

ミレニアムONシリーズ：経済効果と優勝確率

岩本，誠一

九州大学大学院経済学研究院：教授：経済数学，計画数学，オペレーションズ・リサーチ，動的計画法

<https://doi.org/10.15017/1066>

出版情報：経済學研究. 68 (6), pp.1-29, 2002-10-18. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：



ミレニアムONシリーズ —— 経済効果と優勝確率 ——

岩本 誠 一

概要

本論文では、プロ野球日本シリーズの経済波及効果と優勝確率をマルコフ連鎖を用いて評価する。ダイエーホークスと読売巨人の勝敗数を二項モデルによって表し、期待経済効果および各チームが優勝する確率（絶対確率と条件付き確率）を再帰的に求める。

1 はじめに

2000年プロ野球は日米ともに世紀末にふさわしい決戦になった。

日本シリーズは、王・ダイエーホークス対長嶋・読売巨人のONシリーズである。ON人気的一方、地方対中央の図式にもなっている。ワールド・シリーズはヤンキース対メッツのニューヨーク同士の Subway Series である。メジャーリーグでは実に44年ぶりのニューヨーク対決である。日米ともにミレニアムにふさわしく、異常に前景気を盛り上げている。

シリーズ前には、ONシリーズの経済波及効果や優勝のゆくえなどがマスコミを賑わしている。西日本新聞によると、「経済効果は福岡県内では232億円」とあり、「福岡県統計課によると、県内での実際の経済効果は232億円であった」と平成2000年12月21日NHKから報道された。TBSニュース23では「日本全体として5兆円とも、GDPを1%押し上げるとも」と報道された。「Subway Seriesの経済効果は2億4、500万ドル」と報道された(NHK/BS)。ONシリーズではホークスが4勝2敗で勝つ、Subway Seriesでもヤンキースが4勝2敗で勝つ、など、事前の優勝予想もさまざまな型で取り上げられ、ミレニアム決戦に相応しく日本もニューヨークも雰囲気盛り上げている。

しかし、その数字の根拠となると、あやしい。積算・算出の前提となる仮定や詳細な計算方法など一般には知られていないのが実態である。マスコミを通して発表された数字はいずれも一過的である。ここでは、このように数字だけが一人歩きしているだけの現実に一石を投じる。ただし、確率モデルの立場から数学的に考察する [16-18]。

本論文では、1995年ノーベル経済学賞の対象になった「合理的期待形成仮説」[20]など、近年マクロ経済学や経済数学 [21,22] で用いられる再帰的方法 (recursive method) [11] が、プロ野球・日本シリーズの優勝確率や経済波及効果を導く有効な方法であることを示す。すなわち二項分布に基づいてシリーズの優勝確率、平均試合数、経済効果などを求める再帰的方法を提案する。再帰的方法はいわゆる埋め込み法 (imbedding method, invariant imbedding

method) とも言われ [1-5, 12, 13]、最適化を伴わない動的計画法 (dynamic programming without optimization) である [1, 6-10, 15, 19]。

本論文での再帰的方法は、日本シリーズ、ワールド・シリーズに限らず、競争的關係にある二つのチーム間（個人間、企業間など）において同一ゲームの繰り返しで勝敗を決めるときに、広くあてはまる。日本シリーズやワールド・シリーズは「先（勝）4勝ルール」だが、プレーオフなどの「先（勝）3勝ルール」による優勝決定方式に対しても本論文と同じ考え方が成り立つことが示される。

2 日本シリーズ—ON対決

2.1 日本シリーズ

過去50年間（1951～2000年）の日本シリーズにおいて、何勝何敗で決着したかを調べてみると、以下の表1になる。この表から、各勝敗パターンにおいて、実績値と理論値が

日本シリーズ 決着パターン	過去の 実績値	$p = \frac{1}{2}$ のとき	
		確率	理論値
7戦（4勝3敗）	16回	$\frac{5}{16} = 31.25\%$	15.625
6戦（4勝2敗）	17回	$\frac{5}{16} = 31.25\%$	15.625
5戦（4勝1敗）	12回	$\frac{4}{16} = 25\%$	12.5
4戦（4勝0敗）	5回	$\frac{2}{16} = 12.5\%$	6.25
	50回	100%	50

表1: 1951～2000年の日本シリーズ

極めて類似していることが分かる。ただし、理論値は「セントラル、パシフィックのリーグ優勝チームが互角である ($p = 1/2$)」と仮定している。事実、カイ二乗適合度検定を行うと、

$$\frac{(16 - 15.625)^2}{15.625} + \frac{(17 - 15.625)^2}{15.625} + \frac{(12 - 12.5)^2}{12.5} + \frac{(5 - 6.25)^2}{6.25}$$

$$=: \chi = 0.40 < \chi_3^2(0.05) = 12.84$$

となる。したがって、仮説 $H_0: p = \frac{1}{2}$ は危険率5%で棄却できない。 $\chi = 0.40 < \chi_3^2(0.90) = 0.584$ であるから、 $H_0: p = \frac{1}{2}$ は強く支持できる。「日本シリーズでは両チームが互角である」と仮定するのは妥当である。

両チームの戦力が均衡している ($p = \frac{1}{2}$) とき、シリーズが決着すまでの平均試合数は

$$7 \cdot \frac{5}{16} + 6 \cdot \frac{5}{16} + 5 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{2}{16} = \frac{93}{16} = \text{約} 5.812 \text{ 試合}$$

である。一方、50年間の平均試合数は

$$7 \cdot \frac{16}{50} + 6 \cdot \frac{17}{50} + 5 \cdot \frac{12}{50} + 4 \cdot \frac{5}{50} = \frac{147}{25} = \text{約} 5.880 \text{ 試合}$$

となり、試合数の実績からみても「日本シリーズではセ・パの実力は互角である」ことが裏付けられる。

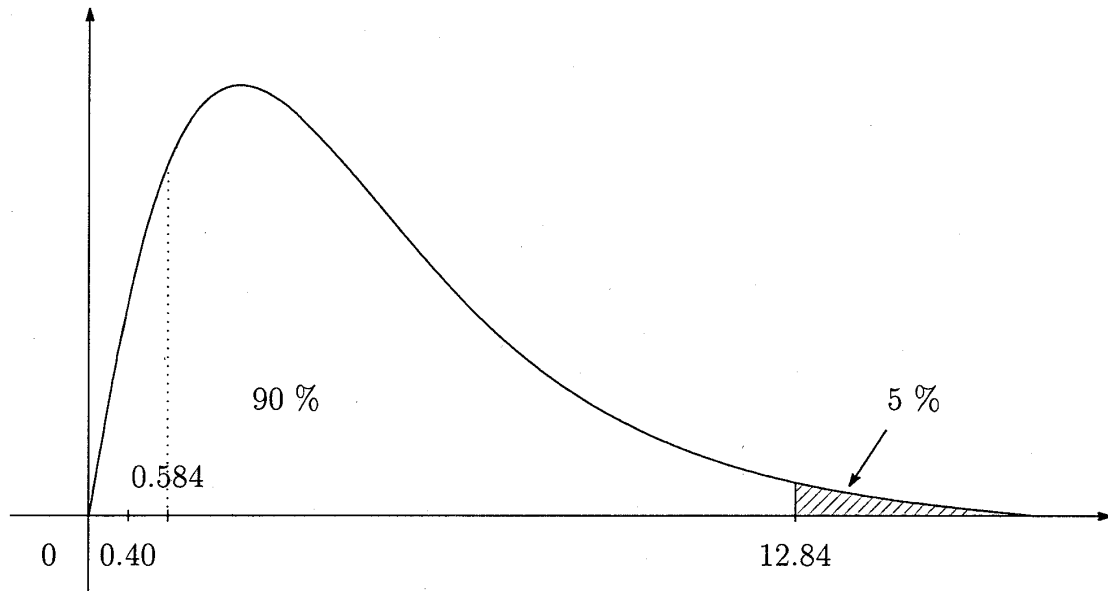


図 1: 自由度 3 の カイ自乗分布

本論文を通じて、ダイエーホークス (Hawks, H) と読売巨人 (Giants, G) が毎回独立に試合をし、各試合でホークス (H) が勝つ確率を p とし、巨人 (G) が勝つ確率を q ($q = 1 - p$) とする:

$$P(H = \text{Win}) = p, \quad P(G = \text{Win}) = q \quad (0 \leq p \leq 1, p + q = 1).$$

ホークス (H) が 4 勝 j 敗で優勝する確率を $q(4, j)$ $j = 0, 1, 2, 3$ とし、巨人 (G) が 4 勝 i 敗で優勝する確率を $q(i, 4)$ $i = 0, 1, 2, 3$ とする。また、ホークス (H) が優勝する確率を q_H とし、巨人 (G) が優勝する確率を q_G とする。このとき、

$$q_H = q(4, 0) + q(4, 1) + q(4, 2) + q(4, 3)$$

$$q_G = q(0, 4) + q(1, 4) + q(2, 4) + q(3, 4)$$

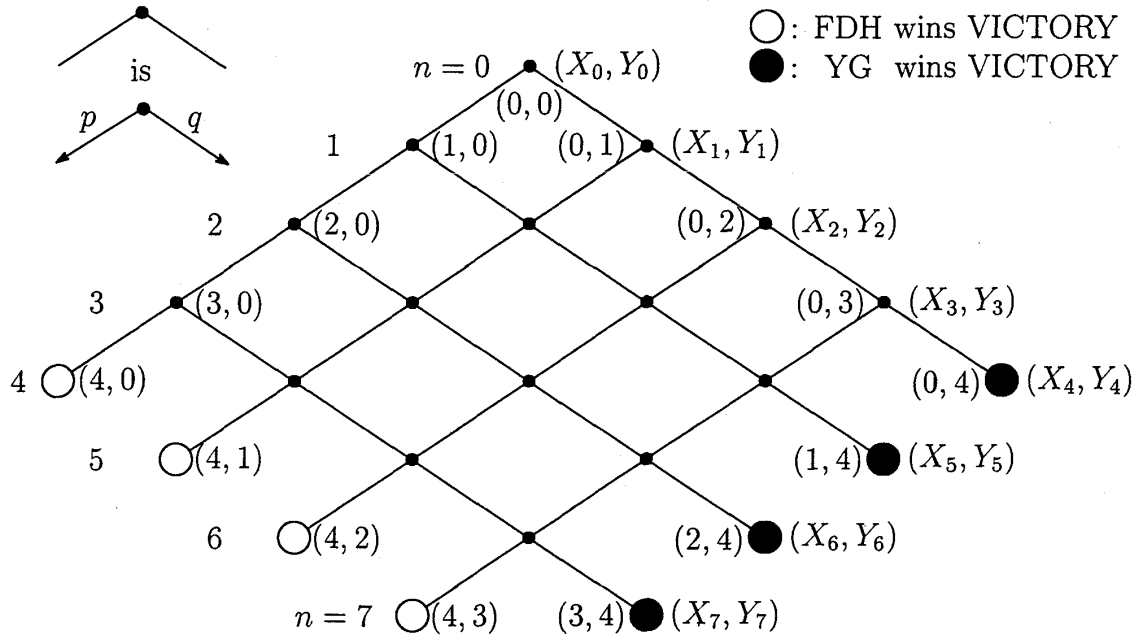


図 2: 日本シリーズ $(X, Y) = \{(X_n, Y_n)\}_0^7$

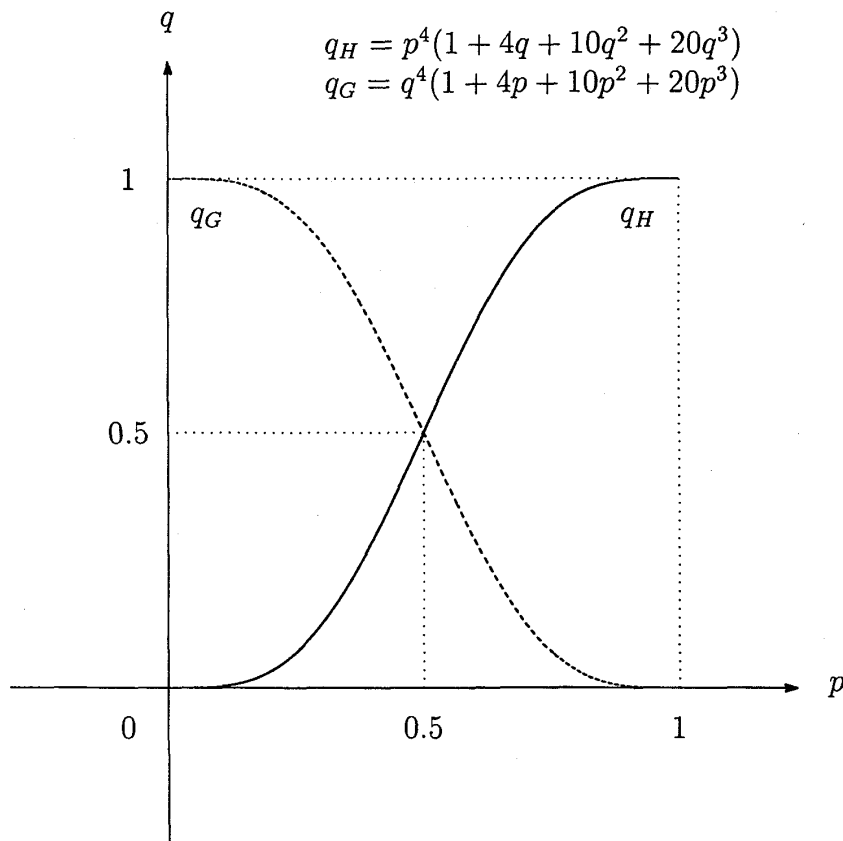


図 3: ホークスの優勝確率 q_H , 巨人の優勝確率 q_G

勝敗	ホークス	巨人
4勝0敗	$q(4, 0) = p^4$	$q(0, 4) = q^4$
4勝1敗	$q(4, 1) = 4p^4q$	$q(1, 4) = 4pq^4$
4勝2敗	$q(4, 2) = 10p^4q^2$	$q(2, 4) = 10p^2q^4$
4勝3敗	$q(4, 3) = 20p^4q^3$	$q(3, 4) = 20p^3q^4$
合計	$q_H = p^4(1 + 4q + 10q^2 + 20q^3)$	$q_G = q^4(1 + 4p + 10p^2 + 20p^3)$

表 2: 優勝確率 1

ホークスが各試合で 勝つ確率 p	ホークスの優勝確率 巨人の優勝確率	
	q_H	q_G
0.80	0.97	0.03
0.70	0.87	0.13
0.60	0.71	0.29
0.50	0.5	0.5
0.45	0.39	0.61
0.35	0.20	0.80
0.25	0.07	0.93

表 3: 優勝確率 2

2.2 組み合わせの数

いま、両チームで $(m+n)$ 試合するとき、ホークス (H) が m 勝 n 敗になる確率を $p(m, n)$ とすると、

$$p(m, n) = {}_{m+n}C_m p^m q^n$$

である。ただし、 ${}_{m+n}C_m$ は $(m+n)$ 個から m 個を選ぶ組み合わせの数である：

$${}_{m+n}C_m := \frac{(m+n)!}{m!n!}.$$

以下本論文では、この組み合わせの数 ${}_{m+n}C_m$ を $c(m, n)$ でも表す：

$$c(m, n) := {}_{m+n}C_m.$$

本論文では $c(m, n)$ は、ホークス (H) と巨人 (G) が $(m+n)$ 試合したとき、ホークス (H) が m 勝 n 敗になる場合の数を表している。これはホークス (H) が n 勝 m 敗になる場合の数でもある：

$$c(m, n) = c(n, m).$$

したがって、 $c(m, n)$ は、両チームとも n 勝 m 敗になる場合の数でもある。すなわち、 c は (m, n) に対して対称である。たとえば、5 試合したとき、3 勝 2 敗になる場合の数はどちらのチームにとっても

$$c(3, 2) = {}_5C_3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

である。いわゆるパスカルの三角数 $\{c(m, n)\}$ は表 4 で表される：

			1						
			$c(0, 0)$						
			1			1			
			$c(1, 0)$			$c(0, 1)$			
			1			2			1
			$c(2, 0)$			$c(1, 1)$			$c(0, 2)$
			1			3			3
			$c(3, 0)$			$c(2, 1)$			$c(1, 2)$
			1			4			6
			$c(4, 0)$			$c(3, 1)$			$c(2, 2)$
			5			10			4
			$c(4, 1)$			$c(3, 2)$			$c(2, 3)$
			15			20			10
			$c(4, 2)$			$c(3, 3)$			$c(2, 4)$
			35			35			5
			$c(4, 3)$			$c(3, 4)$			$c(0, 3)$
									1
									$c(0, 4)$

図 4: パスカルの三角数 $\{c(m, n)\}$

場合の数 $\{c(m, n)\}$ は次の前向き再帰式を満たす。

定理 2.1 (前向き関係式)

$$c(m, n) = c(m - 1, n) + c(m, n - 1) \tag{1}$$

$$c(m, 0) = c(0, n) = 1. \tag{2}$$

再帰式 (1) は三角数の基本関係式である。これは、ホークスが m 勝 n 敗になるのはそれまでに $(m - 1)$ 勝 n 敗しているか m 勝 $(n - 1)$ 敗しているかのいずれかであることを示している。初期条件 (2) は連勝、連敗する場合は 1 通りであることを示している。差分方程式 (1), (2) の解は図 4 で表されている。

このとき上向きに一右多左の関係および一左多右の関係が成り立っている。

系 2.1 (北東和・北西和)

$$c(m, n) = \sum_{j=0}^n c(m-1, j) = \sum_{i=0}^m c(i, n-1)$$

が成り立つ (図 5)。例えば、

$$c(2, 3) = c(1, 0) + c(1, 1) + c(1, 2) + c(1, 3) = c(0, 2) + c(1, 2) + c(2, 2)$$

は

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4 = 1 + 3 + 6$$

になる。

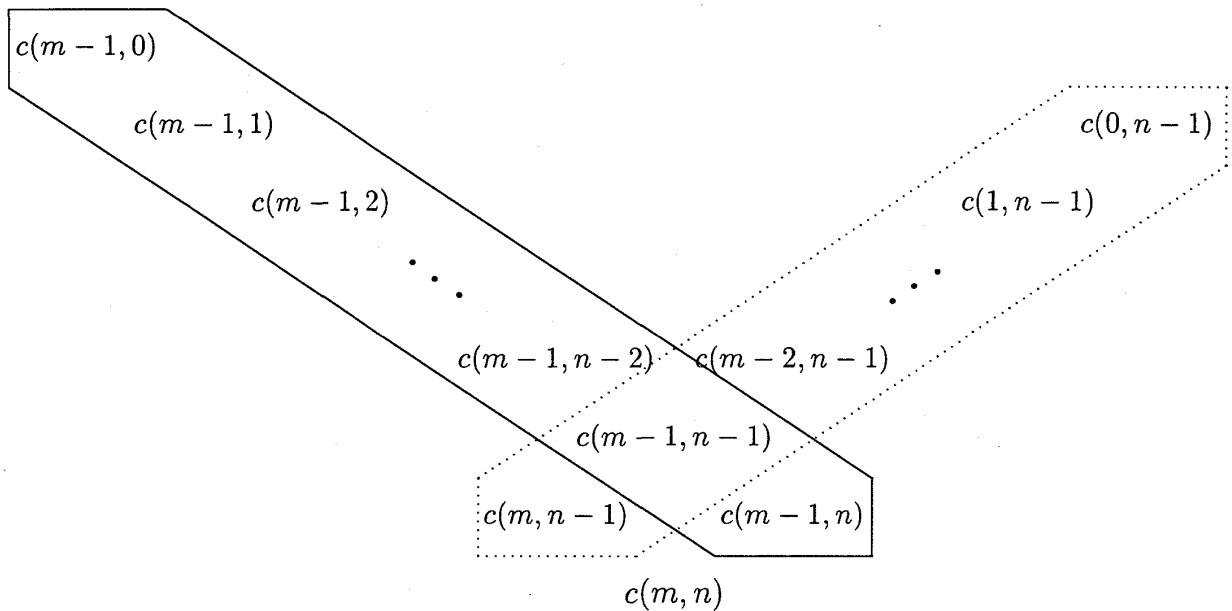


図 5: 北東和・北西和

2.3 勝敗確率

組み合わせの数 $c(m, n)$ を用いると、勝敗確率 $p(m, n)$ は次のように表される：

$$p(m, n) = c(m, n)p^m q^n.$$

たとえば、5 試合したとき、ホークスが 3 勝 2 敗になる確率は

$$p(3, 2) = c(3, 2)p^3 q^2 = 10p^3 q^2$$

である。一般に、二項展開式

$$\begin{aligned}
 1 &= (p + q)^n = c(n, 0)p^n + c(n - 1, 1)p^{n-1}q + c(n - 2, 2)p^{n-2}q^2 + \dots \\
 &\quad + c(2, n - 2)p^2q^{n-2} + c(1, n - 1)pq^{n-1} + c(0, n)q^n \\
 &= p(n, 0) + p(n - 1, 1) + p(n - 2, 2) + \dots \\
 &\quad + p(2, n - 2) + p(1, n - 1) + p(0, n)
 \end{aligned}$$

から、勝敗確率 $\{p(m, n)\}$ が得られる (図 6) :

			1 $p(0, 0)$		
		p $p(1, 0)$		q $p(0, 1)$	
	p^2 $p(2, 0)$		$2pq$ $p(1, 1)$		q^2 $p(0, 2)$
	p^3 $p(3, 0)$	$3p^2q$ $p(2, 1)$		$3pq^2$ $p(1, 2)$	q^3 $p(0, 3)$
p^4 $p(4, 0)$	$4p^3q$ $p(3, 1)$	$6p^2q^2$ $p(2, 2)$		$4pq^3$ $p(1, 3)$	q^4 $p(0, 4)$
	$5p^4q$ $p(4, 1)$	$10p^3q^2$ $p(3, 2)$		$10p^2q^3$ $p(2, 3)$	$5pq^4$ $p(1, 4)$
	$15p^4q^2$ $p(4, 2)$	$20p^3q^3$ $p(3, 3)$		$15p^2q^4$ $p(2, 4)$	
		$35p^4q^3$ $p(4, 3)$		$35p^3q^4$ $p(3, 4)$	

図 6: 勝敗確率 $\{p(m, n)\}$

勝敗確率 $\{p(m, n)\}$ は次の前向き再帰式を満たす。

定理 2.2 (前向き関係式)

$$p(m, n) = p(m - 1, n) \cdot p + p(m, n - 1) \cdot q \tag{3}$$

$$p(m, 0) = p^m, \quad p(0, n) = q^n. \tag{4}$$

前向き再帰式 (3) は、ホークスが m 勝 n 敗になる確率はそれまでに $(m - 1)$ 勝 n 敗して勝つ確率と m 勝 $(n - 1)$ 敗して負ける確率の和であることを示している。初期条件

(4) は連勝、連敗する確率を示している。差分方程式 (3), (4) の解は図 6 で表されている。

さらに、次の関係式が成り立つ。

系 2.2 (北東和・北西和)

$$p(m, n) = p \sum_{j=0}^n p(m-1, j)q^{n-j} = q \sum_{i=0}^m p(i, n-1)p^{m-i}.$$

例えば、

$$p(2, 3) = p(p(1, 0)q^3 + p(1, 1)q^2 + p(1, 2)q + p(1, 3)) = q(p(0, 2)p^2 + p(1, 2)p + p(2, 2))$$

は

$$10p^2q^3 = p(pq^3 + 2pq^2q + 3pq^2q + 4pq^3) = q(q^2p^2 + 3pq^2p + 6p^2q^2)$$

を表している。

2.4 優勝確率

ここでは優勝確率を組み合わせの数および勝敗確率を用いて表そう。組み合わせの数 $c(m, n)$ 、優勝確率 $p(m, n)$ を用いると、各優勝確率は表 3 で表される：

ホークスの優勝確率	勝敗	巨人の優勝確率
$q(4, 0) = p(3, 0) \cdot p = c(3, 0)p^3q^0 \cdot p$	4 勝 0 敗	$q(0, 4) = p(0, 3) \cdot q = c(0, 3)p^0q^3 \cdot q$
$q(4, 1) = p(3, 1) \cdot p = c(3, 1)p^3q^1 \cdot p$	4 勝 1 敗	$q(1, 4) = p(1, 3) \cdot q = c(1, 3)p^1q^3 \cdot q$
$q(4, 2) = p(3, 2) \cdot p = c(3, 2)p^3q^2 \cdot p$	4 勝 2 敗	$q(2, 4) = p(2, 3) \cdot q = c(2, 3)p^2q^3 \cdot q$
$q(4, 3) = p(3, 3) \cdot p = c(3, 3)p^3q^3 \cdot p$	4 勝 3 敗	$q(3, 4) = p(3, 3) \cdot q = c(3, 3)p^3q^3 \cdot q$

表 4: 優勝確率 3

一般に、日本シリーズで優勝するには最後の試合で勝たなければならないのでそれまでに勝ち数だけが 1 つ少ない勝敗数に持ち込まなくてはならない。たとえば、ホークスが 4 勝 2 敗で優勝するには 3 勝 2 敗になって最後の試合で勝つことが必要十分である。したがって、ホークスが 4 勝 2 敗で優勝する確率 $q(4, 2)$ は 3 勝 2 敗になる確率 $p(3, 2)$ に最後の試合で勝つ確率 p の積である：

$$q(4, 2) = p(3, 2) \cdot p = c(3, 2)p^3q^2 \cdot p = 10p^4q^2.$$

いま、優勝確率ベクトル q およびを4試合勝敗確率ベクトル p を

$$q = \begin{pmatrix} q(4,0) \\ q(4,1) \\ q(4,2) \\ q(4,3) \\ q(3,4) \\ q(2,4) \\ q(1,4) \\ q(0,4) \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} p(4,0) \\ p(3,1) \\ p(2,2) \\ p(1,3) \\ p(0,4) \end{pmatrix}$$

で表すと、両確率ベクトルの間には次の線形関係式が成り立つ：

補題 2.1

$$q = Pp$$

ただし

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pq & p^2 & 0 & 0 \\ 0 & pq^2 & 2p^2q & p^3 & 0 \\ 0 & q^3 & 2pq^2 & p^2q & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & pq & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき、行列 P の各列和は 1 であることがわかる。したがって、勝敗確率ベクトル p の列和も 1 であるから、優勝確率ベクトル q の列和も 1 である。すなわち、ホークスの優勝確率 q_H と巨人の優勝確率 q_G の和が 1 であることが示された：

系 2.3

$$q_H + q_G = 1.$$

3 マルコフモデル

この節では、日本シリーズを二項過程から構成されるマルコフ連鎖のとして表し、条件付き優勝確率が満たす再帰式を導いて最終的に両チームの優勝確率を求める。さて、 n 試合したとき、ホークスの勝ち数を X_n とし、巨人の勝ち数を Y_n としよう。このとき、常に和は n である：

$$X_n + Y_n = n \quad n = 0, 1, \dots, 7.$$

両チームの勝ち数の対から成る連鎖 $(X, Y) = \{(X_n, Y_n)\}_0^7$ は状態空間 $\{S_n\}_0^7$ 上のマルコフ連鎖である。ただし、

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(0, 0)\} \\ S_1 &= \{(1, 0), (0, 1)\} \\ S_2 &= \{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\} \\ S_3 &= \{(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)\} \\ S_4 &= \{(4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4)\} \\ S_5 &= \{(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)\} \\ S_6 &= \{(4, 2), (3, 3), (2, 4)\} \\ S_7 &= \{(4, 3), (3, 4)\} \end{aligned}$$

さて、状態空間を2つに分割しよう。まず、優勝が決定するまでの状態の集合 C は

$$\begin{aligned} &(0, 0) \\ &(1, 0), (0, 1) \\ &(2, 0), (1, 1), (0, 2) \\ C := &(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3) \\ &(3, 1), (2, 2), (1, 3) \\ &(3, 2), (2, 3) \\ &(3, 3) \end{aligned}$$

である。 C は次の試合を行う状態集合である。次に、優勝決定状態集合を T とすると、

$$T = \{(4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 4), (1, 4), (0, 4)\}$$

になる。

さて、日本シリーズが始まって終わるまでの経過の全体を考えよう。ここでは、始まりから決着までを経路 (パス path) という。たとえば、ホークスが2連勝4連敗したとする。この経路 ω は

$$\omega = (0, 0), (1, 0), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)$$

で表される。任意の経路は

$$\omega = (0, 0), (i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_{l-1}, j_{l-1}), (i_l, j_l); (i_l, j_l) \in T \quad (5)$$

で表される。シリーズが始まる前からの経路の全体を Ω とする：

$$\Omega := \{\omega \mid \omega \text{ は式 (5) を満たす}\}$$

この要素の数を \mathcal{N} とする：

$$\mathcal{N} := |\Omega|$$

ただし、 $||$ は集合の個数を表す。ホークスが2連勝した時点からの経路 ω は

$$\omega = (2, 0), (i_3, j_3), (i_4, j_4), \dots, (i_{l-1}, j_{l-1}), (i_l, j_l); (i_l, j_l) \in T$$

で表される。一般に、ホークスが i 勝 j 敗した時点からの経路 ω は、 $k := i + j$ として

$$\omega = (i, j), (i_{k+1}, j_{k+1}), (i_{k+2}, j_{k+2}), \dots, (i_{l-1}, j_{l-1}), (i_l, j_l); (i_l, j_l) \in T \quad (6)$$

で表される。ホークスの i 勝 j 敗からの経路の全体を $\Omega(i, j)$ とする：

$$\Omega(i, j) := \{\omega \mid \omega \text{ は式 (6) を満たす}\}$$

ホークス i 勝 j 敗からの経路の (総) 数を $n(i, j)$ とする：

$$n(i, j) := |\Omega(i, j)|.$$

$n(\cdot, \cdot)$ は対称である：

$$n(i, j) = n(j, i).$$

$n(i, j)$ は、ホークスが j 勝 i 敗 (巨人が i 勝 j 敗または j 勝 i 敗) した時点から (どちらかのチームの) 優勝決定までの経路の数でもある。 $\{n(i, j)\}$ は次の後向き再帰式を満たす。

定理 3.1 (後向き関係式)

$$n(i, j) = n(i+1, j) + n(i, j+1) \quad (i, j) \in C \quad (7)$$

$$n(4, j) = n(i, 4) = 1 \quad i, j = 0, 1, 2, 3. \quad (8)$$

再帰式 (7) は、ホークスが i 勝 j 敗した時点からの (どちらかの) 優勝決着までの経路はまず1勝して $(i+1)$ 勝 j 敗からの経路であるか、負けて i 勝 $(j+1)$ 敗からの経路のいずれかであることを示している。終端条件 (8) は優勝が確定していることを示している他にならない。

定理 3.2 (反転関係)

差分方程式 (7), (8) の解は

$$n(i, j) = c(4 - i, 4 - j)$$

である。すなわち、 i 勝 j 敗から優勝決定までの経路総数は、 i 勝 j 敗から4勝4敗までの経路総数である。

証明 一般に i 勝 j 敗から m 勝 n 敗 ($0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$) になるまでの経路の総数は $c(m-i, n-j)$ である。また、 $0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 3$ のとき、ホークスの i 勝 j 敗から優勝が確定するには、ホークスが $(3, j), (3, j+1), \dots, (3, 3)$ のいずれかに持ち込んで最後に勝って優勝するか、または $(3, 3), \dots, (i+1, 3), (i, 3)$ のいずれかになって最後に負けて優勝を逃すかのいずれかである。したがって、 $n(i, j)$ は

$$c(3-i, j-j) + c(3-i, j+1-j) + \dots + c(3-i, 3-j)$$

と

$$c(3-i, 3-j) + \dots + c(i+1-i, 3-j) + c(i-i, 3-j)$$

の和である：

$$n(i, j) = c(3-i, 0) + c(3-i, 1) + \dots + c(3-i, 3-j) \\ + c(3-i, 3-j) + \dots + c(1, 3-j) + c(0, 3-j)$$

さらに、北東和・北西和の関係

$$c(3-i, 0) + c(3-i, 1) + \dots + c(3-i, 3-j) = c(4-i, 3-j) \\ c(3-i, 3-j) + \dots + c(1, 3-j) + c(0, 3-j) = c(3-i, 4-j)$$

を用いると、

$$n(i, j) = c(4-i, 3-j) + c(3-i, 4-j) \\ = c(4-i, 4-j) \tag{9}$$

になる。 Q.E.D.

反転式 3.2 は図 7 に示されている。図 7 はパスカルの三角数と優勝経路数の対を示している。点 (i, j) の左側（イタリック体）の数字は 0 勝 0 敗から i 勝 j 敗になるまでの経路総数 $c(i, j)$ を示し、右側（立体）は i 勝 j 敗から優勝決定までの経路総数を表している。

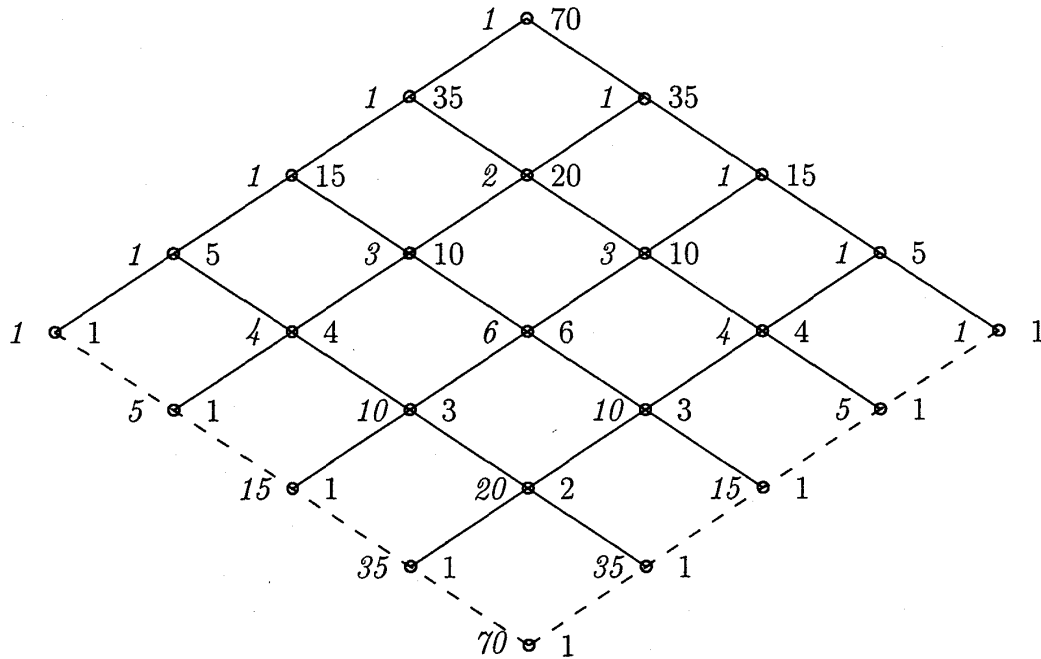


図 7: 三角数・優勝経路数

優勝決定までの経路総数 $\{n(i, j)\}$ は図 8 に示されている。シリーズが始まる前からの経路の総数 \mathcal{N} は

$$\mathcal{N} = n(0, 0) = 70$$

で与えられる。

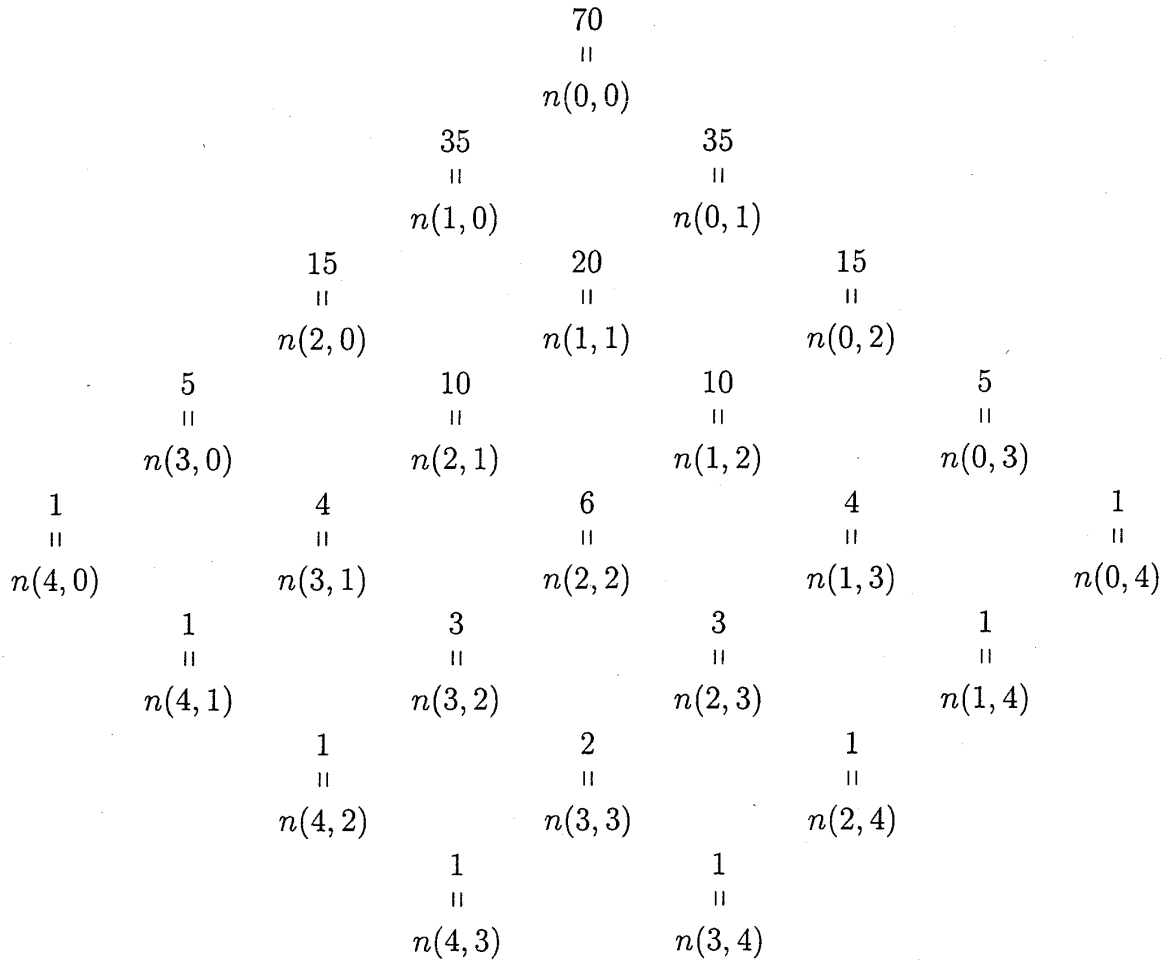


図 8: シリーズ終了までの経路総数 $\{n(i, j)\}$

このとき、下向きに一左多右の関係および一右多左の関係が成り立つ。

系 3.1 (南東和・南西和)

$$n(i, j) = \sum_{k=i}^4 n(k, j+1) = \sum_{l=j}^4 n(i+1, l).$$

ただし、 $n(4, 4) = 1$ とする。

例えば、

$$n(1, 2) = n(1, 3) + n(2, 3) + n(3, 3) + n(4, 3) = n(2, 2) + n(2, 3) + n(2, 4)$$

は

$$10 = 4 + 3 + 2 + 1 = 6 + 3 + 1$$

になる。

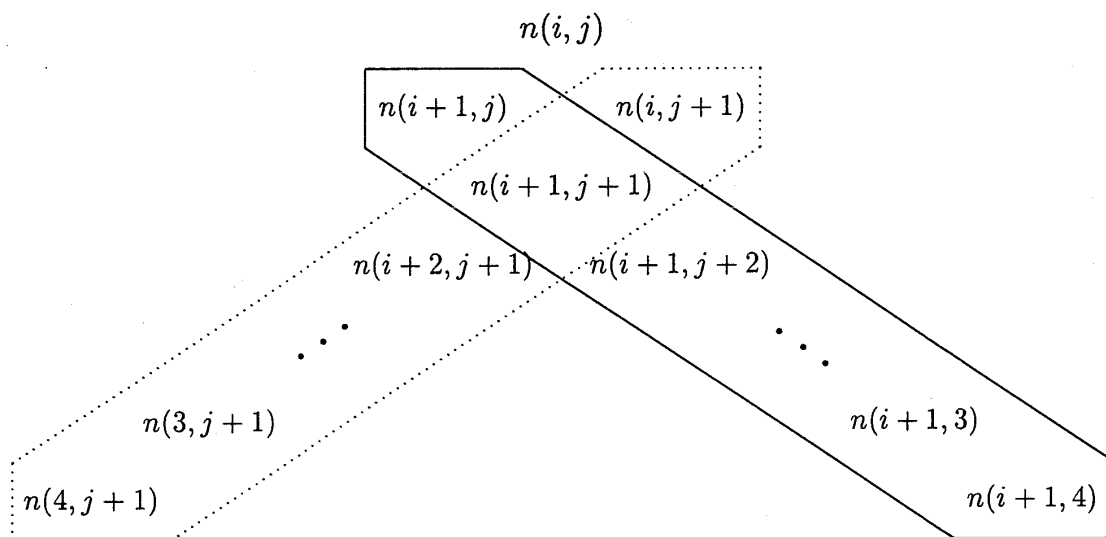


図 9: 南東和・南西和

3.1 条件付き優勝確率

いま、両チームで $(i+j)$ 試合してホークス (H) が i 勝 j 敗になったとき、ホークス (H) が優勝する確率を $h(i, j)$ とし、巨人 (G) が優勝する確率を $g(i, j)$ とする。条件付き優勝確率 $\{h(i, j)\}$ および $\{g(i, j)\}$ はそれぞれ次の後向き再帰式を満たす。

定理 3.3 (後向き関係式)

$$h(i, j) = p \cdot h(i+1, j) + q \cdot h(i, j+1) \quad (i, j) \in C \quad (10)$$

$$h(4, j) = 1 \quad j = 0, 1, 2, 3; \quad h(i, 4) = 0 \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (11)$$

$$g(i, j) = p \cdot g(i+1, j) + q \cdot g(i, j+1) \quad (i, j) \in C \quad (12)$$

$$g(4, j) = 0 \quad j = 0, 1, 2, 3; \quad g(i, 4) = 1 \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (13)$$

後向きの再帰式 (10) は、ホークスが i 勝 j 敗から優勝する確率を示している。それには、勝って $(i+1)$ 勝 j 敗にしてから優勝するか、負けて i 勝 $(j+1)$ 敗になってから優勝するかのいずれかである。終端条件 (11) はどちらかの優勝がすでに確定していることを表している。再帰式 (12), (13) は巨人についてである。

再帰式 (10), (11) を解くと、最後に $h(0, 0)$ が得られる。この $h(0, 0)$ がいわゆるホークスの優勝確率である。同じく、式 (12), (13) から求められる $g(0, 0)$ は巨人の優勝確率である。

定理 3.4

$$h(0, 0) = q_H, \quad g(0, 0) = q_G.$$

言うまでもなく、両チームの優勝確率は常に 1 である：

$$g(i, j) + h(i, j) = 1.$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & p^4(1 + 4p + 10p^2 + 20p^3) \\
 & & & & & \parallel \\
 & & & & & h(0, 0) \\
 & & & & p^3(1 + 3q + 6q^2 + 10q^3) & p^4(1 + 4q + 10q^2) \\
 & & & & \parallel & \parallel \\
 & & & & h(1, 0) & h(0, 1) \\
 & & & p^2(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3) & p^3(1 + 3q + 6q^2) & p^4(1 + 4q) \\
 & & & \parallel & \parallel & \parallel \\
 & & & h(2, 0) & h(1, 1) & h(0, 2) \\
 & p(1 + q + q^2 + q^3) & p^2(1 + 2q + 3q^2) & p^3(1 + 3q) & p^4 \\
 & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\
 & h(3, 0) & h(2, 1) & h(1, 2) & h(0, 3) \\
 1 & & p(1 + q + q^2) & p^2(1 + 2q) & p^3 & 0 \\
 \parallel & & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\
 h(4, 0) & & h(3, 1) & h(2, 2) & h(1, 3) & h(0, 4) \\
 & 1 & & p(1 + q) & p^2 & 0 \\
 & \parallel & & \parallel & \parallel & \parallel \\
 & h(4, 1) & & h(3, 2) & h(2, 3) & h(1, 4) \\
 & & 1 & & p & 0 \\
 & & \parallel & & \parallel & \parallel \\
 & & h(4, 2) & & h(3, 3) & h(2, 4) \\
 & & & 1 & & 0 \\
 & & & \parallel & & \parallel \\
 & & & h(4, 3) & & h(3, 4)
 \end{array}$$

図 10: ホークスの条件付き優勝確率 $\{h(i, j)\}$

系 3.2 (南東和・南西和)

$$h(i, j) = \sum_{k=i}^3 p^{k-i} q \cdot h(k, j+1) + p^{4-i} = \sum_{l=j}^3 q^{l-j} p \cdot h(i+1, l)$$

$$0 \leq i, j \leq 3.$$

4 経済効果

この節では日本シリーズの経済効果を考える。一般に、経済波及効果をどのようにとらえるか、どのように測るかは大変困難が伴う。ここでは経済効果の要因として優勝までの試合数および優勝チームに依存すると解釈し、期待経済効果を考える。

4.1 期待経済効果

いま、ホークスが4勝 j 敗で優勝したときの経済効果を $e(4, j)$, $j = 0, 1, 2, 3$ とし、巨人が4勝 i 敗で優勝したときの経済効果を $e(i, 4)$, $i = 0, 1, 2, 3$ とする。このとき、日本シリーズの期待経済効果 (expected economic effect) E^3 を経済効果の期待値と定義する：

$$E^3 := \sum_{j=0}^3 e(4, j)q(4, j) + \sum_{i=0}^3 e(i, 4)q(i, 4).$$

すなわち、期待経済効果は経済効果と優勝確率の積和である。

定理 4.1 期待経済効果 E^3 は $f(0, 0)$ で与えられる：

$$E^3 = f(0, 0).$$

ただし、 $f(0, 0)$ は以下の再帰式を後向きに解いた最後の値である：

$$f(i, j) = p \cdot f(i+1, j) + q \cdot f(i, j+1) \quad (14)$$

$$f(4, j) = e(4, j) \quad j = 0, 1, 2, 3; \quad f(i, 4) = e(i, 4) \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (15)$$

2000年ONシリーズでは、優勝した巨人には約1億円が、負けたダイエーには約7千万円が日本プロ野球機構からそれぞれ支払われた。この事実を考慮して、優勝したときの経済効果の比を3:2ととらえて、例えば具体的に

$$e(4, j) = 2(4 + j), \quad j = 0, 1, 2, 3; \quad e(i, 4) = 3(i + 4), \quad i = 0, 1, 2, 3$$

とすることもできよう。

4.2 期待値

ここでは、これまで考えてきたホークスの優勝確率、巨人の優勝確率および期待経済効果を数学的な期待値問題として考える。両チームの勝ち数の対から成る連鎖 $(X, Y) = \{(X_n, Y_n)\}_0^7$ は状態空間 $\{S_n\}_0^7$ 上のマルコフ連鎖である。

以下では、優勝が決まるまでの試合数を τ としよう。確率変数 τ は値 4, 5, 6, 7 をとる。その分布は表 5 で示されている。

さて、優勝決定状態集合 T は、

$$T = \{(4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 4), (1, 4), (0, 4)\}$$

優勝までの 試合数 n	優勝決定までの 試合数の確率 $P(\tau = n)$
4	$q(4, 0) + q(0, 4)$
5	$q(4, 1) + q(1, 4)$
6	$q(4, 2) + q(2, 4)$
7	$q(4, 3) + q(3, 4)$

表 5: 優勝決定までの試合数の確率分布

である。仮に、日本シリーズがダイエーの2連勝4連敗で終了したとしよう。すなわち、経路

$$\omega = (0, 0), (1, 0), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)$$

が起こったとする。このとき、勝敗対は

$$(X_0(\omega), Y_0(\omega)) = (0, 0), (X_1(\omega), Y_1(\omega)) = (1, 0), \dots, \\ (X_5(\omega), Y_5(\omega)) = (2, 3), (X_6(\omega), Y_6(\omega)) = (2, 4)$$

であり、試合数は

$$\tau(\omega) = 6$$

である。したがって、

$$(X_{\tau(\omega)}(\omega), Y_{\tau(\omega)}(\omega)) = (X_6(\omega), Y_6(\omega)) = (2, 4)$$

になる。この左辺の ω を1つ省いて簡単に

$$(X_{\tau}(\omega), Y_{\tau}(\omega)) = (2, 4)$$

で表す。

任意の経路 $\omega \in \Omega$ は

$$\omega = (0, 0), (i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_{l-1}, j_{l-1}), (i_l, j_l); (i_i, j_i) \in T$$

で表される。このとき、 $\tau(\omega) = l$ であるから、

$$(X_{\tau}(\omega), Y_{\tau}(\omega)) = (X_l(\omega), Y_l(\omega)) = (i_l, j_l)$$

になる。一般に、 $(X_{\tau}(\omega), Y_{\tau}(\omega))$ は優勝が決まったときの経路 ω に対するホークスの勝ち数と巨人の勝ち数の対である。このとき ω を省略して、確率変数として

$$(X_{\tau}, Y_{\tau})$$

で表す。この対は T の値をとる：

$$(X_{\tau}, Y_{\tau}) : \Omega \rightarrow T.$$

いま、優勝決定状態集合 T 上に経済効果関数 $e: T \rightarrow R^1$ が任意に与えられたとしよう。このとき、確率変数

$$e(X_\tau, Y_\tau) : \Omega \rightarrow R^1$$

は優勝決定による経済効果を表している。 $e(X_\tau, Y_\tau)$ を優勝効果という。この期待値

$$E_{(0,0)}e(X_\tau, Y_\tau).$$

を期待優勝効果という。

定理 4.2 期待優勝効果 $E_{(0,0)}e(X_\tau, Y_\tau)$ は期待経済効果 E^3 に等しい：

$$E_{(0,0)}e(X_\tau, Y_\tau) = E^3.$$

一般に、 $E_{(i,j)}e(X_\tau, Y_\tau)$ はマルコフ連鎖 $\{(X_n, Y_n)\}_0^\tau$ 上での (i, j) からの条件付き期待値である：

$$E_{(i,j)}e(X_\tau, Y_\tau) := E[e(X_\tau, Y_\tau) | (X_{i+j}, Y_{i+j}) = (i, j)].$$

式 (4.2) の条件付き期待値は多重和

$$\sum_{(z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_\tau) \in \Omega(i, j)} \cdots \sum e(z_\tau) p(z_{k+1} | z_k) p(z_{k+2} | z_{k+1}) \cdots p(z_\tau | z_{\tau-1}) \quad (16)$$

で表される。ここに

$$k = i + j, \quad z_n = (i_n, j_n) \in S_n$$

$p(\cdot | \cdot)$ は連鎖 (X, Y) の推移確率である：

$$p(z_{n+1} | z_n) = \begin{cases} p & \text{if } i_{n+1} = i_n + 1, \quad j_{n+1} = j_n \\ q & \text{if } i_{n+1} = i_n, \quad j_{n+1} = j_n + 1 \end{cases} \quad n = k, k+1, \dots, \tau-1.$$

多重和 (16) は $z_k = (i, j)$ からの経路全体

$$\Omega(i, j) (\subset S_{k+1} \times S_{k+2} \times \cdots \times S_6 \times S_7)$$

上でとる。これは、経路確率 $p(z_{k+2} | z_{k+1}) \cdots p(z_\tau | z_{\tau-1})$ と優勝効果 $e(z_\tau)$ との積の、 $n(i, j)$ 個の (総) 和である。特に、 $(i, j) = (0, 0)$ のときは、 $(0, 0)$ からの $\mathcal{N} = n(0, 0) = 70$ 個の経路にわたる和である。たとえば、 $(i, j) = (2, 3)$ のとき、式 (16) は $n(2, 3) = 3$ 項の和

$$e(4, 3)pp + e(3, 4)pq + e(2, 4)q$$

であり、 $(i, j) = (2, 1)$ のときは、 $n(2, 1) = 10$ 項の和

$$\begin{aligned} & e(4, 1)pp + e(4, 2)pqp + e(4, 2)qpp + e(4, 3)pqqp + e(4, 3)qpqp \\ & + e(4, 3)qqpp + e(3, 4)pqqq + e(3, 4)qpqq + e(3, 4)qqpq + e(2, 4)qqq \end{aligned}$$

を表している。

定理 4.3 経済効果関数 $e : T \rightarrow R^1$ が与えられたとする。このとき、条件付き期待経済効果

$$f(i, j) := E_{(i,j)}e(X_\tau, Y_\tau)$$

は定理 4.1 の後向き再帰式 (14),(15) を満たす。

系 4.1 (i) 経済効果関数 $e_H : T \rightarrow R^1$ が特に

$$e_H(4, j) = 1 \quad j = 0, 1, 2, 3; \quad e_H(i, 4) = 0 \quad i = 0, 1, 2, 3$$

のとき、条件付き期待経済効果

$$f_H(i, j) := E_{(i,j)}e_H(X_\tau, Y_\tau)$$

はホークスの条件付き優勝確率である：

$$f_H(i, j) = h(i, j).$$

したがって、 $\{f_H(i, j)\}$ は定理 3.3 の後向き再帰式 (10),(11) を満たす。

(ii) 経済効果関数 $e_G : T \rightarrow R^1$ が特に

$$e_G(4, j) = 0 \quad j = 0, 1, 2, 3; \quad e_G(i, 4) = 1 \quad i = 0, 1, 2, 3$$

のとき、条件付き期待経済効果

$$f_G(i, j) := E_{(i,j)}e_G(X_\tau, Y_\tau)$$

は巨人の条件付き優勝確率である：

$$f_G(i, j) = g(i, j).$$

したがって、 $\{f_G(i, j)\}$ は定理 3.3 の後向き再帰式 (12),(13) を満たす。

4.3 平均試合数

ここでは、日本シリーズが決着するまでの試合数の平均値（平均試合数） N を考えよう。これはシリーズが終了するまでの試合数 τ の期待値である：

$$N := E_{(0,0)}[\tau].$$

補題 4.1

$$\begin{aligned} N &= \sum_{j=0}^3 (4+j)q(4, j) + \sum_{i=0}^3 (i+4)q(i, 4) \\ &= 4 + \sum_{i=1}^3 i(q(4, i) + q(i, 4)). \end{aligned}$$

一般に、ホークスが i 勝 j 敗という条件の下で (のときから)、シリーズ終了までの試合数の期待値 (条件付き平均試合数) を $N(i, j)$ とする :

$$N(i, j) := E_{(i, j)}[\tau].$$

このとき、条件付き平均試合数 $\{N(i, j)\}$ は次の後向き再帰式を満たす。

定理 4.4

$$N(i, j) = 1 + p \cdot N(i+1, j) + q \cdot N(i, j+1) \quad (i, j) \in C \quad (17)$$

$$N(i, j) = 0 \quad (i, j) \in T. \quad (18)$$

再帰式 (17), (18) の解は表 6 に示されている。表 6 では $i \leq j$ なる $(i, j) \in C \cup T$ に対してのみ $N(i, j) := N(i, j : p, q)$ 示しているが、 $i > j$ のときの $N(i, j) = N(i, j : p, q)$ は

$$N(i, j : p, q) = N(j, i : q, p)$$

で与えられる。すなわち、表 6 は $\{N(i, j)\}$ の右半分だけ示しているが、左側は p を q に置き換えれば得られる。

$$\begin{aligned} N(0, 0) &= 4 + 2r + 2r^2 + \frac{5}{2}r^3 \\ N(0, 1) &= 3 + p + (1 + \frac{3}{2}p)r + \frac{1}{2}(1 + 5p)r^2 \\ N(1, 1) &= 3 + \frac{3}{2}r + \frac{3}{2}r^2 & N(0, 2) &= 2(1 + p) + p(1 + 2p)r \\ N(1, 2) &= 2 + p + \frac{1}{2}(1 + 3p)r & N(0, 3) &= 1 + p + p^2 + p^3 \\ N(2, 2) &= 2 + r & N(1, 3) &= 1 + p + p^2 & N(0, 4) &= 0 \\ N(2, 3) &= 1 + p & N(1, 4) &= 0 \\ N(3, 3) &= 1 & N(2, 4) &= 0 \\ N(3, 4) &= 0 \end{aligned}$$

表 6 : シリーズ終了までの平均試合数 $\{N(i, j)\}$ (ただし $r = 2pq$)

特に、 $p = q = \frac{1}{2}$ のとき、シリーズが終わるまでの平均試合数は表 7 で与えられる。

$$\begin{aligned} N(0, 0) &= 93/16 = 5.8125 \\ N(0, 1) &= 77/16 = 4.8125 \\ N(1, 1) &= 33/8 = 4.125 & N(0, 2) &= 28/8 = 3.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(1,2) &= 25/8 = 3.125 & N(0,3) &= 15/8 = 1.875 \\
N(2,2) &= 5/2 = 2.5 & N(1,3) &= 7/4 = 1.75 & N(0,4) &= 0 \\
N(2,3) &= 3/2 = 1.5 & N(1,4) &= 0 \\
N(3,3) &= 1 & N(2,4) &= 0 \\
N(3,4) &= 0
\end{aligned}$$

表7：戦力が互角のとき、シリーズ終了までの平均試合数数 $\{N(i,j)\}$

表7はいくつかの重要な情報を与えている。たとえば、セ・パのリーグ優勝チームが互角で日本シリーズを戦うとき、平均して

$$N(0,0) = \frac{93}{16} = 5.8125 \text{ (試合)}$$

でシリーズは終了することになる。また、2試合終わった時点で、2連勝（2連敗）のとき、ここからシリーズが決着すまでの平均試合数は

$$N(2,0) = \frac{28}{8} = 3.5 \text{ (試合)}$$

である。ちなみに、ミレニアムONシリーズでは（単なる一サンプルに過ぎないが）、ホークス2連勝の後4試合でシリーズが決着している。

さらに、日本シリーズを離れて、戦力が互角の2チームがプレーオフを戦うことを考えよう。このときは、先に3勝したチームが優勝となる（先3勝）ルールである。すなわち、1勝1敗から先に4勝すれば優勝である。したがって、表7より、平均して

$$N(1,1) = \frac{33}{8} = 4.125 \text{ (試合)}$$

でプレーオフは終了することになる。

4.4 総合評価問題

これまでは優勝の効果はチームと決着パターンだけに依存しているとしていた。すなわち、優勝決定状態集合

$$T = \{(4,0), (4,1), (4,2), (4,3), (3,4), (2,4), (1,4), (0,4)\}$$

上で定義された経済効果関数だけの期待値を考察してきた。ここでは、さらに、各試合にも依存する効果も考える。すなわち、シリーズが決着するまでの状態全体の集合上で定義された試合効果関数を導入する。以下では、試合効果と優勝効果の両者を総合評価して考える。

さて、優勝決定までの状態集合

$$\begin{aligned}
&(0,0) \\
&(1,0), (0,1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (2, 0), (1, 1), (0, 2) \\
 C = & (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3) \\
 & (3, 1), (2, 2), (1, 3) \\
 & (3, 2), (2, 3) \\
 & (3, 3)
 \end{aligned}$$

は明日試合を行う状態の集合でもある。状態 $(i, j) \in C$ で試合が行われたとき、その試合の効果を $r(i, j) \in R^1$ としよう。 $r: C \rightarrow R^1$ を試合効果関数という。仮に、日本シリーズがダイエーの2連勝4連敗で終了したとする。すなわち、状態推移

$$\omega = (0, 0), (1, 0), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)$$

が起こったとする。このとき、総合評価は

$$r(0, 0) + r(1, 0) + r(2, 0) + r(2, 1) + r(2, 2) + r(2, 3) + e(2, 4)$$

である。一般に、総合評価関数は

$$\begin{aligned}
 & r(X_0, Y_0) + r(X_1, Y_1) + \cdots + r(X_{\tau-1}, Y_{\tau-1}) + e(X_\tau, Y_\tau) \\
 = & \sum_{t=0}^{\tau-1} r(X_t, Y_t) + e(X_\tau, Y_\tau)
 \end{aligned}$$

で表される。さて、ホークスが i 勝 j 敗のときからの、総合評価の期待値（期待総合評価）を $u(i, j)$ とする：

$$u(i, j) := E_{(i, j)} \left[\sum_{t=i+j}^{\tau-1} r(X_t, Y_t) + e(X_\tau, Y_\tau) \right]$$

期待総合評価 $\{u(i, j)\}$ は次の後向き再帰式を満たす。

定理 4.5

$$\begin{aligned}
 u(i, j) &= r(i, j) + p \cdot u(i+1, j) + q \cdot u(i, j+1) \quad (i, j) \in C \\
 u(i, j) &= e(i, j) \quad (i, j) \in T.
 \end{aligned}$$

注意 (i) 特に、 $e: T \rightarrow R^1$, $r: C \rightarrow R^1$ が

$$e(i, j) = 0, \quad r(i, j) = 1$$

のとき、総合評価はシリーズ終了までの試合日数になる：

$$\sum_{t=0}^{\tau-1} r(X_t, Y_t) + e(X_\tau, Y_\tau) = \tau.$$

したがって、このとき

$$u(i, j) = N(i, j).$$

5 プレーオフ・ルール

この節では、プレーオフなどの「先（勝）3勝ルール」による優勝決定方式の下で優勝確率などを考える。いま、このルールでの優勝確率ベクトル $q(3)$ 、行列 $P(3)$ および3試合勝敗確率ベクトル $p(3)$ をそれぞれ

$$q(3) = \begin{pmatrix} q(3,0) \\ q(3,1) \\ q(3,2) \\ q(2,3) \\ q(1,3) \\ q(0,3) \end{pmatrix} \quad P(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & pq & p^2 & 0 \\ 0 & q^2 & pq & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad p(3) = \begin{pmatrix} p(3,0) \\ p(2,1) \\ p(1,2) \\ p(0,3) \end{pmatrix}$$

で表すと、両確率ベクトルの間には次の線形関係式が成り立つ：

補題 5.1

$$q(3) = P(3)p(3).$$

行列 $P(3)$ の各列和は1であることがわかる。したがって、勝敗確率ベクトル $p(3)$ の列和も1であるから、優勝確率ベクトル $q(3)$ の列和も1である。すなわち、両チームの優勝確率 $q_H(3)$ と $q_G(3)$ の和は1である。

なお、先2勝ルールでは、両確率ベクトルの間には線形関係式：

$$\begin{pmatrix} q(2,0) \\ q(2,1) \\ q(1,2) \\ q(0,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(2,0) \\ p(1,1) \\ p(0,2) \end{pmatrix}$$

が成り立つ。ここでも、行列の各列和、確率ベクトルの列和はともに1であることがわかる。したがって、先2勝ルールでの優勝確率ベクトルの列和も1である。すなわち、両チームの優勝確率の和は1である。

また、先1勝ルールのときは、両確率ベクトルの間には

$$\begin{pmatrix} q(1,0) \\ q(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(1,0) \\ p(0,1) \end{pmatrix}$$

が成り立っている。

6 先 m 勝ルール

この節では、A,Bの2チームが試合を繰り返して先に m 勝した方が優勝とする「先 m 勝ルール」を考える。

先 m 勝ルールで A チームが優勝する確率 $q_A(m)$ は

$$\begin{aligned} q_A(m) &= p(m-1, 0)p + p(m-1, 1)p + \cdots \\ &\quad + p(m-1, m-2)p + p(m-1, m-1)p \\ &= p^m \sum_{k=0}^{m-1} c(m-1, k)q^k. \end{aligned}$$

同じく、B チームが優勝する確率 $q_B(m)$ は

$$\begin{aligned} q_B(m) &= p(0, m-1)q + p(1, m-1)q + \cdots \\ &\quad + p(m-2, m-1)q + p(m-1, m-1)q \\ &= q^m \sum_{k=0}^{m-1} c(k, m-1)p^k. \end{aligned}$$

6.1 条件付き優勝確率

いま、A, B 両チームで $(i+j)$ 試合して A が i 勝 j 敗になったとしよう。このとき、A が優勝（すなわち先に m 勝）する確率を $h^m(i, j)$ とし、B が優勝する確率を $g^m(i, j)$ とする。条件付き優勝確率 $\{h^m(i, j)\}$ および $\{g^m(i, j)\}$ はそれぞれ次の後向き再帰式を満たす。ただし、この小節では以下、 $h(i, j) := h^m(i, j)$, $g(i, j) := g^m(i, j)$ とする。

定理 6.1 (後向き関係式)

$$\begin{aligned} h(i, j) &= p \cdot h(i+1, j) + q \cdot h(i, j+1) \\ h(m, j) &= 1 \quad j = 0, \dots, m-1; \quad h(i, m) = 0 \quad i = 0, \dots, m-1. \\ g(i, j) &= p \cdot g(i+1, j) + q \cdot g(i, j+1) \\ g(m, j) &= 0 \quad j = 0, \dots, m-1; \quad g(i, m) = 1 \quad i = 0, \dots, m-1. \end{aligned}$$

この解は次で与えられる：

$$h(i, j) = p \sum_{k=0}^{m-1-j} p(m-1-i, k).$$

これは次のことを示している。 i 勝 j 敗から先に m 勝するには、ある k ($0 \leq k \leq m-1-j$) に対して $(m-1-i)$ 勝 k 敗して最後に勝つことが必要十分である。

7 先 m 勝先 n 敗ルール

いま、自然数の対 (m, n) が与えられているとする。A, B 両チームで試合を繰り返し行うとき、先 m 勝先 n 敗ルールで優勝を決める。すなわち、A チームが先に m 勝したとき、

Aチームが優勝とする。このとき、Bチームは優勝戦に負けとする。また、Bチームが先に n 勝したとき、Bの優勝とし、Aの負けとする。たとえば、先3勝先4敗ルールでは、Aチームが3勝0敗、3勝1敗、3勝2敗、3勝3敗のいずれかになった時点で、Aチームの優勝になり、Bチームが負けになる。また逆にAチームが0勝4敗、1勝4敗、2勝4敗のいずれかになったとき、Bチームが優勝し、Aチームが負けとなる。先 m 勝先 m 敗ルールは先 m 勝ルールである。先 m 勝先 n 敗ルールでAチームが優勝する確率 $q_A(m, n)$ は

$$q_A(m, n) = p(m-1, 0)p + p(m-1, 1)p + \cdots \\ + p(m-1, n-2)p + p(m-1, n-1)p$$

同じく、Bチームが優勝する確率 $q_B(m, n)$ は

$$q_B(m, n) = p(0, n-1)q + p(1, n-1)q + \cdots \\ + p(m-2, n-1)q + p(m-1, n-1)q$$

7.1 条件付き優勝確率

いま、A, B両チームで $(i+j)$ 試合してAが i 勝 j 敗になったとする。このとき、Aが優勝（すなわち、先に m 勝）する確率を $h_n^m(i, j)$ とし、Bが優勝（すなわち、先に n 勝）する確率を $g_n^m(i, j)$ とする。条件付き優勝確率 $\{h_n^m(i, j)\}$ および $\{g_n^m(i, j)\}$ はそれぞれ次の後向き再帰式を満たす。以下の小節では、 $h(i, j) := h_n^m(i, j)$, $g(i, j) := g_n^m(i, j)$ で表す。

定理 7.1 (後向き関係式)

$$h(i, j) = p \cdot h(i+1, j) + q \cdot h(i, j+1) \\ h(m, j) = 1 \quad j = 0, \dots, n-1; \quad h(i, m) = 0 \quad i = 0, \dots, m-1. \\ g(i, j) = p \cdot g(i+1, j) + q \cdot g(i, j+1) \\ g(m, j) = 0 \quad j = 0, \dots, n-1; \quad g(i, n) = 1 \quad i = 0, \dots, m-1.$$

この解は次のように表される：

$$h(i, j) = p \sum_{k=0}^{n-1-j} p(m-1-i, k).$$

参考文献

- [1] R.E. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

- [2] R.E. Bellman, *Some Vistas of Modern Mathematics*, University of Kentucky Press, Lexington, KY, 1968.
- [3] List of Publications: Richard Bellman, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-26**(1981), No.5(Oct.), 1213-1223.
- [4] R.E Bellman, *Eye of the Hurricane: an Autobiography*, World Scientific, Singapore, 1984.
- [5] R.E. Bellman and E.D. Denman, *Invariant Imbedding*, Lect. Notes in Operation Research and Mathematical Systems, Vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [6] K. Hinderer, *Foundations of Non-Stationary Dynamic Programming with Discrete Time Parameter*, Lect. Notes in Operation Research and Mathematical Systems, Vol. 33, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [7] R. A. Howard, *Dynamic Programming and Markov Processes*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1960.
- [8] 岩本 誠一, 「動的計画論」, 九大出版会, 1987.
- [9] S. Iwamoto, Maximizing threshold probability through invariant imbedding, Ed. H.F. Wang and U.P. Wen, *Proceedings of The Eighth BELLMAN CONTINUUM*, National Tsing Hua University, Hsinchu, ROC, Dec., 2000, 17-22.
- [10] S. Iwamoto, Fuzzy decision-making through three dynamic programming approaches, d. H.F. Wang and U.P. Wen, *Proceedings of The Eighth BELLMAN CONTINUUM*, National Tsing Hua University, Hsinchu, ROC, Dec., 2000, 23-27.
- [11] S. Iwamoto, Recursive method in stochastic optimization under compound criteria, *Advances in Mathematical Economics* **3**(2001), 63-82.
- [12] 岩本誠一、津留崎和義: 最大値過程について, 短期共同研究「不確実モデルによる動的計画理論の課題とその展望」、京大数理研講究録1207、2001年5月、pp. 101—113.
- [13] E.S. Lee, *Quasilinearization and Invariant Imbedding*, Academic Press, New York, 1968.
- [14] H. Ozaki and P.A. Streufert, Dynamic programming for non-additive stochastic objects, *J. Math. Eco.* **25**(1996), 391-442.
- [15] M. L. Puterman, *Markov Decision Processes : discrete stochastic dynamic programming*, Wiley & Sons, New York, 1994.
- [16] S. Ross, *Introduction to Stochastic Dynamic Programming*, Academic Press, New York, 1983.
- [17] S. Ross, *Stochastic Processes : second edition*, Wiley & Sons, New York, 1996.

- [18] S. Ross, *Introduction to Probability Models : seventh edition*, Academic Press, New York, 2000.
- [19] M. Sniedovich, *Dynamic Programming*, Marcel Dekker, Inc. NY, 1992.
- [20] N.L. Stokey and R.E. Lucas, *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1989
- [21] P.A. Streufert, Abstract recursive theory, *J. Math. Anal. Appl.* **175**(1993), 169-185.
- [22] P.A. Streufert, Recursive Utility and Dynamic Programming. In: Barberà, S. et al. (eds.): *Handbook of Utility Theory Vol. 1*, Kluwer, Boston, 1998, Chap. III

{九州大学大学院経済学研究院 教授}