アガシ対サンプラス

岩本，誠一

https://doi.org/10.15017/1096

出版情報：經濟學研究. 69 (5/6), pp.25-50, 2003-03-31. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

アガシ 対 サンプラス

岩 本 誠 一

概 要

本論文では、テニスを2項過程として考える。ゲーム、セット および マッチを制する確率をそれぞれ直接法および再帰的方法で求める。両プレーヤーの戦力が均衡しているとき、1ゲームは平均して $6\frac{3}{4}$ ポイントで決着することになる。

1 はじめに

2002年全米オープンテニスの男子決勝はアガシ対サンプラスになった。

若手台頭著しい昨今、ともに30歳代。サーブ・実力のサンプラス (Pete Sampras)、リターン・人気のアガシ (Andre Agassi)。究極のライバル対決である。2002年9月8日、ニューヨークはテロ1周年を迎えようとして、久しぶりの黄金カードで盛り上がっていた。4大オープンでの両雄の決勝対決は1995年の全豪以来である。

テニスは、確率論およびその応用として歴史的にもよく研究されてきたスポーツである [1, 4, 6]。これはギャンブル（賭け）に次いでいる [5, 11]。本論文では、テニスにおける「1ゲーム」を「ポイント」の連取で考える。これは〈2ポイント以上差の4ポイント先取〉ルールである。野球の日本シリーズ、ワールドシリーズは〈4試合先勝〉ルールである。「ゲーム」では〈2ポイント以上差の〉条件が日本シリーズ、ワールドシリーズと決定的に異なる。シリーズは早ければ4戦で終わり、遅くとも7戦で済む。ゲームはデュースを繰り返す可能性がある。無限に !?

本論文では、一方のプレーヤーが1ゲームを取るまでの確率、期待（平均）ポイント数などを (1) 直接（確率を計算する）方法 (direct method) と (2) 再帰的方法 (recursive method) で求める [14]。直接法は個々の事象の確率を求めることに基づく初等的な方法である。再帰的方法は最適化を伴わない動的計画法 (dynamic programming) である [2, 7, 13]。これはいわゆる埋め込み (imbedding) による。不変埋め込み (invariant imbedding) とも言われている [3, 10]。以下では、二人のプレーヤーとして便宜上アガシとサンプラスを想定している。

いま、プレヤーAとプレヤーBが**毎回独立**に試合をし、**各試合で**プレヤーAが勝つ確率を p とし、プレヤーBが勝つ確率を $q\ (=1-p)$ とする：

$$P(A=\mathrm{Win})=p, \qquad P(B=\mathrm{Win})=q \qquad (0\le p\le 1,\ p+q=1).$$

両者で $(m+n)$ 試合するとき、**プレヤーAが** m 勝 n 敗になる確率を $p(m,n)$ とすると、

$$p(m,n) \;=\; {}_{m+n}C_m p^m q^n$$

である。ただし、${}_{m+n}C_m$ は $(m+n)$ 個から m 個を選ぶ組み合せの数である：

$$ {}_{m+n}C_m = \frac{(m+n)!}{m!n!}. $$

以下では、この組み合せの数 ${}_{m+n}C_m$ を $c(m,n)$ でも表す：

$$ c(m,n) := {}_{m+n}C_m. $$

本論文では $c(m,n)$ は、プレヤーAとBが $(m+n)$ 試合したとき、**プレヤーAが** m 勝 n 敗になる場合の数を表している。これはプレヤーAが n 勝 m 敗になる場合の数でもある：

$$ c(m,n) = c(n,m). $$

組み合せの数 $c(m,n)$ を用いると、勝敗確率 $p(m,n)$ は次のように表される：

$$ p(m,n) = c(m,n)p^m q^n. $$

補題 1.1 (i)　どちらのプレヤーにとっても i 勝 j 敗から m 勝 n 敗 $(0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n)$ になるまでの経路の総数は $c(m-i, n-j)$ である。
(ii)　プレヤーAが i 勝 j 敗したとき、彼が m 勝 n 敗 $(0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n)$ になる確率は $p(m-i, n-j)$ である。

2　マッチ

テニスで1試合（マッチ）が決着するまでを考えよう。いま仮にアガシとサンプラスが戦って、アガシがセットを取る確率を常に w $(0 < w < 1)$ とする。したがって、サンプラスがセットを取る確率は $\overline{w}$ $(= 1 - w)$ である。両者は毎回独立にプレーを行うとする。この試合に対し以下の質問に答えよう。

1. アガシがマッチを制する（に勝つ）確率を求めよ。
2. サンプラスがマッチを制する確率を求めよ。
3. 試合が決着するまでの平均（期待）セット数を求めよ。
4. 試合が決着するまでの経路を表す図を描け。

いま、アガシとサンプラスが $(m+n)$ セットをプレーしたとする。ただし、自然数 m, n の和は $m+n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ を動く。このとき、**アガシ (A) が** m セット取り n セット失う確率を $w(m,n)$ とすると、

$$ w(m,n) \ = \ c(m,n) w^m \overline{w}^n $$

である。

本論文では、組み合せの数 $c(m,n) = {}_{m+n}C_m$ は、アガシ (A) とサンプラス (S) が $(m+n)$ セット（ゲーム、ポイント）プレーしたとき、**アガシ (A) が** m セット（ゲーム、ポイント）取り n セット（ゲーム、ポイント）失う場合の数を表している。

アガシが制する確率	セット数	サンプラスが制する確率
$v(3,0) = w(2,0) \cdot w = c(2,0)w^2\overline{w}^0 \cdot w$	3 対 0	$v(0,3) = w(0,2) \cdot \overline{w} = c(0,2)w^0\overline{w}^2 \cdot \overline{w}$
$v(3,1) = w(2,1) \cdot w = c(2,1)w^2\overline{w}^1 \cdot w$	3 対 1	$v(1,3) = w(1,2) \cdot \overline{w} = c(1,2)w^1\overline{w}^2 \cdot \overline{w}$
$v(3,2) = w(2,2) \cdot w = c(2,2)w^2\overline{w}^2 \cdot w$	3 対 2	$v(2,3) = w(2,2) \cdot \overline{w} = c(2,2)w^2\overline{w}^2 \cdot \overline{w}$
$v_A = [w^2\overline{w}^0 + 3w^2\overline{w}^1 + 6w^2\overline{w}^2] \cdot w$		$v_S = [w^0\overline{w}^2 + 3w^1\overline{w}^2 + 6w^2\overline{w}^2] \cdot \overline{w}$

表 1: マッチを制する確率

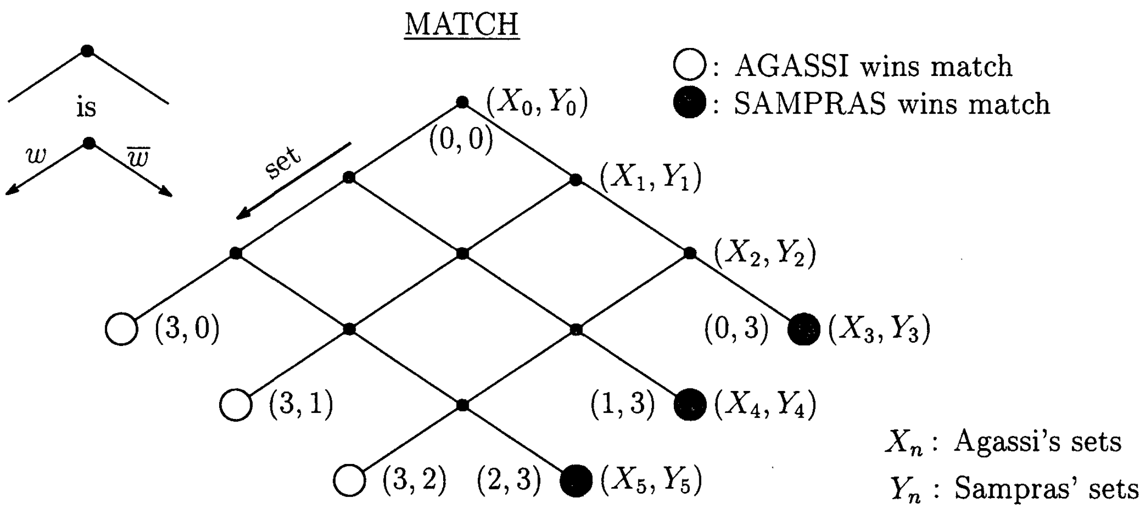

図 1: マッチ

ここではマッチを制する確率を組み合せの数 $c(m,n)$ および セット確率 $w(m,n)$ を用いて表そう。$c(m,n)$, $w(m,n)$ を用いると、3セット先取する確率 $v(3,0), v(3,1), v(3,2), v(2,3), v(1,3), v(0,3)$ および マッチを制する確率 v_A, v_S は各々表1で表される：

このマッチが決まるまでの平均（期待）セット数 e_M は

$$\begin{aligned} e_M &= 3(w^3+\overline{w}^3)+4\cdot 3(w^3\overline{w}+w\overline{w}^3)+5\cdot 6(w^3\overline{w}^2+w^2\overline{w}^3) \\ &= 3+\frac{3}{2}u+\frac{3}{2}u^2 \end{aligned}$$

になる。ただし、

$$u = 2w\overline{w}.$$

特に、 $w = (u=)\dfrac{1}{2}$ のとき、このマッチが決着すまでの平均セット数は

$$e_M = 3+\frac{3}{2}u+\frac{3}{2}u^2 = 4\frac{1}{8} = 4.125 \text{ セット}$$

である。すなわち、両者の戦力が均衡しているとき、5セットマッチの試合においては平均して $4\frac{1}{8}$ セットで決まることになる。

3　ゲーム

テニスで1【ゲーム】が決着するまでを考えよう。いま仮にアガシとサンプラスが戦って、アガシがポイントを取る確率を常に p $(0<p<1)$ とする。したがって、サンプラスがポイントを取る確率は $\overline{p}$ $(=1-p)$ である。両者は毎回独立にプレーを行うとする。このゲームにおいて関連する確率、期待値を求めよう。

3.1　ゲームを取る確率

アガシがゲームを取る確率	ゲーム数	サンプラスがゲームを取る確率
$g(4,0)=p(3,0)\cdot p=c(3,0)p^3\overline{p}^0\cdot p$	4 対 0	$g(0,4)=p(0,3)\cdot\overline{p}=c(0,3)p^0\overline{p}^3\cdot\overline{p}$
$g(4,1)=p(3,1)\cdot p=c(3,1)p^3\overline{p}^1\cdot p$	4 対 1	$g(1,4)=p(1,3)\cdot\overline{p}=c(1,3)p^1\overline{p}^3\cdot\overline{p}$
$g(4,2)=p(3,2)\cdot p=c(3,2)p^3\overline{p}^2\cdot p$	4 対 2	$g(2,4)=p(2,3)\cdot\overline{p}=c(2,3)p^2\overline{p}^3\cdot\overline{p}$
$g'_A=[p^3\overline{p}^0+4p^3\overline{p}^1+10p^3\overline{p}^2]\cdot p$		$g'_S=[p^0\overline{p}^3+4p^1\overline{p}^3+10p^2\overline{p}^3]\cdot\overline{p}$

表2: デュースにならないでゲームを取る確率

まず、デュースにならないでアガシ、サンプラスがゲームを取る確率をそれぞれ g'_A, g'_S とすると、

$$\begin{aligned} g'_A &= p^4(1+4\overline{p}+10\overline{p}^2) \\ g'_S &= \overline{p}^4(1+4p+10p^2) \end{aligned}$$

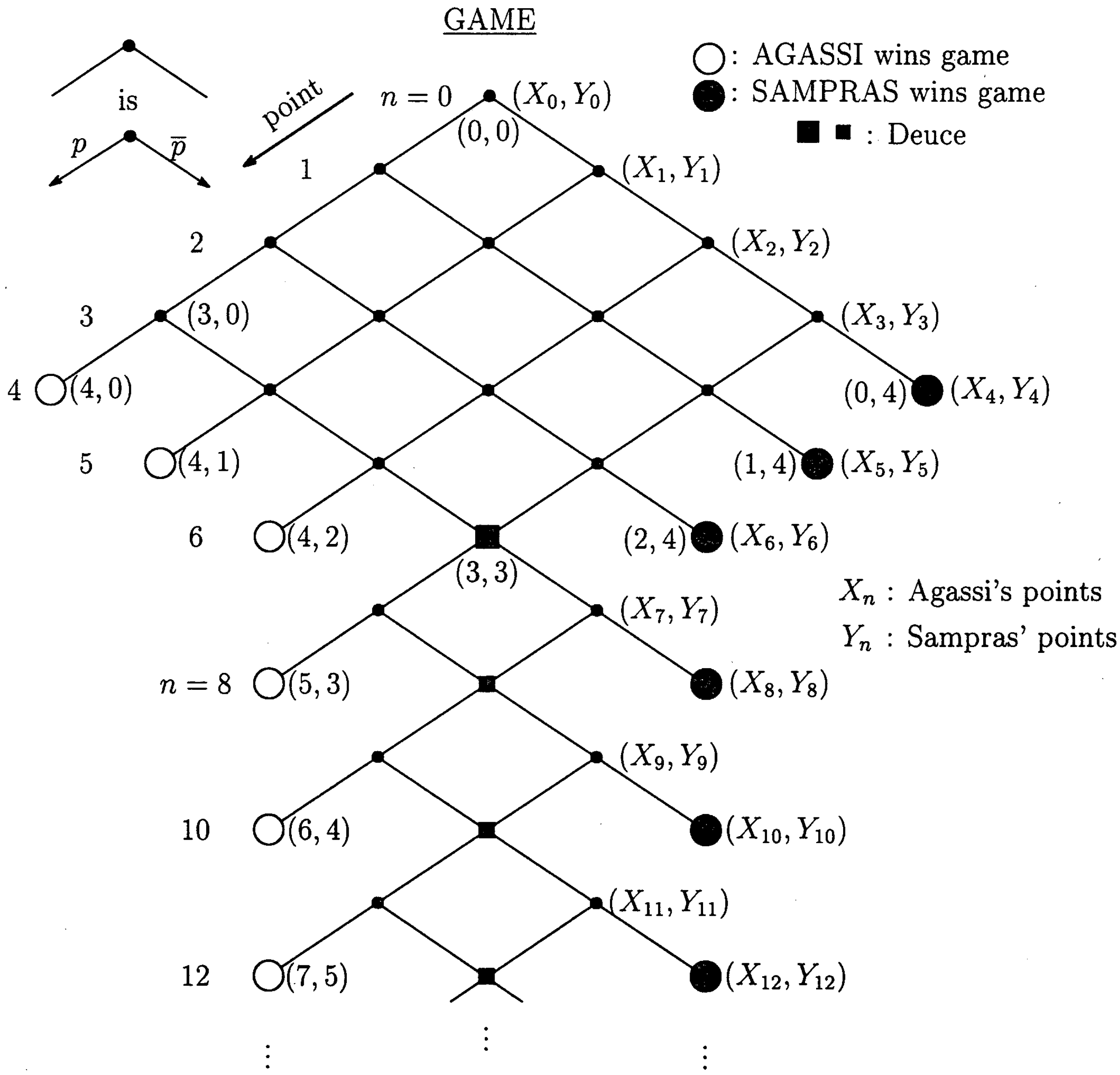
GAME
○: AGASSI wins game
●: SAMPRAS wins game
■ ■ : Deuce
is
p
$\bar{p}$
point
$n = 0$
(X_0, Y_0)
(0,0)
1
(X_1, Y_1)
2
(X_2, Y_2)
3
(3,0)
(X_3, Y_3)
4
(4,0)
(0,4)
(X_4, Y_4)
5
(4,1)
(1,4)
(X_5, Y_5)
6
(4,2)
(2,4)
(X_6, Y_6)
(3,3)
(X_7, Y_7)
X_n : Agassi's points
Y_n : Sampras' points
$n = 8$
(5,3)
(X_8, Y_8)
(X_9, Y_9)
10
(6,4)
(X_{10}, Y_{10})
(X_{11}, Y_{11})
12
(7,5)
(X_{12}, Y_{12})

図 2: ゲーム

である（表 2)。デュースにならないでゲームが決着する確率 g'_G は

$$\begin{aligned} g'_G &= g'_A + g'_S \\ &= (p^4 + \overline{p}^4) + 4(p^4\overline{p} + p\overline{p}^4) + 10(p^4\overline{p}^2 + p^2\overline{p}^4) \end{aligned}$$

になる。

さて、デュースになる場合を考えよう。デュースになる確率 g_D は 両者ともに3ポイントになる確率だから、

$$g_D = p(3,3) = c(3,3)p^3\overline{p}^3 = 20p^3\overline{p}^3$$

である。このとき、

$$g'_G + g_D = 1$$

になる。

デュースにならないでアガシがゲームを取るまでの平均（期待）ポイント数 e'_A は

$$\begin{aligned} e'_A &= 4\cdot p^4 + 5\cdot 4p^4\overline{p} + 6\cdot 10p^4\overline{p}^2 \\ &= p^4(4 + 20\overline{p} + 60\overline{p}^2) \end{aligned}$$

である。また、デュースにならないでサンプラスがゲームを取るまでの平均（期待）ポイント数 e'_S は

$$e'_S = \overline{p}^4(4 + 20p + 60p^2).$$

したがって、デュースにならないでゲームが決着するまでの平均（期待）ポイント数 e'_G は

$$\begin{aligned} e'_G &= e'_A + e'_S \\ &= 4(p^4 + \overline{p}^4) + 20(p^4\overline{p} + p\overline{p}^4) + 60(p^4\overline{p}^2 + p^2\overline{p}^4) \end{aligned}$$

になる。

補題 3.1 $|r| < 1$ のとき、次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} r^n &= \frac{1}{1-r} \\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)r^n &= \frac{1}{(1-r)^2} \\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)r^n &= \frac{2}{(1-r)^3}. \end{aligned} \qquad (1)$$

3.2 条件つき

次に、デュースになるという条件の下で考える。以下では、2 ポイントのうち 1 ポイントを取る（1 ポイントを失う）確率を

$$r := p(1,1) = 2p\overline{p}$$

とする。また、2 ポイント連取する確率は

$$p^2 = p(2,0)$$

である。

この条件の下でアガシがゲームを取る確率 $g_{A|D}$ は

$$\begin{aligned} g_{A|D} &= p^2 + rp^2 + r^2p^2 + \cdots + r^np^2 + \cdots \\ &= p^2\{1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots\} \\ &= \frac{p^2}{1-r} \end{aligned}$$

である。同様に、デュースになるという条件の下でサンプラスがゲームを取る確率 $g_{S|D}$ は

$$g_{S|D} = \frac{\overline{p}^2}{1-r}.$$

したがって、

$$p^2 + \overline{p}^2 = 1 - r$$

より、デュースになるという条件の下でゲームが決着する確率 $g_{G|D}$ は

$$g_{G|D} = g_{A|D} + g_{S|D} = 1$$

である。

さらに、デュースになるという条件下でアガシがゲームを取るまでの平均（期待）ポイント数 $e_{A|D}$ は

$$\begin{aligned} e_{A|D} &= 8p^2 + 10rp^2 + 12r^2p^2 + \cdots + (8+2n)r^np^2 + \cdots \\ &= p^2\{8 + 10r + 12r^2 + \cdots + (8+2n)r^n + \cdots\} \end{aligned}$$

である。最後の { } 内は (1) より

$$\sum_{n=0}^{\infty}(8+2n)r^n = \frac{8-6r}{(1-r)^2}.$$

したがって、デュースの下でアガシがゲームを取るまでの平均ポイント数は

$$e_{A|D} = p^2\frac{8-6r}{(1-r)^2}$$

になる。同様にして、デュースの下でサンプラスがゲームを取るまでの平均ポイント数 $e_{S|D}$ は

$$e_{S|D} = \overline{p}^2 \frac{8-6r}{(1-r)^2}.$$

デュースになったとき、ゲームが決着するまでの平均ポイント数 $e_{G|D}$ は

$$e_{G|D} = e_{A|D} + e_{S|D} = \frac{8-6r}{1-r}$$

になる。特に、$p = 1/2$ $(r = 1/2)$ のとき、すなわち 両者互角 のとき、デュースになったとい条件の下で、ゲームが決着するまでの平均ポイント数は

$$e_{G|D} = 10 \text{ ポイント}$$

になる。さらに、互角のときデュース**から**ゲームが決着するまでの平均ポイント数は、デュースになるまでのポイント数 $3+3=6$ を引いて

$$e_{G|D} - 6 = 10 - 6 = 4 \text{ ポイント}$$

になる。

3.3　条件なし

最後に、条件なしの場合を考えよう。デュースになってアガシがゲームを取る確率 g_{DA} は

$$g_{DA} = g_D \cdot g_{A|D} = 20p^3\overline{p}^3 \frac{p^2}{1-r}$$

である。同様に、デュースになってサンプラスがゲームを取る確率 g_{DS} は

$$g_{DS} = g_D \cdot g_{S|D} = 20p^3\overline{p}^3 \frac{\overline{p}^2}{1-r}$$

になる。

$$p^2 + \overline{p}^2 = 1 - r$$

より、

$$g_{DA} + g_{DS} = g_D$$

である。したがって、アガシがゲームを取る確率 g_A および サンプラスがゲームを取る確率 g_S はそれぞれ

$$g_A = g'_A + g_{DA}, \quad g_S = g'_S + g_{DS}$$

になる。両者がゲームを取る確率の和は 1 である：

$$g_A + g_S = 1.$$

すなわち、デュースとアドバンテージを無限に繰り返す確率は 0 である。この「ゲーム」は確実に有限回で決着が決まる。

実際、アガシがゲームを取る確率は

$$g_A = p^4(1+4\overline{p}+10\overline{p}^2)+20p^3\overline{p}^3\frac{p^2}{1-r}$$

になる。同じく、サンプラスがゲームを取る確率は

$$g_S = \overline{p}^4(1+4p+10p^2)+20p^3\overline{p}^3\frac{\overline{p}^2}{1-r}$$

である。

次に、ゲームが決着するまでのポイント数の平均値（期待値）を求めよう。アガシがゲームを取るまでの平均（期待）ポイント数 e_A は

$$\begin{aligned} e_A &= e'_A + g_D \cdot e_{A|D} \\ &= p^4(4+20\overline{p}+60\overline{p}^2)+20p^5\overline{p}^3\frac{8-6r}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

になる。同様にして、サンプラスがゲームを取るまでの平均ポイント数 e_S は

$$\begin{aligned} e_S &= e'_S + g_D \cdot e_{S|D} \\ &= \overline{p}^4(4+20p+60p^2)+20p^3\overline{p}^5\frac{8-6r}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

で与えられる。したがって、ゲームが決着するまでの平均（期待）ポイント数 e_G は

$$\begin{aligned} e_G &= e_A + e_S \\ &= e'_G + g_D \cdot e_{A|G} \\ &= 4(p^4+\overline{p}^4)+20(p^4\overline{p}+p\overline{p}^4)+60(p^4\overline{p}^2+p^2\overline{p}^4) \\ &\qquad + 20(p^5\overline{p}^3+p^3\overline{p}^5)\frac{8-6r}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

で与えられる。 $r=2p\overline{p}$ で表すと、

$$\begin{aligned} e_G &= 4+2r+2r^2-15r^3+5r^3\frac{4-3r}{1-r} \\ &= -1-3r-3r^2+\frac{5}{1-r} \end{aligned}$$

になる。特に、$p=1/2$ $(r=1/2)$ のとき、すなわち 両者互角 のとき、ゲームが決着するまでの平均ポイント数は

$$e_G = 6\frac{3}{4} = 6.75 \text{ ポイント} \tag{2}$$

になる。

まとめると、本節では以下の設問に解答したことになる。

1. デュースになる確率を求めよ。
2. デュースにならないで、（しかも）アガシがゲームを取る確率を求めよ。
3. デュースにならないで、サンプラスがゲームを取る確率を求めよ。
4. アガシがゲームを取る確率を求めよ。
5. サンプラスがゲームを取る確率を求めよ。
6. ゲームが無限に続く確率を求めよ。
7. アガシがゲームを取るまでの平均（期待）ポイント数を求めよ。
8. サンプラスがゲームを取るまでの平均（期待）ポイント数を求めよ。
9. ゲームが決着するまでの平均（期待）ポイント数を求めよ。
10. デュースになるとき（という条件の下で）、アガシがゲームを取る確率を求めよ。
11. デュースになるとき、サンプラスがゲームを取る確率を求めよ。
12. デュースになるとき、ゲームが決着す確率を求めよ。
13. デュースになるとき、アガシがゲームを取るまでの平均（期待）ポイント数を求めよ。
14. デュースになるとき、サンプラスがゲームを取るまでの平均（期待）ポイント数を求めよ。
15. デュースになるとき、ゲームが決着するまでの平均（期待）ポイント数を求めよ。
16. ゲームが決着するまでの経路を表す図を描け。

4　マルコフモデル

この節では、前節のアガシとサンプラスによる1ゲームを停止（させられた）二項過程 (stopped Binomial process) から構成されるマルコフ連鎖として表し、条件付き確率、条件つき期待値、確率、期待値などの量を状態変数で表す。

4.1　マルコフ連鎖

さて、両者が全体で n ポイントを戦ったとき、アガシが取ったポイント数を X_n とし、サンプラスのポイント数を Y_n としよう。このとき、常に和は n である：

$$X_n + Y_n = n \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

両者のポイント数の対から成る列 $\{(X_n, Y_n)\}_0^\infty$ は状態空間 $\{S_n\}_0^\infty$ 上のマルコフ連鎖である。ただし、

$$\begin{aligned}
S_0 &= \{(0,0)\} \\
S_1 &= \{(1,0),\ (0,1)\} \\
S_2 &= \{(2,0),\ (1,1),\ (0,2)\} \\
S_3 &= \{(3,0),\ (2,1),\ (1,2),\ (0,3)\} \\
S_4 &= \{(4,0),\ (3,1),\ (2,2),\ (1,3),\ (0,4)\} \\
S_5 &= \{(4,1),\ (3,2),\ (2,3),\ (1,4)\} \\
S_6 &= \{(4,2),\ (3,3),\ (2,4)\} \\
S_7 &= \{(4,3),\ (3,4)\}
\end{aligned} \tag{4}$$

$$S_8 = \{(5,3),\ (4,4),\ (3,5)\}$$
$$S_9 = \{(5,4),\ (4,5)\}$$
$$S_{10} = \{(6,4),\ (5,5),\ (4,6)\}$$
$$S_{11} = \{(6,5),\ (5,6)\}$$
$$S_{12} = \{(7,5),\ (6,6),\ (5,7)\}$$
$$S_{13} = \{(7,6),\ (6,7)\}$$
$$\vdots$$
$$S_{2n+1} = \{(n+1,n),\ (n,n+1)\}$$
$$S_{2n+2} = \{(n+2,n),\ (n+1,n+1),\ (n,n+2)\}$$
$$\vdots$$

この推移確率法則 $p = \{p_n(k,l|i,j)\}$ は次になる。
（1）(i,j) でゲームが決着しないとき、

$$p_n(k,l|i,j) = \begin{cases} p & \text{if } k=i+1,\ l=j \\ q & \text{if } k=i,\ l=j+1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad n=0,1,\ldots.$$

（2）(i,j) でゲームが決着するとき、

$$p_n(k,l|i,j) = \begin{cases} 1 & \text{if } k=i,\ l=j \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad n=0,1,\ldots.$$

したがって、常和性 (3) を考慮すると、アガシだけのポイント数列 $\{X_n\}_0^\infty$ は状態空間 $\{S'_n\}_0^\infty$ 上のマルコフ連鎖である。ただし、

$$S'_0 = \{0\}$$
$$S'_1 = \{1,\ 0\}$$
$$S'_2 = \{2,\ 1,\ 0\}$$
$$S'_3 = \{3,\ 2,\ 1,\ 0\}$$
$$S'_4 = \{4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0\}$$
$$S'_5 = \{4,\ 3,\ 2,\ 1\}$$
$$S'_6 = \{4,\ 3,\ 2\}$$
$$S'_7 = \{4,\ 3\}$$
$$S'_8 = \{5,\ 4,\ 3\}$$
$$S'_9 = \{5,\ 4\}$$
$$S'_{10} = \{6,\ 5,\ 4\}$$
$$S'_{11} = \{6,\ 5\}$$
$$S'_{12} = \{7,\ 6,\ 5\}$$

$$S'_{13} = \{7,\ 6\}$$
$$\vdots$$
$$S'_{2n+1} = \{n+1,\ n\}$$
$$S'_{2n+2} = \{n+2,\ n+1,\ n\}$$
$$\vdots$$

このときの推移確率 $p = \{p_n(j|i)\}$ は次になる。
（1）i でゲームが決着しないとき、

$$p_n(j|i) = \begin{cases} p & \text{if } j = i+1 \\ q & \text{if } j = i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

（2）i でゲームが決着するとき、

$$p_n(j|i) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad n = 0, 1, \ldots.$$

同様に、サンプラスのポイント数列 $\{Y_n\}_0^\infty$ も $\{S'_n\}_0^\infty$ 上のマルコフ連鎖になる。三つの連鎖から定まる直積空間上の確率測度をそれぞれ $P(\cdot)$, $P^a(\cdot)$, $P^s(\cdot)$ とすると、次の同値性が成り立つ：

補題 4.1 $n = i + j$ のとき、

$$P((X_n, Y_n) = (i, j)) = P^a(X_n = i) = P^s(Y_n = j).$$

さて、全状態空間を導入して、いくつかに分割しよう。まず、和集合

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$$

を**全状態空間**という。

$$A_g^n := \{(4,0),\ (4,1),\ (4,2)\}$$
$$A_g^d := \{(5,3),\ (6,4),\ (7,5),\ \ldots,\ (n+2, n),\ \ldots\}$$
$$A_g := A_g^n \cup A_g^d$$
$$S_p^n := \{(0,4),\ (1,4),\ (2,4)\}$$
$$S_p^d := \{(3,5),\ (4,6),\ (5,7),\ \ldots,\ (n, n+2),\ \ldots\}$$
$$S_p := S_p^n \cup S_p^d$$
$$T^n := A_g^n \cup S_p^n,\quad T^d := A_g^d \cup S_p^d$$
$$T := A_g \cup S_p$$
$$C := \mathcal{S} - T.$$

A_g^n はデュースにならないでアガシがゲームが取る状態の集合を、A_g^d はデュースになってアガシがゲームが取る状態の集合を、A_g はアガシがゲームが取る状態の集合をそれぞれ表している。 S_p^n, S_p^d, S_p はサンプラスについてである。 T^n はデュースにならないでゲームが決着した (terminate) 状態の集合である。 T^d はデュースになってゲームが決着した状態集合である。 T はゲームが決着した状態の集合である。T をマルコフ連鎖の**吸収壁**という。この吸収壁はアガシ側の吸収壁 A_g とサンプラス側の吸収壁 S_p から構成されている。連鎖の状態がいったん吸収壁に入れば、永久にその状態にとどまる。入った吸収壁の側のプレーヤーがゲームを取って、ゲームは決着する。 C はまだゲームが続く (continue) 状態の集合である。つまり、状態空間は次のように細分割された：

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= C \cup T \\ T &= T^n \cup T^d \\ T &= A_g \cup S_p \\ A_g &= A_g^n \cup A_g^d, \quad S_p = S_p^n \cup S_p^d. \end{aligned}$$

さて、このゲームが始まって終わるまでの経過の全体を考えよう。ここでは、始まりから決着までを**経路（パス** path）という。たとえば、アガシが2ポイント先取して、その後サンプラスが4ポイント連取したとする。この経路 ω_1 は

$$\omega_1 = (0,0),(1,0),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4) \tag{5}$$

で表される。この経路の長さは 6 である。またアガシから始めて両者が交互にポイントを取り合ったとすると、その経路 ω_2 は

$$\begin{aligned} \omega_2 = \ &(0,0),(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,2),(3,3),(4,3),(4,4),(5,4), \\ &\ldots,(n+1,n),(n+1,n+1),(n+2,n+1),\ldots \end{aligned} \tag{6}$$

になる。この経路の長さは無限 ∞ である。

一般に、任意の**実現可能な**経路 ω は、有限の長さの経路

$$\begin{aligned} \omega_1 = \ &(0,0),(i_1,j_1),(i_2,j_2),\ldots,(i_{l-1},j_{l-1}),(i_l,j_l) \\ &; \ (i_k,j_k) \in S_k \cap C \quad 1 \le k \le l-1, \quad (i_l,j_l) \in S_l \cap T \end{aligned} \tag{7}$$

か、または無限の長さの経路

$$\begin{aligned} \omega_2 = \ &(0,0),(i_1,j_1),(i_2,j_2),\ldots,(i_{l-1},j_{l-1}),(i_l,j_l),\ldots \\ &; \ (i_k,j_k) \in S_k \cap C \quad 1 \le k < \infty \end{aligned} \tag{8}$$

のいずれかで表される。ただし、式 (7),(8) における、前の状態から次の状態への推移には、後の状態のどちらかが 1 ポイント増える：

$$(i_{k+1}, j_{k+1}) = (i_k + 1, j_k) \ \text{または} \ (i_k, j_k + 1).$$

ゲーム開始から実現可能な経路の全体を Ω とする：

$$\Omega := \{\omega \,|\, \omega \text{は実現可能な経路}\}$$

実現可能な**経路空間** Ω は 状態の**直積空間**

$$S_0 \times S_1 \times \cdots \times S_n \times \cdots$$

に埋め込まれる (embedded)。すなわち、前者は後者のある部分集合と自然な型で同一視される。以下では、冗長性を省いて、直積空間ではなく、実現可能な経路空間 Ω を対象に考える。

さて、任意の実現可能な経路 $\omega \in \Omega$ に対して、$\tau(\omega)$ をゲームが決着する集合 $T = A_g \cup S_p$ に到着する最少の全ポイント数（両者のポイント数の和）とする：

$$\tau(\omega) = \inf\{\, n \geq 0 \,:\, (X_n, Y_n) \in T \,\}.$$

ただし、T に入る n が存在しないとき、$\tau(\omega) = \infty$ とする。したがって、(7),(8) の ω_1, ω_2 に対しては

$$\tau(\omega) = \begin{cases} l & \text{if } \ \omega = \omega_1 \\ \infty & \text{if } \ \omega = \omega_2 \end{cases}$$

になる。

いま仮に、アガシが2ポイント先取して、その後サンプラスが4ポイント連取したとしよう。すなわち、式 (5) の経路 ω_1 が起こったとする。このとき、ポイント対は

$$(X_0(\omega_1), Y_0(\omega_1)) = (0,0), \quad (X_1(\omega_1), Y_1(\omega_1)) = (1,0), \quad \ldots, \quad (X_6(\omega_1), Y_6(\omega_1)) = (2,4)$$

であり、全ポイント数は

$$\tau(\omega_1) = 6$$

である。したがって、

$$(X_{\tau(\omega_1)}(\omega_1), Y_{\tau(\omega_1)}(\omega_1)) = (X_6(\omega_1), Y_6(\omega_1)) = (2,4) \in S_p$$

になる。このようなとき以後、左辺の $\tau(\omega_1)$ の ω_1 を1つ省いて簡単に

$$(X_\tau(\omega_1), Y_\tau(\omega_1))$$

で表す。また、アガシから始めて両者が交互にポイントを取り合ったとしよう。すなわち、式 (6) の経路 ω_2 が起こったとする。このとき、ポイント対は

$$(X_0(\omega_2), Y_0(\omega_2)) = (0,0), \quad (X_1(\omega_2), Y_1(\omega_2)) = (1,0), \quad \ldots, \quad (X_6(\omega_2), Y_6(\omega_2)) = (3,3),$$
$$\ldots, \quad (X_{2n+1}(\omega_2), Y_{2n+1}(\omega_2)) = (n+1, n), \quad (X_{2n+2}(\omega_2), Y_{2n+2}(\omega_2)) = (n+1, n+1), \ldots$$

であり、全ポイント数は

$$\tau(\omega_2) = \infty$$

である。この経路の長さは無限 ∞ である。このとき、

$$(X_\tau(\omega_2), Y_\tau(\omega_2)) = (\infty, \infty)$$

になる。

以上によって、マルコフ連鎖 $\{(X_n, Y_n)\}_0^\infty$ 上に確率変数

$$\tau = \tau(\omega), \quad (X_\tau, Y_\tau) = (X_\tau(\omega), Y_\tau(\omega))$$

が定義された。

4.2 確率と期待値

一般に、$(X_\tau(\omega), Y_\tau(\omega))$ はゲームが決まったときの経路 ω に対するアガシのポイント数とサンプラスのポイント数の対を表している。このとき ω を省略して、確率変数として (X_τ, Y_τ) で表す。常和性 (3) より、

$$X_\tau + Y_\tau = \tau$$

である。この対は T の値をとる：

$$(X_\tau, Y_\tau) : \Omega \to T.$$

いま、ゲームの決着状態集合 T 上に**賞金関数** $e : T \to R^1$ が任意に与えられたとしよう。このとき、確率変数

$$e(X_\tau, Y_\tau) : \Omega \to R^1$$

はゲームの決着による賞金を表している。$e(X_\tau, Y_\tau)$ を **ゲームの賞金** という。この期待値

$$E_{(0,0)}[e(X_\tau, Y_\tau)]$$

を**期待賞金**という。これに対応する確率測度を

$$P_{(0,0)}(\cdot)$$

で表す。

一般に、

$$E_{(i,j)}[e(X_\tau, Y_\tau)]$$

はマルコフ連鎖 $\{(X_n, Y_n)\}$ 上での条件付き期待値である：

$$E_{(i,j)}[e(X_\tau, Y_\tau)] = E[e(X_\tau, Y_\tau) \,|\, (X_{i+j}, Y_{i+j}) = (i,j)].$$

これに対応する条件付き確率測度は

$$P_{(i,j)}(\cdot)$$

で表す。

まず、条件つきの場合を考えよう。デュースになる確率 g_D は

$$g_D = P_{(0,0)}((X_6, Y_6) = (3,3))$$

で表される。

デュースにならないでアガシがゲームを取る確率 g'_A は、

$$A^n_g = \{(4,0),\ (4,1),\ (4,2)\}$$

を用いて

$$g'_A = P_{(0,0)}((X_\tau, Y_\tau) \in A^n_g)$$

で表される。同じく、デュースにならないでサンプラスがゲームを取る確率 g'_S は、

$$S_p^n = \{(0,4),\ (1,4),\ (2,4)\}$$

だから

$$g'_S = P_{(0,0)}((X_\tau, Y_\tau) \in S_p^n)$$

で表される。

デュースになるという条件の下では、アガシがゲームを取る確率 $g_{A|D}$、サンプラスがゲームを取る確率 $g_{S|D}$、 および ゲームが決着する確率 $g_{G|D}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} g_{A|D} &= P_{(3,3)}((X_\tau, Y_\tau) \in A_g) \\ g_{S|D} &= P_{(3,3)}((X_\tau, Y_\tau) \in S_p) \\ g_{G|D} &= P_{(3,3)}((X_\tau, Y_\tau) \in T) \end{aligned}$$

で表される。

デュースになる条件下でアガシがゲームを取るまでの平均（期待）ポイント数 $e_{A|D}$ は

$$e_{A|D} = E_{(3,3)}[\tau \cdot 1_{\{(X_\tau, Y_\tau) \in A_g\}}]$$

で表される。ただし、 1_X は集合 X の特性関数である：

$$1_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in X \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

この条件下では、サンプラスがゲームを取るまでの平均（期待）ポイント数 $e_{S|D}$ 、ゲームが決着するまでの平均（期待）ポイント数 $e_{G|D}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} e_{A|D} &= E_{(3,3)}[\tau \cdot 1_{\{(X_\tau, Y_\tau) \in S_p\}}] \\ e_{G|D} &= E_{(3,3)}[\tau] \end{aligned}$$

で表される。

次に、条件なしを考えよう。デュースになってアガシ（サンプラス）がゲームを取る確率 g_{DA} (g_{DS}) は

$$\begin{aligned} g_{DA} &= P_{(0,0)}(\,(X_6, Y_6) = (3,3),\ (X_\tau, Y_\tau) \in A_g\,) \\ g_{DS} &= P_{(0,0)}(\,(X_6, Y_6) = (3,3),\ (X_\tau, Y_\tau) \in S_p\,) \end{aligned}$$

である。さらに、アガシ、サンプラスがゲームを取る確率 g_A, g_S はそれぞれ

$$g_A = P_{(0,0)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in A_g\,), \qquad g_S = P_{(0,0)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in S_p\,)$$

で表される。アガシ（サンプラス）がゲームを取るまでの平均（期待）ポイント数 e_A (e_S) は

$$\begin{aligned} e_A &= E_{(0,0)}[\tau \cdot 1_{\{(X_\tau, Y_\tau) \in A_g\}}] \\ e_S &= E_{(0,0)}[\tau \cdot 1_{\{(X_\tau, Y_\tau) \in S_p\}}] \end{aligned}$$

で表される。したがって、この１ゲームが決着するまでの平均（期待）ポイント数 e_G は

$$e_G = E_{(0,0)}[\tau]$$

である。

以上をまとめて２種類の記法を対照して表すと、次のようになる。

$$P_{(0,0)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in T\,) \;=\; P_{(0,0)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in A_g\,) + P_{(0,0)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in S_p\,)$$
$$g_G \;=\; g_A + g_S \;=\; 1$$

$$P_{(0,0)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in T^n\,) \;=\; P_{(0,0)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in A_g^n\,) + P_{(0,0)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in S_p^n\,)$$
$$g'_G \;=\; g'_A + g'_S$$

$$P_{(0,0)}(\,(X_6, Y_6) = (3,3),\, (X_\tau, Y_\tau) \in A_g\,) \;=\; P_{(0,0)}(\,(X_6, Y_6) = (3,3))P_{(3,3)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in A_g\,)$$
$$g_{DA} \;=\; g_D g_{A|D}$$

$$P_{(3,3)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in T\,) \;=\; P_{(3,3)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in A_g\,) + P_{(3,3)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in S_p\,)$$
$$g_{G|D} \;=\; g_{A|D} + g_{S|D}$$

$$\begin{aligned} &P_{(0,0)}(\,(X_6, Y_6) = (3,3)\,) \\ &= P_{(0,0)}(\,(X_6, Y_6) = (3,3),\, (X_\tau, Y_\tau) \in A_g\,) + P_{(0,0)}(\,(X_6, Y_6) = (3,3),\, (X_\tau, Y_\tau) \in S_p\,) \end{aligned}$$
$$g_D \;=\; g_{DA} + g_{DS}$$

$$P_{(0,0)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in A_g\,) \;=\; P_{(0,0)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in A_g^n\,) + P_{(0,0)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in A_g^d\,)$$
$$g_A \;=\; g'_A + g_{DA}$$

$$E_{(0,0)}[\tau] \;=\; E_{(0,0)}[\,\tau \cdot 1_{\{(X_\tau, Y_\tau) \in A_g\}}\,] + E_{(0,0)}[\,\tau \cdot 1_{\{(X_\tau, Y_\tau) \in S_p\}}\,]$$
$$e_G \;=\; e_A + e_S$$

$$E_{(3,3)}[\tau] \;=\; E_{(3,3)}[\,\tau \cdot 1_{\{(X_\tau, Y_\tau) \in A_g\}}\,] + E_{(3,3)}[\,\tau \cdot 1_{\{(X_\tau, Y_\tau) \in S_p\}}\,]$$
$$e_{G|D} \;=\; e_{A|D} + e_{S|D}$$

$$E_{(0,0)}[\,\tau \cdot 1_{\{(X_\tau, Y_\tau) \in A_g\}}\,] \;=\; E_{(0,0)}[\,\tau \cdot 1_{\{(X_\tau, Y_\tau) \in A_g^n\}}\,] + E_{(0,0)}[\,\tau \cdot 1_{\{(X_\tau, Y_\tau) \in A_g^d\}}\,]$$
$$e_A \;=\; e'_A + g_D e_{A|D}$$

$$E_{(0,0)}[\,\tau\,] \;=\; E_{(0,0)}[\,\tau \cdot 1_{\{(X_\tau, Y_\tau) \in T^n\}}\,] + E_{(0,0)}[\,\tau \cdot 1_{\{(X_\tau, Y_\tau) \in T^d\}}\,]$$
$$e_G \;=\; e'_G + g_D e_{G|D}$$

5　埋め込み

この節では、第３節で求めた条件付き確率、条件つき期待値を不変埋め込みによる方法 (invariant imbedding method) で求める。２点境界値を条件とする２階線形差分方程式を導いて、これを解いて求める値が得られる。

5.1 条件付き確率

まず、デュースになるという条件の下でアガシとサンプラスがそれぞれゲームを取る確率を考えよう。この条件の下ではアガシがゲームを取る確率は

$$g_{A|D} = P_{(3,3)}((X_\tau, Y_\tau) \in A_g)$$

で表された。また、この条件下でサンプラスがゲームを取る確率は

$$g_{S|D} = P_{(3,3)}((X_\tau, Y_\tau) \in S_p)$$

で表される。この２つの条件付き確率を求める問題を、５点集合

$$D := \{(5,3), (4,3), (3,3), (3,4), (3,5)\}$$

をパラメータ集合とする２つの問題群

$$\begin{aligned} a(i,j) &= P_{(i,j)}((X_\tau, Y_\tau) \in A_g) \quad (i,j) \in D \\ s(i,j) &= P_{(i,j)}((X_\tau, Y_\tau) \in S_p) \quad (i,j) \in D \end{aligned} \tag{9}$$

にそれぞれ埋め込む。このとき、求める $g_{A|D}$，$g_{S|D}$ はそれぞれ

$$g_{A|D} = a(3,3), \quad g_{S|D} = s(3,3)$$

になる。

まず、問題群 (9) に対する再帰式は

$$\begin{array}{ccc} & a(3,3) = p\cdot a(4,3) + \overline{p}\cdot a(3,4) & \\ & a(4,3) = p\cdot a(5,3) + \overline{p}\cdot a(4,4) \quad a(3,4) = p\cdot a(4,4) + \overline{p}\cdot a(3,5) & \\ a(5,3) = 1 & & a(3,5) = 0 \end{array} \tag{10}$$

になる。マルコフ連鎖の定常性とシステムの不変性に注意すると、

$$a(4,4) = a(3,3)$$

が成り立つ。したがって、変数を１変数化して

$$a(5,3) = x(5),\ a(4,3) = x(4),\ a(3,3) = x(3),\ a(3,4) = x(2),\ a(3,5) = x(1)$$

に置き換えると、式 (10) は

$$\begin{array}{ccc} & x(3) = p\cdot x(4) + \overline{p}\cdot x(2) & \\ & x(4) = p\cdot x(5) + \overline{p}\cdot x(3) \quad x(2) = p\cdot x(3) + \overline{p}\cdot x(1) & \\ x(5) = 1 & & x(1) = 0 \end{array}$$

になる。これは２点境界条件をもつ２階線形差分方程式である。これを解くと、

$$\begin{array}{ccc} & x(3) = \dfrac{p^2}{1-r} & \\ & x(4) = p + \overline{p}\cdot \dfrac{p^2}{1-r} \qquad x(2) = p\cdot \dfrac{p^2}{1-r} & \\ x(5) = 1 & & x(1) = 0 \end{array}$$

になる。すなわち、デュースになるという条件の下でアガシがゲームを取る確率 $g_{A|D} = a(3,3) = x(5)$ は

$$g_{A|D} = \frac{p^2}{1-r}$$

になる。

他方、デュースになる条件の下でサンプラスがゲームを取る確率 $g_{S|D}$ に対しては２点境界値条件下での２階線形差分方程式

$$\begin{array}{ccc} & s(3,3) = p \cdot s(4,3) + \overline{p} \cdot s(3,4) & \\ s(4,3) = p \cdot s(5,3) + \overline{p} \cdot s(4,4) & & s(3,4) = p \cdot a(4,4) + \overline{p} \cdot s(3,5) \\ s(5,3) = 0 & & s(3,5) = 1 \end{array}$$

が得られる。これを解くと、

$$\begin{array}{ccc} & s(3,3) = \dfrac{\overline{p}^2}{1-r} & \\ s(4,3) = \overline{p} \cdot \dfrac{\overline{p}^2}{1-r} & & s(3,4) = p \cdot \dfrac{\overline{p}^2}{1-r} + \overline{p} \\ s(5,3) = 0 & & s(3,5) = 1 \end{array}$$

になる。したがって、求める $g_{S|D} = s(3,3)$ は

$$g_{S|D} = \frac{\overline{p}^2}{1-r}$$

になる。

さて、全体として 6 ポイントになるまでの状態の集合

$$N := \begin{array}{c} (0,0) \\ (1,0), \quad (0,1) \\ (2,0), \quad (1,1), \quad (0,2) \\ (3,0), \quad (2,1), \quad (2,1), \quad (0,3) \\ (4,0), \quad (3,1), \quad (2,2), \quad (1,3), \quad (0,4) \\ (4,1), \quad (3,2), \quad (2,3), \quad (1,4) \\ (4,2), \quad (3,3), \quad (2,4) \end{array}$$

は、(3,3) を除けば、デュースにならない状態集合である。さて、集合 N を２つに分割しよう：

$$N = C' \cup T'.$$

ただし

$$
\begin{array}{rc}
 & (0,0) \\
 & (1,0),\ \ (0,1) \\
 & (2,0),\ \ (1,1),\ \ (0,2) \\
C' := & (3,0),\ \ (2,1),\ \ (2,1),\ \ (0,3) \\
 & (3,1),\ \ (2,2),\ \ (1,3) \\
 & (3,2),\ \ (2,3)
\end{array}
$$

$$T' := \{(4,0),\ (4,1),\ (4,2),\ (3,3),\ (2,4),\ (1,4),\ (0,4)\}.$$

C' はデュースにならないで、ゲームが決着しない状態の集合で、あり、T' の $(3,3)$ 以外はデュースにならないで、ゲームが決着する状態である。

次に、デュースにならないで、両者がそれぞれゲームを取る確率を求めよう。以下、アガシが i ポイント取り、サンプラスが j ポイント取った状態を (i,j) で表し、(i,j) は集合 N 上で考える。状態を (i,j) が起こる条件の下で、アガシがゲームを取る確率を $a(i,j)$ で表す：

$$a(i,j) = P_{(i,j)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in A_g\,) \qquad (i,j) \in N$$

これを (i,j) からアガシがゲームを取る確率と言おう。同様に、(i,j) からサンプラスシがゲームを取る確率は

$$s(i,j) = P_{(i,j)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in S_p\,) \qquad (i,j) \in N$$

で定義される。

定理 5.1 アガシがゲームを取る確率 $g_A = P_{(0,0)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in A_g\,)$ は $a(0,0)$ で与えられる：

$$g_A = a(0,0).$$

ただし、$a(0,0)$ は以下の再帰式を後ろ向きに解いた最後の値である：

$$a(i,j) = p \cdot a(i+1,j) + q \cdot a(i,j+1) \qquad (i,j) \in C'$$
$$a(4,j) = 1 \quad j = 0,1,2; \qquad a(3,3) = g_{A|D}; \qquad a(i,4) = 0 \quad i = 0,1,2.$$

ここに $g_{A|D}$ はデュースになったとき、アガシがゲームを取る確率である：

$$g_{A|D} = \frac{p^2}{1-r}.$$

$$\begin{array}{c} p^4(1+4p+10p^2) + 20p^3q^3r_a \\ \shortparallel \\ a(0,0) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} p^3(1+3q+6q^2) + 10p^2q^3r_a & p^4(1+4q) + 10p^3q^2r_a \\ \shortparallel & \shortparallel \\ a(1,0) & a(0,1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} p^2(1+2q+3q^2) + 4pq^3r_a & p^3(1+3q) + 6p^2q^2r_a & p^4 + 4p^3qr_a) \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ a(2,0) & a(1,1) & a(0,2) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} p(1+q+q^2) + q^3r_a & p^2(1+2q) + 3pq^2r_a & p^3 + 3p^2qr_a & p^3r_a \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ a(3,0) & a(2,1) & a(1,2) & a(0,3) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & p(1+q) + q^2r_a & p^2 + 2pqr_a & p^2r_a & 0 \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ a(4,0) & a(3,1) & a(2,2) & a(1,3) & a(0,4) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & p + qr_a & pr_a & 0 \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ a(4,1) & a(3,2) & a(2,3) & a(1,4) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & r_a & 0 \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ a(4,2) & a(3,3) & a(2,4) \end{array}$$

表 3: アガシの条件付きゲーム確率 $\{a(i,j)\}$ ：$q = \overline{p},\ r_a := p^2/(1-2pq)$

定理 5.2 サンプラスがゲームを取る確率 $g_S = P_{(0,0)}(\,(X_\tau, Y_\tau) \in S_p\,)$ は $s(0,0)$ で与えられる：

$$g_S = s(0,0).$$

ただし、$s(0,0)$ は以下の再帰式を後ろ向きに解いた最後の値である：

$$s(i,j) \;=\; p \cdot s(i+1,j) + q \cdot s(i,j+1) \qquad (i,j) \in C'$$

$$s(4,j) = 0 \quad j = 0,1,2; \qquad s(3,3) = g_{S|D}; \qquad s(i,4) = 1 \quad i = 0,1,2.$$

ここに $g_{S|D}$ はデュースになったとき、サンプラスがゲームを取る確率である：

$$g_{S|D} = \frac{\overline{p}^2}{1-r}.$$

$$q^4(1+4p+10p^2) + 20p^3q^3r_s = s(0,0)$$

$$q^4(1+4p) + 10p^2q^3r_s = s(1,0) \qquad q^3(1+3p+6p^2) + 10p^3q^2r_s = s(0,1)$$

$$q^4 + 4pq^3r_s = s(2,0) \qquad q^3(1+3p) + 6p^2q^2r_s = s(1,1) \qquad q^2(1+2p+3p^2) + 4p^3qr_s = s(0,2)$$

$$q^3r_s = s(3,0) \qquad q^3 + 3pq^2r_s = s(2,1) \qquad q^2(1+2p) + 3p^2qr_s = s(1,2) \qquad q(1+p+p^2) + p^3r_s = s(0,3)$$

$$0 = s(4,0) \qquad q^2r_s = s(3,1) \qquad q^2 + 2pqr_s = s(2,2) \qquad q(1+p) + p^2r_s = s(1,3) \qquad 1 = s(0,4)$$

$$0 = s(4,1) \qquad qr_s = s(3,2) \qquad q + pr_s = s(2,3) \qquad 1 = s(1,4)$$

$$0 = s(4,2) \qquad r_s = s(3,3) \qquad 1 = s(2,4)$$

表 4: サンプラスの条件付きゲーム確率 $\{s(i,j)\}$ ：$q = \overline{p},\ r_s := q^2/(1-2pq)$

5.2 条件付き期待値

まず、デュースになるという条件下でゲームが決着するまでの平均（期待）ポイント数を求めよう。この条件下で決着するまでの平均（期待）ポイント数は、マルコフ連鎖 $\{(X_n, Y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ 上の吸収壁 $T = A_g \cup S_p$ に入る時間

$$\tau = \inf\{\, n \geq 0 \,:\, (X_n, Y_n) \in T \,\}$$

の条件付き期待値

$$e_{G|D} \;=\; E_{(3,3)}[\,\tau\,]$$

で表された。この値を埋め込み法で求めよう。

さて、最初のデュースのカウントから始まる列 $\{(Z_n, W_n)\}_{n=0}^{\infty}$ を考えよう：

$$(Z_n, W_n) := (X_{n+6}, Y_{n+6}) \qquad n = 0, 1, \ldots$$

このとき、 $D = \{(5,3), (4,3), (3,3), (3,4), (3,5)\}$ 上に定常マルコフ連鎖が次のように構成できる。実際、以下に出現する状態 $(n+2, n), (n+1, n), (n, n), (n, n+1), (n, n+2)$ はポイント差にのみ依存していて、n に無関係であると考えられる（図 2）。すなわち、ゲーム・アガシ、アドバンテージ・アガシ、デュース、アドバンテージ・サンプラス、ゲーム・サンプラス である。これをそれぞれ $(5,3), (4,3), (3,3), (3,4), (3,5)$ に同一視する。さらに、両端の状態 $(5,3), (3,5)$ を吸収状態とし、推移確率をそれぞれ $p,\ q = \overline{p}$ とする。このようにして、$\{(Z_n, W_n)\}$ は $(Z_0, W_0) = (3,3)$ から始まる D 上の定常マルコフ連鎖になる。このマルコフ連鎖に対して 2 つの吸収状態からからなる**吸収壁**

$$T' := \{(5,3), (3,5)\}$$

に到達するまでの最少の総ポイント数（両者のポイントの和）を τ' とする：

$$\tau' := \inf\{\, n \geq 0 \,:\, (Z_n, W_n) \in T' \,\}$$

さて、マルコフ連鎖 $\{(Z_n, W_n)\}$ 上で吸収壁 T' に到達するまでの平均（期待）ポイント数 $E'_{(3,3)}[\tau']$ を求めよう。これをパラメータ集合 D 上の問題群

$$e'(i,j) \;=\; E'_{(i,j)}[\,\tau'\,] \quad (i,j) \in D$$

に埋め込む。ただし、E' は連鎖 $\{(Z_n, W_n)\}$ 上に定まる（離散）確率測度 P' に基づく期待値作用素である。このとき、平均（期待）吸収ポイント数 $E'_{(3,3)}[\tau']$ は

$$E'_{(3,3)}[\,\tau'\,] = e'(3,3)$$

になる。

補題 5.1 (ii) 長さ 7 以上の実現可能な任意の経路

$$\omega = (0,0), (i_1, j_1), \ldots, (i_5, j_5), (3,3), (i_7, j_7), \ldots, (i_l, j_l), \ldots$$

に対して

$$\tau(\omega) = \tau'(\theta(\omega)) + 6$$

ただし、θ は時刻を 6 引き戻すシフト作用素である：

$$\theta(\omega) = (3,3), (i_7, j_7), \ldots, (i_l, j_l), \ldots$$

(ii) ゲームが決着するまでの平均（期待）ポイント数の間には 6 ポイントの差がある：

$$E_{(3,3)}[\tau] = E'_{(3,3)}[\tau'] + 6.$$

定理 5.3 $\{e'(i,j)\,;\,(i,j) \in D\}$ は差分方程式

$$\begin{array}{lcr} & e'(3,3) = 1 + p\cdot e'(4,3) + \overline{p}\cdot e'(3,4) & \\ e'(4,3) = 1 + p\cdot e'(5,3) + \overline{p}\cdot e'(3,3) & & e'(3,4) = 1 + p\cdot e'(3,3) + \overline{p}\cdot e'(3,5) \\ e'(5,3) = 0 & & e'(3,5) = 0 \end{array} \tag{11}$$

を満たす。

証明 定常性と不変性より、

$$e'(4,4) = e'(3,3)$$

である。　　Q.E.D.

式 (11) も 2 点境界値 2 階線形差分方程式である。これを解くと、

$$\begin{array}{lcr} & e'(3,3) = \dfrac{2}{1-r} & \\ e'(4,3) = 1 + \overline{p}\cdot\dfrac{2}{1-r} & & e'(3,4) = 1 + p\cdot\dfrac{2}{1-r} \\ e'(5,3) = 0 & & e'(3,5) = 0 \end{array}$$

になる。

次に、デュースにならないでゲームが決着するまでの平均（期待）ポイント数を求める。

定理 5.4 ゲームが決着するまでの平均（期待）ポイント数 $e_G = E_{(0,0)}[\tau]$ は $e(0,0)$ で与えられる：

$$e_G = e(0,0).$$

ただし、$e(0,0)$ は以下の再帰式を後ろ向きに解いた最後の値である：

$$e(i,j) = 1 + p\cdot e(i+1,j) + q\cdot e(i,j+1) \qquad (i,j) \in C' \tag{12}$$

$$e(4,j) = 0 \quad j = 0,1,2; \qquad e(3,3) = e'_{G|D}; \qquad e(i,4) = 0 \quad i = 0,1,2. \tag{13}$$

ここに $e'_{G|D}$ はデュースになったとき、ゲームが決着するまでの平均（期待）ポイント数である：

$$e'_{G|D} = \frac{2}{1-r}.$$

終端条件 (13) をもつ2階線形差分式 (12) の解は表 5 で与えられる。ゲームが決着するまでの平均（期待）ポイント数 $e_G = e(0,0)$ は

$$e(0,0) \;=\; -1-3r-3r^2+\frac{5}{1-r} \quad (r=2p\overline{p})$$

になる。特に、$p=(\,q=r=)\,\dfrac{1}{2}$ のとき、1 ゲームが決着すまでの平均ポイント数は

$$e_G = 6\frac{3}{4} = 6.75 \text{ ポイント}$$

である。すなわち、両者の戦力が均衡しているとき、1 ゲームは平均して $6\frac{3}{4}$ ポイントで決着することになる（表 5、式 (2) 参照)。

$$e(0,0) = -1-3r-3r^2+\tfrac{5}{1-r}$$

$$e(1,0) = 3+q+(p-\tfrac{q}{2})r+\tfrac{1}{2}r^2+q\tfrac{r(3+2r)}{1-r} \qquad e(0,1) = 3+p+(q-\tfrac{p}{2})r+\tfrac{1}{2}r^2+p\tfrac{r(3+2r)}{1-r}$$

$$e(2,0) = 2+(1+q)r+2q^2\tfrac{1+r}{1-r} \qquad e(1,1) = 3-\tfrac{r}{2}+\tfrac{r(2+r)}{1-r} \qquad e(0,2) = 2+(1+p)r+2p^2\tfrac{1+r}{1-r}$$

$$e(3,0) = 1+q+q^2+q^3\tfrac{2}{1-r} \qquad e(2,1) = 1+p+\tfrac{r}{2}+q\tfrac{2+r}{1-r} \qquad e(1,2) = 1+q+\tfrac{r}{2}+p\tfrac{2+r}{1-r} \qquad e(0,3) = 1+p+p^2+p^3\tfrac{2}{1-r}$$

$$e(4,0) = 0 \qquad e(3,1) = 1+q+q^2\tfrac{2}{1-r} \qquad e(2,2) = \tfrac{2}{1-r} \qquad e(1,3) = 1+p+p^2\tfrac{2}{1-r} \qquad e(0,4) = 0$$

$$e(4,1) = 0 \qquad e(3,2) = 1+q\tfrac{2}{1-r} \qquad e(2,3) = 1+p\tfrac{2}{1-r} \qquad e(1,4) = 0$$

$$e(4,2) = 0 \qquad e(3,3) = \tfrac{2}{1-r} \qquad e(2,4) = 0$$

表 5: 平均（期待）ポイント数 $\{e(i,j)\}$: $r=2pq,\ q=1-p$

参考文献

[1] J. Andel, *Mathematics of Chance*, Wiely, New York, 2001.

[2] R.E. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

[3] R.E. Bellman and E.D. Denman, *Invariant Imbedding*, Lect. Notes in Operation Research and Mathematical Systems, Vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[4] G. Blom, L. Holst and D. Sandell, *Problem and Snapshots from the World of Probability*, Springer, New York, 1994. (森 真訳：「確率問題ゼミ」、シュプリンガー・フェアラーク東京、1995)

[5] L.E. Dubins and L.J. Savage, *Inequalities For Stochastic Processed (How To Gamble If You Must)*, Dover, N.Y., 1976.

[6] A. Hald, *A History of Probability & Statistics and Their Applications Before 1750*, Wiely, New York, 1990.

[7] 岩本 誠一, 「動的計画論」, 九大出版会, 1987.

[8] 岩本誠一: ミレニアムＯＮシリーズ — 経済効果と優勝確率 —, 経済学研究（九大経済学会)、第６８巻（２００２年）６号、ｐｐ．１—２９．

[9] 岩本誠一: 長者か 破産か、経済学研究（九大経済学会)、第６９巻（２００３年）１・２号、ｐｐ．２７—４５．

[10] E.S. Lee, *Quasilinearization and Invariant Imbedding*, Academic Press, New York, 1968.

[11] A. Maitra and W. Sudderth, *Discrete Gambling and Stochastic Games*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[12] S. Ross, *Stochastic Processes : second edition*, Wiley & Sons, New York, 1996.

[13] M. Sniedovich, *Dynamic Programming*, Marcel Dekker, Inc. NY, 1992.

[14] N.L. Stokey and R.E. Lucas, *Recursive Methods in Economic Dynamics.* Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1989

{九州大学大学院経済学研究院　教授}