Coverageの extremal quotient について

田村, 亮二
島根大学文理学部

https://doi.org/10.15017/12715

出版情報：統計科学研究. 1 (1), pp.7-9, 1956-01. Research Association of Statistical Sciences

Coverageのextremal quotientについて

田村亮二（島根大・文理）

§1. 序

Coverageを利用した適合度検定の問題は近年Sherman [1], Darling[2], 田村，池田[3]等においていくつか研究されてきた．即今確率変数Xの分布函数を$F(x)$とし，これからの*ordered sample* を$X_1<X_2<\cdots<X_n$とすれば，$F(X_{i+1})-F(X_i)=Y_i$; $i=0,1,2,\cdots,n$（但$F(X_0)=0$, $F(X_{n+1})=1$）は*coverage*とよばれる。問題は一組の観測値$X_1,X_2,\cdots,X_n$がある特定の$F(x)$からの*sample* であるといふ統計的仮説（H_0）の検定に上論文では*coverage*が利用されてゐる：即ち夫々統計量$\frac{1}{2}\Sigma|Y_i-\frac{1}{n+1}|$, $\frac{1}{n+1}\Sigma(Y_i-\frac{1}{n+1})^2$ 及び Y_i の*range* 等である．こゝでは$S=\min Y_i/\max Y_i$ を検定基準とするものである．このSの使用の合理性については直観的ではあるが，先ずH_0の下ではY_iが*uniform spacing* であること，そしてY_iの分布が$F(x)$に依存しないといふ性質による．又一方，いくつかの分散の一称性検定に*max(variance)* と*min(variance)*との比が使はれるのは仮えばHartley [4]にも見られSの使用とある類似をもってゐる．以上の点からSは一応妥当的なものと考えられ，Sの二三の性質を研究するものである．

§2. Sの確率分布及びmoment.

$\min Y=U$, $\max Y=V$ とおいた時U, Vの同時分布$f(u,v)$は
$\Sigma\binom{n+1}{j}(-1)^{j+1}n(n-1)j(n+1-j)\{1-u(n+1-j)-vj\}^{n-2}$,（但$\Sigma$は$1-u(n+1-j)-vj>0$なる$j=1,2,\cdots$についての和）で与えられることは[3]でくわしく論ぜられてゐる．

(a) Sの分布函数

Sの分布函数$F(s)=P(S\leqq s)$は$f(u,v)$を$\frac{u}{v}\leqq s$ で積分すればよいのであるが，上のΣの意味から各jに対して積分領域が異り，$1-u(n+1-j)-vj>0$, $\frac{u}{v}\leqq s$, $u=0$ 且 $v=\frac{1}{n+1}$ で囲れた部分であることに注意すれば

$$F(s)=1-\sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}(-1)^{j+1}n(n-1)j(n+1-j)\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{s(n+1-j)+j}}dv\int_{sv}^{\frac{1-vj}{n+1-j}}\{1-u(n+1-j)-v_j\}^{n-2}du$$

$$=1-\sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}(-1)^{j+1}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)^{n}\frac{j}{s(n+1-j)+j}\ (1-s)^{n}$$

分布函数と同称，密度函数に対しても $\iint_{s<\frac{u}{v}\leq s+ds} f(u,v)dudv$ から求まり

$$f(s)=(1-s)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}(-1)^{j+1}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)^{n}\left\{\frac{n-1}{s(n+1-j)+j}+\frac{n+1}{[s(n+1-j)+j]^{2}}\right\}$$

となる．この $f(s)$ の形は大体指数分布に近く n が大きくなった時もある種の指数型になるやうに予想される．

（b）　S の $moment$.

$$E(S)=\frac{1}{(n+1)^{n}}\sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}(-1)^{j+1}j(n+1-j)^{n}\int_{0}^{1}s(1-s)^{n-1}\left\{\frac{n-1}{s(n+1-j)+j}+\frac{n+1}{\{s(n+1-j)+j\}^{2}}\right\}ds$$

$s(n+1-j)=t$ から

$$=\frac{1}{(n+1)^{n}}\sum\binom{n+1}{j}(-1)^{j+1}\frac{j}{n+1-j}\left\{\int_{j}^{n+1}t(n+1-t)^{n-1}\left(\frac{n-1}{t}+\frac{n+1}{t^{2}}\right)dt-j\int_{j}^{n+1}(n+1-t)^{n-1}\left(\frac{n-1}{t}+\frac{n+1}{t^{2}}\right)dt\right\}$$

而して，

$$\int_{j}^{n+1}(n+1-t)^{n-1}\left(\frac{n-1}{t}+\frac{n+1}{t^{2}}\right)dt=\frac{(n+1)^{n}}{j}-(n+1)^{n}+(n+1)^{n}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k+1}(-1)^{k}\left\{1-\left(\frac{j}{n+1}\right)^{k}\right\}$$

$$=\frac{1}{j}(n+1-j)^{n}$$

及

$$\int_{j}^{n+1}t(n+1-t)^{n-1}\left(\frac{n-1}{t}+\frac{n+1}{t^{2}}\right)dt=(n+1)^{n}\left\{\log\frac{n+1}{j}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}\frac{1}{k}\left[1-\left(\frac{j}{n+1}\right)^{k}\right]\right\}$$

$$+(n+1-j)^{n}$$

$$\therefore\quad E(S)=\sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}(-1)^{j+1}\frac{j}{n+1-j}\left\{\log\frac{n+1}{j}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}\frac{1}{k}\left[1-\left(\frac{j}{n+1}\right)^{k}\right]\right\}$$

こゝで更に

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}\frac{1}{k}\left(\frac{j}{n+1}\right)^{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)^{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}(-1)^{j+1}(n+1-j)^{p}j^{q}=0\quad（但\ p+q<n+1）$$

を用いて

$$E(S)=(-1)^n+\sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}(-1)^{j+1}\frac{j}{n+1-j}\log\frac{n+1}{j}.$$

全く同様にしてλ次の*moment*は,

$$E(S^\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}(-1)^{j+\lambda}\lambda\left(\frac{j}{n+1-j}\right)^{\lambda}\left\{\log\frac{n+1}{j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)^{k}\right\}$$

§3. 棄却域及び*table*.

1%及び5% *point* は $P_r(S\leqq s_\alpha)=\alpha$ ($\alpha=0.01$ 又は 0.05) から定まる s_α であるが $f(s)$ の形をしらべることにより s_α は非常に小さい値となる. そこで s^2 以上を省略して計算すれば, $1-\sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}(-1)^{j+1}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)^n\left\{1-(n-1)s_\alpha+\frac{n+1}{j}s_\alpha\right\}=\alpha$

これから $s_\alpha(n-1)+(n+1)s_\alpha\sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}(-1)^{n+1}\frac{1}{j}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)^n=\alpha$

$$\therefore\quad s_\alpha=\frac{\alpha}{(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-1}$$

かくて簡単に棄却域が計算される.

各 n に対して $E(s)$, 5%及び1%-*point* を表にすれば次の如し.

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$E(S)$	0.1416	0.1007	0.0789	0.0620	0.0527	0.0448	0.0397	0.0368
$\alpha_{0.05}$	0.00682	0.00492	0.00365	0.00292	0.00241	0.00204	0.00177	0.00155
$\alpha_{0.01}$	0.00136	0.00098	0.00073	0.00058	0.00048	0.00041	0.00035	0.00031

文　献

[1] Sherman : *A random variable to the spacing of sample values.* *Ann. Math. Stati.* Vol. 21 (1950)

[2] Darling : *On a class of problems related to the random devision of an interval.* *Ann. Math. Stati.* Vol. 24 (1953)

[3] 田村亮二, 池田一貞 : *Coverage* による *nonparametric test.* 数学研究録 (東京教育大) (1955. 未刊)

[4] Hartley : *The max. F ratio as a short cut test for heterogeneity of variances.* Biometrica. 37 (1950)