破産か長者か

岩本, 誠一

https://doi.org/10.15017/1072

出版情報：經濟學研究. 69 (1/2), pp.27-45, 2003-01-30. 九州大学経済学会
バージョン：

破産か 長者か

岩 本 誠 一

概 要

本論文では、賭博者破産問題をマルコフモデルとして定式化して埋め込み法で解く。これは、与問題をある問題群に埋め込んで、その部分問題間の再帰式を導き、これを解いて、本来の問題の解を求める方法である。埋め込み法は、いわゆる動的計画法のアプローチを最適化を意識しないで適用したものである。また、「勝敗差がはじめて3になったとき優勝決定とする」ルールの下で、プロ野球・日本シリーズでの優勝確率・平均試合数を再帰的に求める。

1 はじめに

古典的な破産問題 (ruin problem) はいろいろな方面で紹介されているが [1,7–9,17–21]、本論文では埋め込み法 (imbedding method) で統一的に解けることを示す。埋め込み法は不変埋没、不変埋め込み、不変埋没原理、不変性の原理 (invariant imbedding, principle of invariant imbedding, principle of invariance) などいくつか呼ばれているが [3–6,16,22]、動的計画法 (dynamic programming) と密接に関連しあっている [2,10–15,23,24]。破産問題を埋め込み法で解くことによって、埋め込み法は動的計画法のアプローチを、最適化を意識しないで、そのまま適用した方法であることがわかる。

第2節では有限段および無限段の破産問題に対して、破産する確率、長者になる確率、および賭けが有限回で終わる確率が満たす再帰式をそれぞれ導く。無限段問題に対しては賭けが有限回で終わる確率、終わるまでの時間の期待値、およびその自乗の期待値が満たす再帰式をそれぞれ導き、対応する2階線形斉次・非斉次差分方程式の解を与える。第3節では3つの再帰式をマルコフ連鎖上で証明する。第4節では、仮想プロ野球・日本シリーズとして、「勝敗差がはじめて3になったとき優勝決定とする」ルールの下で、優勝確率・平均試合数を再帰的に求める。この仮想シリーズの方が、現実の日本シリーズより、約2倍長く楽しめることもわかる。最後の第5節では、本論文で取り扱った2階斉次・非斉次差分方程式に関連する線形差分方程式の問題群を1階および2階に分けて、その解と共に列挙している。

2 長者・破産問題

いま、2より大きい自然数 N を固定して、N 万円に到達したいギャンブラーを考える。以下では、1単位は円、百万円、億円、ドル、千ドルなどいずれでもよいが、現実感覚優先で、万円としておく。このとき、n $(n = 0, 1, \ldots, N)$ 万円を持つ人が毎回次のよう

なギャンブルをして、N 万円にしたいとしよう。すなわち、彼は所持金のうちいつも1万円を賭け、その賭けに勝てば、新たに1万円を得、負ければその1万円を失うとする。ただし、彼が0万円になったら（辛いことだが）賭けをやめる。このとき**破産**したという。また、N 万円になったときもやめる（これも辛いが）。このときは**長者**になったと言おう。彼が賭けに勝つ確率は毎回等しく p $(0<p<1)$ とする。したがって負ける確率は q $(=1-p)$ である。彼が時刻 $t=0$ から賭けを始めて $t=T$ で終えるとする。すなわち、T 回賭けるとする。はじめに n 万円持っている彼がこの一連の賭けで破産する確率はいくらだろうか。また、長者になる確率はいくらだろうか。

特に、図1では、$N=5$ に対して、有限 $T=15$ 段の長者・破産問題に対して、長者、破産に至る経路の一例を実線、破線でそれぞれ示している。

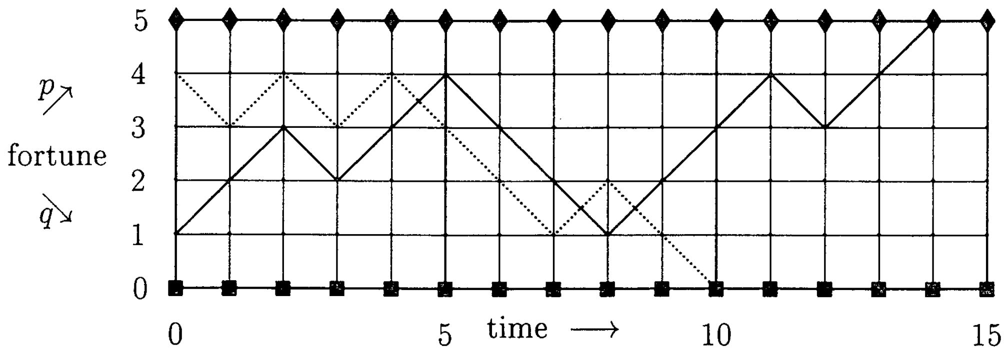

図1: 長者（♦）か？破産（■）か？(N = 5)

2.1 有限段

さて、時刻 t で彼が n 万円持っているとき、残りの $(T-t)$ 回の賭けで彼が長者になる確率を $u(n;t)$ とする。ただし、$n=0,1,\ldots,N,\quad t=0,1,\ldots,T.$ このとき、族 $\{u(n;t)\}$ は次の前向き再帰式を満たす。

定理 2.1　（後向き関係式）

$$\begin{aligned} u(n;t) &= p\cdot u(n+1;t+1)+q\cdot u(n-1;t+1) \\ &\qquad\qquad n=1,2,\ldots,N-1,\quad t=0,1,\ldots,T-1 \\ u(0;T) &= 0,\qquad u(N;T)=1. \end{aligned}$$

また、破産する確率 $\{b(n;t)\}$ は次を満たす。

定理 2.2　（後向き関係式）

$$\begin{aligned} b(n;t) &= p\cdot b(n+1;t+1)+q\cdot b(n-1;t+1) \\ &\qquad\qquad n=1,2,\ldots,N-1,\quad t=0,1,\ldots,T-1 \\ b(0;T) &= 1,\qquad b(N;T)=0. \end{aligned}$$

このとき、常に２つの確率の和は１である：

$$u(n;t)+b(n;t)=1.$$

2.2 無限段

さて、ギャンブラーが n 万円持っているとき、彼は破産するか長者になるかのいずれかになるまで繰り返し賭けを続けるとしよう。彼が破産する前に長者になる確率を $u(n)$ とする。ただし、$n=0,1,\ldots,N$. このとき、族 $\{u(n)\}$ は次の差分方程式を満たす。

定理 2.3 （２階差分方程式）

$$\begin{aligned} u(n) &= p\cdot u(n+1)+q\cdot u(n-1) \qquad (1)\\ &\qquad\qquad n=1,2,\ldots,N-1\\ u(0) &= 0, \quad u(N) = 1. \qquad (2)\end{aligned}$$

２階線形差分方程式 (1),(2) は次のように解ける。いま、ある λ に対して $u(n)=\lambda^n$ が方程式 (1) の解とすると、 λ は２次方程式

$$p\lambda^2-\lambda+q=0$$

を満たす。これを解くと、２つの実数解

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=\frac{q}{p}$$

が得られる。以下、比 $\frac{q}{p}$ を常に r で表す：

$$r:=\frac{q}{p}.$$

したがって、

1. $p\neq\dfrac{1}{2}$ のとき、異なる２つの実数解をもつ：$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=r.$
2. $p=\dfrac{1}{2}$ のとき、重解をもつ：$\lambda_1=\lambda_2=1.$

まず、ケース 1: $p\neq\frac{1}{2}$ のときを考えよう。このとき、方程式 (1) の一般解は $u(n)=c+dr^n$ である。未知定数 $c,\ d$ は境界条件 (2) より、

$$\begin{aligned} c+d &= 0\\ c+dr^N &= 1\end{aligned}$$

を解いて

$$c=\frac{1}{1-r^N},\quad d=\frac{-1}{1-r^N}.$$

したがって、(1),(2) の解は

$$u(n) = \frac{1-r^n}{1-r^N}.$$

次に、ケース 2： $p=\frac{1}{2}$ のときを解こう。このときの一般解は $u(n)=c+dn$ だから、

$$\begin{aligned} c &= 0 \\ c+dN &= 1 \end{aligned}$$

より

$$c=0, \quad d=\frac{1}{N}.$$

したがって、解は

$$u(n) = \frac{n}{N}.$$

まとめると、次のようになる：

$$u(n) = \begin{cases} \dfrac{1-r^n}{1-r^N} & p \neq \dfrac{1}{2} \text{のとき} \\ \dfrac{n}{N} & p = \dfrac{1}{2} \text{のとき}. \end{cases}$$

破産する確率 $u(n)$ は比 $r=\dfrac{q}{p}$ で表されたが、 積 $s:=pq$ で表すと、以下になる。

$$f_n(s) \ := \ p^n + p^{n-1}q + \cdots + pq^{n-1} + q^n \qquad n \geq 1$$

とすると、漸化式

$$\begin{aligned} f_{n+1}(s) &= f_n(s) - sf_{n-1}(s) \qquad n \geq 1 \\ f_1(s) &= f_0(s) = 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。このとき、次が成立する：

$$u(n) = \frac{q^{N-n} f_{n-1}(s)}{f_{N-1}(s)}.$$

さて、今度は n 万円持っているギャンブラーが破産する確率を考える。彼が長者になる前に破産する確率を $b(n)$ とする。このとき、族 $\{b(n)\}$ は次を満たす。

定理 2.4 （2階差分方程式）

$$b(n) \ = \ p \cdot b(n+1) + q \cdot b(n-1) \tag{3}$$
$$n = 1, 2, \ldots, N-1$$
$$b(0) \ = \ 1, \qquad b(N) \ = \ 0. \tag{4}$$

この解は次のようになる：

$$b(n) = \begin{cases} \dfrac{r^n - r^N}{1 - r^N} & p \neq \dfrac{1}{2}のとき \\[2ex] \dfrac{N-n}{N} & p = \dfrac{1}{2}のとき. \end{cases} \tag{5}$$

次に ギャンブラーが繰り返し賭け続け、彼が長者になるか破産するかのどちらかまで賭け続けるとしよう。このとき、賭けが終わるまでの時間（賭けの回数）を τ とする。まず、いくらの所持金で賭けを始めても、長者になるか破産するかのどちらかまで賭ける回数は確率 1 で有限であることを示そう。n 万円所有している彼がこの賭けを終えるまでの賭けの回数が有限である確率を $u(n)$ とする。 $\{u(n)\}$ は次を満たす。

定理 2.5 （斉次２階差分方程式）

$$p \cdot u(n+1) - u(n) + q \cdot u(n-1) = 0 \tag{6}$$
$$n = 1, 2, \ldots, N-1$$
$$u(0) = u(N) = 1. \tag{7}$$

斉次方程式 (6),(7) は唯一の解

$$u(n) = 1 \qquad n = 0, \ldots, N$$

をもつ。すなわち、

$$P_n(\tau < \infty) = 1 \qquad n = 0, \ldots, N$$

となり、到達時刻の確率 1 での有限性が示された。

次に、賭けが終わるまでの回数の期待値を考える。n 万円所有している彼がこの賭けを終えるまでの賭けの回数 τ の期待値を $v(n)$ とすると、$\{v(n)\}$ は次を満たす。

定理 2.6 （非斉次２階差分方程式 I）

$$p \cdot v(n+1) - v(n) + q \cdot v(n-1) = -1 \tag{8}$$
$$n = 1, 2, \ldots, N-1$$
$$v(0) = v(N) = 0. \tag{9}$$

非斉次２階線形差分方程式 (8),(9) の解は次のように求められる。斉次方程式の一般解 $v_0 = v_0(n)$ は次で与えられる：

$$v_0(n) = \begin{cases} c + dr^n & p \neq \dfrac{1}{2}のとき \\[2ex] c + dn & p = \dfrac{1}{2}のとき. \end{cases}$$

また、非斉次方程式 (8) の１つの特殊解 $v_1 = v_1(n)$ は次になる：

$$v_1(n) = \begin{cases} \dfrac{-n}{p-q} & p \neq \dfrac{1}{2}のとき \\[2ex] -n^2 & p = \dfrac{1}{2}のとき. \end{cases}$$

したがって、境界条件 (9) を考慮すると、求める一般解 $v = v_0 + v_1$ は次で与えられる：

$$v(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{q-p}\left(n - N\dfrac{1-r^n}{1-r^N}\right) & p \neq \dfrac{1}{2}\text{のとき} \\ n(N-n) & p = \dfrac{1}{2}\text{のとき.} \end{cases} \tag{10}$$

さらに、賭けが終了するまでの時間（賭けの回数）の自乗 τ^2 の期待値を考えよう。n 万円所有している人がこの賭けを終えるまでの賭けの回数の自乗の期待値を $w(n)$ とする。 $\{w(n)\}$ は次を満たす。

定理 2.7 （非斉次２階差分方程式 II）

$$p\cdot w(n+1) - w(n) + q\cdot w(n-1) = 1 - 2v(n) \tag{11}$$

$$n = 1, 2, \ldots, N-1$$

$$w(0) = w(N) = 0. \tag{12}$$

ただし、 $v(n)$ は n 万円所有している賭博者が破産か長者のいずれかになるまでの賭けの回数自身の期待値である。この $v(n)$ は式 *(10)* で与えらている。

ここで２階線形差分方程式の特殊解を考えておこう。

補題 2.1 (i) $p \neq \dfrac{1}{2}$ のとき、非斉次方程式

$$p\cdot w(n+1) - w(n) + q\cdot w(n-1) = b(n)$$

の特殊解は次のようになる：

$$w(n) = \begin{cases} n \\ n^2 \\ nr^n \end{cases} \quad b(n) = \begin{cases} p-q \\ 2(p-q)n+1 \\ -(p-q)r^n \end{cases} \quad \text{のとき}$$

すなわち

$$w(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{p-q} \\ \dfrac{n^2}{2(p-q)} - \dfrac{n}{2(p-q)^2} \\ -\dfrac{n}{p-q}r^n \end{cases} \quad b(n) = \begin{cases} 1 \\ n \\ r^n \end{cases} \quad \text{のとき}$$

(ii) $p = \dfrac{1}{2}$ のとき、非斉次方程式

$$p\cdot w(n+1) - w(n) + q\cdot w(n-1) = 1 - 2Nn + 2n^2$$

の特殊解は次のようになる：

$$w(n) = \frac{1}{3}n^4 - \frac{2}{3}Nn^3 + \frac{2}{3}n^2.$$

さて、２階線形差分方程式 (11),(12) を解こう。いま、ある λ に対して $w(n)=\lambda^n$ が方程式 (11) の斉次形：

$$p\cdot w(n+1)-w(n)+q\cdot w(n-1)=0 \tag{13}$$

の解とすると、λ は2次方程式

$$p\lambda^2-\lambda+q=0$$

を満たす。これを解くと、２つの解

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=r$$

が得られる。したがって、

1. $p\neq\dfrac{1}{2}$ のとき、異なる２つの実数解をもつ：$\lambda_1=1,\ \ \lambda_2=r.$
2. $p=\dfrac{1}{2}$ のとき、重解をもつ：$\lambda_1=\lambda_2=1.$

まず、ケース 1: $p\neq\frac{1}{2}$ を考える。このとき、方程式 (13) の一般解 w_0 は $w_0(n)=c+dr^n$ である。式 (11) の特殊解 w_1 は次のようにして求められる。ここでは右辺の関数 $1-2v(n)$ が次のように１次式 $v_1(n)$ と指数関数 $v_2(n)$ の和の型に分解できる：

$$1-2v(n)=v_1(n)+v_2(n)$$

ただし、

$$\begin{aligned} v_1(n) &= 1+\lambda-\mu n \\ v_2(n) &= -\lambda r^n \end{aligned}$$

ここに

$$\lambda=\frac{2N}{(p-q)(1-r^N)}\qquad \mu=\frac{2}{p-q}.$$

このとき、１次式から生じる斉次方程式

$$p\cdot w(n+1)-w(n)+q\cdot w(n-1)=v_1(n)$$

の特殊解 w_1' として２次式

$$w_1'(n)=-\frac{\mu}{2(p-q)}n^2+\left(\frac{1+\lambda}{p-q}+\frac{\mu}{2(p-q)^2}\right)n$$

が得られる。また、指数関数に対応する斉次方程式

$$p\cdot w(n+1)-w(n)+q\cdot w(n-1)=v_2(n)$$

は特殊解 w_1'' として

$$w_1''(n) = \frac{\lambda}{p-q} n r^n$$

をもつ。したがって、(11) の特殊解 w_1 は和の型

$$w_1(n) = w_1'(n) + w_1''(n)$$

として

$$w_1(n) \ = \ -\frac{\mu}{2(p-q)} n^2 + \left(\frac{1+\lambda}{p-q} + \frac{\mu}{2(p-q)^2} \right) n + \frac{\lambda}{p-q} n r^n$$

で表される。さらに、所与のデータで表すと、次にまとめられる：

$$w_1(n) \ = \ -\frac{1}{(p-q)^2} n^2 + \left[\frac{1}{p-q} + \frac{1}{(p-q)^3} \right] n + \frac{1+r^n}{(p-q)^2(1-r^N)} 2Nn$$

求める解 w は一般解 w_0 と特殊解 w_1 の和

$$w(n) = w_0(n) + w_1(n)$$

の型で表される：

$$w(n) = c + d r^n + w_1(n)$$

未知定数 c, d は境界条件 (12) より、

$$\begin{cases} c + d + w_1(0) \ = \ 0 \qquad (w_1(0) = 0) \\ c + d r^N + w_1(N) \ = \ 0 \end{cases}$$

を解いて

$$c = -\frac{w_1(N)}{1-r^N}, \qquad d = \frac{w_1(N)}{1-r^N}.$$

したがって、(11),(12) の解は

$$w(n) = w_1(n) - \frac{1-r^n}{1-r^N} w_1(N)$$

で与えられる。

次に、ケース 2: $p = \frac{1}{2}$ を解こう。このときの一般解は $w_0(n) = c + dn$ である。また、方程式 (11) の特殊解 w_1 は次のようにして求められる。ここでは右辺の関数 $1 - 2v(n)$ は次のように 2 次式になっている：

$$1 - 2v(n) = 1 - 2Nn + 2n^2.$$

したがって、 1 が二重解であるから、特殊解 w_1 は 4 次式として次のようになる：

$$w_1(n) \ = \ \frac{1}{3} n^4 - \frac{2}{3} N n^3 + \frac{2}{3} n^2$$

さらに、境界条件

$$\begin{aligned} w_0(n)+w_1(0) &= 0 \\ w_0(N)+w_1(N) &= 0 \end{aligned}$$

より

$$c=0, \quad d=\frac{N}{3}(N^2-2).$$

ゆえに

$$w_0(n) = \frac{N}{3}(N^2-2)n.$$

したがって、求める解は和

$$w(n)=w_0(n)+w_1(n)$$

として

$$w(n) = \frac{N}{3}(N^2-2)n+\frac{n^2}{3}(2-2Nn+n^2)$$

で表される。

まとめると、次のようになる：

$$w(n)=\begin{cases} w_1(n)-\dfrac{1-r^n}{1-r^N}w_1(N) & p\neq\dfrac{1}{2}\text{のとき} \\ \dfrac{N}{3}(N^2-2)n+\dfrac{n^2}{3}(2-2Nn+n^2) & p=\dfrac{1}{2}\text{のとき}. \end{cases}$$

ただし

$$w_1(n) = \frac{n}{(p-q)^2}\left(2N\frac{1+r^n}{1-r^N}-n\right)+\left[\frac{1}{p-q}+\frac{1}{(p-q)^3}\right]n.$$

3　再帰式の証明

一般に、状態空間 $S=\{0,1,\dots,N-1,N\}$ 上のランダム・ウォークは定常マルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n\geq0}$ である。この推移確率 $p=\{p(j|i)\}$ は

$$p(j|i)=\begin{cases} p & \text{if } j=i+1 \\ q & \text{if } j=i-1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad i=1,2,\dots N-1.$$

ただし

$$p(0|0)=p(N|N)=1.$$

この確率測度を $P(\cdot)$ とし、期待値作用素を E で表す。初期条件 $X_0=n$ の下での事象 A の条件つき確率 および確率変数 U の条件つき期待値 をそれぞれ

$$\begin{aligned} P_n(A) &:= P(A\,|\,X_0=n) \\ E_n[U] &:= E[U\,|\,X_0=n] \end{aligned}$$

で表す。U が離散値 $0, 1, \ldots, k, \ldots$ を取るとき、この条件つき期待値は

$$E_n[U] = \sum_{k=0}^{\infty} k P_n(U = k)$$

で定義される。

この連鎖上に吸収壁 $T = \{0, N\}$ に入る時刻

$$\tau = \inf\{n : X_n \in T\}$$

を導入する。τ は状態 0 か N に入るまでの時刻を表している。**到達時刻** (hitting time) τ は値 $0, 1, 2, \ldots$ をとる。実際、初期状態 $X_0 = n$ のどこから出発しても、確実に τ は有限な値をとる：

$$P(\tau < \infty \mid X_0 = n) = 1 \quad n = 0, \ldots, N.$$

さらに、初期状態 $X_0 = n$ から出発して、有限時間で吸収される確率、吸収されるまでの時間の期待値およびその平方の期待値それぞれを考えよう：

$$\begin{aligned} u(n) &= P_n(\tau < \infty) \\ v(n) &= E_n[\tau] \qquad\qquad n = 0, 1, \ldots, N \\ w(n) &= E_n[\tau^2] \end{aligned}$$

3.1　到達時間の有限性

まず、族 $\{u(n)\}$ が斉次方程式 (6),(7) を満たすことを示す。

$$P(\tau = 0 | X_0 = 0) = P(\tau = 0 | X_0 = N) = 1$$

より、境界条件

$$u(0) = u(N) = 1$$

は明らかである。いま、$n \neq 0,\ n \neq N$ としよう。このとき

$$\begin{aligned} u(n) &= P_n(\tau < \infty) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_n(\tau = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(\tau = k \mid X_0 = n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(\tau = k,\ X_1 = n+1 \mid X_0 = n) \\ &\qquad\qquad + \sum_{k=0}^{\infty} P(\tau = k,\ X_1 = n-1 \mid X_0 = n) \end{aligned}$$

が成り立つ。 ここで、条件付き確率 $P(\tau=k,\ X_1=n-1\,|\,X_0=n)$ を次のように計算する。一般に、事象 A, B, C に対して以下の分母が正のとき

$$
\begin{aligned}
P(C\cap B\,|\,A) &= \frac{P(C\cap B\cap A)}{P(A)} \\
&= \frac{P(C\cap B\cap A)}{P(B\cap A)}\cdot\frac{P(B\cap A)}{P(A)} \\
&= P(C\,|\,B\cap A)\cdot P(B\,|\,A)
\end{aligned}
$$

になる。また、マルコフ性より

$$P(\tau=k\,|\,X_1=n+1,\ X_0=n) = P(\tau=k\,|\,X_1=n+1)$$

である。したがって、分母が 0 のときでも、すべての $k\geq 1$ に対して

$$P(\tau=k,\ X_1=n+1\,|\,X_0=n) = P(\tau=k\,|\,X_1=n+1)\cdot P(X_1=n+1\,|\,X_0=n)$$

が成り立つ。同様に、

$$P(\tau=k,\ X_1=n-1\,|\,X_0=n) = P(\tau=k\,|\,X_1=n-1)\cdot P(X_1=n-1\,|\,X_0=n)$$

である。代入して、整理すると

$$
\begin{aligned}
u(n) &= \sum_{k=1}^{\infty}P(\tau=k\,|\,X_1=n+1)P(X_1=n+1\,|\,X_0=n) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{\infty}P(\tau=k\,|\,X_1=n-1)P(X_1=n-1\,|\,X_0=n) \\
&= p\left(\sum_{k=1}^{\infty}P(\tau=k\,|\,X_1=n+1)\right)+q\left(\sum_{k=1}^{\infty}P(\tau=k\,|\,X_1=n-1)\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。さらに、定常性より

$$P(\tau=k\,|\,X_1=n+1)=P(\tau=k-1\,|\,X_0=n+1) \qquad k=1,2,\ldots.$$

したがって、

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(\tau=k\,|\,X_1=n+1)=\sum_{k=0}^{\infty}P(\tau=k\,|\,X_0=n+1)=u(n+1)$$

が得られる。同様に、

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(\tau=k\,|\,X_1=n-1)=u(n-1)$$

である。したがって、

$$u(n) = p\cdot u(n+1)+q\cdot v(n-1)$$

が成り立つ。

3.2 到達時間の期待値

次に、族 $\{v(n)\}$ が満たす非斉次方程式 I (8),(9) を導く。境界条件

$$v(0)=v(N)=0$$

は明らかである。$n\neq 0,\ n\neq N$ としよう。このとき、まず

$$\begin{aligned} v(n) &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(\tau=k\,|\,X_0=n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(\tau=k,\ X_1=n+1\,|\,X_0=n) \\ &\qquad + \sum_{k=0}^{\infty} kP(\tau=k,\ X_1=n-1\,|\,X_0=n) \end{aligned}$$

である。マルコフ性を用いて、展開すると

$$\begin{aligned} v(n) &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(\tau=k\,|\,X_1=n+1)P(X_1=n+1\,|\,X_0=n) \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{\infty} kP(\tau=k\,|\,X_1=n-1)P(X_1=n-1\,|\,X_0=n) \\ &= p\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1+k-1)P(\tau=k\,|\,X_1=n+1)\right) \\ &\qquad + q\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1+k-1)P(\tau=k\,|\,X_1=n-1)\right) \\ &= p\left(\sum_{k=1}^{\infty}P(\tau=k\,|\,X_1=n+1)+\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P(\tau=k\,|\,X_1=n+1)\right) \\ &\qquad + q\left(\sum_{k=1}^{\infty}P(\tau=k\,|\,X_1=n-1)+\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P(\tau=k\,|\,X_1=n-1)\right) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、到達時刻 τ の有限確実性は

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(\tau=k\,|\,X_1=n)=1 \qquad n=0,\dots,N$$

を示している。さらに、定常性

$$P(\tau=k\,|\,X_1=n+1)=P(\tau=k-1\,|\,X_0=n+1) \qquad k=1,2,\dots$$

より

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P(\tau=k\,|\,X_1=n+1)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(\tau=k\,|\,X_0=n+1)=v(n+1)$$

が従う。同様に、

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P(\,\tau=k\,|\,X_1=n-1\,)=v(n-1)$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} v(n) &= p(1+v(n+1)+q(1+v(n-1)) \\ &= 1+p\cdot v(n+1)+q\cdot v(n-1) \end{aligned} \tag{14}$$

が成り立つ。

3.3 到達時間の自乗

さらに、族 $\{w(n)\}$ が非斉次方程式 II (11),(12) を満たすことを示そう。2 次の期待値に対しては

$$\begin{aligned} w(n) &= \sum_{k=0}^{\infty}k^2P(\,\tau=k\,|\,X_0=n\,) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}k^2P(\,\tau=k,\ X_1=n+1\,|\,X_0=n\,)+\sum_{k=0}^{\infty}k^2P(\,\tau=k,\ X_1=n-1\,|\,X_0=n\,) \end{aligned}$$

になる。マルコフ性を用いて、展開すると

$$\begin{aligned} w(n) &= \sum_{k=1}^{\infty}k^2P(\,\tau=k\,|\,X_1=n+1\,)P(\,X_1=n+1\,|\,X_0=n\,) \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{\infty}k^2P(\,\tau=k\,|\,X_1=n-1\,)P(\,X_1=n-1\,|\,X_0=n\,) \\ &= p\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1+k-1)^2P(\,\tau=k\,|\,X_1=n+1\,)\right) \\ &\qquad + q\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1+k-1)^2P(\,\tau=k\,|\,X_1=n-1\,)\right) \\ &= p\left(\sum_{k=1}^{\infty}P(\,\tau=k\,|\,X_1=n+1\,)+2\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P(\,\tau=k\,|\,X_1=n+1\,)\right) \\ &\qquad + p\left(\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)^2P(\,\tau=k\,|\,X_1=n+1\,)\right) \\ &\quad + q\left(\sum_{k=1}^{\infty}P(\,\tau=k\,|\,X_1=n-1\,)+2\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P(\,\tau=k\,|\,X_1=n-1\,)\right) \\ &\qquad + q\left(\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)^2P(\,\tau=k\,|\,X_1=n-1\,)\right) \end{aligned}$$

が成り立つ。定常性を用いると

$$\begin{aligned} w(n) &= p(1+2v(n+1)+w(n+1))+q(1+2v(n-1)+w(n-1)) \\ &= 1+2(p\cdot v(n+1)+q\cdot v(n-1))+p\cdot w(n+1)+q\cdot w(n-1). \end{aligned}$$

さらに、式 (14) より

$$\begin{aligned} w(n) &= 1+2(-1+v(n))+p\cdot w(n+1)+q\cdot w(n-1) \\ &= -1+2v(n)+p\cdot w(n+1)+q\cdot w(n-1) \end{aligned}$$

が得られる。 ■

4　仮想・日本シリーズ

プロ野球の日本シリーズやワールドシリーズでは先に 4 勝したチームが優勝（すなわち、先に 4 敗したほうが負け）である。これは「先 4 勝ルール」である。ここでは、先に勝敗差（勝ち数―負け数）が 3 になったチームが優勝（すなわち、先に勝敗差が -3 になったほうが負け）とする「先 3 勝敗差ルール」を考える。

以下、「先 3 勝敗差ルール」の下で、A チームと B チームが**毎回独立**に試合を続けるとしよう。**各試合で** A が勝つ確率を p とし、B が勝つ確率を q $(q=1-p)$ とする：

$$P(A=\mathrm{Win})=p, \quad P(B=\mathrm{Win})=q \qquad (0<p<1,\ p+q=1).$$

このとき、A チームが優勝する確率および B チームが優勝する確率を考える。いま、勝敗差（勝ち数―負け数）が n のときから試合を繰り返して A チームが優勝する確率を $f(n)$; $n=-3,-2,-1,0,1,2,3$ とし、B チームが優勝する確率を $g(n)$; $n=-3,-2,-1,0,1,2,3$ とする。**優勝確率** $\{f(n)\}$ および $\{g(n)\}$ はそれぞれ次の 2 階差分方程式を満たす。

定理 4.1　（優勝確率）

$$\text{(i)} \qquad \begin{cases} f(n) = p\cdot f(n+1)+q\cdot f(n-1) & n=-2,-1,0,1,2 \\ f(-3)=0, \quad f(3)=1 \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \qquad \begin{cases} g(n) = p\cdot g(n+1)+q\cdot g(n-1) & n=-2,-1,0,1,2 \\ g(-3)=1, \quad g(3)=0. \end{cases}$$

この解はケース 1: $p\neq\frac{1}{2}$ とケース 2: $p=\frac{1}{2}$ に分かれる。

ケース 1: $p\neq\dfrac{1}{2}$ のとき、

$$f(n)=\frac{r^n-r^{-3}}{r^3-r^{-3}} \qquad g(n)=\frac{r^3-r^n}{r^3-r^{-3}}.$$

ケース 2: $p=\dfrac{1}{2}$ のとき、

$$f(n)=\frac{3+n}{6} \qquad g(n)=\frac{3-n}{6}.$$

さらに、このシリーズが終了するまでの試合数の平均値を考えよう。いま、A チームの勝敗差が n のときから試合を繰り返してどちらかが優勝するまでの試合数の期待値を $v(n);\ n=-3,-2,-1,0,1,2,3$ とする。

定理 4.2 （シリーズ終了までの平均試合数）

$$\begin{aligned} v(n) &= 1+p\cdot v(n+1)+q\cdot v(n-1) \quad n=-2,-1,0,1,2 \\ v(-3) &= v(3) = 0. \end{aligned}$$

この解は次のようになる。

1. $p\neq\dfrac{1}{2}$ のとき、

$$v(n)=\frac{1}{q-p}\left[n-6\frac{r^n-\frac{1}{2}\left(r^3+r^{-3}\right)}{r^3-r^{-3}}\right].$$

2. $p=\dfrac{1}{2}$ のとき、

$$v(n)=3^2-n^2.$$

特に、 0 勝 0 敗から試合を始めて、先 3 勝敗差ルールでシリーズが決着するまでの平均試合数は次の $v(0)$ で与えられる：

$$v(0)=\begin{cases} \dfrac{6}{p-q}\left[\dfrac{1-\frac{1}{2}\left(r^3+r^{-3}\right)}{r^3-r^{-3}}\right] & p\neq\dfrac{1}{2}\text{のとき} \\ 9 & p=\dfrac{1}{2}\text{のとき}. \end{cases}$$

両チームの戦力が均衡しているとき $\left(p=\dfrac{1}{2}\right)$ を考えよう。このとき、「先 3 勝敗差ルール」のもとではシリーズは平均して 9 試合で決着することになる。したがって、このルールの下では日本シリーズを現行の場合よりより長く楽しめるであろう。ちなみに、「先 4 勝ルール」ではリーズが決着すまでの平均試合数は

$$7\cdot\frac{5}{16}+6\cdot\frac{5}{16}+5\cdot\frac{4}{16}+4\cdot\frac{2}{16}=\frac{93}{16}=\text{約}\,5.812\,\text{試合}$$

である。「先 3 勝敗差ルール」では「先 4 勝ルール」より平均して 2 倍長く楽しめると考えられる。

5 線形差分方程式

ここでは、賭博者破産問題に関連した 1 階および 2 階の線形差分方程式の解法を例示的にまとめておこう。

5.1　1 階線形差分方程式

例 1

1. $x(n+1) - x(n) = 0, \quad x(0) = c$ $\qquad (\ x(n) = c \cdot 1^n = c \ )$

2. $x(n+1) - x(n) = 1$ $\qquad (\ x(n) = n + c \ )$

3. $x(n+1) - x(n) = n$ $\qquad (\ x(n) = \frac{1}{2}n(n-1) + c \ )$

4. $x(n+1) - x(n) = n^2$ $\qquad (\ x(n) = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + c \ )$

例 2

1. $x(n+1) - 2x(n) = 0, \quad x(0) = c$ $\qquad (\ x(n) = c \cdot 2^n \ )$

2. $x(n+1) - 2x(n) = 2$ $\qquad (\ x(n) = c \cdot 2^n - 2 \ )$

3. $x(n+1) - 2x(n) = n$ $\qquad (\ x(n) = c \cdot 2^n - n - 1 \ )$

4. $x(n+1) - 2x(n) = n^2$ $\qquad (\ x(n) = c \cdot 2^n - n^2 - 2n - 3 \ )$

5. $y(n+1) - 3y(n) = 1, \quad y(0) = c$ $\qquad (\ y(n) = (\frac{1}{2} + c)3^n - \frac{1}{2} \ )$

6. $y(n+1) - 3y(n) = 1$ $\qquad (\ y(n) = c \cdot 3^n - \frac{1}{2} \ )$

7. $x(n+1) - 2x(n) = -\frac{1}{2}$ $\qquad (\ x(n) = c \cdot 2^n + \frac{1}{2} \ )$

8. $x(n+1) - 2x(n) = c \cdot 3^n$ $\qquad (\ x(n) = c \cdot 3^n + d \cdot 2^n \ )$

5.2　2 階線形差分方程式

例 3

1. $x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = 0$ $\qquad (\ x(n) = c \cdot 1^n + d \cdot 2^n \ )$

2. $x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = 1$ $\qquad (\ x(n) = c \cdot 1^n + d \cdot 2^n - n \ )$

3. $x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = 1$ $\qquad (\ x(n) = c \cdot 2^n + d \cdot 3^n + \frac{1}{2} \ )$

4. $x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = n$ $\qquad (\ x(n) = c \cdot 2^n + d \cdot 3^n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} \ )$

例 4

1. $x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) = 0$ $\qquad (\ x(n) = c + dn \ )$

2. $x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) = 1$ $\qquad (\ x(n) = c + dn + \frac{1}{2}n^2 \ )$

3. $x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) = n$ $\qquad (\ x(n) = c + dn + \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 \ )$

4. $x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = 0$ $\qquad (\ x(n) = c \cdot 2^n + d \cdot n2^n \ )$

5. $x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = 1$ $\qquad (\ x(n) = 2^n(c + dn) + 1 \ )$

6. $x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = n$ $\qquad (\ x(n) = 2^n(c + dn) + n + 2 \ )$

5.3 2点境界値問題

例 5 次の2階線形差分方程式を解け。ただし、変数 n は $n=-2,-1,0,1,2$ を動く。

1.
$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}\cdot f(n+1)+\frac{1}{2}\cdot f(n-1) \\ f(-3) &= 0, \quad f(3)=1. \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} f(n) &= p\cdot f(n+1)+q\cdot f(n-1) \qquad (p\neq\frac{1}{2}) \\ f(-3) &= 0, \quad f(3)=1. \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} v(n) &= 1+\frac{1}{2}\cdot v(n+1)+\frac{1}{2}\cdot v(n-1) \\ v(-3) &= 0, \quad v(3)=0. \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} v(n) &= 1+p\cdot v(n+1)+q\cdot v(n-1) \qquad (p\neq\frac{1}{2}) \\ v(-3) &= 0, \quad v(3)=0. \end{aligned}$$

例 6 2階線形微分作用素 L

$$Lu(n) := p\cdot u(n+1)-u(n)+q\cdot u(n-1) \qquad n=1,2,\dots,N-1$$

を考える。このとき、次の微分方程式を解け。

1. $$Lu = 0, \qquad u(0)=0,\ u(N)=1.$$

2. $$Lb = 0, \qquad b(0)=1,\ b(N)=0.$$

3. $$Lv = -1, \qquad v(0)=v(N)=0.$$

4. $$Lw = 1-2v, \qquad w(0)=w(N)=0.$$

ただし、v は*3*の解である。

参考文献

[1] J. Andel, *Mathematics of Chance*, Wiely, New York, 2001.

[2] R.E. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

[3] R.E. Bellman, *Some Vistas of Modern Mathematics*, University of Kentuky Press, Lexington, KY, 1968.

[4] List of Publications: Richard Bellman, IEEE Transactions on Automatic Control, **AC-26**(1981), No.5(Oct.), 1213-1223.

[5] R.E Bellman, *Eye of the Hurricane: an Autobiography*, World Scientific, Singapore, 1984.

[6] R.E. Bellman and E.D. Denman, *Invariant Imbedding*, Lect. Notes in Operation Research and Mathematical Systems, Vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[7] G. Blom, L. Holst and D. Sandell, *Problem and Snapshots from the World of Probability*, Springer, New York, 1994. (森 真訳:「確率問題ゼミ」、シュプリンガー・フェアラーク東京、1995)

[8] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications Vol.I, 2nd Ed.*, Wiley & Sons, New York, 1957. (河田龍夫監訳:「確率論とその応用 上・下」、紀伊国屋、1963)

[9] A. Hald, *A History of Probability and Statistics and Their Applications Before 1750*, Wiley & Sons, New York, 1990.

[10] 岩本 誠一, 「動的計画論」, 九大出版会, 1987.

[11] S. Iwamoto, Maximizing threshold probability through invariant imbedding, Ed. H.F. Wang and U.P. Wen, Proceedings of The Eighth BELLMAN CONTINUUM, National Tsing Hua University, Hsinchu, ROC, Dec., 2000, 17-22.

[12] S. Iwamoto, Fuzzy decision-making through three dynamic programming approaches, d. H.F. Wang and U.P. Wen, Proceedings of The Eighth BELLMAN CONTINUUM, National Tsing Hua University, Hsinchu, ROC, Dec., 2000, 23-27.

[13] S. Iwamoto, Recursive method in stochastic optimization under compound criteria, *Advances in Mathematical Economics* **3**(2001), 63-82.

[14] S. Iwamoto, K. Tsurusaki and T. Fujita, On Markov policies for minimax decision processes, *J. Math. Anal. Appl.* **253**(2001), 58-78.

[15] 岩本誠一: ミレニアムＯＮシリーズ — 経済効果と優勝確率 —, 経済学研究(九大経済学会)、第６８巻(２００２年) ６号、ｐｐ. １—２９.

[16] E.S. Lee, *Quasilinearization and Invariant Imbedding*, Academic Press, New York, 1968.

[17] A. Maitra and W. Sudderth, *Discrete Gambling and Stochastic Games*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[18] S. Ross, Dynamic programming and gambling models, *Adv. Appl. Prob.* **6**(1974), 593-606.

[19] S. Ross, *Introduction to Stochastic Dynamic Programming*, Academic Press, New York, 1983.

[20] S. Ross, *Stochastic Processes : second edition*, Wiley & Sons, New York, 1996.

[21] S. Ross, *Introduction to Probability Models : seventh edition*, Academic Press, New York, 2000.

[22] M. R. Scott, *Invariant Imbedding and its Applications to Ordinary Differential Equations : An introduction*, Addison-Wesly, London, 1973.

[23] M. Sniedovich, *Dynamic Programming*, Marcel Dekker, Inc. NY, 1992.

[24] N.L. Stokey and R.E. Lucas, *Recursive Methods in Economic Dynamics.* Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1989

{九州大学大学院経済学研究院　教授}