九州大学学術情報リポジトリ Kyushu University Institutional Repository

ある確率過程についての推測と予報

小河原, 正巳 東京女子大学 | 気象研究所

https://doi.org/10.15017/12716

出版情報:統計科学研究. 1 (1), pp.10-20, 1956-01. Research Association of Statistical Sciences

バージョン: 権利関係:

ある確率過程についての 推測と予報

小 河 原 下 P. (氨象研·東京女子大)

1. 緒 言

x(t) は(広義)定常な実確率過程でEx(t)=0, Vx(t)=1 とする、われわれがこれから販扱うのはこれが次の性質をもつ場合である:

1)スペクトル函数は絶対連続で

$$F'(\lambda) = 1 / |\sum_{j=0}^{h} a_j(i\lambda)^j|^2 , \quad (-\infty \langle \lambda \langle \infty \rangle)$$
 (1.1)

a a = 0

と表わせる。こゝに a_j $(j=0,1,\cdots,\hbar)$ は実常数で

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j (i\lambda)^j = 0$$
 の根は全部上半 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (i\lambda)^j = 0$ の格は全部上半 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (i\lambda)^j = 0$ の根は全部上半 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (i\lambda)^j = 0$ の格は全部上半 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (i\lambda)^j = 0$ の格は全部上半 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (i\lambda)^j = 0$ の格は全部上半 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (i\lambda)^j = 0$ の格は

とする。もちろん、全部下半平面上にあるとしてもよいのであるが、ことでは一 応上のように仮定する。

2) 自己相関函数は

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} \frac{d\lambda}{|\Sigma a_{i}(i\lambda)^{j}|^{2}}$$
 (1.3)

と表わされ,従ってこれは T
in 0 では何몝でも可微分であるが, T = 0 では

$$\sum_{j=0}^{A} a_{j} \, \rho^{(j)}(\tau) = 0, \quad \tau > 0, \qquad (1.5)$$

$$\sum_{j=0}^{A} (-1)^{j} a_{j} \, \rho^{(j)}(\tau) = 0, \quad \tau < 0. \qquad (1.6)$$

なお (1.3) でも実常数 a_j ($j=0,1,\cdots,\ell$) は条件 (1.2) を満すものとしているのである.

以上2つの柱類(1.1) と (1.3) は同等であって一方から他が導かれることはいうまでもない。

M. Ogawara, Statistical Inference and Prediction of a Stochastic Process.

こ、では、このような確率過程の、有限な時间において与えられた、 1 つの標本函数に基いて母数 α_0 , α_1 , ..., α_n あるいは自己相関函数 $\beta(\tau)$ を推測することと、x(t) を予報することを問題にする。そのために結局われわれは以下において、上記の性質に加えて、x(t) の確率法則の正規性を仮定する。

なお、本稿の一部分に関連した事柄を、筆者は既に発表したことがあるが。?? それには不適当な点があったので、この際訂正しておきたいと思う。

2. 確率過程の方向

正規罹率過程の罹率法則は2次までのモメント函数で定まるから、前節の性質をもつ定常正規実過程は1つ唯1つ存在する、しかしその過程を直接解析的に記述する方法は2つある。物理的に言えば、その1つは将来に向つての過程で、他の1つは過去へ向つての過程と言うことができよう。

Z(t) を $(-\infty, \infty)$ での Brown 運動とし

 $E(Z(t_2)-Z(t_1))=0$, $E(|Z(t_2)-Z(t_1)|^2)=2\pi(t_2-t_1)$, $(t_1 < t_2)$ として,このZ(t)の Fourier 変換をZ(t) とすれば、これも Brown運動で、周知のように

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{dz^*(\lambda)}{\sum a_j(i\lambda)^j}$$
 (2.1)

は前節の性質をもち、確率1で次の方程式を満足

$$\sum_{j=0}^{k-1} a_j \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) x^{(j)}(t) dt + a_k \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) dx^{(k-1)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) dZ(t), \qquad (2.2)$$

この方程式は任意のある有限用区间で連続で、かつ連続な導函数をもち、その区间の外で0であるような任意の函数 $f^*(t)$ に対しず成立つものである。またこの

$$E\{[Z(t_2)-Z(t_1)]x(t)\}=0, \quad t \le t_1 < t_2. \tag{2.3}$$

方程式(2.2) は简単のため形式的にこれを

$$a_0 x(t) + a_1 x'(t) + \dots + a_k x^{(k)}(t) = Z'(t)$$
 (2.2')

とかくことがある.

$$\Psi(\lambda) = 1/\sum_{j=1}^{h} a_j (i\lambda)^j \tag{2.4}$$

は実軸および下半平面上で正則で零点をまたないから「4」,「5]

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Lambda \to \infty} \int_{A}^{A} e^{i\lambda t} \, \Psi(\lambda) \, d\lambda = 0 \,, \quad t < 0$$
 (2.5)

であって,

$$\mathcal{X}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathcal{V}(t-\tau) \, dZ(\tau) \tag{2.6}$$

はスペクトラム(1.1) , 自己相関(1.3) をもつ、すなわち、このx(t) は方程式(2.2) の1つの解である、そしてこのY(t) は初期条件

$$\psi^{(j)}(0+) = 0 \ (j=0,1,\dots, f_{k-2}), \quad \psi^{(k-1)}(0+) = 1/a_k$$
 (2.7)

の下での, 微分方程式

$$a_0 \psi(t) + a_1 \psi'(t) + \dots + a_k \psi^{(k)}(t) = 0, \ t > 0$$
 (2.8)

の解になっている.

そこでこんどは

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} \frac{dZ^{*}(\lambda)}{\sum a_{j}(-i\lambda)^{j}}$$
 (2.9)

を考えると、これもわれわれの指定したスペクトラムと自己相関をもつもので、 微分万程式

$$a_0 x(t) - a_1 x'(t) + \dots + (-1)^h a_h x^{(h)}(t) = Z'(t)$$
 (2.10)

を満足し、Z(t) の過去の増分は将来のX(t) とは独立である:

$$E\{[Z(t_2)-Z(t_1)]\chi(t)\}=0, \quad t_1 < t_2 \le t.$$
 (2.11)

何んとなれば,(2.10)を(2.2)のように書き $f^*(t)=1$ (t_1 〈t〈t〈 t_2 〉),=0(t≦ t_1 又は t_2 ≦t〉とすれば

$$\begin{split} & = \int_{t_{1}}^{t_{2}} \sum_{j=0}^{h-1} (-1)^{j} a_{j} (-1)^{j} \rho^{(j)} (J-t) dt + (-1)^{h} a_{h} \left[(-1)^{h-1} \rho^{(h-1)} (J-t_{1}) - (-1)^{h-1} \rho^{(h-1)} (J-t_{1}) \right] \\ & = \int_{t_{1}}^{t_{2}} dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{h-1} a_{j} (i\lambda)^{j}}{|\sum_{j=0}^{h} a_{j} (i\lambda)^{j}|^{2}} e^{i\lambda(J-t)} d\lambda + \int_{t_{1}}^{t_{2}} dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_{h} (i\lambda)^{h}}{|\sum_{j=0}^{h} a_{j} (i\lambda)^{j}|^{2}} e^{i\lambda(J-t)} d\lambda \\ & = \int_{t_{1}}^{t_{2}} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(J-t)}}{\sum_{j=0}^{h} a_{j} (i\lambda)^{j}} d\lambda \end{split}$$

こゝで被積分函数は上半平面で正則であるから,t、 $< t < t_2 \le a$ に対しては,留数

計算によりこの積分が 0 となることがわかる。なお上の計算で $E\{x^{(j)}(t)x(d)\}$ = $(-1)^j f^{(j)}(d-t)$ なる公式を使っている(この式の証明は次節で述べる)。次に (2.5) に対応して,こんどは $\overline{\Psi}(\lambda)=1/\Sigma a_j (-i\lambda)^j$ は実軸および上半平面上で正則で零点をもたないから

$$\psi_{i}(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \to \infty} l, i, m. \int_{A}^{A} e^{i\lambda t} \overline{\Psi}(\lambda) d\lambda = 0, \quad t > 0.$$
 (2.12)

従って

$$x(t) = \int_{t}^{\infty} \psi_{i}(t-\tau) dz(\tau)$$
 (2.13)

が性質(1.1),(1.3) をもつものとなる. 明かに

$$\mathcal{Y}_{1}(t) \equiv \mathcal{Y}(-t) \tag{2.14}$$

である.

なお、これは当然のことではあるが、 $x_i(t) \equiv x(-t)$ なる過程を作ったのでは、同じものを時间座標の向きを変えて表現しただけで、本質的に逆向きの過程にはならない。

3. 條件付独立

初期條件

$$x^{(j)}(t_1) = x_{t_1}^{(j)} \quad (j = 0, 1, \dots, f_{j-1})$$
(3.1)

の下での方程式(2.2)の解は t>t,に対し

$$x(t) = \sum_{j=1}^{h} \left(\sum_{k} c_{jk} e^{u_{k}(t-t_{1})} \right) x_{t_{1}}^{(j-1)} + \int_{t_{1}}^{t} \psi(t-\tau) dz(\tau)$$
 (3.2)

で与えられる $[\cdot]$ こゝに \mathcal{U}_k は $\int_{-\infty}^{\infty} a_j \, u^j = 0$ の根で,(1.2)によりその実数部分は負である。 \mathcal{U}_k が m 重根のとき C_{jk} は t の m-1 次の多項式で,その係数は t_1 と \mathcal{U}_k ($k=1,2,\cdots$) の函数である。

(2.3) により、この $x(t)(t>t_1)$ は $x(a)(a< t_1)$ とは独立である。

全く同称にして、初期條件

$$x^{(j)}(t_2) = x_{t_2}^{(j)} \quad (j = 0, 1, \dots, h-1)$$
 (3.3)

の下での,逆向き方程式(2.10)の解は, $t < t_2$ に対し

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{k} c_{jk}^{*} e^{u_{k}(t_{2}-t)} \right) x_{t_{2}}^{(j-1)} + \int_{t}^{t_{2}} Y_{1}(t-\tau) dZ(\tau), \qquad (3.4)$$

こゝに \mathcal{C}_{jk}^{*} は \mathcal{C}_{jk} で \mathcal{U}_{k} の代りに $\dot{-}\mathcal{U}_{k}$ をおきかえたものである。また (2.14)に

により $\Upsilon(t-\tau)$ は $\Upsilon(\tau-t)$ でおきかえてもよい. この(3.4) と (2.11)とから, (3.3) の條件の下では、 $\chi(t)(t < t_2)$ は $\chi(t)(t > t_2)$ と独立である.

これを要するに、

$$x^{(j)}(t_0) = x_{t_0}^{(j)} \quad (j = 0, 1, \dots, h-1)$$
 (3.5)

を与えれば $_{3}$ ($_{t}$) に対し $_{x}$ ($_{3}$) と $_{x}$ ($_{4}$) と $_{x}$ ($_{5}$) は独立になるのであるが,(3.5) の $_{x}$ ($_{5}$) に対する影響は(2.2′)の解(3.2)($_{5}$ = $_{5}$ とおく)で示され,(3.5)の $_{x}$ ($_{5}$) に対する影響は(2.10)の解(3.4)($_{5}$ = $_{5}$ とおく)で与えられることになるのである。

更に次の定理が成立つ。

定理1.定常正規実過程x(t) のスペクトラムが(1.1)で与えられたとする。 $t_1 < t_2$ に対し

$$C: x^{(j)}(t_1) = x_{t_1}^{(j)}, \quad x^{(j)}(t_2) = x_{t_2}^{(j)} \quad (j = 0, 1, \dots, h-1)$$
 (3.6)

を与えたとき、 $(i) x(t) (t_1 < t < t_2)$ は正規分布に従いその條件付期待値は

$$E\{x(t)|C\} = m + \sum_{j=1}^{h} \{C_j(t)(x_{t_1}^{(j-1)} - m) + C_{h+j}(t)(x_{t_2}^{(j-1)} - m)\}$$
 (3.7)

條件付分散は

$$V\{\chi(t)|\mathcal{C}\} = \sigma^2 \Delta/\Delta_{11} \tag{3.8}$$

で与えられる。たゞしこゝに m=Ex(t), $\sigma^2=Vx(t)$ で,

$$\Delta = \begin{vmatrix}
1 & f'(t-t_1) & -f'(t-t_1) \cdots (-1)^{h-1} f'(t-t_1) & f'(t_2-t) & f'(t_2-t) & \cdots & f^{(h-1)}(t_2-t) \\
f'(t-t_1) & 1 & (-1)^{\frac{1}{2}} f'(0) \cdots (-1)^{\frac{h-1}{2}} f^{(h-1)}(0) & f'(t_2-t_1) & f'(t_2-t_1) & \cdots & f^{(h-1)}(t_2-t_1) \\
-f'(t-t_1) & (-1)^{\frac{1}{2}} f'(0) & (-1)^{\frac{h}{2}} f''(0) \cdots & (-1)^{\frac{h}{2}} f^{(h)}(0) & -f'(t_2-t_1) & -f''(t_2-t_1) & \cdots & -f^{(h)}(t_2-t_1) \\
f'(t-t_1) & (-1)^{\frac{1}{2}} f''(0) & (-1)^{\frac{h}{2}} f''(0) \cdots & (-1)^{\frac{h+1}{2}} f^{(h+1)}(0) & f''(t_2-t_1) & f''(t_2-t_1) & \cdots & f^{(h+1)}(t_2-t_1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(-1) f'(t-t_1) & (-1)^{\frac{h}{2}} f'(0) & (-1)^{\frac{h}{2}} f^{(h)}(0) \cdots & (-1)^{\frac{h+1}{2}} f^{(h+1)}(0) & f''(t_2-t_1) & (-1)^{\frac{h+1}{2}} f^{(h)}(t_2-t_1) & \cdots & f^{(h+1)}(t_2-t_1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(-1) f'(t-t_1) & (-1)^{\frac{h}{2}} f'(0) & (-1)^{\frac{h}{2}} f^{(h)}(0) \cdots & (-1)^{\frac{h+1}{2}} f^{(h-1)}(0) & f'(t_2-t_1) & (-1)^{\frac{h+1}{2}} f^{(h)}(t_2-t_1) & \cdots & (-1)^{\frac{h+1}{2}} f^{(h-1)}(0) \\
f'(t_2-t) & f'(t_2-t_1) & -f'(t_2-t_1) \cdots & (-1)^{\frac{h+1}{2}} f^{(h-1)}(t_2-t_1) & (-1)^{\frac{h}{2}} f''(0) & \cdots & (-1)^{\frac{h+1}{2}} f^{(h)}(0) \\
\vdots & \vdots \\
(-1) f'(t_2-t_1) & -f'(t_2-t_1) & -f'(t_2-t_1) \cdots & (-1)^{\frac{h+1}{2}} f'(t_2-t_1) & 1 & (-1)^{\frac{h}{2}} f'(0) & \cdots & (-1)^{\frac{h+1}{2}} f^{(h-1)}(0) \\
f'(t_2-t) & f'(t_2-t_1) & -f'(t_2-t_1) \cdots & (-1)^{\frac{h+1}{2}} f'(t_2-t_1) & (-1)^{\frac{h+1}{2}} f'(0) & \cdots & (-1)^{\frac{h+1}{2}} f^{(h)}(0) \\
\vdots & \vdots \\
f'(t_2-t) & f'(t_2-t_1) & -f'(t_2-t_1) \cdots & (-1)^{\frac{h+1}{2}} f'(t_2-t_1) & (-1)^{\frac{h+1}{2}} f'(t_2-t_1) & \cdots & (-1)^{\frac{h+1}{2}} f'(t_2-t_2) \\
\vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots$$

Apg は Δ に おける (た g) 元の余因子で

$$C_j(t) = -\Delta_1, j+1/\Delta_1 \quad (j=1,2,\dots,2k)$$
 (3.10)

(ii) この條件付確率変数 x(t) は $x(d)(a < t_1)$ とも $x(d)(a > t_2)$ とも独立である。 $x(t), x(t_1), x'(t_1), \cdots, x^{\binom{k-1}{t_1}}, x(t_2), x'(t_2), \cdots, x^{\binom{k-1}{t_2}}$

が 2h+1 欠元正規分布に従うことは明かであるから、この定理の前半の証明には、次の補題を証明すれば十分である。

補題、定常過程 x(t) (- ω <t< ω) が何回か自乗平均可微分ならば,Ex(t)=0, Vx(t)=1 とするとき、

$$E\{x^{(n)}(t) x^{(n')}(t-\tau)\} = (-1)^{n'} \beta^{(n+n')}(\tau), \quad \tau > 0$$
 (3.11)

$$E\left\{x^{(n)}(t) x^{(n')}(t)\right\} = \left\{0, & n+n'= 奇数のとき \\ \left(-1\right)^{\frac{n+n'}{2}} \beta^{(n+n')}(0), & n+n'= 偶数のとき \right\}$$
(3.12)

証明. $E\{x(t+\tau)x(t)\}=p(\tau)$ $(\tau>0)$.

両辺をTでn回微分すると、左辺ではEと微分とは交換できるから $E\{x^{(n)}(t+\tau)x(t)\}=p^{(n)}(\tau)$.

x(*)(t)も 定常であるから

$$E\left\{x^{(n)}(t) x(t-\tau)\right\} = \beta^{(n)}(\tau).$$

てでが回微分すると

$$(-1)^{n'} E \left\{ x^{(n)}(t) x^{(n')}(t-\tau) \right\} = \rho^{(n+n')}(\tau).$$

すなわち(3.11)を得る。次に

$$(-1)^n \beta^{(n+n')}(-\tau) = (-1)^{n'} \beta^{(n+n')}(\tau), \ \tau > 0$$

であるから, $\rho^{(n+n')}(\tau)$ の $\tau=0$ における連続性を使えば (3.12) を得る.(3.9) で $(-1)^{\frac{1}{2}}\rho'(0)$ $\psi(-1)^{\frac{3}{2}}\rho'''(0)$ などは実はすべて 0 である.

定理の後半の証明は次のような方針でなされる。x(t), x(t), x'(t), ..., x'(t), ..., x'(t), ..., x(t), x(

f(A-t), $f(A-t_1)$, $-f(A-t_1)$, \cdots , $(-1)^{k-1}f^{(k-1)}(A-t_1)$, $f(A-t_2)$, \cdots , $(-1)^{k-1}f^{(k-1)}(A-t_2)$, 1 を追加したものに比例する。その行列式を再び Δ とするとき,その(1,2k+2) 元の余因子 Δ_1 , 2k+2 がりとなることを示せばよい。方程式 $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j u^j = 0$ の根 u_k がすべての単根の場合には

$$\rho^{(j)}(\tau) = \sum_{k=1}^{h} c_k u_k^j e^{u_k \tau}$$

によって、 $\Delta_{1,2\,k+2}$ の元をすべて指数函数の1次結合でおきかえ、その行列式をその1次式の各項を元とする行列式の和に書くとき、その各々の行列式で、 $a>t_2$ なら第 ℓ_1 +1行から $2\ell_2$ +1行から第 ℓ_3 +1行から第 ℓ_4 +2行と比例するものがあるから ℓ_4 +2をは、なら第1行から第 ℓ_4 +1に比例するものがあるから ℓ_4 +2をは、なら第1行から第 ℓ_4 +1をは、これに比例するものがあるから ℓ_4 +1をは、なら第1

= 0 となる。 u_k の中に重根があるときも,行列式を若干変形することによって, 同称に証明される.

この定理は補间法に関するものであって、特に単純マルコフ過程の場合にはEx(t)=0、Vx(t)=1 とし、 $a_0/a_1=\beta>0$ とおくと t_1 くなく t_2 に対し

 $E\{x(t)|x(t_1),x(t_2)\}$

$$=\frac{(1-\bar{e}^{2\beta(t_2-t)})\bar{e}^{\beta(t-t_1)}}{1-\bar{e}^{2\beta(t_2-t_1)}} \alpha(t_1) + \frac{(1-\bar{e}^{2\beta(t-t_1)})\bar{e}^{\beta(t_2-t)}}{1-\bar{e}^{-2\beta(t_2-t_1)}} x(t_2), \qquad (3.13)$$

$$V\{\mathcal{X}(t)|\mathcal{X}(t_1),\mathcal{X}(t_2)\} = \frac{(1-\tilde{e}^{2\beta(t-t_1)})(1-\tilde{e}^{2\beta(t_2-t_1)})}{1-e^{-2\beta(t_2-t_1)}}.$$
 (3.14)

系. 定理1の條件の下に, $x(t)(t_1\langle t \langle t_2 \rangle)$ の任意の線型汎函数 $L_{(t_1,t_2)}(x(\cdot))$ は $x(A)(A\langle t_1 \rangle)$ および $x(A)(A\rangle t_2)$, 従ってまたそれ等の汎函数と独立であって $E\{L_{(t_1,t_2)}(x(\cdot))|C\}$ は $x_{t_1}^{(j-1)}$, $x_{t_2}^{(j-1)}$ $(j=1,\cdots,\hbar)$ の1次結合であり, $V\{L_{(t_1,t_2)}(x(\cdot))|C\}$ はこれらには無関係である.

(注) 筆者はかって文献 [2] で, $\int_{t_{k-1}}^{t_k} x(t)dt (k=1,2,\cdots,N)$ が $x^{(r_i)}(t_{k-1}), x^{(r_i)}(t_k)$ $(k=1,2,\cdots,N)$ を与えるとき,独立となることが, ℓ 次の自己回帰過程の場合から極限移行によって導かれると述べたが,それは単純マルコフ過程の場合を除いて同違いである. いまわれわれが取扱っている確率過程に対応する离散過程 $x_j=x(t_0+j\Delta t)$ $(t_0,\Delta t$ は一定)は $\int_{t_0}^{t_0} a_j x_{t-j} = \int_{t_0}^{t_0} \ell_j \cdot y_{t-j}$ (光は独立過程)なる定差方程式を満足するものであり,逆に $x_j=x(t_0+j\Delta t)$ が任意の t_0 に対して ℓ 次の自己回帰過程となるような x(t) のスペクトラム密度は $F(\lambda)=\left|\sum_{j=0}^{t-1} \ell_j \cdot (i\lambda)^j\right|^2/\left|\sum_{j=0}^{t-1} \ell_j \cdot (i\lambda)^j\right|^2/\left|\sum_{j=0}^{t$

4. 相関函数の検定法

x(t) が \$1 で述べた性質をもつ正規過程のとき,その相関函数(あるいはコレログラム) P(T) に関する仮説 H[P(T)] を検定することは,微分方程式(1.5),(1.6) および条件(1.4) により, $a_{o}\colon a_{1}\colon \dots \colon a_{k}$ なる係数の比に関する仮説の検定と同等である.この微分方程式に関する限り $a_{k}=1$ としも一般性を失わないから,このときは

^{* 1955} 年 5 月の数学会で講演

$$H[\rho(\tau)] \sim H[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}].$$
 (4.1)

さて, (0,7)において標本函数

$$x(t), \quad 0 \le t \le T \tag{4.2}$$

が与えられたとき,これによって(4.1)を検定する方法として2つの立場がある.

$$N\Delta t = T$$
, $t_i = (i-1)\Delta t$, $i = 1, 2, \dots, N+1$ (4.3)

とし、各区间 (t_i,t_{i+1}) における x(t) の同型の線型汎函数を

$$\mathcal{L}_{i} \equiv \mathcal{L}_{(t_{i}, t_{i+1})}(x(\cdot)), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$(4.4)$$

とするとき、

(I) そのオーの方法は、

$$L_{i}(i=1,2,\cdots,N), x^{(j-1)}$$
 $(j=1,2,\cdots,k; i=1,2,\cdots,N+1)$

の全体を N+f(N+1) 次元確率変数とし、條件

$$C: x^{(j-1)}(t_i) = x_{t_i}^{(j-1)} \quad j=1,2,\cdots, \, \text{k}; \quad i=1,2,\cdots, \, N+1$$

を与えたときの L_1,\cdots,L_N の独立性を利用し、(4.1) の検定を L_i の $x^{(j-1)}$ 、 $x^{(j-1)}(t_{i+1})$ ($j=1,2,\cdots,\ell$)に対する回帰係数に関する検定に帰着させるのである。この場合の母回帰係数は

$$\ell_j = L_{(t_i, t_{i+1})}(C_j(\cdot)) \quad j = 1, 2, \dots, 2 \, \text{ℓ (i cit means means the constraints)}$$

$$(4.5)$$

(II) そのオニは、方向づけられた過程を考え、條件

$$C_i : x^{(j-1)}(t_i) = x_{t_i}^{(j-1)} \qquad j = 1, 2, \dots, h$$

は将来にだけ影響するものとする。すなわち C_i なる條件の下での L_i ($i=1,2,\cdots$, N) を別々な確率空间で考え,全体としてそれらの直積確率空间で取扱うのである。これは C_j (j< i) が L_i に関係しないことによって許される。この場合には, (3.2) の $x_{t_i}^{(j-1)}$ の係数を C_j (t) とするとき (4.5) によって与えられる ℓ_j ($j=1,2,\cdots,\ell$) が田回帰係数で, (4.1) はこれに関する仮説と同等になる。

実際に使われそうな简単な線型汎函数としては

$$L_{i} = \chi((t_{i} + t_{i+1})/2) \tag{4.6}$$

$$L_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t) dt \tag{4.7}$$

などがある。(I)の方法においては、このいずれの場合にも(4.5)の係数の向に

$$\mathcal{B}_{j} = (-1)^{j-1} \mathcal{B}_{h+j} \qquad (j = 1, 2, \dots, k)$$
(4.8)

なる関係があることが(3.9)から証明される.

なお (4.6) の場合には (3.10) の分子において $\rho^{(j)}(t-t_1)=\rho^{(i)}(t_2-t)=\rho^{(i)}(4t/2)$ とおいたものが θ_j となり, (4.7) に対しては $\rho^{(j)}(t-t_1)$, $\rho^{(i)}(t_2-t)$ がいずれも $\rho^{(j-1)}(4t)-\rho^{(j-1)}(0)$ (j=0 に対しては $\int_0^{4t}\rho(t)d\tau$) でおきかえられる。 (4.7) は既に筆者が文献[2] で述べたものである。

検定を実施する手順は正規回帰論から導かれる次の定理によればよい.

定理 2. 線型汎函数 L は上記 (II) の場合には任意でよいが,(II) の場合には(4.8) が成立つようなものとし, $L_b = L_{(t_b,\ t_{b+1})}(x(\cdot))$ ($t_{b+1} = t_b + 2t$) $k=1,2,\cdots,N$ とする.

$$\mathcal{Y}_{0k} = 1$$
, $\mathcal{Y}_{pk} = \mathcal{X}^{(p-1)}(t_k) \times \mathcal{X} \times \mathcal{X}^{(p-1)}(t_{k}) + (-1)^{p-1} \mathcal{X}^{(p-1)}(t_{k+1})$
 $p = 1, 2, \dots, k$, $k = 1, 2, \dots, N$

$$a_{pq} = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{Y}_{pk} \mathcal{Y}_{qk}, \quad a_{op} = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{L}_{k} \mathcal{Y}_{pk} \quad p, q = 0, 1, \dots, h$$

 $det |a_{pg}| = 0$ と仮定し $(a^{pg}) = (a_{pg})^{-1}$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathcal{E}}_{0} \\ \hat{\mathcal{E}}_{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{\infty} \cdots \alpha^{\circ A} \\ \vdots \\ \alpha^{\bullet} \cdots \alpha^{\bullet A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{\circ \circ} \\ \vdots \\ \alpha_{\circ A} \end{bmatrix}$$

とおけば $\hat{\ell}_0 = \bar{L} = \sum_{k=1}^{\infty} L_k / N$ であって,帰無仮説 $H[\ell_1, \cdots, \ell_k]$ に対し, $\mathcal{S}_{pk}(p=1, \cdots, \ell_k, k=1, \cdots, N)$ を固定すると

$$F_{N-k-1}^{k} = \frac{\sum_{p,q=1}^{k} (a_{pq}(\hat{\ell}_{p} - \ell_{p})(\hat{\ell}_{q} - \ell_{q})}{\sum_{p=1}^{k} (\ell_{k} - \hat{\ell} - \frac{1}{2})(\hat{\ell}_{p} - \ell_{p})^{2}} \cdot \frac{N-k-1}{k}$$
(4.9)

は自由度(4, N-4-1)のF分布に従う.

この方法で、Nの選び方と汎函数 L (特にⅡの場合に)の選び方が问題である. 単純マルコフ過程の場合は[2]で少し吟味してあるが、詳細は後日にゆずる.

5. 予報

現在を時间の原点にとり、(-T,0) で標本函数 x(t) が与えられたとき、(A,A+t)(A,t>0) における x(t) の線型汎函数 $L_0=L_{A,A+t}(x(t))$ を予報する问題も結局离散的時间径数の場合に帰着させられる。 すなわち $t_k=-k(A+t)$, k=0,1, …, $N(t_N\geq -T)$ とし、 $L_k=L_{(t_k+A,t_{k-1})}(x(t))$, $\mathcal{I}_{pk}=x^{(p-1)}(t_k)-\overline{x^{(p-1)}}(\overline{x^{(p-1)}}=\sum_{x=1}^{\infty}x^{(p-1)}(t_k)/N)$ とおき、 $(a_{p\ell})$, $(a^{p\ell})$ を前のように定義し、 \mathcal{I}_p を毌回帰係数の最尤推定値とすれば、离散的な場合の公式をそのま、使って、 L_0 の確率的予報が

導かれる.これについては文献[6]~[8]を参照されたい.

その確率的予報(形式的に分布函数の性質をもつもの)が $T \to \infty (N \to \infty)$ のとき, $x^{(n-1)}(t_o)$ ($p=1,\cdots, \mathcal{A}$)を与えたときの \mathcal{A} 。の條件付分布函数(正規分布)に確率收斂することは容易に示される.その條件付正規分布の平均値と分散は $(3.7)\sim (3.10)$ と全く同称にして導かれる.特別の場合として $x(\mathcal{A})$ (A>0) を予報する場合は次のようになる.

$$E\left\{ \chi(A) \middle| x^{(j-1)}(0), \ j=1,2,\cdots, \mathcal{H} \right\} = m + C_1(\chi(0) - m) + \sum_{j=1}^{k} C_j \ \chi^{(j-1)}(0)$$

$$C_{j} = \frac{1}{\Delta} \begin{cases} \beta(0) & \beta'(0) & & \beta^{(h-1)}(0) \\ \beta'(0) & \beta''(0) & & \beta^{(h)}(0) \\ & & & & & & \\ \beta^{(j-1)} & \beta^{(j)}(0) & & \beta^{(h+j-2)}(0) \\ \beta(\Delta) & \beta'(\Delta) & & \beta^{(h+j)}(\Delta) \\ \beta^{(j+1)} & \beta^{(j+2)}(0) & & \beta^{(h+j)}(0) \\ & & & & & \\ \beta^{(h-1)}(0) & \beta^{(h)}(0) & & \beta^{(h+j)}(0) \\ & & & & & \\ \beta^{(h-1)}(0) & \beta^{(h)}(0) & & \beta^{(h-2)}(0) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \rho(0) & \cdots & \rho^{(h-1)}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{(h-1)} & \cdots & \rho^{(2h-2)}(0) \end{bmatrix}$$

$$V\{x(A)|x^{(j-1)}(0), j=1, 2, \dots, k\}$$

$$= \sigma^{2} + \frac{\sigma^{2}}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & \rho'(\Delta) & \rho'(\Delta) & \cdots & \rho^{(h-1)} \\ \rho(\Delta) & \rho(0) & \rho'(0) & \cdots & \rho^{(h-1)} \\ -\rho'(\Delta) & \rho'(0) & \rho''(0) & \cdots & \rho^{(h)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{h} \rho^{(h-1)} & \rho^{(h-1)} & \rho^{(h)} & \cdots & \rho^{(2h-2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{h} \rho^{(h-1)} & \rho^{(h)} & \rho^{(h)} & \cdots & \rho^{(2h-2)} \\ \end{vmatrix}$$

参考文献

- [1] 例えばJ.L. Doob, Stochastic Processes pp. 542-550.
- [2] 時系列に関する推測論について(小河原正已), 北川敏男編, 確率論及び推

(20)

計学の進歩。(1953).

- 【3] Doob 上掲書 pp. 71-74.
- [4] N. Wiener, Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series with engineering applications, 1949.
- [5]河田龍夫,応用数学概論(岩波全書), 1952.
- [6] M. Ogawara, A general stochastic prediction formula, Papers in Meteor and Geophys. Vol. 5, Nos 3~4, 1955:
- 【7】小河原正已, 予報についての数学的論理, 科学, Vol. 24, wo. 10, 1954.
 - [8] 小河原正巳および協力者,少数例による予報について,中央気象台研究時報, Vol. 6, No. 6, 1954.