抜取検査方式の効率

森口, 繁一
東京大学工学部

https://doi.org/10.15017/12714

出版情報：統計科学研究. 1 (1), pp.2-6, 1956-01. Research Association of Statistical Sciences
バージョン：
権利関係：

寄　書

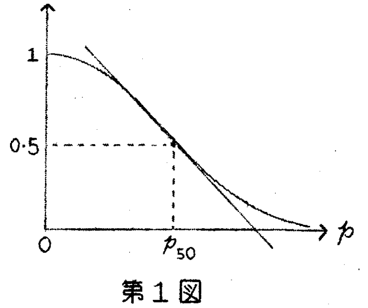
抜取検査方式の効率

森口繁一（東大・工）

まえがき

この雑誌は研究速報のようなものをのせて下さるということなので，前から考えていてまだちやんとしたものにまとめていないことを，気楽な気持で書いて見ます。旅先のことで，引用なども不備ですがお許し下さい。

1. 問題　抜取検査の方ではOC曲線というものが重んぜられている。OC曲線が同じな——もしくは近似的に同じと見られる——二つの方式について平均検査個数を比較して，たとえば”二回抜取検査は一回抜取検査にくらべて効率がよい“というようなことをいう．しかし，この”効率“を定量的に表わそうとすると，ちよっと困ったことになる．それは，効率を定義するための標準となるものがよく知られていないことである．熱機関におけるカルノー・サイクルのように，これ以上のものはないという保証のある理想的な標準があれば，それに比べて効率何パーセントといえるのであるが，それがないので困るのである．Hamaker はこの困難を逃げるために逆効率（inverse efficiency）という概念を提案した．それは一回抜取検査の検査個数を標準にして，平均検査個数がその何%ですむかということで定義するのであるが，それはもちろん小さい程よいという点でふつうの効率とは逆なのである．このときOC曲線の方では，ことがらをはっきりさせるためにHamaker は，合格率L_pがちようど0.5のところでのOC曲線の傾斜$(dL_p/dp)_{p=p_{50}}$の値の等しい方式は近似的に同じ特性を持つものと見て比較するのである．



第1図

本論文では抜取検査において，カルノー・サ

イクルに相当するような方式を求め，それを標準として逆効率ならぬ真の効率を定義することを提案したい．

2. 逐次抜取検査のOC函数　いまつぎのような逐次抜取検査を考える：
$x_1, x_2, x_3, \cdots$ を次々に観測する．$m=1,2,\cdots$ に対し，点 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ が集合 S_m^0 に属するならそこで観測を止めてロットを合格とし，点 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ が集合 S_m^1 に属するならそこで観測をやめてロットを不合格とし，点 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ が S_m^0 にも S_m^1 にも属さないならば第 $(m+1)$ 番目の観測に進む．
——

この方式は，集合 S_m^0, S_m^1 $(m=1,2,\cdots)$ を定めれば定まる．S_m^0 や S_m^1 は，m よりも低いある m' について $(x_1, x_2, \cdots, x_{m'})$ が $S_{m'}^0$ または $S_{m'}^1$ に属するような点 $(x_1, x_2, \cdots, x_{m'}, \cdots, x_m)$ は含まないものとしておいても一般性を失うことはないから，そのように定めておくこととする．

一回抜取検査も二回抜取検査も，上に述べた方式の特別な場合として含まれる．

$(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ の分布についてはつぎのように仮定する：

$x_1, x_2, x_3, \cdots$ は独立に同じ分布 $f_\theta(x)$ に従う．——

ここで，$f_\theta(x)$ は確率を表わしていてもよいし，確率密度を表わしていてもよいが，ここでは確率としておこう．（つまり x は離散的と考えることとしよう．）母数 θ は実変数であるとする．

$f_\theta(x)$ の一例：

$$f_\theta(x) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} \qquad (x = 0, 1)$$

この場合は θ は不良率であり，$\sum x_i$ は観測された不良個数であると見てよい．

以上の仮定のもとに，合格率 $L_0(\theta)$ はつぎのように表わされる：

$$(2\cdot1) \qquad L_0(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{S_m^0} f_\theta(x_1) f_\theta(x_2) \cdots f_\theta(x_m)$$

また不合格率 $L_1(\theta)$ は

$$(2\cdot2) \qquad L_1(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{S_m^1} f_\theta(x_1) f_\theta(x_2) \cdots f_\theta(x_m)$$

と書ける．ここである程度の仮定をすると

$$(2\cdot3) \qquad L_0(\theta) + L_1(\theta) = 1$$

が成り立つので，これが成り立つものとして以下の話をする．

3. 条件づき期待値　条件AおよびRをつぎのように定める：

条件A：あるnについて$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S_n^0$　となること．

条件R：あるnについて$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S_n^1$　となること．

さて，(2·1)をθについて微分すると

$$(3\cdot 1)\qquad \frac{dL_0(\theta)}{d\theta}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{S_m^0}\prod_{j=1}^{m} f_\theta(x_j)\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \ln f_\theta(x_j)}{\partial\theta}=L_0(\theta)\cdot E_\theta\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \ln f_\theta(x_j)}{\partial\theta}\middle|A\right]$$

また(2·2)から

$$(3\cdot 2)\qquad \frac{dL_1(\theta)}{d\theta}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{S_m^1}\prod_{j=1}^{m} f_\theta(x_j)\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \ln f_\theta(x_j)}{\partial\theta}=L_1(\theta)\cdot E_\theta\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \ln f_\theta(x_j)}{\partial\theta}\middle| R\right]$$

が得られる．

(3·1)と(3·2)とから

$$(3\cdot 3)\qquad \frac{1}{L_0}\left(\frac{dL_0}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{L_1}\left(\frac{dL_1}{d\theta}\right)^2=L_0(\theta)\cdot\left(E_\theta\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \ln f_\theta(x_j)}{\partial\theta}\middle|A\right]\right)^2+L_1(\theta)\cdot\left(E_\theta\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \ln f_\theta(x_j)}{\partial\theta}\middle|R\right]\right)^2$$

が導かれるが，一般に期待値の２乗よりも２乗の期待値の方が大きいから，

$$(3\cdot 4)\qquad \frac{1}{L_0}\left(\frac{dL_0}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{L_1}\left(\frac{dL_1}{d\theta}\right)^2\leqq L_0(\theta)\cdot E_\theta\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \ln f_\theta(x_j)}{\partial\theta}\right)^2\middle|A\right]+L_1(\theta)\cdot E_\theta\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \ln f_\theta(x_j)}{\partial\theta}\right)^2\middle|R\right]$$
$$=E_\theta\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \ln f_\theta(x_j)}{\partial\theta}\right)^2\right].$$

ただし式中のnはAまたはRにきまるときの検査個数である．

一方において，(3·1)，(3·2)をもう一度微分して

$$(3\cdot 5)\qquad \frac{d^2L_0}{d\theta^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{S_m^0}\prod_{j=1}^{m} f_\theta(x_j)\cdot\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 \ln f_\theta(x_j)}{\partial\theta^2}+\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \ln f_\theta(x_j)}{\partial\theta}\right)^2\right\}$$

$$(3\cdot 6)\qquad \frac{d^2L_1}{d\theta^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{S_m^1}\prod_{j=1}^{m} f_\theta(x_j)\cdot\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 \ln f_\theta(x_j)}{\partial\theta^2}+\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \ln f_\theta(x_j)}{\partial\theta}\right)^2\right\}$$

が得られるが，この二つを足し合わすと，左辺は(2·3)により0となるので，

$$(3\cdot 7)\qquad 0=E_\theta\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 \ln f_\theta(x_j)}{\partial\theta^2}+\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \ln f_\theta(x_j)}{\partial\theta}\right)^2\right]$$

が出る．これによって(3·4)は

$$(3\cdot 8)\qquad \frac{1}{L_0}\left(\frac{dL_0}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{L_1}\left(\frac{dL_1}{d\theta}\right)^2\leqq E_\theta\left[-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 \ln f_\theta(x_j)}{\partial\theta^2}\right]$$

と書きなおされる．

ところが一般的な仮定の下でこの右辺は

(3·9) $$E_\theta\left[-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 l_n f_\theta(x_j)}{\partial\theta^2}\right]=E_\theta(n)\cdot E_\theta\left\{-\frac{\partial^2 l_n f_\theta(x)}{\partial\theta^2}\right\}$$

となる．しかも，よく知られているように

(3·10) $$E_\theta\left\{-\frac{\partial^2 l_n f_\theta(x)}{\partial\theta^2}\right\}=E_\theta\left\{\left(\frac{\partial l_n f_\theta(x)}{\partial\theta}\right)^2\right\}\equiv I_\theta \quad (\text{とする})$$

である．（この I は R.A. Fisher のいう情報量である．）

それゆえ

(3·11) $$E_\theta(n)\geqq\frac{1}{I}\left[\frac{1}{L_0}\left(\frac{dL_0}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{L_1}\left(\frac{dL_1}{d\theta}\right)^2\right]$$

これはまた，(2·3) を使うと，

(3·12) $$\boxed{E_\theta(n)\geqq\frac{1}{I_\theta}\cdot\frac{1}{L_0(1-L_0)}\left(\frac{dL_0}{d\theta}\right)^2}$$

となる．すなわち，OC 曲線上，合格率 L_0 なる点 θ において，平均検査個数 $E_\theta(n)$ は (3·12) の右辺より小さくなることはできない．

特に $L_0=0\cdot50$ と置くと，

(3·13) $$\boxed{E_{\theta_{50}}(n)\geqq\frac{4}{I_{\theta_{50}}}\left(\frac{dL_0}{d\theta}\right)^2_{\theta_{50}}}$$

これが $L_0=0\cdot50$ なる点における平均検査個数の下限を与える．そこでの傾斜 $(dL_0/d\theta)_{\theta_{50}}$ を指定したとき，この右辺よりも小さい平均検査個数では決してその特性は実現できないのである．

<u>4. 効率の定義</u>　平均検査個数の下限が (3·13) で与えられているので，ある抜取検査方式の OC 曲線が，$L_0=0\cdot50$ の点で $(dL_0/d\theta)_{\theta_{50}}$ なる傾斜を持つとき，その平均検査個数がそこで $E_{\theta_{50}}(n)$ となるなら

(4·1) $$\eta=\frac{4}{I_{\theta_{50}}}\left(\frac{dL_0}{d\theta}\right)^2_{\theta_{50}}\Big/E_{\theta_{50}}(n)$$

をもってその方式の効率と定義することができる．

このように定義された効率は決して 100 % を越えることがない．そしてそれが高いほど "よい" 方式といえる．

効率 100 % の方式がもしあるならそれはどんな方式であるかというと，それは

(3·13) で等号が成り立つもの，すなわち，だんだんさかのぼってみると，(3·3) から (3·4) に移るときに等式で移れるもの，いいかえると，A または R という条件の下での $\sum_{j=1}^{n} \partial \ln f_\theta(x_j)/\partial\theta$ の２乗の期待値と期待値の２乗とがそれぞれ等しいものでなければならない．それは A または R という条件の下で $\sum_{j=1}^{n} \partial \ln f_\theta(x_j)/\partial\theta$ の分散が０，すなわちそれがそれぞれある定数でなければならないことを意味する．つまり，効率 100％ の方式は

$$(4\cdot2)\qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \ln f_\theta(x_j)}{\partial\theta} = \begin{cases} C & ,\ A \text{ のとき} \\ D & ,\ R \text{ のとき} \end{cases}$$

なる性質を持つものでなければならない．

この性質を持つ方式は厳密には作れないことが多いが，近似的には作れる．

例：$f_\theta(x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$　，$x = 0, 1$　のとき，

$$(4\cdot3)\qquad \frac{\partial \ln f_\theta(x)}{\partial\theta} = \frac{x}{\theta} - \frac{1-x}{1-\theta} = \frac{x}{\theta(1-\theta)} - \frac{1}{1-\theta}$$

$$(4\cdot4)\qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \ln f_\theta(x_j)}{\partial\theta} = \frac{1}{\theta(1-\theta)} \sum_{j=1}^{n} x_j - \frac{n}{1-\theta} = \begin{cases} C & ,\ A \text{ のとき} \\ D & ,\ R \text{ のとき} \end{cases}$$

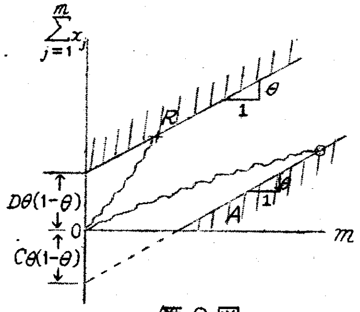
としたい．それはつぎのように方式を定めれば（近似的に）できる：

$$(4\cdot5)\qquad S_m^0 = \Big\{(x_1, \cdots, x_m) : m'\theta + C\theta(1-\theta) < \sum_{j=1}^{m'} x_j < m'\theta + D\theta(1-\theta),\ \ m' = 1, 2, \cdots, m-1;$$
$$\sum_{j=1}^{m} x_j \leqq m\theta + C\theta(1-\theta)\Big\}$$

$$(4\cdot6)\qquad S_m^1 = \Big\{(x_1, \cdots, x_m) : m'\theta + C\theta(1-\theta) < \sum_{j=1}^{m'} x_j < m'\theta + D\theta(1-\theta),\ \ m' = 1, 2, \cdots, m-1;$$
$$m\theta + D\theta(1-\theta) \leqq \sum_{j=1}^{m} x_j\Big\}$$

同様にして他のいろいろな $f_\theta(x)$ の場合も扱うことができる．結果はふつうの確率比式逐次抜取検査方式と同じ形になる．

なお，(3·11) 式を ”情報量“ ということばで解釈してみるのもおもしろいであろう．



第２図

―― 1955-12-22(木) 福岡にて ――