

動的計画法を用いたプロジェクト・ファイナンスにおけるリアル・オプション評価とその応用

時永, 祥三

<https://doi.org/10.15017/1102>

出版情報：経済學研究. 69 (5/6), pp.167-186, 2003-03-31. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：



動的計画法を用いたプロジェクト・ファイナンスにおける リアル・オプション評価とその応用

時永 祥三

1 まえがき

プロジェクト・ファイナンス (Project Finance) の手法は、1990 年代から導入されはじめた投資手法であり、貸し付け主体は投資対象の不動産所有などを目安とするのではなく、完成した設備などからの将来のキャッシュフローをもとにして、回収可能かを検討する。しかし、同時に投資会社は、投資が失敗に終わった場合の回収不能リスクを分担することになる。

投資担当者は、投資対象に起因するリスクファクターに対する情報を可能な限り収集し、投資の方法や経路を検討することが求められる。すなわち、株式投資の場合と同様に、リスク回避の手段や、投資における柔軟性を考慮した方法を見出す必要がある。このような投資経路の選択は、株式取引におけるオプションの設定と同様な概念であり、現在では、リアル・オプション (Real Option) とよばれている。

オプションの行使は、投資の実行に相当するが、これは株式オプションと同様に、行使する権利であり、義務ではない。もし、投資がうまくいかないと判断すれば、投資の継続を断念することも可能である。しかし、同時に、このようなオプションを引き受ける主体が存在することが条件となる。現在では、貸付のリスクを貸付から分離し、金融商品として取り引きするクレジット・デリバティブ (Credit Derivative) などがこれに相当する。

投資選択の理論は古い概念であると同時に、近年では、新しい視点から議論の対象となっている。初期の研究として、Dixit による論文が知られている。Dixit は、製品価格がランダムウォークに従うという不確実性の仮定のもとで、企業がその製品製造の市場に参入するか、あるいは撤退するかを決定する方法を示している。

Huchzermeyer と Loch は、研究開発投資に関する環境条件が変動する場合の投資の柔軟性の一般的な議論を展開するとともに、特定の変動要因、すなわち、市場での収益性、予算制約の変動などが投資決定に与える影響を分析している。

本論文では、プロジェクト・ファイナンスの実際的なケース分析を実施するための分析手法を示すとともに、今後のクレジット・デリバティブ評価の手法に関する考察を行う。特に、今後、電力事業、通信事業をはじめ、大型のプロジェクト事業を取り巻く環境の変化が顕著になると考えられ、市場の規制緩和や新規参入などの状況を、どのように判断するか材料になるであろう。特に、これらのプロジェクトは、投資回収までの期間が長いことが大きな特徴であり、資本市場の状況と同時に、市場や

その他の環境が大きく変動することは十分に考えられ、これらを取り入れた投資理論を示すことにもなっている。

しかしながら、プロジェクト・ファイナンスという用語にも、多くの意味が内包されていることも考慮する必要がある。すなわち、国家規模のダム、地下鉄、高速道路の建設や、これらを発展途上国で資金援助として実施する BOT(Built, Operate and Transfer)、あるいは BTO(Built, Transfer and Operate) なども含まれている。これらの広い分野を 1 つの概念でカバーするのは不可能である。従って、本論文では、プロジェクトの価値が単一の指標で評価される単純なケースを考察する。しかし、一般化は難しくなく、複数の指標を変換関数によって 1 つの指標に置き換えることも可能であろう。

本論文の主要な方法論は、投資選択に投資の強化、継続、縮小、撤退の 4 つのオプションを設定することであり、これを動的計画法の枠組みで解析することである。更に、最近の投資環境を考慮して、投資回収時期における市場でのキャッシュ・フローも変動することを仮定し、適切な設備を建設すべき指針を示している。すなわち、完成した設備の能力(以下では、容量として表現する)が、市場の需要を満たさない場合には、十分なキャッシュ・フローを獲得することはできないが、同時に、過剰な、あるいは過大な設備容量も、需要を超過することになるため、目的のキャッシュ・フローを回収することができない。すなわち、適切な設備規模の設定が重要となる。

これまでの研究では、主として、リアル・オプションにより投資の価値が高まることを示すことが主要な目的であったが、本論文では、投資の回収時期におけるキャッシュ・フローの大きさを、市場の需要との対比で求めること、これらを含めた総合的な評価の重要性に注目している。投資のリスクを軽減する方法として、デリバティブの設定と同時に、適切な投資規模を推定することも重要である。本論文では、投資問題の時期を 2 つに分けており、最初の投資をリアル・オプションに従って実施する時期を投資期間(Investment Phase)、完成した設備を用いて投資資金を回収する時期を回収期間(Repayment Phase)と呼んでいる。

このような目的から、論文の最初の部分(第 3 章)では、まず、設備容量と市場での需要の相互関係から、投資の回収可能性が決まることを議論している。

以下、第 2 章では、Dixit らにより展開された投資への参入 / 撤退の理論と、動的計画法による解法との関連性を整理する。第 3 章では、以下での準備のため、市場の需要が確率過程に従う場合の、設備の容量と回収可能なキャッシュ・フローとの関係を求めている。第 4 章では、動的計画法を用いたリアル・オプション評価の方法を示す。第 5 章では、実例的な例題について、本論文の手法の有効性を確認する。

2 リアル・オプションと投資決定問題

2.1 参入・撤退の基本モデル

近年、投資決定問題やこれに関連するリスク分析において、環境が不確実に変動する場合の議論が展開されている。投資を決定すれば、順調に期待収益があがる場合もあれば、期待した収益が得られなくて、使用した資金を回収することできなくなる場合もある。

このように、投資問題は時間を逆にたどることはできない。しかし、最適な時期まで投資を待つ、あるいは投資している場合にペイしないと判断し撤退する時期を決定する問題も含んでいる。

このような選択は、株式オプションにおけるオプションと同様であり、投資すなわち資産の所有に

関する権利を、留保することに対応している。これにより、投資により得られる利益を最大化しながら、同時に付随するリスクを限定することができる。このような投資における柔軟な選択を、株式投資におけるオプションと同様に考え、リアル・オプションとよぶ。

しかしながら、投資決定問題を記述するパラメータが増加する、あるいは定式化が簡単ではない場合には、解析的な解が得られるケースが極めて少なくなり、実用には耐えない可能性が発生する。ブラウン運動に代表される確率過程により不確実性を導入し、確率微分方程式によりモデル化、およびその解を求めることは、エレガントではあるが、関数形や境界条件、最適化すべき関数が大きく制限された場合にしか適用できない。

このような場合の現実的な解法として、動的計画法を用いることが提案されている。動的計画法は、それぞれの意思決定の段階において最適化の評価関数を導入することができ、不確実性についても、確率的な動的計画法により解析可能である。また、確率微分方程式によりモデル化し、これより得られる偏微分方程式を解くことと等価であることが示され、数値計算ベースであるとは言え、極めて有効な手段である。

以下では、このような不確実性下の投資決定問題とリスク分析の解法について、確率微分方程式による定式化と動的計画法の関係を中心として述べ、その適用のメリットと具体的な解析手順について展開する。

製品開発投資の参入・撤退のタイミングに関する議論は、McDonald and Siegel (1986 年) [1], Pindyck(1987 年) [4], Bertola(1987 年) [3], Dixit(1989 年) [5] ~ [7] などにより行われている。特に、Dixit による解析方法では製品開発投資の参入とこれよりの撤退を 2つの状態として区別し、投資環境が変化した場合に対応するモデル化を行っており、これを含まずに投資や退去が継続される McDonald and Siegel らのモデルの不備を指摘している。

また、Dixit のモデルでは、投資により参入した後に撤退を行うことによる Sunk Cost や低価格における制限との関連を考察しており、結論的には参入を開始するタイミング、投資を継続する時期、撤退のタイミングなどが価格情報として示されている。

製品開発投資のモデルとしてはさまざまなものが考えられているが、いずれも投資環境の不確実性に関する要因を考慮したモデルとなっている。ここでは、1) 投資期間中での商品価格の変動、2) Sunk Cost、3) 投資・撤退のタイミングについてモデル化した Dixit によるモデルをとりあげる。最初に価格変動を確率分布関数により表現するモデルについて述べる [6]。

いま、製品開発投資の対象となっている商品の時刻 t での価格を状態変数 X_t であらわし、この価格変動やその他の環境について以下のように記述する。

価格遷移の確率分布関数: $F(X', X) = \text{Prob}(X_{t+1} \leq X' | X_t = X)$

開発投資参入にともなうコスト、撤退時サンクされる: K

投資を行っている場合の利得関数: $V_0(X)$

投資を行っていない場合の利得関数: $V_1(X)$

商品販売による利益フロー (Flow Profit) : $\pi(X_t)$

資本コストあるいはディスカウント率: δ

以上の定義において、関数 $F(\cdot)$ はすべての X' について X の減少関数とする。利得関数 $V_0(X)$, $V_1(X)$ は動的計画法などで Value Function と呼ばれているものであるが、ここでは投資に運用される原資と考え利得関数とよんでおく。開発投資を行っているか (状態 0 とする)、まだ投資せずに待っている

か (状態 1) どうかに応じて 2 種類の利得関数を用いてモデルを記述している。

いま、離散時間を仮定すると、投資を行っている状態では次の再帰方程式が成り立つ。

$$V_1(X) = \pi(x) + \delta \int V_1(X') dF(X', X) \quad (1)$$

投資を行っていない状態 0 については、投資を行っている場合に撤退するケースも考えられるので、次に示すような再帰方程式が成り立つ。

$$V_0(X) = \max [V_1(X) - K, \delta \int V_0(X') dF(X', X)] \quad (2)$$

ここで、 K は投資に要する費用であり、これにより $V_1(X)$ を獲得するためのオプション行使価格である。逆に撤退する場合にはサックされる。これらの方程式を満足する X の存在についての証明については省略するが、通常の方法を適用することが可能である。

ここで、2 つの利得関数の差により次の関数を定義する。

$$\Psi(X) = V_1(X) - V_0(X) \quad (3)$$

式 (1) ~ (3) より次の再帰方程式を得る。

$$\Psi(X) = \min [K, \pi(X) + \delta \int \Psi(X') dF(X', X)] \quad (4)$$

ここで、関数 $\pi(X)$ は増加関数であるので、式 (4) は非減少関数 $\Psi(X)$ の自分自身の部分空間を定義する。不動点定理を用いて、次の関係を満足する X の値 X^* を定義する。

$$\pi(X^*) + \delta \int \Psi(X') dF(X', X^*) = K \quad (5)$$

以下の議論で分かるように、商品の価格 X が $X > X^*$ となり X^* をこえた時点 (タイミング) で投資を開始すればよいことが分かる。

式 (4), (5) より $K < \pi(X^*) + \delta K$, すなわち $\pi(X^*) / (1 - \delta) > K$ となるので、 X^* は投資を開始すべき価格を表現している。次に、 $X < X^*$ の範囲について不動点を用いて定式化すると次のようになる。

$$\Psi(X) = \pi(X^*) + \delta \int \Psi(X') dF(X', X^*) + \delta K [1 - F(X, X^*)] \quad (6)$$

ここで、式 (4) より $X \geq X^*$ については

$$\Psi(X) = K \quad (7)$$

あるいは

$$V_0(X) = V_1(X) - K \quad (8)$$

となる。式 (6) に示すように $X'' \geq X^*$ の範囲の確率密度関数 $f(X', X)$ は、関数 $\Psi(X)$ の挙動には影響をおよぼさない。このように商品の価格が上昇する局面での投資参入のシナリオについては条件を求めることができる。

次に、商品の価格が低迷している場合に、投資を解消して撤退するケースについて考察する。 X が小さいときにはフロー $\Psi(X)$ は負の値をとると仮定し、もしこの値が L 以下である場合には投資を解消することにする。この仮定のもとでは、式 (1) の関係は次のように書きなおされる。

$$V_1(X) = \max[V_0(X) - L, \pi(X) + \delta \int V_1(X') dF(X', X)] \quad (9)$$

式 (4) ～ (7) で行った議論と同様な手順により、投資をあきらめるべき商品価格のレベル X は、次の関係式により求められる。ここで、 L は撤退の費用と考えられ、 K と同様にオプション行使価格を与える。

$$\Psi(\hat{X}) = -L, \text{あるいは} V_1(\hat{X}) = V_0(\hat{X}) - L \quad (10)$$

同様に、 $X \leq \hat{X}$ については $\Psi(\hat{X}) = -L$ となる。このようにして、商品価格が $X \geq X^*$ あるいは $X \leq \hat{X}$ の状態にいたれば投資の開始あるいは撤退のアクションがとられることになる。

逆に、これ以外の状態、すなわち $\hat{X} < X < X^*$ の状態にあれば、投資への参入、不参入については変更が行われない（投資していれば継続、投資していないならば待つ）。関数 $\Psi(X)$ の具体的な形については得られていないが、概略を示せば図 1 のようになる。

このように、特定の価格範囲では投資、非投資を維持することが最適政策となる興味深い現象が現れる。Dixit はこれを電磁気学に現れる磁性体の磁化現象になぞらえて「ヒステリシス」と呼んでいる。

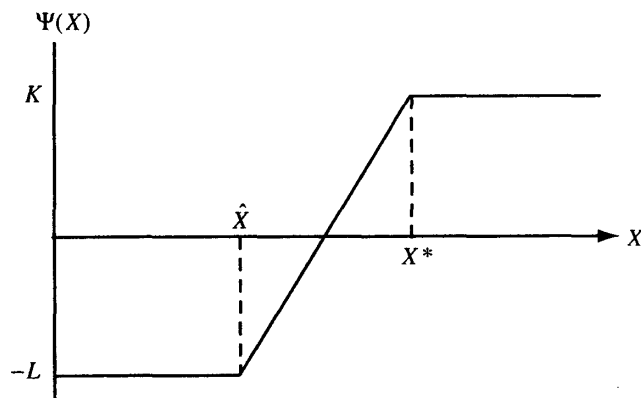


図 1. 関数 $\Psi(X)$ の概略

2.2 ブラウン運動による価格記述

開発投資への参入・撤退を決定する関数 $\Psi(X)$ の具体的な形を求めるために、商品の価格変動をブラウン運動により記述する。価格の変動をブラウン運動により記述することは証券投資などで一般的に用いられており、これらの中でも株式とオプション価格の公式は良く知られている。ここで述べる価格変動の仮定も、基本的には株価の変動と同様の考え方である。

いま、商品価格 X は次のブラウン運動に従って変動しているとする。

$$dX/X = \mu dt + \sigma dz \quad (11)$$

いま, 関数 $\Psi(X)$ については $\hat{X} \leq X \leq X^*$ の範囲の挙動だけが問題となっているので, 式 (2), (8) の右辺を確率微分についての伊藤のレンマ (Ito's Lemma) を用いて展開すると次の関係式が成り立つ [15]。

$$0.5\sigma^2 X^2 \Psi''(X) + \mu X \Psi'(X) - \rho \Psi(X) + \pi(X) = 0 \quad (12)$$

これは X についての 2 次常微分方程式であるので, 次の形の一般解をもっている。

$$\Psi(X) = AX^{-\alpha} - BX^{\beta} + \Pi(X) \quad (13)$$

ここで, A, B は未知の定数 α, β は次の 2 次方程式の根であり, $\alpha > 0, \beta > 1$ である。

$$\psi(x) = \rho\mu x - 0.5\sigma^2 x(x-1) = 0 \quad (14)$$

また, $\Pi(X)$ は次の積分により計算される。

$$Pi(X) = E\left[\int_0^\infty \pi(X) \exp(-\rho t) dt | X_0 = X\right] \quad (15)$$

ここで, 項 $AX^{-\alpha}, X^{\beta}$, それぞれ投資待ち, 投資実施による利得関数に対応しており, 株価におけるオプション価格に対応している。 X の特定の値, X^* と X はこれらのオプションの行使価格に対応しているので, 境界条件として次のものが採用される。

$$\Psi(X^*) = K, \Psi(\hat{X}) = -L \quad (16)$$

また, 関数 $\Pi(X)$ は正しいタイミングで投資がなされた場合の利益の現在価格を表現している。関数 $\Psi(X)$ の $X \geq X^*, X \leq \hat{X}$ での挙動は $\hat{X} \leq X \leq X^*$ での関数の形状と滑らかに連続結合される必要があるので, 次の境界条件を付加する。

$$\Psi'(X^*) = 0 \text{ あるいは } V_0'(X^*) = V_1'(X^*) \quad (17)$$

$$\Psi'(\hat{X}) = 0, \text{ あるいは } V_0'(\hat{X}) = V_1'(\hat{X}) \quad (18)$$

式 (11) では関数 $\Psi(X)$ についての微分方程式だけが示されているが, これと同様な方程式が $V_0(X), V_1(X)$ についても成立する。

$$\sigma^2 X^2 V_0''(X) + \mu X V_0'(X) - \rho V_0(X) = 0 \quad (19)$$

$$\sigma^2 X^2 V_1''(X) + \mu X V_1'(X) - \rho V_1(X) + \pi(X) = 0 \quad (20)$$

関数 $V_0(X), V_1(X)$ は関数 $\Psi(X)$ と同様の式を満足しているので, 式 (12), (13) に示した量を用いて解を記述することができる。しかし, $V_0(X), V_1(X)$ の物理的な意味から, $V_0(X) = BX^{\beta}, V_1(X) = AX^{-\alpha} + \pi(X)$ となる。ここで, $A, B \geq 0$ となることがわかる。

関数 $\Pi(X)$ は投資による利益を示しているので, 項 AX^{α} は投資からの撤退をタイミングよく行うことによる利益であり, 株価でのオプション価格に相当している。これより類推して, 現在投資していない企業がもつ項 BX^{β} はタイミングよく投資を行うことによるオプション価格に相当している。価格が非常に低い場合には投資へ移る確率は非常に低いので, $V_0(X)$ は $X^{-\alpha}$ 項をもたないし, 逆に価格が高い場合には撤退は起こりえないので, $V_1(X)$ は X^{β} を項をもたない。

2.3 変動要因と生産の切り替え問題

多国籍企業などにおいて経済変動が投資におよぼす影響を回避する課題をモデル化する手法として、投資対象を切り換える問題が議論されている。海外投資に関して、例えば、為替レート変動に応じて工場を国内に配置して生産するか、海外に移転するかを決定する問題である。

為替レート変動が企業価値に及ぼす影響の数理モデルに関しては、従来より投資決定問題として取り扱われてきたが [3][4]、変動要因が加わる場合には、生産を切り替えるなどの課題が発生する。例えば、為替レートが変動する場合には、円高傾向になれば国内の生産工場を閉鎖して、すべての生産を海外で行う。

このように、変動する要因に応じて生産などを切り替える方法の評価をした研究としては、Kogut-Kulatilaka[10]-[11]、Huchzermeier-Cohen らの研究 [7]-[9] がある。これらは Operational Flexibility と呼ばれる。このような企業戦略は、見方をかえれば、株式投資におけるオプションの所有に相当するものであり、工場を閉鎖するか、そのまま操業を続けるかは、プットオプションを行使するか、しないかと同じ議論になる。

投資先の決定に直接的に影響を与える変動要因として、経済指標があげられる。為替レート変動はその代表的なものであろう。このほかに、各国のインフレ率、金利、あるいは GDP の長期的な傾向などが考えられる。これらの経済指標を時系列として表現すれば、その影響を統一的に評価する方法が定式化できる可能性がある。

以下では、これらを単純化し、複数の変動要因を含むケースの投資決定問題を考察する。

生産の切替え問題に関しては、基本的には株式オプションの評価式を導出するときの手順と同様に行うことができる。しかし、変動過程がブラウン運動のように簡単にモデル化できない場合には、オプションの評価式を拡張して利用することはできない。

最初に、株価変動のモデル化などによく用いられている幾何ブラウン運動を用いる。いま、このモデルでは、変動過程が微分方程式により記述されるので、これを変動として含む関数(評価関数)の将来の値を微分方程式を解くことにより求めることができる。以下では、変動要因は為替レートや金利などの経済変動を代表するものであると仮定し、簡単のため、変動する過程は1つであるとする。問題を簡単にするために、これを為替レート変動で代表させる。変動過程は次のようにモデル化できる。

$$de/e = \mu dt + \sigma dZ \quad (21)$$

ここで、 μ は為替レート変動のトレンド(傾向線)であり、 σ は変動過程の分散である。 Z は正規白色過程(dZ はウィーナ過程)である。

このような変動を前提とした場合の企業の時刻 t における利益を、企業価値 $V(t)$ で表す。企業価値は変動により影響されると仮定する。このとき、企業価値の値は、次の微分方程式に従って変動する。この微分方程式を解くことにより、時刻 t における企業価値を推定することができる。

$$dV = (V_t + \mu e V_e + 0.5\sigma^2 V_{ee})dt + \sigma e V_e dZ \quad (22)$$

通常の株価におけるオプション価格を産出する場合と同様に、国内および外国における無リスク資産の利率 r, r_f を導入し、self-financing のポートフォリオを構成し、裁定なしの条件を用いて方程式を変換する。すなわち、企業価値である資産を購入し、海外通貨で x だけの投資を行い、国内通貨で $V +$

x だけの借入を行う。利子率は期間内では変化しないと仮定する。このとき、時刻 t におけるポートフォリオは

$$\Pi = -V - x + (V + x) \quad (23)$$

となる。このポートフォリオの微小時間 dt における変化は

$$d\Pi = (V_t + \mu e V_e + 0.5 e^2 V_{ee}) dt + \sigma e V_e dZ + [x(1 + r_f dt)(e + de)/e - x] - r(V + x) dt \quad (24)$$

ここで

$$x = -e V_e / (1 + r_f dt) \quad (25)$$

と選択することにより、リスクフリーのポートフォリオとすることができる。以上の式をまとめると、次の偏微分方程式を得る。

$$V_t + e V_e (r - r_f) + 0.5 \sigma^2 e^2 V_{ee} = r V \quad (26)$$

ここで、注目すべき点として、式 (1) に示す微分方程式を解くことと、次に示すような動的計画問題を逐次的に解いていくことが等価であることである。

$$V_t(e, O_{t-1}) = \max[P_t(e, O_{t-1}, O_t)] + \text{const.} E[V_{t+1}(e, O_t)] \quad (27)$$

$$V_T(e, O_{T-1}) = \max[P_T(e, O_{T-1}, O_T)] \quad (28)$$

$$P_t(e, O_{t-1}) = \Gamma(O_{t-1}, O_t) + SP_t(e, O_t) \quad (29)$$

ただし、為替レート変動を e で簡単に示しており、 O_t, O_{t-1} などは、それぞれの期間において採用されたオプションを示す（例えば、生産基地の選定など）。

これらの式は、ある時刻 t までの企業価値を最大化する問題を、1 期間における生産 - 流通 - 販売による利益を最大化する行動を通じて表したものになっている。ここで、 $P_t()$ は時刻における生産計画の価値（企業価値）であり、 $SP_t()$ は、時刻 t における生産による利益である。3 番目の式においては、 $\Gamma()$ は切り換えコストに対応し、従って、仮に変動過程が複雑になっても、このような動的計画問題を解くことができれば、企業価値の評価を実行できる。

3 市場の需要と設備容量

3.1 プロジェクト・ファイナンスでの検討事項

プロジェクト・ファイナンスという言葉が用いら始めたのは最近であり、日本では、大阪に開業したユニバーサル・スタジオ・ジャパンが知られている。ユニバーサル・スタジオ・ジャパンへの融資にあたって、特に土地などの有力な担保を前提としないで、開業後の収益で返済できるとの見通しを融資の条件としている。

すなわち、プロジェクト・ファイナンスとは、投資対象をプロジェクトとし、そのプロジェクトからのキャッシュフローによる回収を目的としている融資方法であると言える。同様の融資方法として、以前より知られているものに、主として途上国援助として施設を建設する方法として用いられた BTO(Built, Transfer and Operate) あるいは BOT(Built, Operate and Transfer) とよばれる手法

がある。これは、文字どおり、投資したあとのオペレーション、運用 (operation) における利益と投資額の回収後に資産を誰が所有するか (transfer) を契約により決める方法である。

プロジェクト・ファイナンスにおいて、プロジェクトを取り巻く環境が変化しない場合には、当初の予定どおりに資金の回収ができるであろう。しかし、一般には、プロジェクトをめぐる環境や投資の条件も変化すると考えられる。いわゆる、不確実性のもとでの意思決定を行う必要がある。この場合、次のようなことが重要なポイントとなる。

- (1) プロジェクト完成までの総投資額
- (2) プロジェクト完成時における施設の能力
- (3) 施設の運用におけるキャッシュフロー見積り
- (4) 貸付における信用リスクの見積りと回避

第1番目の項目は、資材の調達条件が変化したり、天候により建設が遅れるなどの事態が発生して、余分な資金を必要とするケースなどである。これを最小化するには投資を遅らせるなどの選択も1つの方法である。

第2番目は、一般に、多くの建設資金を投入すれば能力の高い設備が完成するが、市場では、このような大きな能力の設備を必要としていないケースも存在する。景気の低迷や、環境対策で、大型の発電施設よりも、小型で、分散的に配置できる施設が求められることなどがある。

第3番目は、第1番目と第2番目と総合的に判断されるべき項目であるが、適切な投資と適切なを得るには、どのような投資決定をすればよいかという問題を解決することに対応する。

第4番目は、すでに述べたクレジット・デリバティブの評価に関することであり、プロジェクトに出資する銀行が、貸付のリスクを他社に移転する場合のプロテクションの値段 (プレミアム) を見積もる評価式が必要となる。

以下では、これらのモデル分析を行う1つの方法を示すが、変動要因を含む場合のオプション評価が基本となる。しかし、ブラック・ショールズ・モデルのような解析解は求まらないケースがほとんどであるので、同等の評価が可能である動的計画法を用いた解法を示す。

3.2 設備容量とペイオフ

すでに述べたように、本論文における投資問題は2段階であり、最初のリアルオプションを用いた投資の評価の投資期間と、これに続いて完成された設備を用いて投資を回収する回収期間とに分かれる。ここでの仮定として、設備の容量が大きくても、市場の需要の需要は必ずしも大きくないケースが存在する。更に、市場の需要は確率過程に従って変動しており、これによって得られるキャッシュ・フローも、変化することを仮定する。

従って、話としては後段に検討対象となる、回収期間におけるリスクに関して述べておく必要がある。具体的には、市場の需要のレベルが制限されていること、更に、この需要が確率過程に従って変動している場合に、市場から得られるキャッシュ・フローの期待値の累計として定義されるペイオフ (Pay-off) の大きさが、設備の容量にどのように関係しているかを分析する。

ただし、投資期間を含めた全体の利益や回収状況に関しては、後での議論を総合して実施しなければならない。ここでは、すでに投資期間 (これを時刻で $t = 1, 2, \dots, T_1$ までとする) において設備が完成され、レベル k を整数で表した場合に、このレベル k に応じて回収できるキャッシュ・フローがどのように変化するかを検討するにとどめておく。すなわち、最大のペイオフを与えるためには、完成

時における設備のレベル k がいくらであるべきかを議論する。これに必要な投資の総額の話は、分離されている。

しかしながら、一般的な傾向として、完成時におけるレベルが最大のペイオフを与えるような投資方法は、投資の全体においても最適に近い投資となっていることが多いと言える。従って、ここで述べる方法論は、第 4, 5 章の議論と間接的に関連している。期待できるキャッシュ・フローと需要最初に投資は時刻に完成しそのときの設備容量がであると仮定する。この場合に設備からのペイオフは次の式で定義される。

$$\Pi(k) = \sum_{t=T_1+1}^{T_3} \frac{E[C_k(t)]}{(1+\rho)^{t-T_1}} \quad (30)$$

ここで、 $C_k(t)$ は完成時の設備容量が k であるときに、時刻 t において得られるキャッシュ・フローである。割引率 $1+\rho$ は、投資管理者が投資の要求利率として仮定するものであるが、これに相当するものについては、次のように解釈できる。

通常、資本市場では、リスクフリー資産を用いてポートフォリオを構成した場合の、裁定なしの条件から導出される数値である。しかし、ここで述べているケースでは、このような条件を記述することは不可能である。また、割引率を変動するものとして設定することも、あまり意味があることではない。このような理由から、ここでは、キャッシュ・フローの累計を計算する場合と同様に、現在価値での評価という意味だけを用いている。

一般的には、設備の容量が大きいほどペイオフが大きいと言える。すなわち、関数 $\Pi(k)$ は k の単調増加関数となることが期待される。しかし、本論文の仮定では市場の需要は制限的であり、しかも確率過程に従って変動しているので、ペイオフは単調増加関数ではなく、ある k の値の場所で最大となる関数となる。すなわち、最大のペイオフを与える設備容量は、過大でもなく、過小でもない、中間のレベルということになる。これは市場が制限的である場合には、一般的に期待される結果である。

3.3 需要の変動とペイオフ評価

次に、需要変化を仮定した場合のペイオフ評価を行う。一般的には、需要は一定ではなく、時間とともに変動していると仮定される。ここでは、時刻 t における需要を $D(t)$ とし、その増加分 $dD(t)$ が、次に示す確率過程（幾何ブラウン運動）に従って変動するという仮定を導入する。

$$dD(t) = \mu D(t) + \sigma D(t) dZ \quad (31)$$

ここで、 μ はドリフトパラメータであり、 σ は分散パラメータである。 dZ はウィーナー過程の微分値である。すなわち、需要はブラウン運動に従って変化するが、時間とともに、徐々にベースが増加するモデルを仮定している。

このような需要を仮定して、式 (30) に示すペイオフを評価する。その手段として、解析的な手法は利用できないので、ここでは、シミュレーションによる評価を実施する。すなわち、式 (31) に従って需要変化の多数のパスを作成し、これらの期待値として、ペイオフを計算する。このペイオフの値は、パラメータである μ, σ により変動することになる。シミュレーションでは、

$$D(0) = 20, \mu = 0.05, 0.1, 0.2$$

$$\sigma = 0.05, 0.1, 0.2$$

として仮定する。

図2にはこれらの結果をまとめている ($\mu = 0.05$ の場合の結果のみを示す)。図2において、横軸は設備の容量 k であり、縦軸はペイオフ $\Pi(k)$ を示す。これらの結果から、次のようなことが見出せる。

まず、ペイオフが最大となる設備容量は、中間点に存在しており、適切な容量を選択することが、ペイオフ最大化に寄与していることが分かる。次に、ペイオフは容量が小さい時点ではゼロであり、こののち、途中から急激に増加しており最大の点に達している。このことは、容量が過小である場合には、ペイオフはゼロであるが、急激にペイオフが増大することを示している。

更に、ペイオフが最大に達した後では、緩やかに減少に転じており、過大な設備の場合にはキャッシュ・フローそのものは急激には減少しないことが分かる。しかし設備の維持管理費用を考慮するとこれらのキャッシュ・フローは相対的に低いものになっている。

また、分散が大きいほどペイオフの減少傾向を増幅させていることが分かり、需要の変動が大きな場合には、設備容量の選択が相対的に重要となると言える。

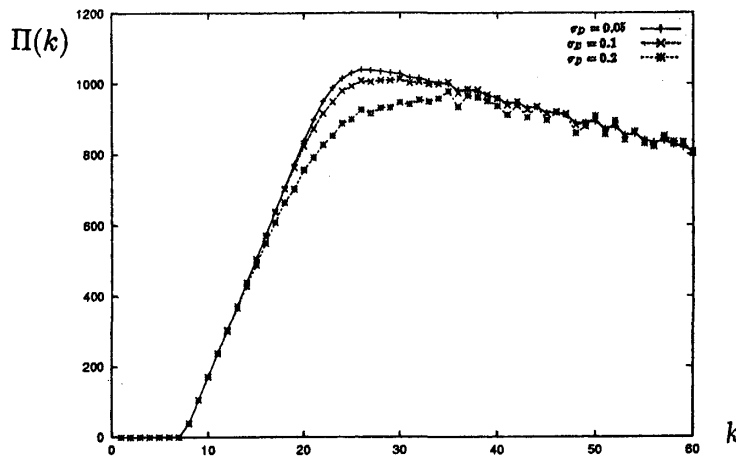


図2. 設備容量とペイオフの関係 ($\mu = 0.05$)

4 プロジェクト・ファイナンスの評価

4.1 プロジェクトの状態遷移

プロジェクトにより施設を建設する問題を考え、プロジェクトは、完成時刻までの間に確率的な変動の影響を受けると仮定し、施設が時刻 t で持っている能力を θ_t とする。時刻 $t = 0$ から時刻 $t = T_1$ まで、確率的な変動過程をたどって、最終的に施設は完成される。

変動過程をモデル化する方法には、さまざまなものが可能であるが、以下では、次のような、やや単純なモデルを仮定する

$$\theta_t = \theta_{t-1} + \varepsilon_t, -N \leq j \leq N \quad (32)$$

ここで、 ε_t は平均が μ で分散が σ である正規乱数である。

施設の能力を代表値 θ_t で表現する場合に、 θ_t が連続的ではなく、離散的な値をとると仮定する。すなわち、変動過程 θ_t は、 $-N, -N-1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, N-1, N$ の合計 $2N+1$ 個の状態の1つを、時刻 t においてとっていると仮定する。

従って、最後の時刻における施設の能力 θ_T だけが問題となるが、正規乱数の平均と分散によって θ_t がとることのできる期待値がことになってくる。単純な場合として、最初に見積もっている施設の能力 θ_0 が、最終的な段階でも実現される場合は、 $\theta_T = \theta_0$ である。

なお、状態 $N, -N$ は、これ以上の状態を集約したものであると同時に、投資の状態遷移を決めるものにもなっている。いま、次のような量を計算する。

$$P = \sum_{j=1}^N \text{prob}(\theta_{t+1}^j | \theta_t) \quad (33)$$

$$Q = \sum_{j=-N}^{-1} \text{prob}(\theta_{t+1}^j | \theta_t) \quad (34)$$

もし、 $P < Q$ であるならば、投資家は、やや悲観的な視点で投資を見ており、完成時には $E(\theta_{T_1}) < \theta_0$ となることが予測される。一方、 $P > Q$ であれば、投資家は楽観的であり、完成時には $E(\theta_{T_1}) > \theta_0$ となることが期待される。

これらのどちらを選択しても、中立的な結果にはならないので、以下では、 $\mu = 0, \sigma = 1$ という仮定を置くことにする。

(1) 投資方法の選択

次に、このように中間段階におけるプロジェクトの状態は変動過程に従って変化するので、これを制御する方法について考察する。プロジェクトを進行する管理者は、初期投資と、このような追加投資を考慮し、次に示す 3 つの投資の状況のいずれかを選択すると仮定する。

- (a) 投資をあきらめる (abandon)
- (b) 通常の投資をする (continue)
- (c) 追加投資をする (expand)
- (d) 投資を縮小する (contract)

投資をあきらめた場合には、この時点までの企業価値はゼロに戻ってしまうが、投資を継続しても意味がないと判断した場合には、これを選択する。

通常の投資では、式 (30) に示すようなプロジェクトの状態遷移が実現する。ただし、この場合、投資継続のコストである $c(t)$ を要すると仮定する。

更に、追加投資を選択した場合には、式に示す状態遷移ではなく、一般にプロジェクトの状態が改善されるような次に示す遷移を行うと仮定する。

$$\theta_t = \theta_{t-1} + 1 + \varepsilon_t, -N \leq j \leq N \quad (35)$$

ただし、この場合、投資継続のコストである $c(t)$ に加えて、 $a(t)$ のコストを要すると仮定する。

更に、投資の縮小を選択した場合には、式 (30) に示す状態遷移ではなく、一般にプロジェクトの状態が低化させられるような次に示す遷移を行うと仮定する。

$$\theta_t = \theta_{t-1} - 1 + \varepsilon_t, -N \leq j \leq N \quad (36)$$

ただし、この場合、投資継続のコストである $c(t)$ が節約できて、 $d(t)$ だけ減額されると仮定する。

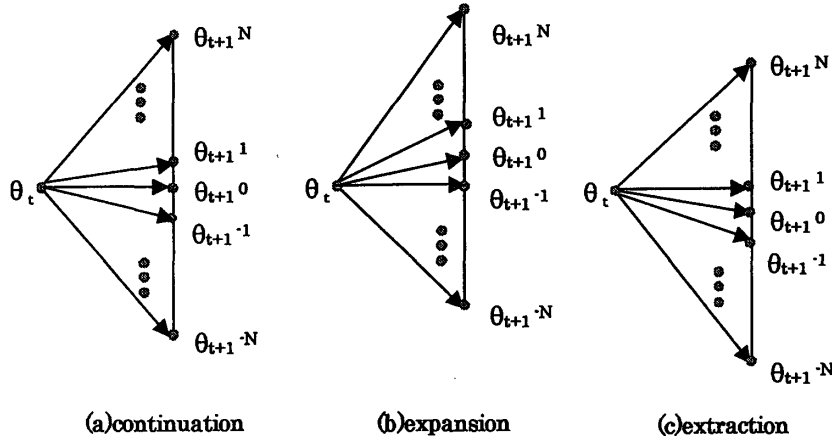


図 3. 継続投資, 追加投資, 投資の縮小の場合の状態遷移

(2) 収益の変動

整備が終了して収益 (キャッシュ・フロー) により借入金を返済する場合に, 収益が返済金額に満たない場合が発生する。この場合, 初期に計画された資金とは別に保証金などの形で返済を補完し, プロジェクトを継続する必要がある。収益の変動過程を導入する必要がある。

しかし, これについては, すでに第 3 章で述べたような需要の変動過程を導入することにする。すなわち, 第 3 章での市場 h の需要の過程を, そのまま用いることにする。

投資の場合と同様に, 収益がマイナスのときには運営を中止して, 返済だけを行なうケースをとり入れる。詳細は次の節で述べる。

このような返済が間に合わない場合には, 融資を受けて, 返済を継続する必要がある。このような資金を, 前もって推定しておき, このリスクを引き受ける企業を選定し, あらかじめ, そのリスク回避のプレミアムを推定する必要がある。

4.2 投資の動的計画法による最適化

プロジェクトの進行にあわせて, どの状態を選択することが有利であるかを求める問題となる。プロジェクトは, 最終的には, 設備容量 k によりその価値を表現されるが, 完成にいたるまでの中間段階における価値を, $V_t(\theta_t)$ により表す。

追加投資により, プロジェクトの価値 $V_t(\theta_t)$ がたかまることが予想されるので, 以下では, 追加投資と状態遷移には相関があると仮定する。すでに述べたように, 通常投資の費用を $c(t)$, 追加投資の費用を $a(t)$ とする。また, 投資の縮小を選択した場合には, 費用 $c(t)$ は $d(t)$ だけ減額される。

投資の期間 (長さ T_1) を通じて, プロジェクトの価値を最大とする計画は, 動的計画問題として記述すると, 時刻を表す添字である t を用いて, 次のようになる。

$$V_t(\theta_t) = \max \begin{cases} 0, & \text{abandonment;} \\ -c(t) + \gamma \sum \text{prob}(\theta_{t+1}^j = \theta_t^i + \epsilon_t^j) V_{t+1}(\theta_{t+1}^j) & \text{continuation;} \\ -c(t) - a(t) + \gamma \sum \text{prob}(\theta_{t+1}^j = \theta_t^i + 1 + \epsilon_t^j) V_{t+1}(\theta_{t+1}^j) & \text{expansion;} \\ -c(t) + d(t) + \gamma \sum \text{prob}(\theta_{t+1}^j = \theta_t^i - 1 + \epsilon_t^j) V_{t+1}(\theta_{t+1}^j) & \text{contraction;} \end{cases} \quad (37)$$

$$\gamma = 1/(1 + \rho) \quad (38)$$

$$0 \leq t \leq T_1 - 1, 1 \leq i \leq 2t + 1 \quad (39)$$

$$V_{T_1}(\theta_{T_1}^i) = \Pi(\theta_{T_1}^i), 1 \leq i \leq 2T_1 + 1 \quad (40)$$

ただし, $\text{prob}(\theta_{t+1}^j = \theta_t^i + \epsilon_t^j)$ などは, プロジェクトの状態が状態 i から状態 j へと遷移する確率である。正確には, $\text{prob}(\theta_{t+1}^j = \theta_t^i + \epsilon_t^j | \theta_t^i)$ として記述するが, 簡単に表記している。 $\Pi(k)$ はプロジェクト整備時における状態に対する評価値である。これは, 運用における収益に直接影響すると仮定する。 i の取りうる値は有限の範囲であり, これらを 1 つの状態とすると, 逆方向に DP を計算する場合には, 枝分かれの状態を検索する必要がある。最終的には, 第 1 段における選択が決定されるので, 今度は, これを順方向にたどることにより, 全部の解を計算することができる。

4.3 回収における不足額の推定

整備が終了したあとに, 時刻 $T_1 + 1 \leq t \leq T_2$ において運用により得られる利益 $C_k(t)$ により返済を実行する。仮に, 借入れた金額を均等に $M(k)$ だけ返済すると仮定した場合には, 収益が返済金額に満たない場合 ($M(k) > C_k(t)$) には, 保証金 (合計 $H(k)$) を用いて補完するものとする。なお, $H(k)$ と $M(k)$ は, 設備の完成時のレベル k に依存することに注意する。

これまで仮定を用いると, この金額 $H(k)$, すなわち返済が滞った場合に補完すべき保証金の金額は, 次のように定義される。

$$h(t) = \begin{cases} \max[M(k) - C_k(t)] & (C_k(t) \geq 0); \\ M(k) & (C_k(t) \leq 0); \end{cases} \quad (41)$$

$$H(k) = \sum_{t=T_1+1}^{T_2} \exp(-\rho t) E[h(t)] \quad (42)$$

ただし, $M(k)$ は投資に要した金額の合計を回収期間において均等に返済した場合の金額である。

この $H(k)$ については, コールオプションと同様な評価式を用いて推定できることが知られている [3]。しかし, 以下では, プロジェクトそのものの運用を中止することも考慮したモデルを考察する。

4.4 回収後の利益

上のように, 回収が順調でない場合の保証金を評価することができる。一方, プロジェクトが順調に進行した場合には, プロジェクトの投資資金を回収して, なおかつ, 余剰の利益 $R(k)$ を獲得することができる。これについては, 次のように定義することができる。

$$r(t) = \begin{cases} \max[C_k(t) - M(k)] & (C_k(t) \geq 0); \\ C_k(t) & (C_k(t) \leq 0); \end{cases} \quad (43)$$

$$R(k) = \sum_{t=T_1+1}^{T_2} \exp(-\rho t) E[r(t)] \quad (44)$$

5 応用例

5.1 投資におけるリアル・オプションの効果

以下では、簡単な例として、次のようなケースを考える。

$$N = 1, k = 14 \sim 45$$

$$T_1 = 6, T_2 = 12, \theta_0 = 26$$

$$D(0) = 20, \mu = 0.05, \sigma = 0.05, \rho = 0.1$$

最初の仮定より、プロジェクトの状態は、隣接する状態もしくは1つ上あるいは1つ下の状態を、次の状態として選択する。

$c(t), a(t), d(t)$ の値は、表1に示すような増加関数としておく。

表1. シミュレーションにおける $c(t), a(t), d(t)$ の値

t	1	2	3	4	5	6
$c(t)$	100	100	150	200	300	300
$a(t)$	50	50	30	50	50	50
$d(t)$	20	20	30	50	50	50

図4には、シミュレーションの結果得られる状態を格子状の図 (lattice structure) として示している。図4において、カッコの中の数値は、この状態で得られる企業価値の値を示しており、カッコの中の記号は、それぞれ状態で選択されたオプション、すなわち、最適な投資選択を与えている。記号の意味は、A (Abandonment), C (Continuation), E (Expansion), D (Contraction) である。

最初の1つの状態から出発して、徐々に到達可能な状態が増加し、最後には、設備の完成段階を与える状態にいたる。ただし、この問題を、動的計画法により、後ろから解いていることに注意する。

なお、比較分析のために、図5には通常の投資決定である NPV (Net Present Value) による評価の結果を示している。この NPV による評価では、通常の投資が継続されるだけであるので、すべての状態における投資選択は A である。

なお、本論文の手法の有効性を確認するため、次のように区別する。

(Case A): リアル・オプションを用いた投資選択

(Case B): 通常の NPV による投資評価

これらの2つの図を比較することにより、本論文で述べた投資におけるリアル・オプションの採用の結果、プロジェクトの価値は 226.4 となることが分かる。

一方、通常の投資選択である NPV においては、その価値は -27.8 にしかない。これらの差は 254.2 であり、かなり大きな値であると言える。

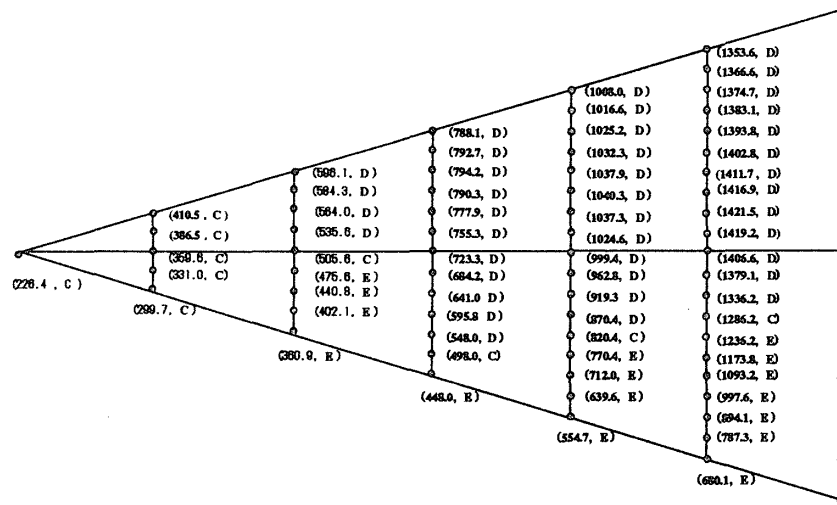


図 4. リアル・オプションを用いた場合の状態遷移

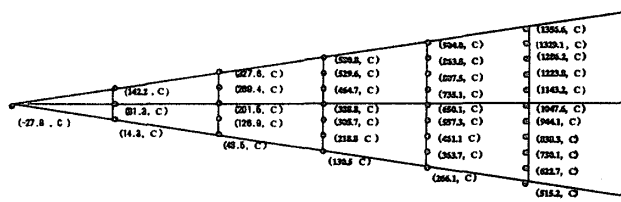


図 5. NPV を用いた場合の状態遷移

次に、表 2 には投資の最終段階でいたる状態とそのときの投資総額、到達確率を示している。

これらの結果から分かるように、最終的に状態が良好であるほど、投資金額は小さく、最終的に得られる利益のレベルも高いので、事業としては好ましい結果となる。一方、最終状態が低いと、投資額は大きく、利益も小さいので、全体的に事業評価は低くなる。

しかし、このような結果は一般的な傾向ではなく、パラメータの設定によっては、状態が良好で、かつ、投資額も大きいケースを見い出すことができる。

表 2. 到達できる状態と価値、到達確率

価値 (最終状態)	21	22	23	24	25	26	27	28
到達確率	0.01	0.20	0.31	0.30	0.12	0.05	0.01	0.009
投資総額	335.9	318.0	315.0	132.4	305.3	304.3	302.8	296.4

これらの性質を、更に、需要の特性が変化する場合について、シミュレーションにより求めたものが表 3 である。具体的には、需要について、 $\mu = 0.05$ に固定しておいて、 σ を $\sigma = 0.05$ と $\sigma = 0.2$ との 2 つに選んだケースについて Case A, case B を比較分析している。

これらの結果から、次のようなことが分かる。

(1) 実現可能な最終状態数

Case A, Case B のどちらも、ほぼ、おなじ数の最終状態数になっている。すなわち、2つの分散と θ_0 の設定において、Case A では8個および13個、Case B では13個および13個である。このことは2つのケースを比較する条件は同じであると言える。

(2) リアル・オプションの価値は依然として大きい

表3に示す2つの条件設定において、後者の場合には2つの投資選択の差(166.1)、すなわち、リアル・オプションの差は、前者の条件設定の場合(254.2)と比較して、やや、小さくなっているが、それでもこの差異は意味がある。

(3) ペイオフの小さい状態の削除

上に示したように、条件が異なってもCase Aが優勢となる理由としては、投資を実施しても、最終的にペイオフを大きくできない場合の状態が、自然に消滅しているからであると考えられる。

(4) ペイオフの曲線がフラットになると差異は縮小する

分散が増加すると、ペイオフの傾向を示す曲線はフラットになる。すなわち、リアル・オプションの効果は減少する傾向に向かうことになる。この事実は、すでに解析結果としても示されており、市場の需要の変動、すなわち、分散が増加することにより、リアル・オプションの価値は減少する。このことは、クレジット・デリバティブの計算などに、直接影響するであろう。

表3. 需要のパラメータを変えた場合の比較分析

	$\sigma = 0.05, \theta_0 = 26$	$\sigma = 0.2\theta_0 = 35$
プロジェクト価値 (Case A)	226.4	244.1
プロジェクト価値 (Case B)	-27.8	78.3
リアル・オプションの額	254.2	166.1
設備容量実現範囲 (Case A)	21 から 28 まで	23 から 35 まで
設備容量実現範囲 (Case B)	20 から 32 まで	29 から 41 まで

5.2 投資回収のリスク分析

次に、投資の回収期間における評価を行なってみる。なお、前の節で述べた2つの方法を、同様に次のように区別する。

(Case A): リアル・オプションを用いた投資選択

(Case B): 通常のNPVによる投資評価

これらのケースごとの、回収期間における保証金 $H(k)$ と、回収後の利益 $R(k)$ を比較したものが図6, 7である。図6において、横軸は設備の完成時における状態(レベル) k であり、縦軸は、この場合の保証金 $H(k)$ を示している。図7において、横軸は設備の完成時における状態(レベル) k であり、縦軸は、この場合の回収後利益 $R(k)$ を示している。

ただし、これらの図では、いくつかのパラメータの組合せについてシミュレーションを実施している。具体的には、A(1), B(1)などは $\sigma = 0.05$ の場合に対するCase A, Case Bのシミュレーションを表し、A(2), B(2)などは、 $\sigma = 0.2$ の場合に対するCase A, Case Bのシミュレーションを表す。

すでに述べたように、設備の完成時における状態をカバーする範囲はCase Aにおいて広がっている。これは、投資の選択の範囲が広がることに対応している。

これらの結果から、どちらのケースにおいてもリアル・オプションを採用した Case A の回収リスク、すなわち保証金 $H(k)$ の金額が小さいことが分かる。同時に、回収後の利益 $R(k)$ は、Case A において相対的に大きくなっている。

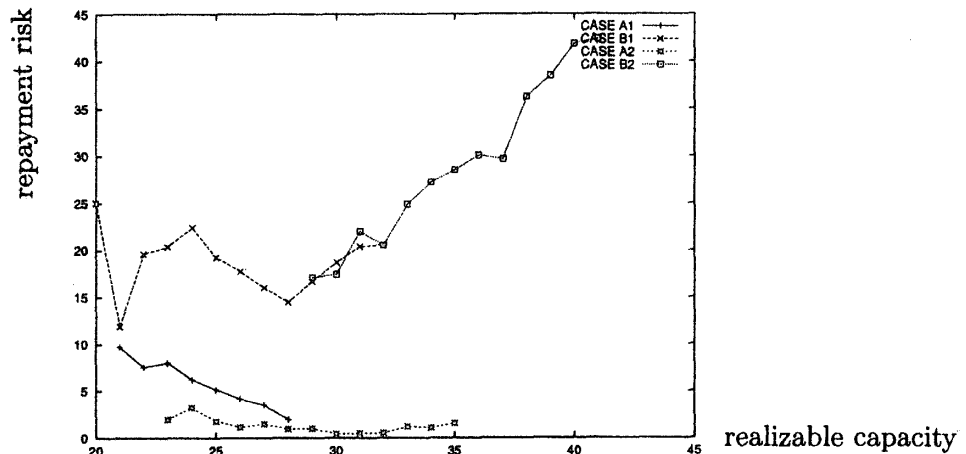


図 6. 設備の最終状態と保証金の関係 (Case A)

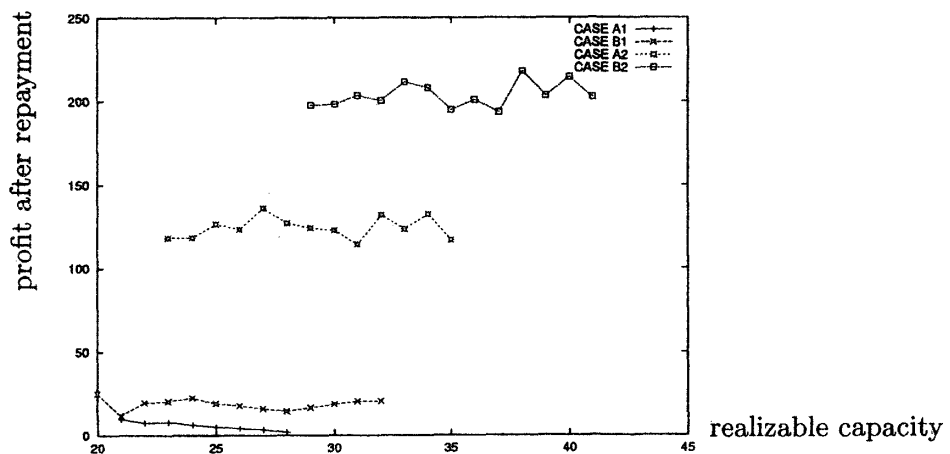


図 7. 設備の最終状態と回収後利益の関係 (Case B)

5.3 クレジット・デリバティブ推定への応用

これまでの議論は投資完了後の設備運用によりどの程度まで投資資金が回収できるかを検討したことになっている。これを投資の債務保証であるクレジット・デリバティブに応用することを考える。

一般に、設備への投資を進める場合の環境は、図 8 に示すような 3 者の存在を仮定したものになるであろう。これらは、次のように要約できる。

(1) 投資会社 (project sponsor)

投資銀行、あるいは、通常の市中銀行は、企業への貸し付け、すなわち投資の資金を提供するが、投資資金の回収の業務において発生する回収リスクを直接的に被らない。この回収に伴うリスクが発生した場合には、その債務をクレジット・デリバティブ購入会社に移転する。

(2) 建設会社 (project company)

投資資金を利用して設備を完成して、運用する。通常は、自身の資金をもたずに、資金調達により建設を開始する。

(3) クレジット・デリバティブ購入会社

クレジット・デリバティブ購入会社は企業の投資には直接係わらない第3者 (third party) として登場する。企業が実施する投資の後の資金の回収期間における債務、すなわち回収の不足が発生する場合には、この回収リスクを引き受ける会社である。銀行の資金貸し付けの場合と同様に、クレジット・デリバティブを設定することができる。資金の貸し付け額に応じたの金額や、貸し付けの条件、あるいはそのリスク発生などの認定が、投資会社との間で契約として実施される。

現在のクレジット・デリバティブ評価、すなわち、債務不履行が発生した場合の保証金がいくらになるかの議論は続けられているが、本論文で示した回収リスクの評価方法は、有効であろう。すなわち、プロジェクトが実施された場合に、その回収リスクを評価し、特定の場合、特に、回収の不足が発生する場合に、その期待値をとることにより、クレジット・デリバティブを見積もることができるであろう。



図8. クレジット・デリバティブの概要

6 むすび

本論文では、プロジェクト・ファイナンスの実際的なケース分析を実施するための分析手法を示すとともに、今後のクレジット・デリバティブ評価の手法に関する考察を行った。本論文の主要な方法論は、投資選択に投資の強化、継続、縮小、撤退の4つのオプションを設定することであり、これを動的計画法の枠組みで解析した。この場合、プロジェクトの価値が単一の指標で評価される単純なケースを考察した。更に、最近の投資環境を考慮して、投資回収時期における市場でのキャッシュ・フローも変動することを仮定し、適切な設備を建設すべき指針を示した。投資回収までの期間が長いことを考慮し資本市場の状況と同時に、市場やその他の環境が大きく変動することを取り入れた投資理論を示した。

今後の検討課題として、現実に存在する電力や通信事業について、本論文の手法を適用することがあり、開発を進める計画である。

なお、本論文は基本的に本部門博士課程修了・陳 曉榮 (現在中国在住) との共同研究であり、参考文献 [3] に基づいている。「経済学研究」の性格上、時永だけの単著の形式をとっていることを、ここに示す。

参考文献

- [1] R.L. McDonald and D.R. Siegel: "Investment and the valuation of firms when there is an option to shut down," *Internat. Econ. Rev.*, 26, pp.31-349, 1985.
- [2] R.L. McDonald and D.R. Siegel: "The value of waiting," *Quarterly Journal of Economics*, 101, pp.707-727, 1986.
- [3] R.S. Pindyck: "Irreversibility, uncertainty and investment", *Journal of Economic Literature*, Sept., pp.1110-1148, 1991.
- [4] R.S. Pindyck: "Irreversible investment, capacity choice, and the value of the firm," *American Economic Review*, 78, 5, pp.23-34, 1988.
- [5] A. Dixit: "Hysteresis, import penetration, and exchange rate pass-through," *Quarterly Journal of Economics*, 104, pp.205-228, 1989.
- [6] A. Dixit: "Entry and exit decisions under uncertainty," *Journal of Political Economy*, 97, pp.620-638, 1989.
- [7] A. Dixit and R.S. Pindyck: *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, 1991.
- [8] A. Huchzermeier and C.H. Loch: "Project management under risk: Using the real options approach to evaluate flexibility in R & D", *Management Science*, vol.47, no.1, pp.86-101, 2001.
- [9] 陳 曉榮, 時永 祥三: "動的計画法によるプロジェクトファイナンスの分析と応用" 日本オペレーションズリサーチ学会 2001 年春季全国大会予稿集, pp.106-107, 2001. X.Chen and S.Tokinaga: "Evaluating real options in project finance under uncertainties by using the dynamic programming", submitted to the *Journal of Operations Research Society*, Japan
- [10] 浦谷 規: "プロジェクト・ファイナンスの展開と債務保証モデル", *オペレーションズリサーチ*, 1998 年 9 月号, pp.491-494
- [11] J.D. Finnerty: "Credit derivatives, infrastructure finance and emerging market risk", *The financier*, Feb. 1997, pp.64-78, 1996
- [12] P.K. Nevitt: *Project Financing*, Euromoney Publication, 1989.
- [13] G.D. Vinter: *Project Finance*, London Sweet and Maxwell, 1994.

〔九州大学大学院経済学研究院 教授〕