4.8)が成立つようなものとし，$L_k=L_{(t_k,\,t_{k+1})}(x(\cdot))$ $(t_{k+1}=t_k+\Delta t)$ $k=1,2,\cdots,N$ とする．

$y_{0k}=1$, $y_{pk}=x^{(p-1)}(t_k)$ 又は $x^{(p-1)}(t_k)+(-1)^{p-1}x^{(p-1)}(t_{k+1})$

$p=1,2,\cdots,h,\qquad k=1,2,\cdots,N$

$$a_{pq}=\sum_{k=1}^{N} y_{pk}\,y_{qk}\ ,\quad a_{0p}=\sum_{k=1}^{N} L_k\,y_{pk} \qquad p,q=0,1,\cdots,h$$

$\det|a_{pq}|\neq 0$ と仮定し　$(a^{pq})=(a_{pq})^{-1}$

$$\begin{bmatrix}\hat{b}_0\\ \vdots \\ \hat{b}_h\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{00} & \cdots & a^{0h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{h0} & \cdots & a^{hh}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{00}\\ \vdots \\ a_{0h}\end{bmatrix}$$

とおけば $\hat{b}_0=\bar{L}=\sum_{k=1}^{N}L_k/N$ であって，帰無仮説 $H[b_1,\cdots,b_h]$ に対し，y_{pk} $(p=1,\cdots,h,\ k=1,\cdots,N)$ を固定すると

$$F^{h}_{N-h-1}=\frac{\sum_{p,q=1}^{h} a_{pq}(\hat{b}_p-b_p)(\hat{b}_q-b_q)}{\sum_{k=1}^{N}\left(L_k-\bar{L}-\sum_{p=1}^{h}\hat{b}_p y_{pk}\right)^2}\cdot\frac{N-h-1}{h} \tag{4.9}$$

は自由度 $(h,\ N-h-1)$ の F 分布に従う．

この方法で，N の選び方と汎函数 L（特にIIの場合に）の選び方が問題である．単純マルコフ過程の場合は[2]で少し吟味してあるが，詳細は後日にゆずる．

5．予報

現在を時間の原点にとり，$(-T,0)$ で標本函数 $x(t)$ が与えられたとき，$(s,\ s+t)$ $(s,t>0)$ における $x(t)$ の線型汎函数 $L_0\equiv L_{s,s+t}(x(\cdot))$ を予報する問題も結局離散的時間径数の場合に帰着させられる．すなわち $t_k=-k(s+t)$, $k=0,1,\cdots,N$ $(t_N\geqq -T)$ とし，$L_k=L_{(t_k+s,\,t_{k-1})}(x(\cdot))$, $y_{pk}=x^{(p-1)}(t_k)-\overline{x^{(p-1)}}$ $\left(\overline{x^{(p-1)}}=\sum_{k=1}^{N}x^{(p-1)}(t_k)/N\right)$ とおき，(a_{pq}), (a^{pq}) を前のように定義し，$\hat{b}_p$ を母回帰係数の最尤推定値とすれば，離散的な場合の公式をそのまゝ使って，L_0 の確率的予報が

導かれる．これについては文献[6]〜[8]を参照されたい．

その確率的予報（形式的に分布函数の性質をもつもの）が $T\to\infty(N\to\infty)$ のとき，$x^{(p-1)}(t_0)$ $(p=1,\cdots,h)$ を与えたときの L_0 の条件付分布函数（正規分布）に確率收斂することは容易に示される．その條件付正規分布の平均値と分散は(3.7)〜(3.10)と全く同様にして導かれる．特別の場合として $x(\varDelta)$ $(\varDelta>0)$ を予報する場合は次のようになる．

$$E\{x(\varDelta)\,|\,x^{(j-1)}(0),\ j=1,2,\cdots,h\}=m+C_1(x(0)-m)+\sum_{j=1}^{h}C_j\,x^{(j-1)}(0)$$

$$C_j=\frac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix}\rho(0) & \rho'(0) & \cdots\cdots & \rho^{(h-1)}(0)\\ \rho'(0) & \rho''(0) & \cdots\cdots & \rho^{(h)}(0)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \rho^{(j-1)}(0) & \rho^{(j)}(0) & \cdots\cdots & \rho^{(h+j-2)}(0)\\ \rho(\varDelta) & \rho'(\varDelta) & \cdots\cdots & \rho^{(h-1)}(\varDelta)\\ \rho^{(j+1)}(0) & \rho^{(j+2)}(0) & \cdots\cdots & \rho^{(h+j)}(0)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \rho^{(h-1)}(0) & \rho^{(h)}(0) & \cdots\cdots & \rho^{(2h-2)}(0)\end{vmatrix}$$

$$\varDelta=\begin{vmatrix}\rho(0) & \cdots\cdots & \rho^{(h-1)}(0)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \rho^{(h-1)}(0) & \cdots\cdots & \rho^{(2h-2)}(0)\end{vmatrix}$$

$$V\{x(\varDelta)\,|\,x^{(j-1)}(0),\ j=1,2,\cdots,h\}$$
$$=\sigma^2+\frac{\sigma^2}{\varDelta}\begin{vmatrix}0 & \rho(\varDelta) & \rho'(\varDelta) & \cdots\cdots & \rho^{(h-1)}(\varDelta)\\ \rho(\varDelta) & \rho(0) & \rho'(0) & \cdots\cdots & \rho^{(h-1)}(0)\\ -\rho'(\varDelta) & \rho'(0) & \rho''(0) & \cdots\cdots & \rho^{(h)}(0)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ (-1)^{h-1}\rho^{(h-1)}(0) & \rho^{(h-1)}(0) & \rho^{(h)}(0) & \cdots\cdots & \rho^{(2h-2)}(0)\end{vmatrix}$$

参　考　文　献

[1] 例えば *J.L. Doob, Stochastic Processes* pp. 542－550.

[2] 時系列に関する推測論について（小河原正巳），北川敏男編，確率論及び推

計学の進歩. (1953).

[3] *Doob* 上掲書 *pp.* 71－74.

[4] *N. Wiener, Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series with engineering applications*, 1949.

[5] 河田龍夫, 応用数学概論 (岩波全書), 1952.

[6] *M. Ogawara, A general stochastic prediction formula, Papers in Meteor and Geophys. Vol.* 5, *Nos* 3~4, 1955.

[7] 小河原正巳, 予報についての数学的論理, 科学, *Vol.* 24, *No.* 10, 1954.

[8] 小河原正巳および協力者, 少数例による予報について, 中央気象台研究時報, *Vol.* 6, *No.* 6, 1954.