

空気防波堤の研究に就いてVI : 深水に於ける気泡噴流に就いて

応用力学研究所水文学研究委員会

<https://doi.org/10.15017/4743373>

出版情報 : 應用力學研究所所報. 13, pp.39-54, 1959. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :

空 気 防 波 堤 の 研 究 に 就 いて VI

深 水 に 於 ける 気 泡 噴 流 に 就 いて*

応用力学研究所水文学研究委員会

概 要

或深さに設置された多孔管から放出される気泡群は、上昇に伴つてその容積が増加してゆく。このような場合の気泡噴流の研究は実際の空気防波堤に対して極めて重要である。然しながら、その理論的な取り扱いが困難であつたために、今日までは容積変化を無視して自由熱対流の場合に比較して、それに関する W. Schmidt の理論計算の結果を利用していた。

容積不変の場合には、相似則の仮定のもとに、運動量及び気泡密度の拡散に関する基礎偏微分方程式を常微分方程式に帰することが出来る。Schmidt はこの基礎方程式を解いたのである。

容積変化を伴う場合にも、相似則の仮定を一般的形式で用いるならば、同じように基礎偏微分方程式を常微分方程式に帰著させるような一組の変数変換式が一義的に定められる。然もその結果得られる基礎方程式は容積不変に対するものと全く同じである。従つて Schmidt の計算結果を利用して、問題の吟味を行うことが出来る。

1. 緒 言 水槽の底に横えられた多孔管から空気を放出すると、沢山の気泡が発生する。これ等は浮力のために上昇する。その際に水槽の水は誘導されて上昇流を惹す。気泡群は、この上昇水流に伴う乱れに依つて攪散されつつ上昇して、ここに気泡噴流が出現するのである。

一般には、気泡は十分に細かくないので、気泡自身とその周囲の流体に対して相対的な上昇運動をするために、現象は複雑であつて、理論的取扱いは困難である。若し気泡が十分に細くて、その終速度が水流の速さに較べて無視出来るような場合には、問題は簡単になる。即ち、気泡を含んだ部分の水の密度が、含んでいる気泡に応じて軽くなり、この水に浮力が作用していることになる。従つて、例えば、熱線に依つて水が熱せられるとき起る自然対流の場合と力学的には全く同じになる。従つて、熱対流に就いての Wilhelm Schmidt¹⁾ の理論及び実験的研究の結果を利用することが出来る。

彼の理論によれば、気泡噴流は上昇と共に直線的に拡つてゆく。その中心線に沿つて、上昇速度は、多孔管からの距離に関係なく一定であつて、空気消費量の立方根に比例することが知られる。

扱て、空気防波堤の実際のように海底に多孔管を布設する場合には、上記のような熱対流と気泡噴流の対応は成立しなくなる。海底で放出された気泡は、上昇するに従つて水圧

* この稿の責任は栗原道徳にある。

¹⁾ W. Schmidt, Z. angew. Math. Mech. 21, 265, 1941.

G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. A, 231, 466, 1955.

の減少のため、容積は増大する。従つて流体に作用する浮力は増大する。その結果、流れの状態は上昇と共に変化してゆく筈である。果して、浮力の増加のために流速は増大するであろうか、或は又、増加した空気量が左右へ拡散するために、気泡噴流は直線法則以上の割合で拡つてゆくだろうか。これ等の問題は、実験水槽と現地実験に於ける空気防波堤の性質を比較する上に極めて重要である。

実際、空気防波堤の寸法効果に関する要素として、parameter ξ の重要性を指摘してきたが、最近の精度のよい水槽実験の結果によると、現地実験と水槽実験の相違は ξ のみに依つては説明されないことが明かになつてきた。²⁾ 直接に多孔管の深度が重要な役割をもっていることが要求されるのである。

現在の知識の程度に於ては、先づ気泡噴流の機構にその要因を探ることが望まれるのである。このような意味に於て、吾々はこの論文に於て、気泡の容積は充分に小さくて気泡群と流体との相対運動は全く無視出来るが、それは深さと共に変化すると言う理想的な場合に就いて気泡噴流の問題を流体力学的に吟味しようとするものである。

2. 容積不変の場合の気泡噴流 実際の気泡噴流では、気泡が大きいために、誘導水流に対する気泡群の相対速度が無視されないとか、気泡群の数が不十分なために、充分な拡散が行われれないと言つた事のために問題は大変に複雑となつて、解析的な取り扱いはずんど不可能となる。気泡が極めて小さくて、その運動に関する抵抗係数が充分に大きく、浮力は流体に作用する body force と考えられる程であり、更に数が充分に多くて、統計的にその拡散運動が取り扱えるような場合には問題は大変に簡単になつて、流体力学的に取り扱うことが出来る。ここでは、このような理想的な場合に就いて考察することとする。

多孔管は直線で無限に長く、運動は 2 次元であるとする。自由表面の影響は無視することが出来て、気泡噴流は限りなく上方に、左右に拡つてゆくことが出来るものとする。

水深が浅いとか、或は考える範囲が狭いとか言う理由で、気泡の容積変化が無視される場合に就いては既に論文 I、第 8、9 節に於て解説されて居り、又 W. Schmidt の熱対流に関する研究がそのまま利用される。これは 1 つの基準となるので、重複するが、容積変化のある場合へそのまま応用出来るような一般の形式に於て、ここに説明することにする。

直径 D なる無限に長い多孔管が水平に設置されて居るとする。その中心軸を z 軸にとり、これに直角水平方向に y 軸を、鉛直上方に x 軸をとる。状態は総て z に無関係だとする。

上昇流は流体中の気泡の浮力に依つて誘起されるのであるから、吾々は単位体積中の気

²⁾ 未発表。水槽実験での消波性能は現地実験のものに較べて著しく悪い。

泡群の容積 q (以下これを気泡密度と呼ぶ) と上昇流の速度 (U, V) とを併せ考えねばならない。

K を噴流に伴う乱れの拡散係数 (運動量及び気泡密度に就いても同一であると仮定する) とし, g を重力の加速度とするならば, 運動量, 流体質量及び空気量 (容積) の保存則は次の如くなる:

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial U}{\partial y} \right) + qg, \\ U \frac{\partial q}{\partial x} + V \frac{\partial q}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial q}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.1)^3$$

この一組の微分方程式を解くに当つての補助条件として, 噴流の各断面を通じての運動量と空気量の保存則がある。即ち

$$\int_{-\infty}^{\infty} U^2 dy = \int_0^x \int_{-\infty}^{\infty} gq \, dx dy, \dots\dots\dots (2.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} q U dy = Q, \dots\dots\dots (2.3)$$

茲に, Q は多孔管の単位の長さ毎に, 毎秒放出される空気の容積である。(2.2) は (2.1) の第1式を積分すれば得られるもので, 独立したものではない。

偏微分方程式の一組 (2.1) を解くに当つて, 吾々は普通のように, similarity の仮定を用いる。この仮定を用いることに依つて偏微分方程式を常微分方程式に帰着出来るときに, この方法は有効なのである。

その物理的な意味は次の通りである: 多孔管から充分離れた点 ($x/D \gg 1$) に於ける jet の断面の状態は総て相似的であると考えられる。即ち, 噴気孔から暫くの間は気泡の噴出の状態が現象全体に対して著しく支配的であろうが, 少しく遠方に行くと, 周囲からの流体の吸込みが主要な要素になり, 従つて初期の条件の影響は次第に薄らいで, 総ての断面に就いて相似的な状態が出現するものと考えられる。

数学的には, 各断面に於ける流速及び気泡密度の分布は相似的に, 幅 b を以つて測られた距離 y/b のみの函数に依つて現わされることである。それ等の比例係数は x のみの函数であつて, その函数を適当に選ぶと, (2.1) は y/b のみに関する常微分方程式となる。このような時にこの方法は有効なのである。

今考えている場合には, similarity の仮定は

$$U, V \propto u\left(\frac{y}{x}\right), v\left(\frac{y}{x}\right); \quad q = \frac{f(y/x)}{x}, \quad b \propto x \dots\dots\dots (2.4)$$

³⁾ 気泡密度は普通には非常に小さいので, これ等の式の誘導に際して1に対して q を無視している。

を与える。(2.4) を (2.1) に代入すれば, y/x のみに 関する微分 方程式となり, (2.2), (2.3) は代表的な流速 U_0 に就いて

$$U_0 = \text{const. } [gQ]^{1/3} \dots\dots\dots (2.5)$$

を与える.

扱て, (2.4) を導くに際して吾々は 比例係数は x の exponent で表はされることを仮定している. 従つて, similarity の仮定に対して (2.4) が一義的なものであることは証明されていない. 以下に於ては, 容積変化を伴う場合に拡張することが出来るように, もつと一般的に similarity の仮定を忠実に数学的に表はし, (2.4) が必要且つ充分なる解であることを示そう.

乱流拡散係数 K は y 方向の渦擾速度成分 V' と混合距離 l との積に等しい. この混合距離は similarity の仮定に従つて jet の幅 b に比例する.

Similarity の仮定は一般的に次の如くに表はされる:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{y}{b(x)}, & b &= b(x), & l &= \beta b(x), \\ q &= f(x)\theta(\eta), & U &= U_0(x)u(\eta), & V &= V_0(x)v(\eta), \\ V' &= V_0(x)v'(\eta), & K &= \beta V_0(x)b(x)v'(\eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.6)$$

これを (2.1) に代入すれば,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_0}{dx} u^2 - U_0 \frac{db}{b dx} \eta u \frac{du}{d\eta} + \frac{V_0}{b} v \frac{du}{d\eta} &= \beta \frac{V_0}{b} \frac{d}{d\eta} \left(v' \frac{du}{d\eta} \right) + g \frac{f}{U_0} \theta, \\ \frac{df}{dx} u \theta - \frac{f db}{b dx} \eta u \frac{d\theta}{d\eta} + \frac{V_0}{U_0} \cdot \frac{f}{b} \cdot v \frac{d\theta}{d\eta} &= \beta \frac{f V_0}{b U_0} \frac{d}{d\eta} \left(v' \frac{d\theta}{d\eta} \right), \\ \frac{dU_0}{dx} u - \frac{U_0 db}{b dx} \cdot \eta \frac{du}{d\eta} + \frac{V_0}{b} \frac{du}{d\eta} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.7)$$

を得る.

(2.7) が η のみに 関する常微分方程式となるためには, $c_1, c_2, c_3, c_4, e_1, e_2, e_3$ を常数, $A_1(x), A_2(x)$ を x の未知函数として, 次の関係が成立しなければならない.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_0}{dx} &= c_1 A_1, & \frac{U_0 db}{b dx} &= c_2 A_1, & \frac{V_0}{b} &= c_3 A_1, & g \frac{f}{U_0} &= c_4 A_1, \\ \frac{df}{dx} &= e_1 A_2, & \frac{f db}{b dx} &= e_2 A_2, & \frac{V_0 f}{U_0 b} &= e_3 A_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.8)$$

補助条件 (2.2), (2.3) は次の如くなる:

$$\left. \begin{aligned} U_0^2 b \int_0^\infty u^2 d\eta &= \int_0^\infty g b f dx \cdot \int_0^\infty \theta d\eta, \\ 2 f U_0 b \int_0^\infty u \theta d\eta &= Q \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.9)$$

(2.8) を解いて

$$U_0 = kb^{c_1/c_2}, f = k' b^{e_1/e_2}, V_0 = k'' g b^{\frac{e_1}{e_2} - \frac{c_1}{c_2} + 1} \dots\dots\dots(2.10)$$

及び

$$b^{2\frac{c_1}{c_2} - \frac{e_1}{e_2} - 1} \frac{db}{dx} = k''' g \dots\dots\dots(2.11)$$

を得る。或は積分して

$$b = \left\{ \left(2\frac{c_1}{c_2} - \frac{e_1}{e_2} \right) \cdot k''' g \right\}^{\frac{1}{2\frac{c_1}{c_2} - \frac{e_1}{e_2}}} \cdot x^{\frac{1}{2\frac{c_1}{c_2} - \frac{e_1}{e_2}}} \dots\dots\dots(2.11)'$$

となる。茲に k, k' は未知の積分常数, k'', k''' は c_3, c_4 に代る常数である。

他方 (2.9) が (2.10) の条件のもとに (2.11) と矛盾なく成立つためには,

$$\frac{c_1}{c_2} + \frac{e_1}{e_2} + 1 = 0 \dots\dots\dots(2.12)$$

なることが必要である。

吾々は (2.8) からは $c_1/c_2, e_1/e_2$ の各々の値を定めるべき他のもう1つの条件を引き出すことは出来ない。そこで “velocity の similarity 法則は方向に無関係である” を plausible assumption として採用するならば

$$U_0 \propto V_0, \dots\dots\dots(2.13)$$

従つて, (2.10) により

$$\frac{e_1}{e_2} - 2\frac{c_1}{c_2} + 1 = 0 \dots\dots\dots(2.14)$$

を得る。

斯くて

$$c_1/c_2 = 0, e_1/e_2 = -1 \dots\dots\dots(2.15)$$

即ち, (2.10), (2.11) に於ける指数を決定することが出来たのである。

ここに於て stream function Φ を導入し, 今までに得られた結果を纏めるならば次の如くなる:

$$\left. \begin{aligned} b &= vx, l = \beta b, q = f(x) (\Theta) (\eta), f(x) = \frac{k'}{b}, \\ U &= U_0 u(\eta), V = r U_0 v(\eta), \Phi = b U_0 \Psi (\eta), \\ u(\eta) &= \Psi', v(\eta) = -\Psi + \eta \Psi', \eta = y/b. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.16)$$

茲に r, β, k' は未知の常数である。

補助条件 (2.9) は

$$U_0 = \left(\frac{gM}{r} \right)^{1/3} Q^{1/3}, M \equiv \frac{\int_0^\infty \Theta d\eta}{2 \int_0^\infty u^2 dy \int_0^\infty u \Theta d\eta} \dots\dots\dots(2.17)$$

を与える。

渦動粘性に関する渦擾速度に就いて, Prandtl の仮定を採用すると, $V''=l \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$
 $= \frac{U_0 l}{b} \left| \frac{du}{d\eta} \right| = \beta U_0 \left| \frac{du}{d\eta} \right|$. 従つて(2.16) により

$$v'(\eta) = \frac{\beta}{r} \left| \frac{du}{d\eta} \right| \dots\dots\dots(2.18)$$

となる。

(2.16), (2.18) を用い (2.7) を書きかえるならば次の如くなる:

$$\Psi \Psi'' = \frac{\beta^2}{r} \frac{d}{d\eta} (\Psi'')^2 - \theta, \dots\dots\dots(2.19)$$

$$\Psi' \theta_1 + \Psi \theta_1' = \frac{\beta^2}{r} \frac{d}{d\eta} (\Psi'' \theta_1').$$

最後の式は直ちに積分されて

$$\Psi \theta_1 - \frac{\beta^2}{r} \Psi'' \theta_1' = 0 \dots\dots\dots(2.20)$$

となる。茲に

$$\theta_1 = g \frac{k'}{r U_0^2} \theta \quad \text{or} \quad gq = \frac{U_0}{x} \theta_1 \dots\dots\dots(2.21)$$

とおかれて居り, (2.18) に於て $\frac{du}{d\eta} \leq 0$ であることが考慮されている。

ここで

$$\eta_1 = \left(\frac{r}{2\beta^2} \right)^{1/3} \eta = \left(\frac{r}{2\beta^2} \right)^{1/3} \frac{y}{b}, \dots\dots\dots(2.22)$$

或は $\eta_1 = \left(\frac{1}{2r^2\beta^2} \right)^{1/3} \frac{y}{x}, \dots\dots\dots(2.22)'$

とおき, 更に

$$\left(\frac{2\beta^2}{r} \right)^{2/3} \theta_1 \equiv \theta_2 \dots\dots\dots(2.23)$$

とおくと, (2.19), (2.20) は

$$\left. \begin{aligned} \Psi'' \Psi''' - \Psi \Psi'''' &= \theta_2, \\ \Psi'' \theta_2' - 2\Psi \theta_2'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.24)$$

となる。

変数変換によつて (2.17) は次の如くなる:

$$U_0 = \frac{1}{r} \left\{ g (2\beta^2 r^2)^{2/3} M_1 \right\}^{1/3} \cdot Q^{1/3}, \quad M_1 \equiv \frac{\int_0^\infty \theta_2 d\eta_1}{2 \int_0^\infty (\Psi')^2 d\eta_1 \int_0^\infty \Psi' \theta_2 d\eta_1} \dots\dots\dots (2.25)$$

(2.24) は Schmidt の基礎方程式に他ならない。この式は彼により解かれ、結果は彼の論文の第1表に示されている。彼の記号 $U, u/U, v/U$ 及び Φ は、夫々吾々の $rU_0, \frac{u}{r}, v$ 及び Ψ に対応している。⁴⁾

3. 容積変化を伴う気泡噴流 多孔管の深さを H 、大気圧を同じ水柱で測つて H_0 とする。

個々の気泡は x と共にその容積を變える。前同様に水平方向の圧力變化を無視すれば、その容積は H_0/H_0+H-x に比例する。或点に於ける気泡密度 q を多孔管の深さに於ける圧力のもとで測つたものを q_1 とすると

$$q = \frac{H_0+H}{H_0+H-x} \cdot q_1 \dots\dots\dots (3.1)$$

である。

気泡密度の拡散方程式 (2.1) に依つて支配される量は q ではなくて q_1 である。従つて容積變化を伴う気泡噴流に対しては、(2.1) に対応して基礎方程式

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial U}{\partial y} \right) + g \frac{H_0+H}{H_0+H-x} q_1, \\ U \frac{\partial q_1}{\partial x} + V \frac{\partial q_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial q_1}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2)$$

が成立し、補助条件は次の如くなる：

$$\int_{-\infty}^{\infty} U^2 dy = \int_0^x \int_{-\infty}^{\infty} g q_1 \frac{H_0+H}{H_0+H-x} dx dy, \dots\dots\dots (3.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_1 U dy = Q_1 \dots\dots\dots (3.4)$$

茲に Q_1 は多孔管の単位長から単位時間に放出される空気の容積を水柱 H_0+H の圧力のもとで測つたものである。

基礎方程式 (2.1)、(2.2) 及び (2.3) を同じく (3.2)、(3.3) 及 (3.4) と比較するならば、容積變化を伴う場合には、そうでない場合に重力が H_0+H/H_0+H-x に比例して變化するとすればよいことを知る。気泡の容積變化による浮力の変化を重力の變化でおきかえればよいのである。従つて前節の取り扱いに際して、 q を q_1 、 Q を Q_1 及び g を

⁴⁾ 但し、Schmidt の表に於て、 $u/U, v/U$ の列に与えられている数字は $d\Phi/d\eta_1, -\Phi + \eta_1 d\Phi/d\eta_1$ の値である。この対応は誤ちであつて、實際は $u/U = \alpha d\Phi/d\eta_1, v/U = -\Phi + \eta_1 d\Phi/d\eta_1$ である、こゝに、 $\alpha = \left(\frac{1}{2c^2}\right)^{1/3}, c = r\beta$ である。

$g \frac{H_0+H}{H_0+H-x}$ とおきかえれば, そのまま容積変化の場合となる.

従つて, 前同様に similarity の仮定 (2.4) を用うるならば, (2.8) より (2.12) までの諸関係式は上記の置き換えを行えばそのまま成立する. 但し g を含む項の積分により得られる (2.11)' は

$$b = \left\{ \left(2 \frac{c_1}{2c} - \frac{e_1}{e_2} \right) k''' g (H_0+H) \log_e \frac{1}{1 - \frac{x}{H_0+H}} \right\} \frac{1}{2 \frac{e_1}{c_2} - \frac{e_1}{e_2}} \dots\dots\dots (3.5)$$

と書きかえられねばならない.

扱て指数 $c_1/c_2, e_1/e_2$ を決定するためには similarity の仮定 (2.4) の他に, 更に“速度に関する similarity は方向に無関係である”即 (2.13) を仮定したが, 容積変化を伴うときには, この仮定は許されない. 気泡群は上昇するに従つて, 容積変化のない場合に較べて, 気泡密度を増加してゆく. 従つて一層拡散が活潑となる筈である. 即ち y -方向の速度成分は増加する筈である. 然しながら多孔管の極く附近だけを考えれば, その範囲では容積変化のない場合に帰着する筈である. 即ち $x/H_0+H \rightarrow 0$ の際に, (2.10) 及び (3.5) が (2.16) を与える筈である. そのためには, (2.15) が成立しなければならない.

斯くて吾々は, 容積変化の場合の変換式として, 容積不変の場合の (2.16) に対応して次式を得る:

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 u(\eta), \quad V = V_0(x) v(\eta), \quad V_0 = r \frac{H+H_0}{H_0+H-x} U_0, \\ q_1 &= f(x) \theta(\eta), \quad f(x) = \frac{k'}{b}, \quad \eta = \frac{y}{d}, \\ l &= \beta b, \quad b = r(H+H_0) \log_e \frac{H_0+H}{H_0+H-x}, \\ \phi &= b U_0 \Psi(\eta), \quad u(\eta) = \Psi', \quad v(\eta) = -\Psi + \eta \Psi' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.6)$$

渦動粘性に関する Prandtl の仮定を用うる場合に次の事を注意しなければならない.

流体部分が混合距離 l だけ y -方向に移動した際に獲得する過剰速度 $l \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$ は x -方向のものである. 渦動粘性に関与するものは y -方向のものである. 従つてこの過剰速度成分の変換も U, V のそれに従うものとすべきである.

斯くて渦擾速度 V' は $l \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \times \frac{H_0+H}{H_0+H-x}$ となる. 従つて

$$V' = V_0(x) v'(\eta), \quad v'(\zeta) = \frac{\beta}{r} \left| \frac{du}{d\eta} \right| \dots\dots\dots (3.7)$$

を得る.

(3.7) は (2.18) に対応する. 従つて (2.16), (2.18) を用いて (2.1) 或は (2.7) から (2.24) を導いたように (3.6), (3.7) を用い (3.2) 或は (2.7) ($q \rightarrow q_1, g \rightarrow g \frac{H_0+H}{H_0+H-x}$)

とおきかえたもの) から (2.24) を導くことが出来る. 但し, その際に η_1, θ_2 は (2.21), (2.22) 及び (2.23), 即ち

$$\eta_1 = \left(\frac{r}{2\beta^2}\right)^{1/3} \quad \eta = \left(\frac{r}{2\beta^2}\right)^{1/3} \cdot \frac{y}{b}, \quad \dots\dots\dots(3.8)$$

$$\theta_2 = \left(\frac{2\beta^2}{r}\right)^{2/3} \cdot \theta_1 = \frac{gk'}{rU_0^2} \left(\frac{2\beta^2}{r}\right)^{2/3} \theta \quad \dots\dots\dots(3.9)$$

により与えられる.

補助条件 (3.3), (3.4) は (2.25) に対応して

$$U_0 = \frac{1}{r} \left\{ g(2r^2\beta^2)^{2/3} M_1 \right\}^{1/3} \cdot Q_1^{1/3}, \quad M_1 = \frac{\int_0^\infty \theta_2 d\eta_1}{2 \int_0^\infty (\Psi')^2 d\eta_1 \int_0^\infty \Psi' \theta_2 d\eta_1} \quad \dots\dots\dots(3.10)$$

となる. 茲に Q_1 は多孔管のある深度の圧力のもとに測られた空気放出量であつて, 大気圧に於けるものを Q_0 とすれば

$$Q_1 = \frac{H_0}{H_0 + H} \cdot Q_0 \quad \dots\dots\dots(3.11)$$

である.

(3.8) で定義される変数 η_1 を用うるならば, 容積変化を伴う気泡噴流に対しても Schmidt の計算の結果がそのまま利用される.⁵⁾ ただ噴流の幅 b と x との関係が容積不変の場合のように直線的でなく, (3.6) の示すように多孔管の深度に関係するので, 独立変数を (x, y) にとる場合には解の性質は個々の場合に就いて異なつてくる.

4. 拡散性能 容積不変のときには, 気泡噴流は直線的に拡つてゆく. 即ち

$$b = rx \quad \dots\dots\dots(4.1)$$

である. 然るに容積変化を伴うときには, 容積の増加に伴つて振りも増加する. 即ち

$$b = r(H + H_0) \log_e \frac{H_0 + H}{H_0 + H - x} \quad \dots\dots\dots(4.2)$$

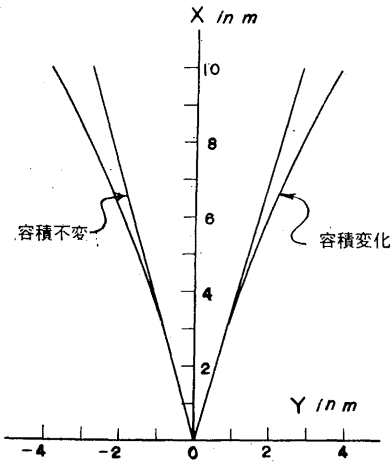
である. この2つの場合に, x と共に巾がどのように増加してゆくか, その対比が第1図に示されている.

水表面付近まで噴流の機構がそのまま成立つているものとして, 表面に於ける振りは, $x = H$ とおいて,

$$b = r(H + H_0) \log_e \frac{H_0 + H}{H_0} \quad \dots\dots\dots(4.3)$$

⁵⁾ 但し, この場合にも Schmidt の表に於て $u/U, v/U$ の列に与えられている数値は $d\Psi/d\eta_1$ 及び $-\Psi + \eta_1 \frac{d\Psi}{d\eta_1}$ の値であることに注意しなければいけない.

で与えられる。



第1図 気泡噴流の拡がり方
 $H=10\text{m}, H_0=10\text{m}, r=0.28$

示されている。

5. 流速性能と能率 代表的な流速の

x -成分 U_0 と空気量との関係は (3.10) で与えられる。これは、空気量を多孔管の深度の圧力のもとで測るならば、両者の関係は容積不変の場合と同じであることを示すもので、次の如く理解される。

多孔管の附近だけに限れば、容積変化は無視される。従つて容積不変の場合の流速と空気量の関係が成立っている筈である。

(3.10)はその関係が、 x の増加にも拘らずそのまま成立つことを示すものである。従つて、気泡群が上昇するに従つて膨脹しつつ放出する energy は流速を増すことではなく、主として噴流を直線的より以上に拡げてゆくために費されるものと考えられる。

流速の各成分は (3.6) により与えられる。Schmidt の論文の表に示されている $u/U, v/U$ は夫々 $\frac{d\Psi}{d\eta_1}, -\Psi + \eta_1 \frac{d\Psi}{d\eta_1}$ である。これ等を $(u/U)_s, (v/U)_s$ と表はせば、(3.6), (3.8)

により

$$U = \alpha U_0 (u/U)_s, V = r U_0 \frac{H_0 + H}{H_0 + H - x} \cdot (v/U)_s, \alpha \equiv \left(\frac{r}{2\beta}\right)^{1/3} \dots\dots\dots(5.1)$$

幅を深さで除したものを拡散性能 $\bar{\eta}_2$ と呼ぶならば

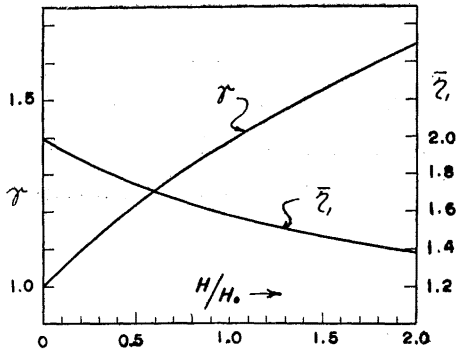
$$\bar{\eta}_2 = r \frac{H + H_0}{H} \log_e \frac{H_0 + H}{H_0} \dots\dots\dots(4.4)$$

である。即ち拡散性能は多孔管の深度が増加する程よくなる。直線的に拡散する場合の拡散性能は r である。この r に対する $\bar{\eta}_2$ の比を \bar{r} とおくと

$$\bar{r} = \frac{H + H_0}{H} \log_e \frac{H_0 + H}{H_0} \dots\dots\dots(4.5)$$

である。これは又、仮りに直線的に拡散するとしたときに、同一の拡がりを得るための深度の増加率である。

深度の変化に伴つて \bar{r} の変る模様は第2図に



第2図 容積が変化するときの拡散性能 (容積不変のものに対する比) \bar{r} と流速性能 $\bar{\eta}_1$.

を得る。

噴流の軸に沿う流速 U_{max} は、 $(u/U)_{s,\eta=0} = 1.1398$ であるから、(3.10)、(3.11) 及び (5.1) により

$$U_{max} = 1.1398 \left\{ \frac{M_1}{(2c^2)^{1/3}} \cdot \frac{H_0}{H+H_0} \right\}^{1/3} \cdot (gQ_0)^{1/3} \dots\dots\dots(5.2)$$

を得る。茲に

$$c = r\beta \dots\dots\dots(5.3)$$

である。即ち、容積不変の場合に $l = cx$ である。

Schmidt の数表を用い計算すれば $M_1 = 0.8103$ である。又彼の実験によると $c = 0.0417$ である。これ等の数値を用うれば (5.2) は流速性能 η_1 に対し

$$\bar{\eta}_1 \equiv U_{max} / \sqrt[3]{gQ_0} = 1.994 \left\{ \frac{H_0}{H_0+H} \right\}^{1/3} \dots\dots\dots(5.4)$$

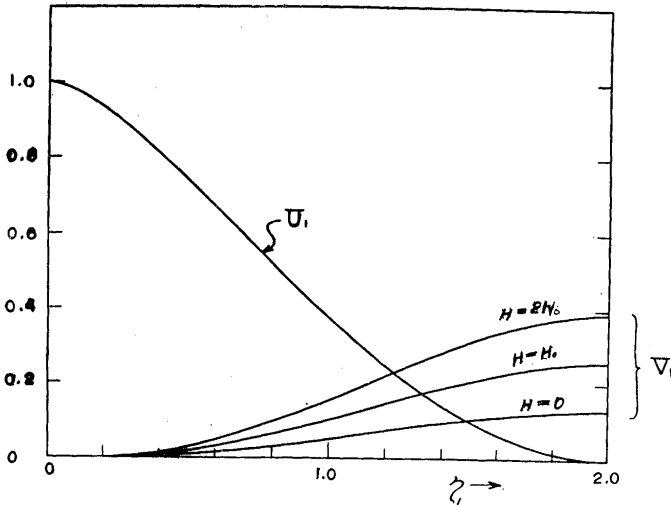
を与える。

多孔管の深度による $\bar{\eta}_1$ の変化の様子は第 2 図に示されている。図が示すように深度の増える程性能は悪くなる。

流速 U, V を U_{max} の値で割つたものを U_1, V_1 とすると、(5.1) により

$$U_1 = \left(\frac{u}{1.1398U} \right)_s, \quad V_1 = \frac{r}{\alpha} \frac{H_0+H}{H_0+H-x} \left(\frac{v}{1.1398U} \right)_s \dots\dots\dots(5.5)$$

である。



第 3 図 気泡噴流の各断面に於ける流速分布。
 U_1 : 鉛直成分, V_1 : 水平成分。

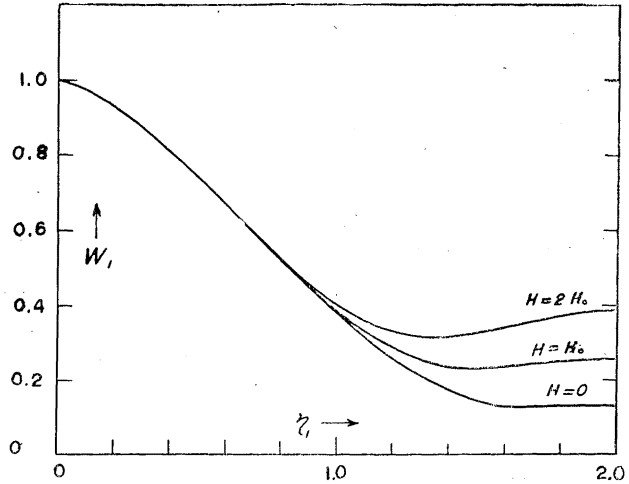
同じように U_{max} を以て測つた流速の大きさを $W_1 (= \sqrt{U_1^2 + V_1^2})$ とし、Schmidt の数表及び c の実測値を用いて、 U_1, V_1 及び W_1 を 2, 3 の水深に就いて計算した結果は第 3, 4 図に示されている。⁶⁾

多孔管の深い程 V_1 が大きく、 W_1 が裾を張つてることが目立っている。流速性能は悪くなるが、噴流の端近傍の流速の大きさは増大する。

⁶⁾ Schmidt によれば噴流の巾は $\eta_1 = 2.0$ に対応する。(2.22)' 或は (3.8), (5.1), (5.3) に依つて $\alpha = r/(2c^2)^{1/3} = 2$ である。前記の $c = 0.0417$ を用うると、 $r = 0.303$ を得る。この計算に際してはこれ等の数値を用いている。実際の噴流の端として U が中心の 1% になるところとすると $r = 0.28$ となる。これは G. I. Taylor の採用している値である。

噴流の断面を通じての energy の流れは $\frac{\rho}{2}(U^2+V^2)U$ である。

中心の値を 1 とした場合の分布の様子は次表に示されている。



第 4 図 気泡噴流の各断面に於ける流速の大きさ (W_1) の分布。

$W_1^2 U_1$ の 値

η_1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$H=0$	1	.8002	.5207	.2975	.1364	.0527	.0164	.0042	.0011	.0002	0
$H=H_0$	1	.8002	.5208	.2981	.1380	.0557	.0204	.0080	.0035	.0010	0
$H=2H_0$	1	.8002	.5210	.2991	.1410	.0608	.0272	.0143	.0075	.0022	0

Total energy flow E は (2.22), (3.6), (5.1), (5.2), (5.4) に依つて

$$E = \frac{\rho}{2} \int_{-\infty}^{\infty} W^2 U dy = \rho U_{max}^3 \int_0^{\infty} W_1^2 U_1 dy$$

$$= \rho \frac{r}{\alpha} \eta_1^3 g Q_0 (H_0 + H) \log_e \frac{H_0 + H}{H_0 + H - x} \int_0^{\infty} W_1^2 U_1 d\eta_1$$

となる。

他方圧縮空気が多孔管より放出されて、この断面まで上昇するまでに放出する energy は単位時間毎に

$$P = \rho g Q_0 H_0 \cdot \log_e \frac{H_0 + H}{H_0 + H - x}$$

である。従つて気泡噴流を圧縮空気に依つて水流を起す 1 つの装置と考えた場合の能率 $\bar{\eta}$ は次の如くなる。

$$\bar{\eta} = \frac{r}{\alpha} \cdot \frac{H+H_0}{H_0} \cdot \bar{\eta}_1^3 \int_0^\infty W_1^2 U_1 d\eta_1$$

或は (5.1), (5.2), (5.3) 及び (5.4) を用いて

$$\bar{\eta} = (1.1398)^3 \cdot M_1 \cdot \int_0^\infty W_1^2 U_1 d\eta_1 \dots\dots\dots (5.6)$$

前表に示されているように、 $W_1^2 U_1$ の分布は H の値に殆んど影響を受けない。 M_1 も亦 H に無関係の数である。従つて気泡噴流の能率は多孔管の深度に殆んど無関係に一定である。実際前表の数値を用いて計算すると次の如くなる。

	$H=0$	$H=H_0$	$H=2H_0$
$\bar{\eta}$	0.559	0.563	0.570

6. 渦動粘性 多孔管の深度が増すと、噴流の幅ばかりでなく、水平方向の速度成分も増加するので、その積に比例する渦動粘性は著しく増加する筈である。今その模様を検べてみる。

(2.6), (3.6), (3.7) 及び (3.8) により 渦動粘性係数 K は

$$K = \frac{1}{2} (2\beta^2 r^2)^{5.9} (gM_1)^{1/3} Q_0^{1/3} \left(\frac{H_0+H}{H_0+H-x} \right) \left(\frac{H_0}{H_0+H} \right)^{1/8} \log_e \frac{H_0+H}{H_0+H-x} \cdot \Psi''$$

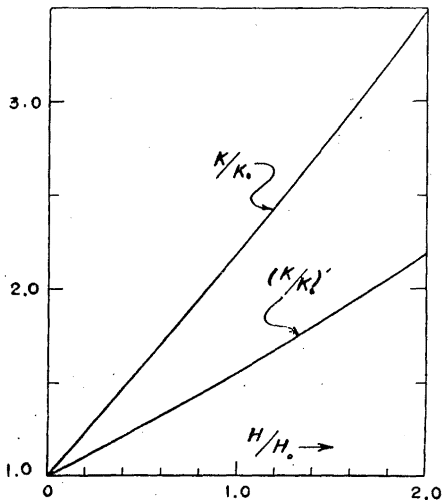
にて与えられる。

気泡の容積は不変であつて、水深 H に於て容積 Q_0 の空気が放出されている場合に對して、上の渦動粘性を比較してみる。この場合の渦動粘性を K_0 とすれば、 K/K_0 の水表面附近の値は

$$\left(\frac{K}{K_0} \right)_s = \left(\frac{H_0+H}{H_0} \right)^{2.3} \cdot \frac{H_0+H}{H} \cdot \log_e \frac{H_0+H}{H_0} \dots\dots (6.1)$$

となる。計算の結果は第5図に示されている図が示す様に、容積変化を伴う場合には、渦動粘性は多孔管の深さと共に著しく増加する。

空気防波堤に於ては、噴流が水表面に接する附近の渦動粘性も消波作用に影響する。従つてその部分の効果は $(K/K_0)_s$ の割合に増大するであろうが、主要な水平流に伴う渦動粘性も亦、この割合で増加するとは考えられない。



第5図 容積変化のときの渦動粘性の容積不変のときのものに対する比。

消波作用に最も有効に作用する部分は、噴流が水平流に向を変えた部分と考えられる。この方向転換に依つて渦動粘性はそのままの値を保ち得るとは考え難い。渦動運動の大きさは、先づそのまま保存されるとしても差支えないであろうが、他方渦擾速度はその energy が保存され、各方向へ等分されると見るのが穩当である。

噴流に於ける渦擾速度の各成分を U' , V' , W' とすると, U' , W' は等しくて共に V' の H_0+H-x/H_0+H 倍に等しいと考えられる。水表面に達して方向変換すると energy は各方向に等分されるとして, 渦擾速度 $(V')_h$ は $V' \sqrt{\left\{1+2\left(\frac{H_0}{H_0+H}\right)^2\right\}}/3$ となる。渦動粘性 K' は $b(V')_h$ に比例する。従つて, 前同様に同一空気量 Q_0 にて, 容積不変の場合の渦動粘性 K'_0 に対する K' の比は次の如くなる。

$$\left(\frac{K}{K_0}\right)' = \frac{K}{K_0} \times \sqrt{\frac{1+2\left(\frac{H_0}{H_0+H}\right)^2}{3}} \quad \dots\dots(6.2)$$

計算の結果は第 5 図に示されている。図が示すように, どのみち渦動粘性は多孔管の深度と共に著しく増加する。この比較に際しては, 標準に用いた噴流は考えている噴流と同じ深度に於て, その点の圧力のもとに Q_0 なる容積の空気を放出しているものであり, 従つて考えている噴流に較べて $\frac{H}{H_0} \left\{ \log_e \frac{H_0+H}{H_0} \right\}^{-1}$ 倍の動力を消費していることを考慮しなければならない。

7. 結 語 空気防波堤の寸法効果を表はす要素として, parameter ξ の重要性は既に指摘されているところであるが, 最近の精度のよい水槽実験によると, 現地実験と水槽実験の相違は ξ のみに依つては説明出来ない。直接に多孔管の深度が要素となるような機構の発見が望ましい。この様な意味で, 気泡噴流に於て気泡群の容積が, それ等の上昇に伴つて増加することがどのような効果をもつかを検べることは興味深いことである。

この問題の実験的研究は甚しく困難であるので, 例え理想化された簡単な場合に就いても, 理論的に闡明することが出来れば非常に意味がある。容積不変の場合には基礎方程式は相似則の仮定に従つて簡単な変数変換により常微分方程式となり, 解法を容易にした。考えている場合にも, 相似則の仮定が有効ならば大変に好都合である。

斯くて, 相似則を一般的な形に於て用い, 基礎方程式である偏微分方程式が常微分方程式となる条件を吟味した。多孔管の附近だけを考えるならば, 問題は容積不変の場合に帰着する。この条件を使用すると, 相似則の仮定に従う変数変換式は一義的に定められる。然も, その結果得られる基礎常微分方程式は, 全く容積不変の場合のものに一致して仕舞

う。従つて噴流の各断面に於ける気泡密度、流速成分の分布に関しては Schmidt の計算の結果をそのまま利用出来る。ただ相似的な分布則から現実の空間に於ける分布則を求める際の変数変換法則が異なり、又各物理量の代表的な大きさの間の関係式が異なってくるだけである。

容積不変の場合に較べて相異なる主な点及び顕著な結果を挙げると次の通りである。

(i) 気泡噴流は、容積不変の場合には直線的に拡つてゆくが、容積変化を伴うと更に拡りは著しくなる。その度合は多孔管の深度の大きい程大きい。即ち拡散性能は増大する。

(第4節, (4.2), (4.4), 第1図, 第2図.)

(ii) 噴流の各断面に於ける最大流速は、容積不変の場合と同じように、 x に関係なく一定であつて空気消費量の立方根に比例する。然も、空気消費量(容積)を多孔管の深さに於ける圧力のもとで測るならば、その函数関係は全く同一である。この事から、同一空気量を送っている場合には最大流速は多孔管の深い程小さい。即ち流速性能は低下する。

(第5節, (5.2), (5.4), 第2図.)

これ等のことは、気泡噴流の最大流速は多孔管附近の状態で定つて仕舞い、気泡が膨脹することにより新たに放出される energy は噴流を直線的以上に拡げるために用いられることを示すものである。

(iii) 流速の鉛直方向及び水平方向の各成分に就いて、夫々相似則は成立つが、 x による変化の法則は互に異なる。即ち鉛直成分は x に全く関係なく一定であるのに反して、水平成分は x と共に次第に増加する。然もその度合は多孔管が深い程著しい。これは上昇に伴つて水平方向への拡散が活潑となるためである。(第5節, (5.2), (5.5), 第3図.)

(iv) 拡散性能は増加するが、逆に流速性能が低下するために、気泡噴流を水流を生ずるための1種の機構と考えた場合の能率は多孔管の深度に関係なく殆んど一定である。(第5節, (5.6) 及び 51 頁の表.)

圧縮空気のもつ energy は平均流及びそれに伴う渦動運動の energy に変換される。従つて上述の結果は、これ等両種の energy の比は流れの模様に余り関係せず略々一定であることを示すものである。実際の噴流では、気泡群と平均流の間に相対運動があるために、更に small scale の乱れを生じ、問題は複雑となる。

(v) 容積不変の場合に較べて、拡散性能もよく、更に水平方向の渦擾速度成分も増加するので、その積に比例する渦動粘性係数は増大する筈である。多孔管の深度が増す程その度合は著しい筈である。実際、計算の結果は第5図に示されている。

以上のように、理想的な気泡噴流の性質は、水柱で測つた大気圧 H_0 に対する多孔管の深度 H の比、即ち H/H_0 が少しく増大すると種々の影響を受ける。特に渦動粘性は著しい影響を受ける。従つて空気防波堤の消波性能は H/H_0 の増加と共に顕著に増加すること

が想像される。この事は、【水槽実験と現地実験の比較検討の結果要求されていた, parameter ξ の他に H/H_0 が, 空気防波堤の scale effect に関する重要な parameter であることに解答を与えるものであろう。

(昭和34年3月3日)