A Study on Non-Photorealistic Rendering Technique for Visualization of Dyeing Cloth

森本, 有紀
九州大学大学院芸術工学府

https://doi.org/10.15017/10322

出版情報：九州大学, 2007, 博士（芸術工学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

附録２．　拡散方程式の離散化

本研究では４．３．２では拡散係数が一定であるものとして（※）離散化した拡散方程式、５．３．１では拡散係数が可変であるものとして離散化した拡散方程式を用いている。これらの離散化の過程をここでは説明する。

拡散方程式の本来の定義は式Ａ２－１で与えられる。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \qquad (\text{A}2-1)$$

式Ａ２－１を数学的に変形すると以下のようになる。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+D\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \qquad (\text{A}2-2)$$

ここで、拡散係数が空間的に不変の場合、つまり$\frac{\partial D}{\partial x}=0$の場合、式Ａ２－２は以下のようになる。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+D\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

$$=D\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \qquad (\text{A}2-3)$$

多くの場合拡散係数は空間的に不変であるので、式Ａ２－３が一般的に用いられる。

式Ａ２－３を離散化すると、以下のようになる。

$$\frac{\varphi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{t+1}}-\varphi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{t}}}{\Delta t}=D\frac{\varphi_{\mathrm{i+1}}^{\mathrm{t}}-2\varphi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{t}}+\varphi_{\mathrm{i-1}}^{\mathrm{t}}}{\Delta x^2} \qquad (\text{A}2-4)$$

これはもはや定義であると捉えてもよい。簡単に何故こうなるかを以下に説明する。

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ の部分を離散化する際、$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$として２段階に分けて離散化する。これを中心差分で単純に離散化すると、

$$\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{\mathrm{i+1}}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{\mathrm{i-1}}}{2\Delta x}=\frac{1}{2\Delta x}\left(\frac{\varphi_{\mathrm{i+2}}-\varphi_{\mathrm{i}}}{2\Delta x}-\frac{\varphi_{\mathrm{i}}-\varphi_{\mathrm{i-2}}}{2\Delta x}\right)=\frac{\varphi_{\mathrm{i+2}}-2\varphi_{\mathrm{i}}+\varphi_{\mathrm{i-2}}}{4\Delta x^2} \qquad (\text{A}2-5)$$

となり、二つ隣のセルを参照することになる。しかし参照するセルはできるだけコンパ

クトな方が望ましいので、$\frac{\varphi_{i+2}-2\varphi_i+\varphi_{i-2}}{4\Delta x^2}$ではなく、$\frac{\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1}}{\Delta x^2}$を用いる。つまり、導出過程を書き直すと、

$$\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2}}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{\Delta x}-\frac{\varphi_i-\varphi_{i-1}}{\Delta x}\right)=\frac{\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1}}{\Delta x^2} \qquad \text{（A２－６）}$$

となっていると考えられる。

次に、拡散係数が空間的に不変ではない場合を考える。この場合、式Ａ２－１をそのまま離散化する。

$$\frac{\varphi_i^{t+1}-\varphi_i^t}{\Delta t}=\frac{\left(D\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2}}-\left(D\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left(D_{i+\frac{1}{2}}\frac{\varphi_{i+1}^t-\varphi_i^t}{\Delta x}-D_{i-\frac{1}{2}}\frac{\varphi_i^t-\varphi_{i-1}^t}{\Delta x}\right) \qquad \text{（A２－７）}$$

なお、拡散係数が空間的に不変である場合は、普遍でない場合のある特殊な状況であると考えられるので、式Ａ２－３のように変形してから離散化する代わりに式Ａ２－１を式Ａ２－７のように離散化してから拡散係数が定数であるという条件を加えても良い。つまり、任意のｉに対して$D_i=D$となるので、式Ａ２－７より、

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_i^{t+1}-\varphi_i^t}{\Delta t}&=\frac{1}{\Delta x}\left(D_{i+\frac{1}{2}}\frac{\varphi_{i+1}^t-\varphi_i^t}{\Delta x}-D_{i-\frac{1}{2}}\frac{\varphi_i^t-\varphi_{i-1}^t}{\Delta x}\right)\\&=\frac{1}{\Delta x}\left(D\frac{\varphi_{i+1}^t-\varphi_i^t}{\Delta x}-D\frac{\varphi_i^t-\varphi_{i-1}^t}{\Delta x}\right)\\&=D\frac{\varphi_{i+1}^t-2\varphi_i^t+\varphi_{i-1}^t}{\Delta x^2}\end{aligned} \qquad \text{（A２－８）}$$

となる。これは式Ａ２－４と等しい。

※４．３．２では拡散係数が一定のものとして離散化した拡散方程式を用いているが、実際には使用する拡散係数は一定ではない。このため、第四章のモデルでは使用する拡散係数の値のばらつきの幅が大きいと計算が不安的になりやすい。