

速い移流を持つ Sturm-Liouville 問題の第一固有値の 精密な漸近挙動

木村, 正人
九州大学大学院数理学研究院

永田, 真一
九州大学大学院数理学研究院

<https://hdl.handle.net/2324/11851>

出版情報 : 日本応用数理学会論文誌. 15 (3), pp.209-220, 2005-09-25. 日本応用数理学会
バージョン :
権利関係 :



MHF Preprint Series

Kyushu University
21st Century COE Program
Development of Dynamic Mathematics with
High Functionality

Precise asymptotic behaviour of the first eigenvalue of Sturm-Liouville problems with large drift

M. Kimura & S. Nagata

MHF 2005-14

(Received April 1, 2005)

Faculty of Mathematics
Kyushu University
Fukuoka, JAPAN

速い移流を持つ Sturm-Liouville 問題の 第 1 固有値の精密な漸近挙動

木村正人 永田真一
九州大学大学院数理学研究院

Precise Asymptotic Behaviour of the First Eigenvalue
of Sturm-Liouville Problems with Large Drift

Masato Kimura Shin-ichi Nagata
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

Abstract. This study is concerned with the asymptotic behaviour of the first eigenvalue of a Sturm-Liouville problem with a large drifting term. The magnitude of the drift is controlled by a parameter p . Under a suitable condition, it is known that the first eigenvalue $\lambda(p) > 0$ tends to zero exponentially if $p \rightarrow \infty$. We prove a precise behaviour of such exponential smallness of $\lambda(p)$ under a relaxed condition for the drift term.

1 第 1 固有値の指数減衰現象

次の 1 次元移流拡散方程式の零ディリクレ境界条件における初期値問題について考える。

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - pa(x) \frac{\partial w}{\partial x} & (-1 < x < 1, t > 0) \\ w(-1, t) = w(1, t) = 0 & (t > 0) \\ w(x, 0) = w_0(x) & (-1 < x < 1) \end{cases}$$

ここで (1.1) 式は、区間 $(-1, 1)$ に流速 $a(x)$ の流れがあるとき、 $w(x, t)$ が位置 $x \in (-1, 1)$ 、時刻 t におけるある物質の温度や密度、濃度の拡散を表す数理モデルで、移流拡散方程式と呼ばれる。ただし、 p は流れの速さをコントロールする実数値のパラメータであり、今は p の値が大きいとき、つまり流速が大きいときの解 $w(x, t)$ の挙動について興味がある。このような、拡散に対して非常に速い移流がある問題は、流体力学を始め工学・数理学における応用上・理論上の多くの重要な問題と関連している。

今は零ディリクレ境界条件を課しているので、 $t \rightarrow \infty$ としたとき $w(x, t)$ は 0 に一様収束することが知られている。図 1 は $a(x) = 1, p = 5.0$ としたときの、図 2 は $a(x) = 1, p = 10.0$ としたときの数値計算の結果を示したものである。ただし初期条件 $w_0(x) = -x^2 + 1$ としている。

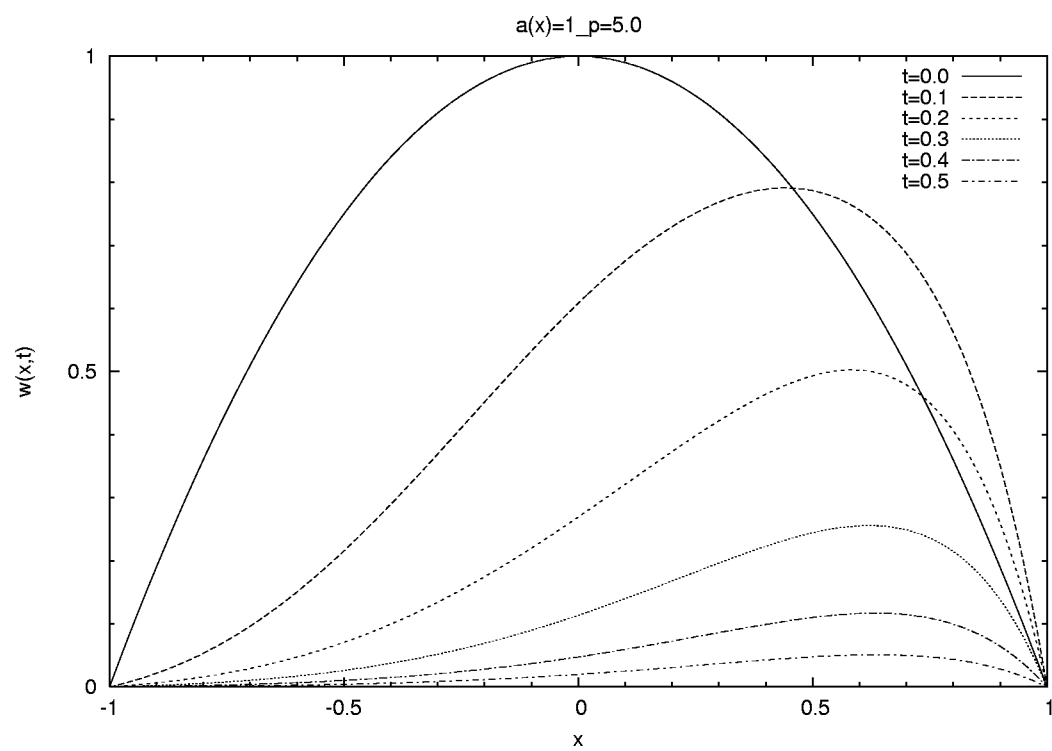


図 1: $a(x) = 1, p = 5.0$ とした時の数値計算結果

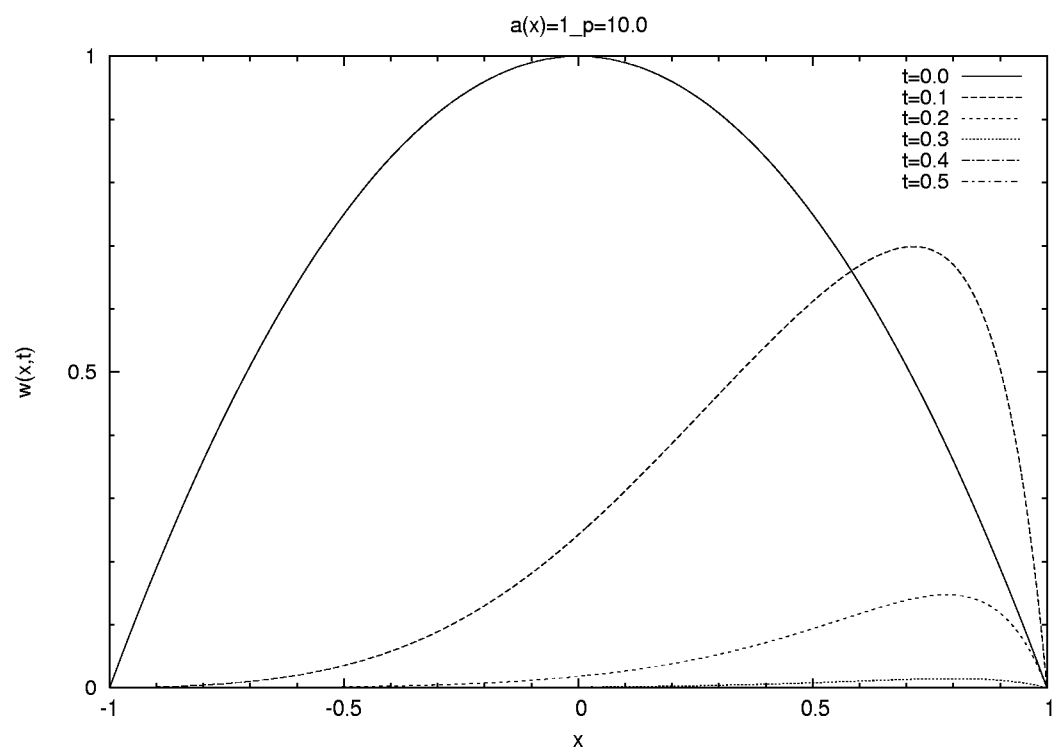


図 2: $a(x) = 1, p = 10.0$ とした時の数値計算結果

この結果より、 $a(x) = 1$ のときは p の値が大きくなると、 $t \rightarrow \infty$ での解の減衰が速くなること
 がわかる。この理由について調べるために、 λ を固有値とした次の固有値問題を考える。

$$(1.2) \quad \begin{cases} -w''(x) + pa(x)w'(x) = \lambda w(x) & (-1 < x < 1) \\ w(-1) = w(1) = 0 \end{cases}$$

第1固有値を $\lambda_1 > 0$ とするとき、一般の初期値から始めた (1.1) の解 $w(x, t)$ は $t \rightarrow \infty$ としたと
 き $e^{-\lambda_1 t}$ のオーダーで 0 に減衰する。

$a(x) = 1$ のときは、次の定理が成り立つことがわかる。

定理 1.1. 固有値問題 (1.2) において、 $a(x) = 1$ のときの解は

$$\begin{cases} w(x) = e^{\frac{p}{2}x} \sin m\pi x, \lambda = m^2\pi^2 + \frac{p^2}{4} & (m = 1, 2, \dots) \\ w(x) = e^{\frac{p}{2}x} \cos\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi x, \lambda = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2\pi^2 + \frac{p^2}{4} & (m = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

となる。特に第1固有値 λ_1 とその固有関数 $w_1(x)$ は

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{p^2}{4}, \quad w_1(x) = e^{\frac{p}{2}x} \cos \frac{\pi x}{2}$$

である。■

この定理より、 p が大きくなると第1固有値（実際は全ての固有値）が正の方向に $p^2/4$ だけシフト
 することがわかる。つまり、 p が大きいほど初期値問題の解は速く減衰するという $a(x) = 1$ のと
 きの数値計算結果を説明している。

次に、図3は $a(x) = x, p = 5.0$ としたときの、図4は $a(x) = x, p = 10.0$ としたときの数値計算
 の結果を示したものである。ただし初期条件 $w_0(x) = -x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ としている。図3と図4の比較
 から、 $a(x) = x$ の場合は p の値が大きくなると $t \rightarrow \infty$ における解の減衰は逆に極端に遅くなるこ
 とがわかる。このことは p の値を大きくすると非常に小さな第1固有値が現れることを示している。

このような非常に小さな第1固有値の挙動については、A. Friedman [5] が多次元の場合を含む一
 般的な仮定のもとで、Ventcel-Freidlin による確率論的手法を用いて評価を得ている。Friedman は
 第1固有値 $\lambda(p)$ の指数減衰現象が起きるための十分条件として、移流 $a(x)$ の領域境界上の外向き
 法線成分が正であるという仮定をおいた。そこでは

$$(1.3) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{p} \log \lambda(p) \right) = b_0$$

のような対数極限評価しか得られておらず、そこに現れる b_0 も陰的な表現でしか与えられていない。

その後これまでにいくつかの結果が様々な仮定のもとで得られている ([2], [3])。また速い移流
 のもとでの楕円型作用素の第1固有値の漸近挙動については、指数減衰現象の起きるケース以外に
 も様々な研究があり ([1], [4], [7] 等を参照)、応用上も様々な重要な問題と関連しているが、まだ
 いくつかの場合について評価が得られているにすぎない。

本研究では、領域が1次元区間 $(-1, 1)$ の場合に $a(x)$ が奇関数である場合について、[5] では取
 り扱われていない場合を含む異なる仮定 (2.1) のもとで、より精密な第1固有値の漸近評価（定理

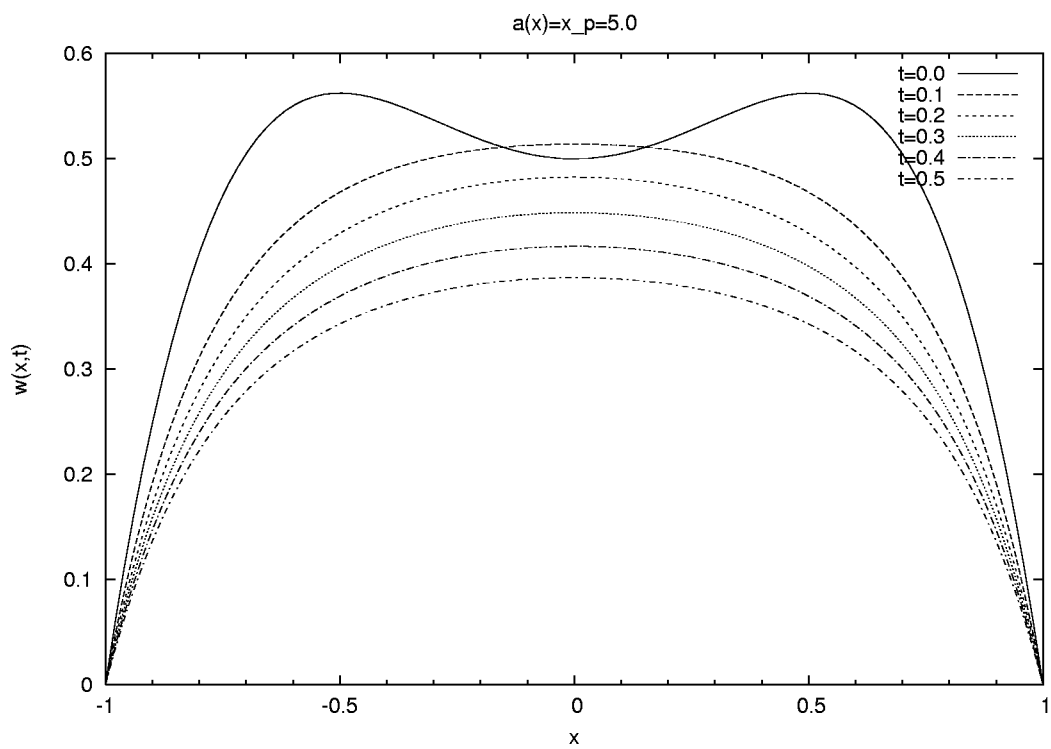


図 3: $a(x) = x, p = 5.0$ とした時の数値計算結果

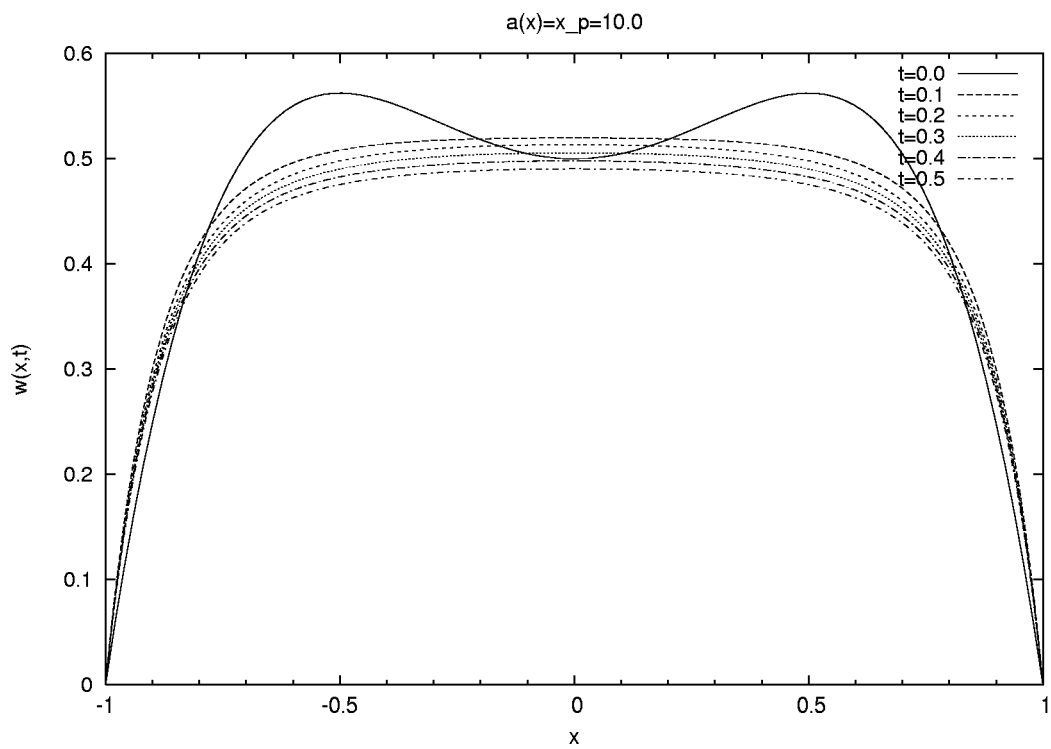


図 4: $a(x) = x, p = 10.0$ とした時の数値計算結果

2.1) が得られた．これは上記の文献などで今まで得られていたものより精密な評価で新しい結果である．

以下，固有値問題 (1.2) において， $a(x)$ は奇関数であると仮定する．そのとき，方程式の対称性と第 1 固有値の単純性により，(1.2) の第 1 固有値とその固有関数は

$$(1.4) \quad \begin{cases} -w''(x) + pa(x)w'(x) = \lambda w(x) & (0 < x < 1) \\ w'(0) = 0, w(1) = 0 \\ w(x) > 0 & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

を考えると同値になる．

本論文の目的は， $a(x) = x$ を含むようなある仮定の下で p の値を大きくしたときの (1.4) の第 1 固有値の漸近挙動を調べることである．2 章において，第 1 固有値 $\lambda(p)$ の精密な漸近挙動が主定理 (定理 2.1) として示される．また Friedman の得た指数減衰評価 (1.3) は，定理 2.1 の系 2.2 としてただちに得られ，定数 b_0 も陽に与えられる．特に $a(x) = x$ の場合については，定理 2.3 で

$$\lambda(p) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} p^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{p}{2}} \quad (p \rightarrow \infty)$$

となることが導かれる．本論文では，記号 $\sim$ は $p \rightarrow \infty$ のとき両辺の比が 1 に収束することを表すものとする．この結果は $a(x) = x$ の場合に p の値が大きくなると解の減衰が極端に遅くなるという数値計算結果を説明している．この主定理の証明は続く 2 つの章で与えられる．

3 章で，(1.4) と同値な別の固有値問題が導入され，固有値の Rayleigh 商表現が与えられる．また固有関数の形について，数値計算から示唆される予想と基本的な数学評価が述べられる．その結果を踏まえ，4 章では主定理 (定理 2.1) の証明が与えられる．

2 第 1 固有値の漸近挙動の精密評価

以降，固有値問題 (1.4) を取り上げ，その移流項 $a(x)$ に次の仮定をおく．移流項 $a(x)$ は $[0, 1]$ 上で連続とし， $a(x)$ の原始関数 $b(x)$ に対し，

$$A = \{x \in [0, 1] \mid b(x) = \min_{0 \leq s \leq 1} b(s)\}, \quad B = \{x \in [0, 1] \mid b(x) = \max_{0 \leq s \leq 1} b(s)\}$$

と置くとき，条件：

$$(2.1) \quad x < y \quad (\forall x \in A, \forall y \in B)$$

を考える．このとき，次の主定理が得られる．

定理 2.1. 条件 (2.1) を満たす $b \in C^1[0, 1]$ に対し $a(x) = b'(x)$ とおく． $\lambda(p)$ を (1.4) 式をみたす第 1 固有値とするとき

$$(2.2) \quad \lambda(p) \sim \frac{1}{I_0(p)} \quad (p \rightarrow \infty)$$

が成り立つ．ただし

$$(2.3) \quad I_0(p) = \left(\int_0^1 e^{-pb(x)} dx \right) \left(\int_0^1 e^{pb(y)} dy \right)$$

である．■

この定理の証明は 4 章で与える．定理 2.1 は $p \rightarrow \infty$ のときの第 1 固有値の挙動をこれまでに得られていた評価よりも精密に与えるものである．よりわかりやすい形で第 1 固有値の指数減衰現象を表したのが，次の系 2.2 である．

系 2.2. 定理 2.1 の仮定のもとで， $b_0 = \max_{0 \leq x \leq 1} b(x) - \min_{0 \leq x \leq 1} b(x)$ とおく．このとき，任意の $\varepsilon \in (0, b_0)$ に対してある $p_0 > 0$ が存在して

$$(2.4) \quad e^{-p(b_0+\varepsilon)} \leq \lambda(p) \leq e^{-p(b_0-\varepsilon)} \quad (\forall p \geq p_0)$$

が成り立つ．言い換えると，

$$(2.5) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{p} \log \lambda(p) \right) = b_0$$

である．■

[証明] 一般性を失うことなく $\min_{0 \leq x \leq 1} b(x) = 0$ としてよい． $K_1 = \{x \in [0, 1] \mid b(x) \leq \frac{\varepsilon}{4}\}$ とおくと，

$$(2.6) \quad |K_1| e^{-p\frac{\varepsilon}{4}} \leq \int_0^1 e^{-pb(x)} dx \leq 1$$

となる．また， $K_2 = \{x \in [0, 1] \mid b(x) \geq b_0 - \frac{\varepsilon}{4}\}$ とおくと，

$$(2.7) \quad |K_2| e^{p(b_0-\frac{\varepsilon}{4})} \leq \int_0^1 e^{pb(y)} dy \leq e^{pb_0}$$

となる．(2.6)，(2.7) 式より， $|K_1||K_2|e^{p(b_0-\varepsilon/2)} \leq I_0(p) \leq e^{pb_0}$ が得られる．ここで，定理 2.1 より， p_0 を十分大きく選ぶと，(2.4) が従う．また，それは対数極限評価 (2.5) と同値である．□

ここで，はじめに数値例を挙げた $a(x) = x$ の場合を考えよう．このとき， $b(x) = \frac{1}{2}x^2$ $b_0 = \frac{1}{2}$ で，(2.1) の条件を満たしている．よって $a(x) = x$ としたときの (1.4) の第 1 固有値の挙動は系 2.2 に従う．しかし次の定理によって， $a(x) = x$ の場合にはより精密な第 1 固有値の挙動がわかる．

定理 2.3. 式 (1.4) において $a(x) = x$ とする． $\lambda(p)$ を第 1 固有値とするととき，

$$(2.8) \quad \lambda(p) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} p^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{p}{2}} \quad (p \rightarrow \infty)$$

となる．■

[証明] 定理 2.1 を用いると

$$(2.9) \quad \lambda(p) \sim \left(\int_0^1 e^{-\frac{p}{2}x^2} dx \right)^{-1} \left(\int_0^1 e^{\frac{p}{2}x^2} dx \right)^{-1} \quad (p \rightarrow \infty)$$

である．ここで

$$\sqrt{\frac{2p}{\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{p}{2}x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{p}{2}}} e^{-s^2} ds \rightarrow 1 \quad (p \rightarrow \infty)$$

であるから

$$(2.10) \quad \int_0^1 e^{-\frac{p}{2}x^2} dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$$

である。次に

$$\int_0^1 e^{\frac{p}{2}x^2} dx \sim \int_0^1 e^{p(x-\frac{1}{2})} dx = \frac{1}{p}(e^{\frac{p}{2}} - e^{-\frac{p}{2}}) \quad (p \rightarrow \infty)$$

となることを示す。そのためには、

$$(2.11) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} pe^{-\frac{p}{2}} \left(\int_0^1 e^{\frac{p}{2}x^2} dx - \int_0^1 e^{p(x-\frac{1}{2})} dx \right) = 0$$

を示せば十分である。ここで、 $\frac{p}{2}x^2 \geq p(x-\frac{1}{2})$ であることから、(2.11) の括弧内は正であることに注意し、 $p > 1$ 、 $\varepsilon = p^{-\frac{3}{4}}$ とおき、 $x = 1 - y$ と変数変換すると、

$$\int_0^1 e^{\frac{p}{2}x^2} dx - \int_0^1 e^{p(x-\frac{1}{2})} dx \leq \int_0^\varepsilon \left(e^{\frac{p}{2}(1-y)^2} - e^{p(-y+\frac{1}{2})} \right) dy + \int_\varepsilon^1 e^{\frac{p}{2}(1-y)^2} dy$$

となる。この右辺の第1項と第2項はそれぞれ次のように評価される。

まず $e^c - 1 \leq ce^c$ ($c \geq 0$) より

$$|\text{第1項}| = \int_0^\varepsilon e^{p(-y+\frac{1}{2})} \left(e^{\frac{p}{2}y^2} - 1 \right) dy \leq \int_0^\varepsilon e^{p(-y+\frac{1}{2})} \frac{p}{2} y^2 e^{\frac{p}{2}y^2} dy$$

$$pe^{-\frac{p}{2}} |\text{第1項}| \leq pe^{-\frac{p}{2}} \varepsilon e^{\frac{p}{2}} \frac{p}{2} \varepsilon^2 e^{\frac{p}{2}\varepsilon^2} = \frac{1}{2} p^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{1}{2} p^{-\frac{1}{2}}\right) \leq \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} p^{-\frac{1}{4}} \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty)$$

である。また、第2項についても

$$pe^{-\frac{p}{2}} |\text{第2項}| \leq pe^{-\frac{p}{2}} e^{\frac{p}{2}(1-\varepsilon)^2} = pe^{\frac{1}{2}(p^{-\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{4}})} \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty)$$

となる。以上より (2.11) が従い、(2.10) 及び (2.9) より (2.8) 式が成り立つ。 □

3 同値な方程式への変換

ここでは、定理 2.1 を証明する準備として、固有値の Rayleigh 商を使った表現を与える。以下 (1.4) 式中の $a(x)$ について $a(x) = b'(x)$ となる $b(x)$ を一つ固定して考える。また、

$$(3.1) \quad \sigma = \int_0^1 e^{pb(x)} dx, \quad \tau(x) = \frac{1}{\sigma} \int_0^x e^{pb(s)} ds \quad (0 \leq x \leq 1), \quad z(t) = \sigma^2 e^{-2pb(\tau^{-1}(t))} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

とおく。次の定理より、(1.4)₁ の方程式は、同値な方程式に変換することができる。

定理 3.1. $b \in C^1[0, 1]$, $p \in \mathbb{R}$ とする。 $\sigma, \tau(x), z(t)$ が (3.1) を満たすとき次の2式は同値である。

$$(3.2) \quad -w''(x) + pb'(x)w'(x) = \lambda w(x) \quad (0 < x < 1)$$

$$(3.3) \quad -u''(t) = \lambda z(t)u(t) \quad (0 < t < 1)$$

ただし、 $w(x) = u(\tau(x)) = u(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ である。 ■

[証明] 以下, $t = \tau(x)$ として考える. $w(x) = u(t) = u(\tau(x))$ より, $w' = u'\tau'$, $w'' = u''(\tau')^2 + u'\tau''$ である. これらより (3.3) 式は次の (3.4) 式と同値になる.

$$(3.4) \quad -w'' + \frac{\tau''}{\tau'} w' = \lambda z w (\tau')^2$$

ここで, $\tau' = \sigma^{-1} e^{pb}$, $\tau'' = \sigma^{-1} p b' e^{pb}$ だから $\tau''/\tau' = p b'$ であり, また $(\tau')^2 z = 1$ なので, (3.4) 式は (3.2) 式と同値である. $\square$

この定理より, (1.4) の固有値問題は

$$(3.5) \quad \begin{cases} -u''(t) = \lambda z(t) u(t) & (0 < t < 1) \\ u'(0) = 0, \quad u(1) = 0 \\ u(t) > 0 & (0 \leq t < 1) \end{cases}$$

と置き換えることができる.

いま $z(t) > 0$ より, $Lu = -z(t)^{-1}u''(t)$ とおくと (3.3) 式は $Lu = \lambda u$ となる. また, $z(t)$ -重みつき内積を

$$(u, v)_z = \int_0^1 z(t) u(t) v(t) dt$$

とおくと, 微分作用素 L は, 境界条件 (3.5)₂ のもとで, この内積に関して対称になり, Rayleigh 商は

$$\frac{(L\varphi, \varphi)_z}{(\varphi, \varphi)_z} = \frac{\int_0^1 |\varphi'(t)|^2 dt}{\int_0^1 z(t) \varphi(t)^2 dt}$$

となる. 一般に次の定理が知られている (例えば [6] 等を参照のこと).

定理 3.2. 区間 $[0, 1]$ 上の正值連続関数 $z(t)$ に対し, (3.5) の固有値問題を考える. このとき, (3.5) を満たす $\lambda > 0$ と $u(t)$ が (u の定数倍を除いて) 一意に存在し,

$$(3.6) \quad \lambda = \frac{\int_0^1 |u'(t)|^2 dt}{\int_0^1 z(t) u(t)^2 dt} = \min_{\varphi \in K} \frac{\int_0^1 |\varphi'(t)|^2 dt}{\int_0^1 z(t) \varphi(t)^2 dt}$$

となる. ただし, $K = \{\varphi \in H^1(0, 1) \mid \varphi(1) = 0, \varphi \not\equiv 0\}$ である. $\blacksquare$

ここで, 図5と図6に $u(t), z(t)$ を数値計算で求めたグラフを示しておく. 但し, $u(t)$ については $u(0) = 1$ になるように選んである. 図5より, $p \rightarrow \infty$ としたとき $u(t) \rightarrow 1 - t$ となりそうだと考えられる. また, $z(t)$ については, 適当なスケールリングをほどこせば, 原点に台を持つ Dirac 測度に近づくことが予測される. 次章ではこの第1固有値の Rayleigh 商表現 (3.6) を用いて第1固有値 $\lambda(p)$ の評価を行うが, このような数値計算結果からの考察が証明のアイデアとなっていることを述べておきたい.

この考察に関連して, 次の命題が成り立つことがわかる.

命題 3.3. $z \in C[0, 1], z(t) > 0$ のとき (3.3) 式の第1固有関数を $u(t)$ とする. ただし $u(0) = 1$ とする. このとき,

$$(3.7) \quad 1 - t \leq u(t) \leq 1 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

が成り立つ. $\blacksquare$

[証明] 方程式 $-u''(t) = \lambda z(t) u(t)$ において右辺は正なので $u''(t) < 0$ である. よって $u'(t) = \int_0^t u''(s) ds < 0$ より $u(t)$ は単調減少とわかる. ここで, $u(0) = 1$ より $u(t) \leq 1$ である. また, $u''(t) < 0$ より $u(t)$ のグラフは上に凸. よって $u(0) = 1, u(1) = 0$ より $1 - t \leq u(t)$ である. $\square$

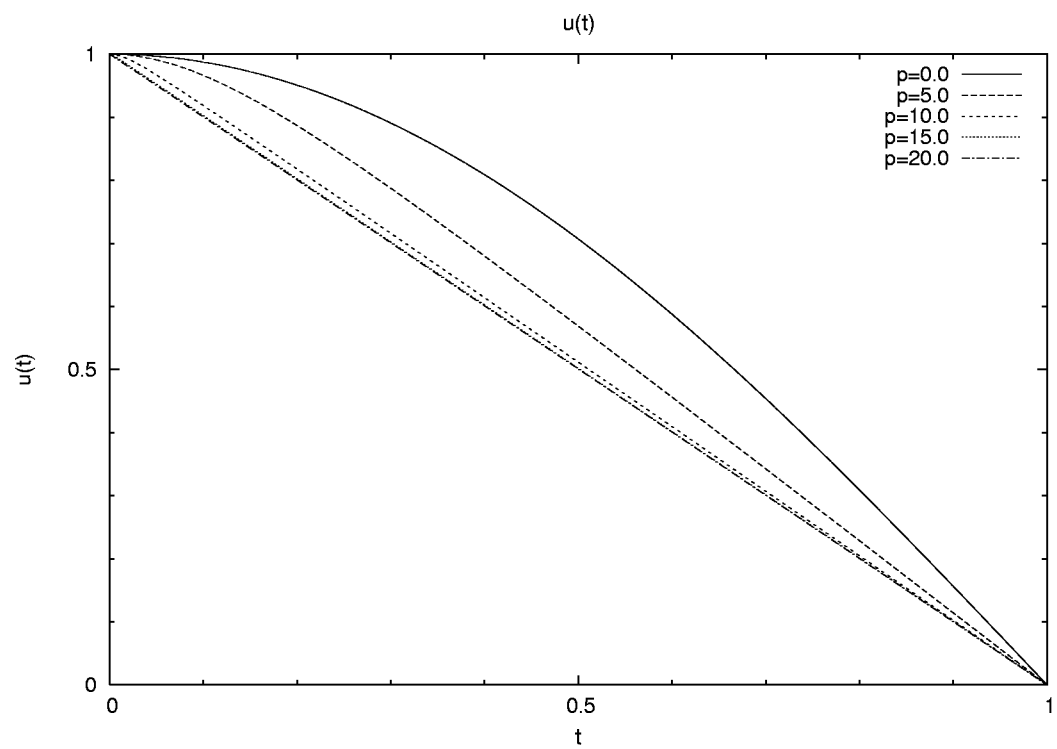


図 5: $u(t)$ のグラフ

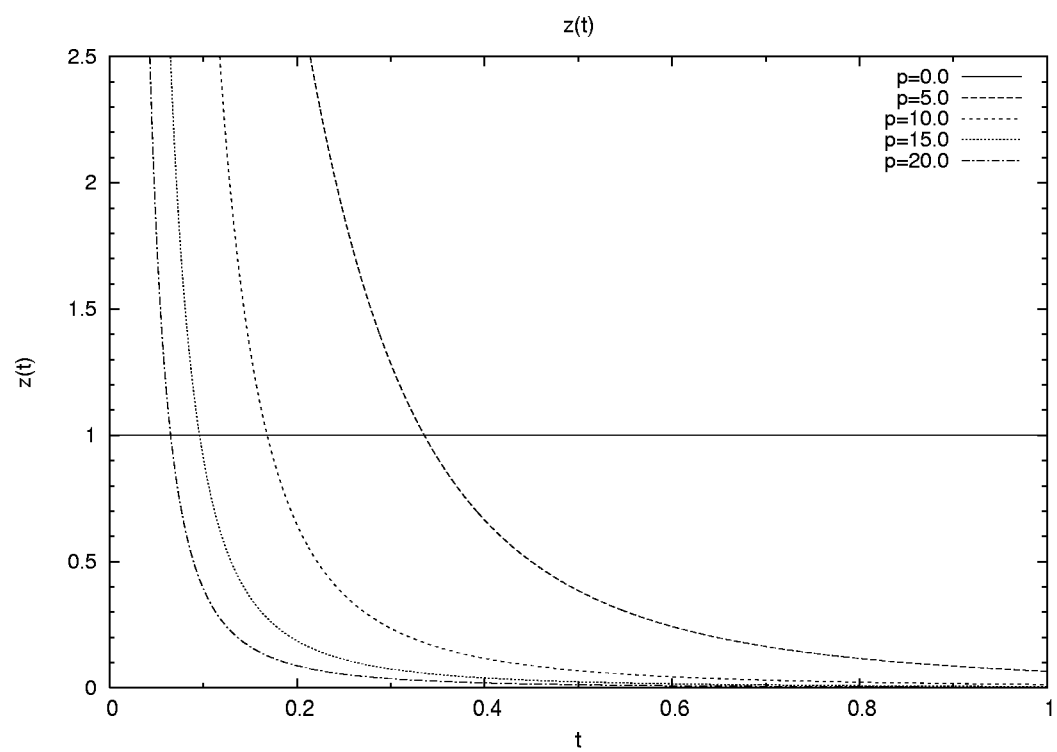


図 6: $z(t)$ のグラフ

4 定理 2.1 の証明

本章では、定理 2.1 の証明とそれに必要な補題を述べる。

[定理 2.1 の証明]

定理 3.2 の (3.6) において、特に $\varphi(t) = 1 - t$ を代入すると、

$$\lambda(p) = \min_{\varphi \in K} \frac{\int_0^1 |\varphi'(t)|^2 dt}{\int_0^1 z(t) \varphi(t)^2 dt} \leq \frac{\int_0^1 |(1-t)'|^2 dt}{\int_0^1 z(t) (1-t)^2 dt} = \frac{1}{\int_0^1 z(t) (1-t)^2 dt}$$

が成り立つ。一方、 $v(0) = 1, v(1) = 0$ を満たす関数の中でディリクレ積分 $\int_0^1 |v'(t)|^2 dt$ を最小にするのは $1 - t$ なので、 $u(0) = 1$ である第 1 固有関数 $u(t)$ について、

$$\int_0^1 |u'(t)|^2 dt \geq \int_0^1 |(1-t)'|^2 dt = 1$$

が成り立つ。また、命題 3.3 より、 $u(t)^2 \leq 1$ なので、再び (3.6) から

$$\lambda(p) = \frac{\int_0^1 |u'(t)|^2 dt}{\int_0^1 z(t) u(t)^2 dt} \geq \frac{1}{\int_0^1 z(t) dt}$$

が従う。次の補題で計算するように $\int_0^1 z(t) dt$ は (2.3) で定義される $I_0(p)$ に等しいことがわかる。ここで、

$$(4.1) \quad I(p) = \int_0^1 z(t) (1-t)^2 dt$$

と定義すると、以上より、

$$(4.2) \quad \frac{1}{I_0(p)} \leq \lambda(p) \leq \frac{1}{I(p)} \quad (\forall p > 0)$$

である。再び次の補題 4.1 から、 $I(p) \sim I_0(p)$ ($p \rightarrow \infty$) であることがわかるので、

$$\lambda(p) \sim \frac{1}{I_0(p)} \quad (p \rightarrow \infty)$$

が示された。 □

最後に次の補題を示せば、定理の証明が完結する。以下、 $z(t)$ は (3.1) で、 $I_0(p)$ は (2.3) で、 $I(p)$ は (4.1) で、それぞれ定義されるものとする。

補題 4.1. $b \in C[0, 1]$ が条件 (2.1) を満たすとする。そのとき、

$$(4.3) \quad I(p) \sim I_0(p) \quad (p \rightarrow \infty)$$

である。 ■

[証明] 任意の $p > 0$ に対し、

$$J_m(p) := \int_0^1 z(t) t^m dt > 0 \quad (m = 0, 1, 2)$$

と定義しよう. $I(p)$ の定義より

$$I(p) = J_0(p) - 2J_1(p) + J_2(p)$$

である. ここで, $0 \leq t \leq 1$ では $t^2 \leq t$ であることから, $0 \leq J_2(p) \leq J_1(p)$ がわかるので,

$$(4.4) \quad J_1(p) \leq J_0(p) - I(p) \leq 2J_1(p)$$

が従う. $J_m(p)$ ($m = 0, 1$) について, 積分変数 t を (3.1) のように $t = \tau(x)$ で x に変数変換すると,

$$J_m(p) = \sigma \int_0^1 e^{-pb(x)\tau(x)^m} dx = \int \int_{D_m} e^{p(b(y)-b(x))} dx dy \quad (m = 0, 1)$$

を得る. 但し,

$$D_0 = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \quad D_1 = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < x\}$$

である. 特に $J_0(p)$ について, $J_0(p) = I_0(p)$ であることがわかる.

ここで, 条件 (2.1) を仮定したことから,

$$\max_{D_0} (b(y) - b(x)) > \max_{D_1} (b(y) - b(x))$$

が成り立っているので,

$$(4.5) \quad \frac{J_1(p)}{J_0(p)} \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty)$$

が従う. 不等式 (4.4) に (4.5) を適用すると, $I_0(p) = J_0(p) \sim I(p)$ ($p \rightarrow \infty$) が従う. □

5 多次元問題への拡張と今後の課題

本研究では, 空間 1 次元の場合に第 1 固有値の指数減衰現象の精密な漸近挙動を得ることができた. 一般多次元において, 指数減衰現象は移流項が大きくなっていく場合に見られるが, そのような場合の第 1 固有値については, 指数減衰現象以外にも様々な挙動が見られることがいくつかこれまで報告されている.

固有値問題 (1.2) の拡張として, 次の問題を考える.

$$(5.1) \quad \begin{cases} -\Delta w(x) + p\mathbf{a}(x) \cdot \nabla w(x) = \lambda w(x) & (x \in \Omega) \\ w(x) = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases}$$

ここで, Ω は $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) の有界な Lipschitz 領域, 移流項 $\mathbf{a}(x)$ は Ω 上で与えられた連続なベクトル場とする.

固有値問題 (5.1) の第 1 固有値を $\lambda(p) > 0$ とするとき, $p \rightarrow \infty$ のときの $\lambda(p)$ の漸近挙動については, 第 1 章で挙げたようにいくつかの場合についての研究がある. 特に [5] などでは指数減衰するための十分条件が与えられている. そのほかにも, $\lambda(p)$ が無限大に発散する場合 (定理 1.1 参照) や, 有限の値に収束する場合などが報告されているが, 全ての連続なベクトル場 $\mathbf{a}(x)$ について, $\lambda(p)$ の挙動が判明しているわけではない.

固有値 $\lambda(p)$ の $p \rightarrow \infty$ における挙動は、ベクトル場 $\mathbf{a}(x)$ の性質によって多様であり、応用上の観点からもより詳しく解明されるべき性質と考えられる。その意味からも、固有値問題 (5.1) について、 $\lambda(p)$ の $p \rightarrow \infty$ における挙動を通して、ベクトル場 $\mathbf{a}(x)$ の分類を行うことを今後の数学的課題の一つとして挙げたい。また、今回得られたような精密な固有値の挙動を各ベクトル場 $\mathbf{a}(x)$ の分類に応じて調べることも重要な今後の課題である。

謝辞

本研究で取り上げた固有値の指数減衰現象に著者の一人が興味を持った際に、いくつかの助言と示唆をいただきました広島大学の永井敏隆教授と、本稿をまとめるにあたりいくつかの重要な参考文献をお教えいただいた東京都立大学の倉田和浩教授にこの場をかりてお礼申し上げます。

参考文献

- [1] H.Berestycki, F.Hamel and N.Nadirashvili, *Elliptic eigenvalue problems with large drift and applications to nonlinear propagation phenomena*, Commun. math. Phys. Vol.253 (2005), 451-480.
- [2] P. P. N. de Groen, *The nature of resonance in a singular perturbation problem of turning point type*, SIAM J. Math. Anal. Vol.11 (1980), 1-22.
- [3] P. P. N. de Groen, *The singularly perturbed turning-point problem: a spectral approach*, Singular Perturbations and Asymptotics (Proc. Adv. Sem., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin-Madison), Academic Press, New York-London 1980, 149-172.
- [4] A.Devinatz, R.Ellis and A.Friedman, *The asymptotic behavior of the first real eigenvalue of second order elliptic operators with a small parameter in the highest derivatives,II*, Indiana Univ. Math. J., Vol.23 (1974), 991-1011.
- [5] A.Friedman, *The asymptotic behavior of the first real eigenvalue of a second order elliptic operator with a small parameter in the highest derivatives*, Indiana Univ. Math. J., Vol.22 (1973), 1005-1015.
- [6] 村田實・倉田和浩, 岩波講座 現代数学の基礎 偏微分方程式 1, 岩波書店, 1996.
- [7] R.E.O'Malley, Jr., *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences Vol.89, Springer-Verlag, New York, 1991.

木村 正人 (正会員) 連絡先: 〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1 九州大学大学院数理学研究院
E-mail: masato@math.kyushu-u.ac.jp, 九州大学大学院数理学研究院助教授, 博士 (理学)
応用数学ならびに数値解析学を専門とする。

永田 真一 (非会員) 連絡先: 〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1 九州大学理学部数学科
平成 16 年度九州大学理学部数学科卒業, 卒業研究として数値計算を援用した固有値問題の漸近挙動解析に取り組む。NEC ソフトウェア九州勤務。

List of MHF Preprint Series, Kyushu University

21st Century COE Program

Development of Dynamic Mathematics with High Functionality

- MHF2003-1 Mitsuhiro T. NAKAO, Kouji HASHIMOTO & Yoshitaka WATANABE
A numerical method to verify the invertibility of linear elliptic operators with applications to nonlinear problems
- MHF2003-2 Masahisa TABATA & Daisuke TAGAMI
Error estimates of finite element methods for nonstationary thermal convection problems with temperature-dependent coefficients
- MHF2003-3 Tomohiro ANDO, Sadanori KONISHI & Seiya IMOTO
Adaptive learning machines for nonlinear classification and Bayesian information criteria
- MHF2003-4 Kazuhiro YOKOYAMA
On systems of algebraic equations with parametric exponents
- MHF2003-5 Masao ISHIKAWA & Masato WAKAYAMA
Applications of Minor Summation Formulas III, Plücker relations, Lattice paths and Pfaffian identities
- MHF2003-6 Atsushi SUZUKI & Masahisa TABATA
Finite element matrices in congruent subdomains and their effective use for large-scale computations
- MHF2003-7 Setsuo TANIGUCHI
Stochastic oscillatory integrals - asymptotic and exact expressions for quadratic phase functions -
- MHF2003-8 Shoki MIYAMOTO & Atsushi YOSHIKAWA
Computable sequences in the Sobolev spaces
- MHF2003-9 Toru FUJII & Takashi YANAGAWA
Wavelet based estimate for non-linear and non-stationary auto-regressive model
- MHF2003-10 Atsushi YOSHIKAWA
Maple and wave-front tracking — an experiment
- MHF2003-11 Masanobu KANEKO
On the local factor of the zeta function of quadratic orders
- MHF2003-12 Hidefumi KAWASAKI
Conjugate-set game for a nonlinear programming problem

- MHF2004-1 Koji YONEMOTO & Takashi YANAGAWA
Estimating the Lyapunov exponent from chaotic time series with dynamic noise
- MHF2004-2 Rui YAMAGUCHI, Eiko TSUCHIYA & Tomoyuki HIGUCHI
State space modeling approach to decompose daily sales of a restaurant into time-dependent multi-factors
- MHF2004-3 Kenji KAJIWARA, Tetsu MASUDA, Masatoshi NOUMI, Yasuhiro OHTA & Yasuhiko YAMADA
Cubic pencils and Painlevé Hamiltonians
- MHF2004-4 Atsushi KAWAGUCHI, Koji YONEMOTO & Takashi YANAGAWA
Estimating the correlation dimension from a chaotic system with dynamic noise
- MHF2004-5 Atsushi KAWAGUCHI, Kentarou KITAMURA, Koji YONEMOTO, Takashi YANAGAWA & Kiyofumi YUMOTO
Detection of auroral breakups using the correlation dimension
- MHF2004-6 Ryo IKOTA, Masayasu MIMURA & Tatsuyuki NAKAKI
A methodology for numerical simulations to a singular limit
- MHF2004-7 Ryo IKOTA & Eiji YANAGIDA
Stability of stationary interfaces of binary-tree type
- MHF2004-8 Yuko ARAKI, Sadanori KONISHI & Seiya IMOTO
Functional discriminant analysis for gene expression data via radial basis expansion
- MHF2004-9 Kenji KAJIWARA, Tetsu MASUDA, Masatoshi NOUMI, Yasuhiro OHTA & Yasuhiko YAMADA
Hypergeometric solutions to the q - Painlevé equations
- MHF2004-10 Raimundas VIDŪNAS
Expressions for values of the gamma function
- MHF2004-11 Raimundas VIDŪNAS
Transformations of Gauss hypergeometric functions
- MHF2004-12 Koji NAKAGAWA & Masakazu SUZUKI
Mathematical knowledge browser
- MHF2004-13 Ken-ichi MARUNO, Wen-Xiu MA & Masayuki OIKAWA
Generalized Casorati determinant and Positon-Negaton-Type solutions of the Toda lattice equation
- MHF2004-14 Nalini JOSHI, Kenji KAJIWARA & Marta MAZZOCCO
Generating function associated with the determinant formula for the solutions of the Painlevé II equation

- MHF2004-15 Kouji HASHIMOTO, Ryohei ABE, Mitsuhiro T. NAKAO & Yoshitaka WATANABE
Numerical verification methods of solutions for nonlinear singularly perturbed problem
- MHF2004-16 Ken-ichi MARUNO & Gino BIONDINI
Resonance and web structure in discrete soliton systems: the two-dimensional Toda lattice and its fully discrete and ultra-discrete versions
- MHF2004-17 Ryuei NISHII & Shinto EGUCHI
Supervised image classification in Markov random field models with Jeffreys divergence
- MHF2004-18 Kouji HASHIMOTO, Kenta KOBAYASHI & Mitsuhiro T. NAKAO
Numerical verification methods of solutions for the free boundary problem
- MHF2004-19 Hiroki MASUDA
Ergodicity and exponential β -mixing bounds for a strong solution of Lévy-driven stochastic differential equations
- MHF2004-20 Setsuo TANIGUCHI
The Brownian sheet and the reflectionless potentials
- MHF2004-21 Ryuei NISHII & Shinto EGUCHI
Supervised image classification based on AdaBoost with contextual weak classifiers
- MHF2004-22 Hideki KOSAKI
On intersections of domains of unbounded positive operators
- MHF2004-23 Masahisa TABATA & Shoichi FUJIMA
Robustness of a characteristic finite element scheme of second order in time increment
- MHF2004-24 Ken-ichi MARUNO, Adrian ANKIEWICZ & Nail AKHMEDIEV
Dissipative solitons of the discrete complex cubic-quintic Ginzburg-Landau equation
- MHF2004-25 Raimundas VIDŪNAS
Degenerate Gauss hypergeometric functions
- MHF2004-26 Ryo IKOTA
The boundedness of propagation speeds of disturbances for reaction-diffusion systems
- MHF2004-27 Ryusuke KON
Convex dominates concave: an exclusion principle in discrete-time Kolmogorov systems

- MHF2004-28 Ryusuke KON
Multiple attractors in host-parasitoid interactions: coexistence and extinction
- MHF2004-29 Kentaro IHARA, Masanobu KANEKO & Don ZAGIER
Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values
- MHF2004-30 Shuichi INOKUCHI & Yoshihiro MIZOGUCHI
Generalized partitioned quantum cellular automata and quantization of classical CA
- MHF2005-1 Hideki KOSAKI
Matrix trace inequalities related to uncertainty principle
- MHF2005-2 Masahisa TABATA
Discrepancy between theory and real computation on the stability of some finite element schemes
- MHF2005-3 Yuko ARAKI & Sadanori KONISHI
Functional regression modeling via regularized basis expansions and model selection
- MHF2005-4 Yuko ARAKI & Sadanori KONISHI
Functional discriminant analysis via regularized basis expansions
- MHF2005-5 Kenji KAJIWARA, Tetsu MASUDA, Masatoshi NOUMI, Yasuhiro OHTA & Yasuhiko YAMADA
Point configurations, Cremona transformations and the elliptic difference Painlevé equations
- MHF2005-6 Kenji KAJIWARA, Tetsu MASUDA, Masatoshi NOUMI, Yasuhiro OHTA & Yasuhiko YAMADA
Construction of hypergeometric solutions to the q - Painlevé equations
- MHF2005-7 Hiroki MASUDA
Simple estimators for non-linear Markovian trend from sampled data:
I. ergodic cases
- MHF2005-8 Hiroki MASUDA & Nakahiro YOSHIDA
Edgeworth expansion for a class of Ornstein-Uhlenbeck-based models
- MHF2005-9 Masayuki UCHIDA
Approximate martingale estimating functions under small perturbations of dynamical systems
- MHF2005-10 Ryo MATSUZAKI & Masayuki UCHIDA
One-step estimators for diffusion processes with small dispersion parameters from discrete observations
- MHF2005-11 Junichi MATSUKUBO, Ryo MATSUZAKI & Masayuki UCHIDA
Estimation for a discretely observed small diffusion process with a linear drift

- MHF2005-12 Masayuki UCHIDA & Nakahiro YOSHIDA
AIC for ergodic diffusion processes from discrete observations
- MHF2005-13 Hiromichi GOTO & Kenji KAJIWARA
Generating function related to the Okamoto polynomials for the Painlevé IV equation
- MHF2005-14 Masato KIMURA & Shin-ichi NAGATA
Precise asymptotic behaviour of the first eigenvalue of Sturm-Liouville problems with large drift