

亀裂進展に伴うエネルギー解放率の数学解析に関する再考察

木村, 正人
九州大学大学院数理学研究院

若野, 功
京都大学大学院情報学研究科

<https://hdl.handle.net/2324/11863>

出版情報：日本応用数理学会論文誌. 16 (3), pp. 345-358, 2006-09-25. 日本応用数理学会
バージョン：
権利関係：



MHF Preprint Series

**Kyushu University
21st Century COE Program
Development of Dynamic Mathematics with
High Functionality**

New mathematical approach to the energy release rate in crack extension

M. Kimura & I. Wakano

MHF 2006-16

(Received April 3, 2006)

Faculty of Mathematics
Kyushu University
Fukuoka, JAPAN

亀裂進展に伴うエネルギー解放率の 数学解析に関する再考察

木村正人* 若野功**

*九州大学大学院数理学研究院, **京都大学大学院情報学研究科

New mathematical approach to the energy release rate in crack extension

Masato Kimura* Isao Wakano**

*Faculty of Mathematics, Kyushu University,

**Graduate School of Informatics, Kyoto University

Abstract. We study general mathematical framework for rigorous derivation of the energy release rate which plays an important role in the theory of fracture mechanics. Applying a technique of the shape sensitivity analysis, this is formulated as a variational problem with a parameter. Key points of our theory are a new parameter variational principle and the classical implicit function theorem in Banach spaces.

1 亀裂進展におけるエネルギー解放率

弾性体内部を進展する亀裂の挙動を理解するための試みは Griffith [5] に始まったとされ、現在に至るまで、工学・物理・数学などの分野において非常に多くの研究が様々な角度から行われている。中でも今日、エネルギー解放率と呼ばれている量は、[5] を端緒とし多くの一般化の試みを経つつ、今でも破壊力学、亀裂進展の数値モデリングとその解析において重要な役割を果たしている。非常に多数・多岐に渡るこれまでの研究については、ここでは、[4] や [8], [9], [10], [11] などを挙げるにとどめ、それらの引用文献や多くの破壊力学の教科書に譲ることとする。

本論文では、Ohtsuka [9] 等によって提案されたエネルギー解放率の数学的定式化を踏襲し、次のような「準定常仮定」のもとでの亀裂進展にかかわっているとされるエネルギー解放率について、新たな数学的アプローチを試みる。

準定常仮定 変位・応力場の準定常近似が成り立つ。すなわち各時刻において、与えられた領域形状及び境界条件のもとで、それらは静弾性エネルギー（外力がある場合はそれを含むポテンシャルエネルギー）最小の状態にあると仮定する。

詳しい定式化は 4 節に譲るが、エネルギー解放率とは次のように定義される量である。今、 $\mathbb{R}^n$ 内の（亀裂のない）有界な弾性体 Ω_* に、 $n-1$ 次元亀裂 Σ が入っているものとする。 $0 \leq t < T$ をパラ

メータとする仮想亀裂進展 $\Sigma(t)$ を考える．ここで、 $\Sigma = \Sigma(0) \subset \Sigma(t_1) \subset \Sigma(t_2)$ ($0 \leq t_1 \leq t_2 < T$) である．

$\Omega_* \setminus \Sigma(t)$ における弾性エネルギー $E(t)$ は、準定常仮定のもとでは、

$$(1.1) \quad E(t) := \min_v \int_{\Omega_* \setminus \Sigma(t)} W(x, v(x), \nabla v(x)) dx,$$

で与えられる．ここで、 v は与えられた境界条件を満たす変位場であり、 $W(x, v(x), \nabla v(x))$ は静弾性エネルギー（外力がある場合はそれを含むポテンシャルエネルギー）密度である．

そのとき、仮想亀裂進展 $\{\Sigma(t)\}_{0 \leq t < T}$ に伴う、 $t = 0$ におけるエネルギー解放率 G は、

$$(1.2) \quad G := \lim_{t \rightarrow +0} \frac{E(0) - E(t)}{|\Sigma(t) \setminus \Sigma|},$$

で与えられる． $E(t) \leq E(0)$ であることから、もし、この極限が存在すれば、 $G \geq 0$ である．

歴史的には、等方な定数係数線形 2 次元弾性体における直線亀裂の場合の研究が主であった．大塚は、[8], [9], [10], [11] などにおいて、弱い非線形楕円型方程式（系）を含む一般次元の曲面亀裂の場合に数学的定式化を行い、エネルギー解放率の存在とその領域積分表現、及び一般 J 積分理論を展開を行った．そこで使われた手法は、形状感度解析のアイデアを用いて仮想亀裂進展を表現し（注意 4.4 を参照）、エネルギー最小原理 (1.1) に基づいて、(1.2) の右辺に現れる差分を丁寧に評価するものであった．

エネルギー解放率の数学的取り扱いの難しさは、亀裂先端における変位場や応力場の解の持つ特異性にある．この特異性の係数は応力拡大係数と呼ばれ、その数学解析は現在でも研究が続いており未解決な部分も多く残されている．それについては、上記文献や [12], [13]などを参照されたい．

本研究では、[9] における数学的定式化をもとに Lipschitz 連続な領域写像を用いて、その精密化を図る（3 節及び 4 節）．更に、差分の評価の代わりに Fréchet 微分を用いたエネルギー解放率の計算を行い、その領域積分表現が得られる（4 節）．そのための準備として、Banach 空間における抽象的パラメータ付き変分問題の一般論を陰関数定理と Lax-Milgram の定理の応用として展開する（2 節）．それにより、[9] によるエネルギー解放率の領域積分表現が、パラメータによるエネルギーの 1 階 Fréchet 微分として見通しよく得られるとともに、より弱い条件への精密化・高階エネルギー微分への拡張が得られる．

2 パラメータ付き抽象的変分問題

本節では、Banach 空間における抽象的パラメータ付き変分問題の一般論を展開する．次の良く知られた定理から始める．以下で、混乱のない場合には、Fréchet 微分は $'$ で表す．また例えば、 F_y は F の $y \in Y$ に関する Fréchet 偏微分を表し、 F_y の代わりに $\partial_Y F$ という表記も併用する．

定理 2.1. [Banach 空間における陰関数定理] X, Y, Z を実 Banach 空間とし、 U, V をそれぞれ X, Y の開集合とする． $F : U \times V \rightarrow Z$ と $(x_0, y_0) \in U \times V$ は次の条件を満たすものとする．

1. $F(x_0, y_0) = 0$.
2. $F \in C^0(U \times V, Z)$.
3. $F(x, \cdot) \in C^1(V, Z)$ for $x \in U$ and F_y is continuous at $(x, y) = (x_0, y_0)$.

$$4. (F_y(x_0, y_0))^{-1} \in B(Z, Y).$$

そのとき, (x_0, y_0) のある凸開近傍 $U_0 \times V_0 \subset U \times V$ と $f \in C^0(U_0, V_0)$ が存在し, $(x, y) \in U_0 \times V_0$ に対し, $F(x, y) = 0$ であることと $y = f(x)$ は同値になる. 更に, もし $F \in C^k(U \times V, Z)$ ($k \in \mathbb{N}$) ならば, $f \in C^k(U_0, V_0)$ が従う. $\square$

証明は例えば [2] や [7] を参照のこと.

定理 2.2. X と M を実 Banach 空間とする. X の部分集合 $\mathcal{U}_0$ と M の開部分集合 $\mathcal{O}_0$ 上で定義された汎関数 $J : \mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ を考える. 各 $\mu \in \mathcal{O}_0$ に対し, ある $u(\mu) \in \mathcal{U}_0$ があって $J(\cdot, \mu)$ の最小値 $J_*(\mu)$ を与えるものとする. すなわち,

$$J_*(\mu) := \min_{v \in \mathcal{U}_0} J(v, \mu) = J(u(\mu), \mu) \quad (\mu \in \mathcal{O}_0).$$

次の条件を仮定する.

1. $J \in C^0(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0)$ かつ, 任意の $v \in \mathcal{U}_0$ に対し $J(v, \cdot) \in C^1(\mathcal{O}_0)$ で, $\partial_M J \in C^0(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0, M')$.
2. $u \in C^0(\mathcal{O}_0, X)$.

そのとき, $J_* \in C^1(\mathcal{O}_0)$ で, 次が成り立つ.

$$(2.1) \quad J'_*(\mu) = \partial_M J(u(\mu), \mu) \quad (\mu \in \mathcal{O}_0).$$

更にもし, $\mathcal{U}_0$ も開集合で, $k \in \mathbb{N}$ に対し, $\partial_M J \in C^k(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0, M')$ 及び $u \in C^k(\mathcal{O}_0, X)$ であるならば, $J_* \in C^{k+1}(\mathcal{O}_0)$ が成り立つ. $\square$

注意 2.3. もし $\mathcal{U}_0$ が開集合で, $J \in C^1(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0)$ 及び $u \in C^1(\mathcal{O}_0, X)$ であるとする, 公式 (2.1) は次のように簡単に得られる.

$$J'_*(\mu) = D_\mu[J(u(\mu), \mu)] = \partial_X J(u(\mu), \mu)[u'(\mu)] + \partial_M J(u(\mu), \mu) = \partial_M J(u(\mu), \mu),$$

ここで D_μ は, $\mu \in M$ に関する Fréchet 微分を表す. 最後の等式は, 最小値を与える $u(\mu)$ において, $J(\cdot, \mu)$ の第一変分 $\partial_X J(u(\mu), \mu) \in X'$ が 0 であることから従う. $\square$

定理 2.2 の証明. $\mu_0 \in \mathcal{O}_0$ を固定し, $u_0 := u(\mu_0)$,

$$r(\mu) := J_*(\mu) - J_*(\mu_0) - \partial_M J(u_0, \mu_0)[\mu - \mu_0] \quad (\mu \in \mathcal{O}_0),$$

と定義する. $u(\mu)$ が最小値を与えることから, μ が μ_0 に近ければ,

$$\begin{aligned} r(\mu) &\leq J(u_0, \mu) - J(u_0, \mu_0) - \partial_M J(u_0, \mu_0)[\mu - \mu_0] = o(\|\mu - \mu_0\|_M), \\ r(\mu) &\geq J(u(\mu), \mu) - J(u(\mu), \mu_0) - \partial_M J(u_0, \mu_0)[\mu - \mu_0] \\ &= \int_0^1 \{\partial_M J(u(\mu), \mu_0 + s(\mu - \mu_0)) - \partial_M J(u_0, \mu_0)\}[\mu - \mu_0] ds = o(\|\mu - \mu_0\|_M), \end{aligned}$$

がそれぞれ成り立つ. こうして, $r(\mu) = o(\|\mu - \mu_0\|_M)$ が言え, (2.1) が従う. また, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し, $\partial_M J \in C^k(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0, M')$ 及び $u \in C^k(\mathcal{O}_0, X)$ であるならば, $J_* \in C^{k+1}(\mathcal{O}_0)$ が成り立つ. $\square$

定理 2.4. X と M を実 Banach 空間とし, $\mathcal{U}, \mathcal{O}$ をそれぞれ X, M の開集合とする. $u_0 \in \mathcal{U}$ および $\mu_0 \in \mathcal{O}$ と汎関数 $J: \mathcal{U} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ について, 次の条件を仮定する.

1. $J(\cdot, \mu) \in C^2(\mathcal{U})$ ($\mu \in \mathcal{O}$) かつ $\partial_X J \in C^0(\mathcal{U} \times \mathcal{O}, X')$.
2. $\partial_X J(u_0, \mu_0) = 0$.
3. $\partial_X^2 J(w, \mu)$ は $(w, \mu) = (u_0, \mu_0)$ において連続.
4. ある $\alpha > 0$ があって, $\partial_X^2 J(u_0, \mu_0)[w, w] \geq \alpha \|w\|_X^2$ ($w \in X$) を満たす.

そのとき, (u_0, μ_0) の凸開近傍 $\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0 \subset \mathcal{U} \times \mathcal{O}$ と, $u \in C^0(\mathcal{O}_0, \mathcal{U}_0)$ が存在し, $\mu \in \mathcal{O}_0$ に対し, 次の3つの条件は同値になる.

- a. $J(\cdot, \mu)$ は $w \in \mathcal{U}_0$ において極小値を取る.
- b. $w \in \mathcal{U}_0$ は $\partial_X J(w, \mu) = 0$ を満たす.
- c. $w = u(\mu)$.

このとき, $J(\cdot, \mu)$ は $u(\mu)$ において $\mathcal{U}_0$ における最小値を取る. $\square$

証明 $\mathcal{U} \times \mathcal{O}$ から X' への写像を $F := \partial_X J$ で定義し, 定理 2.1 を $(w, \mu) = (u_0, \mu_0)$ において適用する. Lax-Milgram の定理から, $\partial_X F(u_0, \mu_0) = \partial_X^2 J(u_0, \mu_0)$ は, X から X' への線形位相同型写像になる. 陰関数の定理 (定理 2.1) から, (u_0, μ_0) のある凸開集合 $\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0 \subset \mathcal{U} \times \mathcal{O}$ と $u \in C^0(\mathcal{O}_0, \mathcal{U}_0)$ があって, $\mu \in \mathcal{O}_0$ に対し, $w \in \mathcal{U}_0$ が $\partial_X J(w, \mu) = 0$ を満たすこととは, $w = u(\mu)$ であるための必要十分条件になる.

また, $\partial_X^2 J$ の (u_0, μ_0) での連続性から, 一般性を失わず (必要なら小さく $\mathcal{U}_0$ と $\mathcal{O}_0$ を取り直して), 次を仮定することができる

$$(2.2) \quad \partial_X^2 J(v, \mu)[w, w] \geq \frac{\alpha}{2} \|w\|_X^2 \quad (\forall w \in X, \forall (v, \mu) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0).$$

$\mu \in \mathcal{O}_0$ に対し, もし $w \in \mathcal{U}_0$ において $J(\cdot, \mu)$ が極小値を取るならば, $\partial_X J(w, \mu) = 0$ が従う. 逆に, もし $w \in \mathcal{U}_0$ が $\partial_X J(w, \mu) = 0$ を満たすならば, w において極小値を取ることが条件 (2.2) からわかる. またそのとき, (2.2) から, $u(\mu)$ において $\mathcal{U}_0$ 上の $J(\cdot, \mu)$ の最小値が与えられることが従う. $\square$

次の定理も 陰関数定理からただちに得られる.

定理 2.5. 定理 2.4 の条件のもとで, 更に $\partial_X J \in C^k(\mathcal{U} \times \mathcal{O}, X')$ がある $k \in \mathbb{N}$ について成り立つと仮定する. そのとき, $u \in C^k(\mathcal{O}_0, \mathcal{U}_0)$ である. $\square$

以下, 定理 2.4 の条件のもとで, J_* を

$$J_*(\mu) := J(u(\mu), \mu) \quad (\mu \in \mathcal{O}_0),$$

と定義する. ここで, 次のことに注意しよう. 単純に考えて, $J_* \in C^k(\mathcal{O}_0)$ ($k \in \mathbb{N}$) であるための十分条件は $J \in C^k(\mathcal{U} \times \mathcal{O})$ かつ $u \in C^k(\mathcal{O})$ である. 定理 2.5 によると, 定理 2.4 の状況のもとではこの十分条件は, $J \in C^k(\mathcal{U} \times \mathcal{O})$ かつ $\partial_X J \in C^k(\mathcal{U} \times \mathcal{O}, X')$ と言い換えられる. しかし, 条件 $\partial_X J \in C^k(\mathcal{U} \times \mathcal{O}, X')$ は必ずしも要求しなくてよいことが, 定理 2.2 から次のようにわかる.

定理 2.6. 定理 2.4 の条件のもとで, 更に, ある $k \in \mathbb{N}$ について $J \in C^k(\mathcal{U} \times \mathcal{O})$ であると仮定する. そのとき, $J_* \in C^k(\mathcal{O}_0)$ で, かつ (2.1) が成り立つ. $\square$

証明 定理 2.2 より, $J_* \in C^1(\mathcal{O}_0)$ であり (2.1) が成り立つことがただちに従う. また, $u \in C^{k-1}(\mathcal{O}_0, X)$ であることが定理 2.5 からわかるので, (2.1) から $J'_* \in C^{k-1}(\mathcal{O}_0)$ であることがわかる. $\square$

Lax-Milgram の定理から, 定理 2.4 の条件のもとでは, $\partial_X^2 J(u(\mu), \mu)$ は X から X' への線形位相同型写像 (すなわち, X から X' への全単射な有界線形作用素) とみなせることがわかるので, $\Lambda(\mu) \in B(X', X)$ をその逆写像として次をみたすように定義する.

$$\partial_X^2 J(u(\mu), \mu)[\Lambda(\mu)h, w] = h[w] \quad (\forall w \in X, \forall h \in X').$$

この $\Lambda(\mu)$ は次節での楕円型偏微分方程式への応用においては, 考えている境界条件のもとでの楕円型作用素の逆写像に相当する.

定理 2.7. 定理 2.5 で $k = 1$ としたとき,

$$(2.3) \quad u'(\mu) = -\Lambda(\mu)h_0(\mu) \quad (\mu \in \mathcal{O}_0),$$

が成り立つ. 但し, $h_0(\mu) := \partial_M \partial_X J(u(\mu), \mu) \in B(M, X')$ である. $\square$

証明 $\partial_X J(u(\mu), \mu)[w] = 0 \in X'$ を μ で微分すると,

$$\partial_X^2 J(u(\mu), \mu)[u'(\mu)] + \partial_M \partial_X J(u(\mu), \mu) = 0 \in B(M, X'),$$

が得られるが, これは Lax-Milgram の定理より, (2.3) と同値である. $\square$

定理 2.8. 定理 2.4 の条件のもとで, 更に, $J \in C^2(\mathcal{U} \times \mathcal{O})$ であると仮定する. そのとき, $J_* \in C^2(\mathcal{O}_0)$ で次の公式

$$J''_*(\mu)[\mu_1, \mu_2] = \partial_M^2 J(u(\mu), \mu)[\mu_1, \mu_2] - {}_X \langle \Lambda(\mu)h_0(\mu)[\mu_1], h_0(\mu)[\mu_2] \rangle_{X'} \quad (\mu \in \mathcal{O}_0, \mu_1, \mu_2 \in M),$$

が成り立つ. $\square$

証明 公式 (2.1) を μ で微分し, (2.3) を代入すれば, ただちに得られる. $\square$

3 Lipschitz 写像による領域摂動

この節では, Lipschitz 級に属する領域写像 $\varphi: \Omega \rightarrow \varphi(\Omega)$ について, 必要な結果を命題の形でまとめしておく. ここで, Ω は $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) の有界領域, φ は Sobolev 空間 $W^{1,\infty}$ に属する $\mathbb{R}^n$ に値をとる関数である.

以下, $\mathbb{R}^n$ の有界凸領域 Ω_0 ($n \geq 2$) を一つ固定して, $W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n) \cong C^{0,1}(\overline{\Omega_0}, \mathbb{R}^n)$ に属する領域写像 φ について考える. また, 関数 $u: \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^k$ に対し,

$$|u|_{\text{Lip}, \Omega_0} := \sup_{x, y \in \Omega_0, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|},$$

とおく. 特に, $\mathbb{R}^n$ 上の恒等写像を $\varphi_0(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}^n$) とおく.

命題 3.1. 写像 $\varphi \in W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ が $|\varphi - \varphi_0|_{\text{Lip}, \Omega_0} < 1$ を満たすとき, φ は Ω_0 から $\varphi(\Omega_0)$ への bi-Lipschitz 変換になる. すなわち, φ は Ω_0 から, ある開集合への全単射で, φ と φ^{-1} はともに一様 Lipschitz 連続である. $\square$

証明は、縮小写像の原理によるが、ここでは省略する。

ここで、 $\bar{\Omega} \subset \Omega_0$ を満たす開集合 Ω を一つ固定する。 φ によるその変形 $\varphi(\Omega)$ を、以後 $\Omega(\varphi)$ と表すことにする。 また、 Ω 上で定義された関数 v に対し、 $\Omega(\varphi)$ 上の関数を $\varphi_*v := v \circ \varphi^{-1}$ によって定義する。 この φ_* はいわゆる、 φ に伴う押し出し作用素 (pushforward operator) である。 φ が命題 3.1 を満たすとき、

$$\nabla \varphi^T(x) := \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) \right)_{i,j \rightarrow} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (x \in \Omega_0),$$

$$A(\varphi) := (\nabla \varphi^T)^{-1} \in L^\infty(\Omega_0, \mathbb{R}^{n \times n}), \quad \kappa(\varphi) := \det \nabla \varphi^T \in L^\infty(\Omega_0, \mathbb{R}),$$

と定義する。これらの Jacobi 行列や Jacobi 行列式は $\Omega(\varphi)$ 上の微分や積分の Ω への引き戻しを考えるとときに現れる。

$$(3.1) \quad [\nabla(\varphi_*v)] \circ \varphi = A(\varphi) \nabla v \quad \text{a.e in } \Omega \quad (v \in W^{1,1}(\Omega)),$$

$$(3.2) \quad \int_{\Omega(\varphi)} (\varphi_*v)(y) dy = \int_{\Omega} v(x) |\kappa(\varphi)(x)| dx \quad (v \in L^1(\Omega))$$

φ が C^1 級の場合によく知られたこれらの公式は、Lipschitz 級の φ についても成り立つ。例えば、[3] 等を参照のこと。

命題 3.2. Ω を Ω_0 の開部分集合とするととき、次が成り立つ。

1. $\kappa \in C^\infty(W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n), L^\infty(\Omega))$. 特に、 $\kappa'(\varphi_0)[\mu] = \operatorname{div} \mu$ ($\mu \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$) である。
2. $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ の開集合を $\mathcal{O}_0(\Omega) := \{\varphi \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n); \operatorname{ess-inf}_{\Omega} \kappa(\varphi) > 0\}$ で定義する。そのとき、 $A \in C^\infty(\mathcal{O}_0(\Omega), L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n}))$ が成り立ち、特に、 $A'(\varphi_0)[\mu] = -\nabla \mu^T$ ($\mu \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$) である。□

証明 行列式は n 次多項式なので、 $\kappa \in C^\infty(W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n), L^\infty(\Omega))$ は明らか。また、 δ_{ij} を Kronecker のデルタとするととき、

$$m_{ij}(t) := \delta_{ij} + t \frac{\partial \mu_j}{\partial x_i} \in L^\infty(\Omega) \quad (i, j = 1, \dots, n, t \in \mathbb{R}, \mu \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)),$$

とおくと、 κ の φ_0 における Fréchet 微分が次のように計算される。

$$\begin{aligned} \kappa'(\varphi_0)[\mu] &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \kappa(\varphi_0 + t\mu) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(m_{ij}(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) m_{1\sigma(1)}(t) \cdots m_{n\sigma(n)}(t) \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (m_{11}(t) \cdots m_{nn}(t)) = \sum_{i=1}^n m_{11}(0) \cdots m'_{ii}(0) \cdots m_{nn}(0) = \operatorname{div} \mu. \end{aligned}$$

次に $A(\varphi)$ の (i, j) 成分を $a_{ij}(\varphi) \in L^\infty(\Omega)$ としよう。そのとき、行列 $\nabla \varphi^T$ の (i, j) 余因子を $\alpha_{ij}(\varphi)$ とすれば、 $a_{ij}(\varphi) = \alpha_{ij}(\varphi) / \kappa(\varphi)$ である。 $\mathcal{O}_0(\Omega)$ では $\operatorname{ess-inf}_{\Omega} \kappa(\varphi) > 0$ であることと $\alpha_{ij}(\varphi)$ は $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}$ の $n-1$ 次多項式であることから、 $a_{ij} \in C^\infty(\mathcal{O}_0(\Omega), L^\infty(\Omega))$ が従う。 $\mu \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ に対し、等式

$$A(\varphi_0 + t\mu)(I + t\nabla \mu^T) = I \quad (I \text{ は } n \text{ 次単位行列}),$$

を $t = 0$ において $t \in \mathbb{R}$ で微分すると次が得られる.

$$A'(\varphi_0)[\mu] + A(\varphi_0)\nabla\mu^T = O \quad (O \text{ は } n \text{ 次零行列}).$$

ここで, $A(\varphi_0) = I$ なので, $A'(\varphi_0)[\mu] = -\nabla\mu^T$ が従う. $\square$

次の命題は公式 (3.1) 及び (3.2) より明らかである.

命題 3.3. 命題 3.1 の条件のもとで, 任意の $p \in [1, \infty]$ に対し, ある $c_i = c_i(\varphi, p) > 0$ ($i = 0, 1$) があって¹, 次が成り立つ.

$$c_0\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\varphi_*v\|_{L^p(\Omega(\varphi))} \leq c_1\|v\|_{L^p(\Omega)} \quad (v \in L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty),$$

$$c_0\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla(\varphi_*v)\|_{L^p(\Omega(\varphi))} \leq c_1\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \quad (v \in W^{1,p}(\Omega), 1 \leq p \leq \infty).$$

すなわち, 写像 φ_* は $L^p(\Omega)$ から $L^p(\Omega(\varphi))$ への線形位相同型かつ, $W^{1,p}(\Omega)$ から $W^{1,p}(\Omega(\varphi))$ への線形位相同型になる. $\square$

4 エネルギー最小化問題とエネルギー解放率

この節では前節のように選んだ Ω_0 及び Ω を固定し, φ によって摂動された領域 $\Omega(\varphi)$ におけるエネルギー最小化問題について考える.

$W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ の開部分集合

$$\mathcal{O}(\Omega) := \left\{ \varphi \in W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n); |\varphi - \varphi_0|_{\text{Lip}, \Omega_0} < 1, \text{ess-inf}_{\Omega} \kappa(\varphi) > 0, \overline{\Omega(\varphi)} \subset \Omega_0 \right\},$$

を定義しておく. 以下, φ はこの $\mathcal{O}(\Omega)$ に属するものとする.

記述の簡単のため, 次の仮定をおく. より一般の状況への拡張性については, 後の注意を参照のこと. $v \in H^1(\Omega(\varphi))$ を $\Omega(\varphi) \subset \mathbb{R}^n$ における状態を表す何らかのスカラール量とする. そのときの考えている系のエネルギーを

$$E(v, \Omega(\varphi)) := \int_{\Omega(\varphi)} W(x, v(x), \nabla v(x)) dx,$$

とする. ここで, $W(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}$ は $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ について定義されたエネルギー密度関数とする. 本稿では, 煩雑さをさけるため, 線形楕円型問題に対応する次の形に限ることとする (注意 4.2, 4.3 参照).

$$(4.1) \quad W(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} (\zeta^T B(\xi) \zeta + b(\xi) \eta^2) - f(\xi) \eta,$$

ここで, $B(\xi)$ は n 次対称行列 ($\mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$ と表す) で, $B \in W^{k,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n})$ かつ, ある $\beta_0 > 0$ があって,

$$\zeta^T B(\xi) \zeta \geq \beta_0 |\zeta|^2 \quad (\forall \xi \in \Omega_0, \forall \zeta \in \mathbb{R}^n),$$

を満たすものとする. ここで, k は 0 以上の整数とする. 同様に, b は $b \in W^{k,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R})$ かつ $b(\xi) \geq 0$ ($\forall \xi \in \Omega_0$) を満たし, f は $f \in W^{k,2}(\Omega_0, \mathbb{R})$ を満たすものとする. このエネルギーの最小化問題は, 形式的に次の楕円型方程式に対応する.

$$-\text{div}(B(x)\nabla u) + b(x)u = f(x) \quad \text{in } \Omega(\varphi).$$

¹実際は c_i は p によらないように取れる.

このエネルギーの最小化問題を、次のような非斉次 Dirichlet 境界条件と斉次 Neumann 境界条件をもつ混合境界条件のもとで考える。

まず、 Γ_D を摂動されていない領域 Ω の境界の空でない Lipschitz 連続な部分集合とする（いくつかの部分に分かれていても良い）。正確には有界なトレース作用素 $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma_D)$ （但し、 $R(\gamma_0) = \gamma_0(H^1(\Omega)) \neq \{0\}$ とする）が定義されていれば良い。 $g \in H^1(\Omega)$ を一つ固定し、 $v \in H^1(\Omega)$ に対する Γ_D 上の非斉次 Dirichlet 境界条件 $\gamma_0(v - g) = 0$ を考える。また、 Ω の境界の Γ_D 以外の部分では、零 Neumann 境界条件（上記線形問題の場合は、 $B\nabla u$ の法線成分が 0 に相当）が課されるものとする。

次に、摂動された領域 $\Omega(\varphi)$ における境界条件を述べる。 Γ_D に対応する境界を $\Gamma_D(\varphi) := \varphi(\Gamma_D)$ と書く。 $H^1(\Omega(\varphi))$ から $L^2(\Gamma_D(\varphi))$ へのトレース作用素を γ_φ とするとき、 $v \in H^1(\Omega(\varphi))$ に対する $\Gamma_D(\varphi)$ 上の非斉次 Dirichlet 境界条件 $\gamma_\varphi(v - \varphi_*g) = 0$ を考える。また、 $\Omega(\varphi)$ の境界の $\Gamma_D(\varphi)$ 以外の部分では、同様に零 Neumann 境界条件が課されるものとする。

対応する $H^1(\Omega(\varphi))$ のアフィン部分空間は次のようになる。

$$\begin{aligned} V(\varphi, g) &:= \{v \in H^1(\Omega(\varphi)); \gamma_\varphi(v - \varphi_*g) = 0\} \\ &= \{v \in H^1(\Omega(\varphi)); v = \varphi_*g \text{ on } \Gamma_D(\varphi)\}. \end{aligned}$$

ここで、 $V(g) = V(\varphi_0, g) \subset H^1(\Omega)$ とおくとき、 $\varphi_*(V(g)) = V(\varphi, g)$ であることに注意しておく。

問題 4.1. 上記の仮定のもとで、 $V(\varphi, g)$ において $E(\cdot, \Omega(\varphi))$ を最小にする $u(\varphi) \in V(\varphi, g)$ を求めよ。すなわち、

$$E(u(\varphi), \Omega(\varphi)) \leq E(v, \Omega(\varphi)) \quad (\forall v \in V(\varphi, g)). \quad \square$$

また、このとき、

$$E_*(\varphi) := \min_{v \in V(\varphi, g)} E(v, \Omega(\varphi)) = E(u(\varphi), \Omega(\varphi)),$$

と定義する。これは $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega) \subset W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ をパラメータとするパラメータ付き変分問題とみなせる。

ここで、Ohtsuka [9] による定式化についていくつか注意を述べておく。

注意 4.2. 弾性体の亀裂問題では通常、空間次元 $n = 2$ または 3 で、 n ベクトル値の変位場が状態を表す v に対応するが、[9] ではスカラー値の場合とベクトル値の場合では、以下の議論に本質的な差はないことが示されている。そのため、本論文では煩雑さを避けるため、単独楕円型方程式の場合について記述することとしたが、もちろん以下の結果は弾性体方程式を含むベクトル値の場合に容易に拡張可能である。 $\square$

注意 4.3. [9] で扱われているように、 W は必ずしも (4.1) のような線形問題に対応している必要はなく、半線形などある種の弱い非線形問題にも以下の議論は適用可能である。大雑把に言って、 H^1 の枠組みで取り扱える非線形性ならば大丈夫だが、そのような W の満たすべき仮定をすべて書き連ねることは本稿では避け、[9] の取り扱いを参考に挙げるにとどめる。 $\square$

注意 4.4. エネルギー解放率の計算において必要な仮想亀裂進展は、本論文の枠組みでは次のように取り扱われる。 Ω_* を亀裂の入っていない領域とし、そこに初期亀裂 $\Sigma \subset \overline{\Omega}_*$ が入った領域を $\Omega := \Omega_* \setminus \Sigma$ とする。 $0 \leq t < T$ をパラメータとする滑らかな仮想亀裂進展 $\Sigma(t)$ を考える。ここで、 $\Sigma(t)$ は閉集合とし、

$$\Sigma = \Sigma(0) \subset \Sigma(t_1) \subset \Sigma(t_2) \quad (0 \leq t_1 \leq t_2 < T),$$

である. $\varphi(t) \in \mathcal{O}(\Omega)$ を $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi(t)(\Sigma) = \Sigma(t)$ かつ $\partial\Omega_*$ の近傍では $\varphi(t)(x) = x$ となるように取る. パラメータ t として特に, $t = \mathcal{H}^{n-1}(\Sigma(t) \setminus \Sigma)$ となるように選ぶ. ここで, $\mathcal{H}^{n-1}$ は $n-1$ 次元 Hausdorff 測度を表す. 仮想亀裂進展 $\{\Sigma(t)\}_{0 \leq t < T}$ に伴う, $t = 0$ におけるエネルギー解放率 G は, E_* の φ に関する Fréchet 微分 E'_* を用いて,

$$G = E'_*(\varphi_0)[\dot{\varphi}(0)],$$

で与えられる. ここで, $\dot{\varphi}$ は t 微分を表し, $\dot{\varphi}(0) \in W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ の台は亀裂先端部の小さな近傍に含まれるように出来る. そのような $\varphi(t)$ の構成については, やはり [9] を参照のこと. すなわち, エネルギー解放率を求めることは, E_* の Fréchet 微分 $E'_*(\varphi_0)$ を求めることに帰着される. $\square$

注意 4.5. また, [9] ではそこで提案されている枠組みが, 亀裂進展問題だけではなく, 他の領域変形や混合境界条件の摂動などへ, 様々な応用を持つことが指摘されているが, それらの指摘は本論文へも直接当てはまる. $\square$

以下, W の ξ, η, ζ に関する微分をそれぞれ $\nabla_\xi W = (\frac{\partial W}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial \xi_n})^T$, $W_\eta = \frac{\partial W}{\partial \eta}$, $\nabla_\zeta W = (\frac{\partial W}{\partial \zeta_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial \zeta_n})^T$ と書く. 更に記述の簡略化のため, $v \in H^1(\Omega)$ に対し $W(v(x)) = W(x, v(x), \nabla v(x))$, $\nabla_\xi W(v(x)) = \nabla_\xi W(x, v(x), \nabla v(x))$ などと省略して表すこととする. 今,

$$E_*(\varphi) = \min_{v \in V(\varphi, g)} E(v, \Omega(\varphi)) = \min_{v \in V(g)} E(\varphi_* v, \Omega(\varphi)) = \min_{w \in V(0)} E(\varphi_*(w + g), \Omega(\varphi)),$$

であることに注意する. $\mathcal{E}(w, \varphi) := E(\varphi_*(w + g), \Omega(\varphi))$ 及び $\mathcal{E}_*(\varphi) := \min_{w \in V(0)} \mathcal{E}(w, \varphi)$ とおくと, $\mathcal{E}_*(\varphi) = E_*(\varphi)$ である. また, 変数変換公式から,

$$\begin{aligned} E(\varphi_* v, \Omega(\varphi)) &= \int_{\Omega(\varphi)} W(y, \varphi_* v(y), \nabla_y(\varphi_* v)(y)) dy \\ (4.2) \quad &= \int_{\Omega} W(\varphi(x), v(x), [A(\varphi)(x)] \nabla v(x)) \kappa(\varphi)(x) dx, \end{aligned}$$

であることがわかる. 2 節で考えたパラメータ付き抽象的変分問題の枠組みを $X = V(0)$ 及び $M = W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ として, $J = \mathcal{E}$ に適用できる. 例えば定理 2.2 が適用出来たとすると, 公式 (2.1) は次の形になる. $u = u(\varphi_0)$ とおくと, 任意の $\mu \in W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ に対して,

$$E'_*(\varphi_0)[\mu] = \mathcal{E}'_*(\varphi_0)[\mu] = \mathcal{E}_\varphi(u - g, \varphi_0)[\mu] = \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{E}(u - g, \varphi_0 + \varepsilon\mu) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} E(u, \Omega(\varphi_0 + \varepsilon\mu)) \Big|_{\varepsilon=0},$$

である. こうして, (4.2) より, $E'_*(\varphi_0)$ は, 任意の $\mu \in W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ に対し,

$$(4.3) \quad E'_*(\varphi_0)[\mu] = \int_{\Omega} (\nabla_\xi W(u) \cdot \mu - (\nabla_\zeta W(u))^T (\nabla \mu^T) \nabla u + W(u) \operatorname{div} \mu) dx,$$

と, 領域積分によって表現される. この公式は, [9] によって得られたエネルギー解放率の領域積分表現と全く同じものである.

特に線形の場合, (4.1) とその後に述べた仮定から, 定理 2.6 が適用でき, 次の定理が得られることは明らかであろう.

定理 4.6. W が (4.1) で与えられるとき, $k \in \mathbb{N}$ ならば, $\mathcal{E} \in C^k(V(0) \times \mathcal{O})$ 及び $E_* \in C^k(\mathcal{O})$ で公式 (4.3) が成り立つ.

5 まとめ

今回、エネルギー解放率の数学的定式化とその解析にあたり、Ohtsuka [9] で提案された方法を踏襲しつつも、その改善と精密化を図ることによって、Fréchet 微分や Banach 空間での陰関数定理を用いた今回の手法を確立した。2 節で展開したような抽象的な関数解析的枠組みでの議論を導入することにより、より弱い条件への精密化と同時に高階微分への拡張が得られ、加えて [9] では差分の極限として、やや煩雑な評価を経て計算されていたエネルギー解放率の計算を、見通しよく再構成することに成功した。

但し、本稿では 2 節で展開した理論の具体的な応用を十分に果たすことが出来なかった。今回は必要な道具立ての整備が出来たことで一応の報告とし、[9] で行われているような、その具体的な応用と解析の発展については今後の課題とさせていただきたい。

謝辞

本研究のもととなる研究をされ、今回、論文をまとめるにあたり、いくつかの有益な助言と激励をいただきました広島国際学院大学の大塚厚二先生にこの場を借りて感謝いたします。

参考文献

- [1] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Academic Press, New York-London (1975).
- [2] M. S. Berger, Nonlinearity and Functional Analysis. Lectures on nonlinear problems in mathematical analysis, Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York-London (1977).
- [3] L. C. Evans and R. F. Gariepy, Measure Theory and Fine Properties of Functions, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL (1992).
- [4] G. A. Francfort and J.-J. Marigo, Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem, J. Mech. Phys. Solids, Vol.46, pp.1319-1342 (1998).
- [5] A.A. Griffith, The phenomenon of rupture and flow in solids, Phil. Trans. Royal Soc. London, A221, pp.163-198 (1920).
- [6] P. Grisvard, Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Monographs and Studies in Mathematics, 24, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, (1985).
- [7] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics, vol. 840, Springer Verlag (1981).
- [8] K. Ohtsuka, Generalized J-integral and three-dimensional fracture mechanics I, Hiroshima Math. J., Vol.11, pp.329-350 (1981).
- [9] K. Ohtsuka, Generalized J-integral and its applications I – Basic theory –, Japan J. Appl. Math. Vol.2, No.2, pp.329-350 (1985).
- [10] K. Ohtsuka, Generalized J-integral and three-dimensional fracture mechanics II, Hiroshima Math. J., Vol.16, p.327-352 (1986).

- [11] 大塚厚二, J 積分の一般化とその応用, 応用力学論文集, Vol.1, 土木学会, pp.35-44 (1998).
- [12] I. Wakano, Analysis for stress intensity factors in two dimensional elasticity, Proc. Japan Acad., Vol.73, Ser.A, No.5, pp.86-88 (1997).
- [13] 若野 功, 二次元曲線亀裂の数学解析と数値解析, 日本応用数理学会論文誌, Vol.13, No.1, pp.59-80 (2003).

木村 正人 (正会員) 連絡先 : 〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1 九州大学大学院数理学研究院
E-mail : masato@math.kyushu-u.ac.jp , 九州大学大学院数理学研究院 助教授, 博士 (理学)
応用数学ならびに数値解析学を専門とする.

若野 功 (正会員) 連絡先 : 〒 606-8501 京都市左京区吉田本町 京都大学大学院情報学研究科
E-mail : wakano@i.kyoto-u.ac.jp , 京都大学大学院情報学研究科 講師, 博士 (情報学)
亀裂問題の数学解析・数値解析, 境界要素法などを専門とする.

List of MHF Preprint Series, Kyushu University

21st Century COE Program

Development of Dynamic Mathematics with High Functionality

- MHF2003-1 Mitsuhiro T. NAKAO, Kouji HASHIMOTO & Yoshitaka WATANABE
A numerical method to verify the invertibility of linear elliptic operators with applications to nonlinear problems
- MHF2003-2 Masahisa TABATA & Daisuke TAGAMI
Error estimates of finite element methods for nonstationary thermal convection problems with temperature-dependent coefficients
- MHF2003-3 Tomohiro ANDO, Sadanori KONISHI & Seiya IMOTO
Adaptive learning machines for nonlinear classification and Bayesian information criteria
- MHF2003-4 Kazuhiro YOKOYAMA
On systems of algebraic equations with parametric exponents
- MHF2003-5 Masao ISHIKAWA & Masato WAKAYAMA
Applications of Minor Summation Formulas III, Plücker relations, Lattice paths and Pfaffian identities
- MHF2003-6 Atsushi SUZUKI & Masahisa TABATA
Finite element matrices in congruent subdomains and their effective use for large-scale computations
- MHF2003-7 Setsuo TANIGUCHI
Stochastic oscillatory integrals - asymptotic and exact expressions for quadratic phase functions -
- MHF2003-8 Shoki MIYAMOTO & Atsushi YOSHIKAWA
Computable sequences in the Sobolev spaces
- MHF2003-9 Toru FUJII & Takashi YANAGAWA
Wavelet based estimate for non-linear and non-stationary auto-regressive model
- MHF2003-10 Atsushi YOSHIKAWA
Maple and wave-front tracking — an experiment
- MHF2003-11 Masanobu KANEKO
On the local factor of the zeta function of quadratic orders
- MHF2003-12 Hidefumi KAWASAKI
Conjugate-set game for a nonlinear programming problem

- MHF2004-1 Koji YONEMOTO & Takashi YANAGAWA
Estimating the Lyapunov exponent from chaotic time series with dynamic noise
- MHF2004-2 Rui YAMAGUCHI, Eiko TSUCHIYA & Tomoyuki HIGUCHI
State space modeling approach to decompose daily sales of a restaurant into time-dependent multi-factors
- MHF2004-3 Kenji KAJIWARA, Tetsu MASUDA, Masatoshi NOUMI, Yasuhiro OHTA & Yasuhiko YAMADA
Cubic pencils and Painlevé Hamiltonians
- MHF2004-4 Atsushi KAWAGUCHI, Koji YONEMOTO & Takashi YANAGAWA
Estimating the correlation dimension from a chaotic system with dynamic noise
- MHF2004-5 Atsushi KAWAGUCHI, Kentarou KITAMURA, Koji YONEMOTO, Takashi YANAGAWA & Kiyofumi YUMOTO
Detection of auroral breakups using the correlation dimension
- MHF2004-6 Ryo IKOTA, Masayasu MIMURA & Tatsuyuki NAKAKI
A methodology for numerical simulations to a singular limit
- MHF2004-7 Ryo IKOTA & Eiji YANAGIDA
Stability of stationary interfaces of binary-tree type
- MHF2004-8 Yuko ARAKI, Sadanori KONISHI & Seiya IMOTO
Functional discriminant analysis for gene expression data via radial basis expansion
- MHF2004-9 Kenji KAJIWARA, Tetsu MASUDA, Masatoshi NOUMI, Yasuhiro OHTA & Yasuhiko YAMADA
Hypergeometric solutions to the q - Painlevé equations
- MHF2004-10 Raimundas VIDŪNAS
Expressions for values of the gamma function
- MHF2004-11 Raimundas VIDŪNAS
Transformations of Gauss hypergeometric functions
- MHF2004-12 Koji NAKAGAWA & Masakazu SUZUKI
Mathematical knowledge browser
- MHF2004-13 Ken-ichi MARUNO, Wen-Xiu MA & Masayuki OIKAWA
Generalized Casorati determinant and Positon-Negaton-Type solutions of the Toda lattice equation
- MHF2004-14 Nalini JOSHI, Kenji KAJIWARA & Marta MAZZOCCO
Generating function associated with the determinant formula for the solutions of the Painlevé II equation

- MHF2004-15 Kouji HASHIMOTO, Ryohei ABE, Mitsuhiro T. NAKAO & Yoshitaka WATANABE
Numerical verification methods of solutions for nonlinear singularly perturbed problem
- MHF2004-16 Ken-ichi MARUNO & Gino BIONDINI
Resonance and web structure in discrete soliton systems: the two-dimensional Toda lattice and its fully discrete and ultra-discrete versions
- MHF2004-17 Ryuei NISHII & Shinto EGUCHI
Supervised image classification in Markov random field models with Jeffreys divergence
- MHF2004-18 Kouji HASHIMOTO, Kenta KOBAYASHI & Mitsuhiro T. NAKAO
Numerical verification methods of solutions for the free boundary problem
- MHF2004-19 Hiroki MASUDA
Ergodicity and exponential β -mixing bounds for a strong solution of Lévy-driven stochastic differential equations
- MHF2004-20 Setsuo TANIGUCHI
The Brownian sheet and the reflectionless potentials
- MHF2004-21 Ryuei NISHII & Shinto EGUCHI
Supervised image classification based on AdaBoost with contextual weak classifiers
- MHF2004-22 Hideki KOSAKI
On intersections of domains of unbounded positive operators
- MHF2004-23 Masahisa TABATA & Shoichi FUJIMA
Robustness of a characteristic finite element scheme of second order in time increment
- MHF2004-24 Ken-ichi MARUNO, Adrian ANKIEWICZ & Nail AKHMEDIEV
Dissipative solitons of the discrete complex cubic-quintic Ginzburg-Landau equation
- MHF2004-25 Raimundas VIDŪNAS
Degenerate Gauss hypergeometric functions
- MHF2004-26 Ryo IKOTA
The boundedness of propagation speeds of disturbances for reaction-diffusion systems
- MHF2004-27 Ryusuke KON
Convex dominates concave: an exclusion principle in discrete-time Kolmogorov systems

- MHF2004-28 Ryusuke KON
Multiple attractors in host-parasitoid interactions: coexistence and extinction
- MHF2004-29 Kentaro IHARA, Masanobu KANEKO & Don ZAGIER
Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values
- MHF2004-30 Shuichi INOKUCHI & Yoshihiro MIZOGUCHI
Generalized partitioned quantum cellular automata and quantization of classical CA
- MHF2005-1 Hideki KOSAKI
Matrix trace inequalities related to uncertainty principle
- MHF2005-2 Masahisa TABATA
Discrepancy between theory and real computation on the stability of some finite element schemes
- MHF2005-3 Yuko ARAKI & Sadanori KONISHI
Functional regression modeling via regularized basis expansions and model selection
- MHF2005-4 Yuko ARAKI & Sadanori KONISHI
Functional discriminant analysis via regularized basis expansions
- MHF2005-5 Kenji KAJIWARA, Tetsu MASUDA, Masatoshi NOUMI, Yasuhiro OHTA & Yasuhiko YAMADA
Point configurations, Cremona transformations and the elliptic difference Painlevé equations
- MHF2005-6 Kenji KAJIWARA, Tetsu MASUDA, Masatoshi NOUMI, Yasuhiro OHTA & Yasuhiko YAMADA
Construction of hypergeometric solutions to the q - Painlevé equations
- MHF2005-7 Hiroki MASUDA
Simple estimators for non-linear Markovian trend from sampled data:
I. ergodic cases
- MHF2005-8 Hiroki MASUDA & Nakahiro YOSHIDA
Edgeworth expansion for a class of Ornstein-Uhlenbeck-based models
- MHF2005-9 Masayuki UCHIDA
Approximate martingale estimating functions under small perturbations of dynamical systems
- MHF2005-10 Ryo MATSUZAKI & Masayuki UCHIDA
One-step estimators for diffusion processes with small dispersion parameters from discrete observations
- MHF2005-11 Junichi MATSUKUBO, Ryo MATSUZAKI & Masayuki UCHIDA
Estimation for a discretely observed small diffusion process with a linear drift

- MHF2005-12 Masayuki UCHIDA & Nakahiro YOSHIDA
AIC for ergodic diffusion processes from discrete observations
- MHF2005-13 Hiromichi GOTO & Kenji KAJIWARA
Generating function related to the Okamoto polynomials for the Painlevé IV equation
- MHF2005-14 Masato KIMURA & Shin-ichi NAGATA
Precise asymptotic behaviour of the first eigenvalue of Sturm-Liouville problems with large drift
- MHF2005-15 Daisuke TAGAMI & Masahisa TABATA
Numerical computations of a melting glass convection in the furnace
- MHF2005-16 Raimundas VIDŪNAS
Normalized Leonard pairs and Askey-Wilson relations
- MHF2005-17 Raimundas VIDŪNAS
Askey-Wilson relations and Leonard pairs
- MHF2005-18 Kenji KAJIWARA & Atsushi MUKAIHIRA
Soliton solutions for the non-autonomous discrete-time Toda lattice equation
- MHF2005-19 Yuu HARIYA
Construction of Gibbs measures for 1-dimensional continuum fields
- MHF2005-20 Yuu HARIYA
Integration by parts formulae for the Wiener measure restricted to subsets in $\mathbb{R}^d$
- MHF2005-21 Yuu HARIYA
A time-change approach to Kotani's extension of Yor's formula
- MHF2005-22 Tadahisa FUNAKI, Yuu HARIYA & Mark YOR
Wiener integrals for centered powers of Bessel processes, I
- MHF2005-23 Masahisa TABATA & Satoshi KAIZU
Finite element schemes for two-fluids flow problems
- MHF2005-24 Ken-ichi MARUNO & Yasuhiro OHTA
Determinant form of dark soliton solutions of the discrete nonlinear Schrödinger equation
- MHF2005-25 Alexander V. KITAEV & Raimundas VIDŪNAS
Quadratic transformations of the sixth Painlevé equation
- MHF2005-26 Toru FUJII & Sadanori KONISHI
Nonlinear regression modeling via regularized wavelets and smoothing parameter selection

- MHF2005-27 Shuichi INOKUCHI, Kazumasa HONDA, Hyen Yeal LEE, Tatsuro SATO,
Yoshihiro MIZOGUCHI & Yasuo KAWAHARA
On reversible cellular automata with finite cell array
- MHF2005-28 Toru KOMATSU
Cyclic cubic field with explicit Artin symbols
- MHF2005-29 Mitsuhiro T. NAKAO, Kouji HASHIMOTO & Kaori NAGATOU
A computational approach to constructive a priori and a posteriori error
estimates for finite element approximations of bi-harmonic problems
- MHF2005-30 Kaori NAGATOU, Kouji HASHIMOTO & Mitsuhiro T. NAKAO
Numerical verification of stationary solutions for Navier-Stokes problems
- MHF2005-31 Hidefumi KAWASAKI
A duality theorem for a three-phase partition problem
- MHF2005-32 Hidefumi KAWASAKI
A duality theorem based on triangles separating three convex sets
- MHF2005-33 Takeaki FUCHIKAMI & Hidefumi KAWASAKI
An explicit formula of the Shapley value for a cooperative game induced from
the conjugate point
- MHF2005-34 Hideki MURAKAWA
A regularization of a reaction-diffusion system approximation to the two-phase
Stefan problem
- MHF2006-1 Masahisa TABATA
Numerical simulation of Rayleigh-Taylor problems by an energy-stable finite
element scheme
- MHF2006-2 Ken-ichi MARUNO & G R W QUISPEL
Construction of integrals of higher-order mappings
- MHF2006-3 Setsuo TANIGUCHI
On the Jacobi field approach to stochastic oscillatory integrals with quadratic
phase function
- MHF2006-4 Kouji HASHIMOTO, Kaori NAGATOU & Mitsuhiro T. NAKAO
A computational approach to constructive a priori error estimate for finite
element approximations of bi-harmonic problems in nonconvex polygonal
domains
- MHF2006-5 Hidefumi KAWASAKI
A duality theory based on triangular cylinders separating three convex sets in
 R^n
- MHF2006-6 Raimundas VIDŪNAS
Uniform convergence of hypergeometric series

- MHF2006-7 Yuji KODAMA & Ken-ichi MARUNO
N-Soliton solutions to the DKP equation and Weyl group actions
- MHF2006-8 Toru KOMATSU
Potentially generic polynomial
- MHF2006-9 Toru KOMATSU
Generic sextic polynomial related to the subfield problem of a cubic polynomial
- MHF2006-10 Shu TEZUKA & Anargyros PAPAGEORGIOU
Exact cubature for a class of functions of maximum effective dimension
- MHF2006-11 Shu TEZUKA
On high-discrepancy sequences
- MHF2006-12 Raimundas VIDŪNAS
Detecting persistent regimes in the North Atlantic Oscillation time series
- MHF2006-13 Toru KOMATSU
Tamely Eisenstein field with prime power discriminant
- MHF2006-14 Nalini JOSHI, Kenji KAJIWARA & Marta MAZZOCCO
Generating function associated with the Hankel determinant formula for the solutions of the Painlevé IV equation
- MHF2006-15 Raimundas VIDŪNAS
Darboux evaluations of algebraic Gauss hypergeometric functions
- MHF2006-16 Masato KIMURA & Isao WAKANO
New mathematical approach to the energy release rate in crack extension