2段直列構成システムの信頼性・保全性 : (II)

児玉, 正憲

https://doi.org/10.15017/4475258

出版情報：經濟學研究. 46 (4/5), pp.57-89, 1981-10-10. 九州大学経済学会

2段直列構成システムの信頼性・保全性 II

児　玉　正　憲

目　　次

III　逐次保全を行う場合

本論文で取扱うシステムはサブシステム S_0 とサブシステム S_1 が直列に連結されている2段直列システムで S_0 は N 個の同一なユニットから成る K-out-of-N システムで S_1 は相異る M 個のユニットから成る直列システムである。このシステムを1人で保守し，保全されたユニットは新品同様となり，ユニットの故障時間は指数分布に従い保全時間は一般分布に従う。システムが停止しているときは故障していないユニットの故障率は0であり，ユニットの故障は直ちに発見されるものとする。このシステムで保全方策としてシステム停止のときのみ保全を行う場合は拙稿〔5〕で検討した。ここでは逐次保全，即ちユニットが故障するとき保全待がなければ直ちに保全を行う場合を考察し，3つのモデル（割込継続形保全，割込反復形保全，故障生起順保全）を取扱う。解析を行うために導入される確率関数，記号などは〔5〕と同じであるが，必要に応じて追加する（必要な〔5〕の記号を付録に記す）

1.　モデル4—割込継続形保全の場合

サブシステム S_0 のユニットが故障したとき逐次保全を行う。サブシステム S_0 の停止でシステムが停止したとき，保全を終えたユニットは直ちに動作させシステムが再び動作するようにする。サブシステム S_1 の停止でシステムが停止したとき，サブシステム S_0 の保全中のユニットの保全を中断して先にサブシステム S_1 の故障したユニットの保全を行い，保全の完了後サブシステム

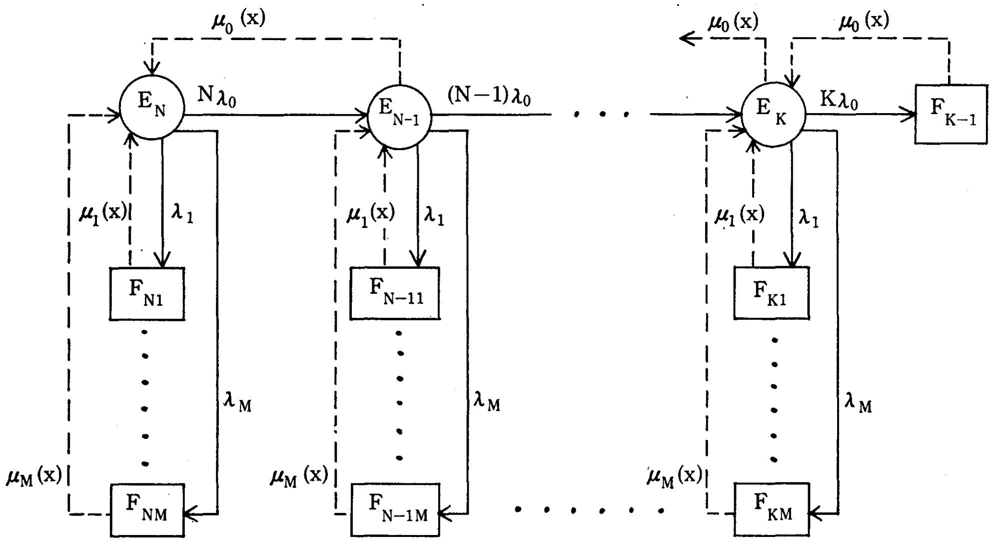

図 5　　モデル4の状態推移図

S_0 のユニットの保全を続行する（割込継続形保全）．このモデルの状態推移図は図5に示される．論文〔5〕のモデル1の解析と同様にしてシステムの特性より次の差分・微分・積分方程式を得る．

$$[d/dt+N\lambda_0+\lambda]P_N(t)=\int_0^t\mu_0(x)P_{N-1}(t,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t\mu_j(x)P_{Nj}(t,x)dx, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}[\partial/\partial t+\partial/\partial x+i\lambda_0+\lambda+\mu_0(x)]P_i(t,x)&=(1-\delta_{i,N-1})(i+1)\lambda_0P_{i+1}(t,x)\\&+\sum_{j=1}^{M}\int_0^{t-x}\mu_j(y)P_{ij}(t,y;x)dy,\quad K\leqq i\leqq N-1,\end{aligned} \tag{2}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\mu_0(x)]P_{K-1}(t,x)=K\lambda_0P_K(t,x)\ , \tag{3}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial y+\mu_j(x)]P_{Nj}(t,x)=0,\quad 1\leqq j\leqq M, \tag{4}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial y+\mu_j(y)]P_{ij}(t,y;x)=0,\quad K\leqq i\leqq N-1, 1\leqq j\leqq M, \tag{5}$$

境界条件

$$P_i(t,0)=\delta_{iN-1}N\lambda_0P_N(t)+\int_0^t\mu_0(x)P_{i-1}(t,x)dx\ ,\quad K\leqq i\leqq N-1\ , \tag{6}$$

$$P_{K-1}(t,0)=0\ , \tag{7}$$

$$P_{Nj}(t,0)=\lambda_jP_N(t)\ ,\quad 1\leqq j\leqq M, \tag{8}$$

$$P_{ij}(t,0;x)=\lambda_jP_i(t,x)\ ,\quad K\leqq i\leqq N-1, 1\leqq j\leqq M, \tag{9}$$

初期条件

$$P_N(0)=1 \tag{10}$$

以上 (1)～(9) 式を (10) 式のもとでラプラス変換すると次式を得る．

$$[s+N\lambda_0+\lambda]\hat{P}_N(s)=\int_0^\infty\mu_0(x)\hat{P}_{N-1}(s,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)\hat{P}_{Nj}(s,x)dx+1 \tag{11}$$

$$[s+\partial/\partial x+i\lambda_0+\lambda+\mu_0(x)]\hat{P}_i(s,x)$$
$$=(1-\delta_{iN-1})(i+1)\lambda_0\hat{P}_{i+1}(s,x)+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(y)\hat{P}_{ij}(s,y;x)dy \tag{12}$$

$$[s+\partial/\partial x+\mu_0(x)]\hat{P}_{K-1}(s,x)=K\lambda_0\hat{P}_K(s,x) \tag{13}$$

$$[s+\partial/\partial x+\mu_j(x)]\hat{P}_{Nj}(s,x)=0 \tag{14}$$

$$[s+\partial/\partial y+\mu_j(y)]\hat{P}_{ij}(s,y;x)=0 \tag{15}$$

$$\hat{P}_i(s,0)=\delta_{iN-1}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_{i-1}(s,x)dx \tag{16}$$

$$\hat{P}_{K-1}(s,0)=0 \tag{17}$$

$$\hat{P}_{Nj}(s,0)=\lambda_j\hat{P}_N(s) \tag{18}$$

$$\hat{P}_{ij}(s,0;x)=\lambda_j\hat{P}_i(s,x) \tag{19}$$

(14), (18), (15), (19) 式より (20), (21) 式を得る.

$$\hat{P}_{Nj}(s,x)=\lambda_j\hat{P}_N(s)\exp[-sx-\int_0^x \mu_j(x)dx] \tag{20}$$

$$\hat{P}_{ij}(s,y;x)=\lambda_j\hat{P}_i(s,x)\exp[-sy-\int_0^y \mu_j(y)dy] \tag{21}$$

(20) 式を (11) 式に (21) 式を (12) 式に代入すると,

$$[s+N\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s))]\hat{P}_N(s)=\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_{N-1}(s,x)dx+1 \tag{22}$$

$$[s+\partial/\partial x+i\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s))+\mu_0(x)]\hat{P}_i(s,x)=(1-\delta_{iN-1})(i+1)\lambda_0\hat{P}_{i+1}(s,x) \tag{23}$$

となる.

ここで次の離散的変換 ([6]) を定義する.

$$U_i(s,x)=\sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i}\hat{P}_n(s,x)\,,\quad K\leqq i\leqq N-1 \tag{24}$$

このとき,

$$\hat{P}_i(s,x)=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}U_n(s,x) \tag{25}$$

となる.

(24) 式を (23) 式に適用すると

$$[s+\partial/\partial x+i\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s))+\mu_0(x)]U_i(s,x)=0$$

これを解くと次の式を得る.

$$U_i(s,x)=U_i(s,0)\exp[-(s+i\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s)))x-\int_0^x \mu_0(x)dx] \tag{26}$$

(26) 式を (25) 式に代入し $\alpha(s,i)$ を用いると

$$\hat{P}_i(s,x)=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}U_n(s,0)\exp[-\alpha(s,n)x-\int_0^x \mu_0(x)dx]\,,\quad K\leqq i\leqq N-1 \tag{27}$$

従って，

$$\hat{P}_K(s,x)=\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}U_n(s,0)\exp\left[-\alpha(s,n)x-\int_0^x\mu_0(x)dx\right] \tag{28}$$

(28) 式を (13) 式に代入すると，(17)，(28) 式から

$$\hat{P}_{K-1}(s,x)=\exp\left[-\int_0^x(s+\mu_0(y))dy\right]\left\{\int_0^x\exp\left[\int_0^x(s+\mu_0(y))dy\right]K\lambda_0\hat{P}_K(s,x)+\hat{P}_{K-1}(s,x)\right\}$$

$$=\exp\left[-sx-\int_0^x\mu_0(x)dx\right]K\lambda_0\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}U_n(s,0)\int_0^x\exp\left[sx+\int_0^x\mu_0(y)dy\right]$$

$$\cdot\exp\left[-(s+n\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s)))x-\int_0^x\mu_0(y)dy\right]dx$$

$$=\exp\left[-sx-\int_0^x\mu_0(x)dx\right]\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}K\lambda_0U_n(s,0)\int_0^x\exp\left[-(n\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s)))x\right]dx$$

$$=\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}K\lambda_0U_n(s,0)\frac{[1-\exp(-n\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s)))x]}{n\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s))}\exp\left[-sx-\int_0^x\mu_0(x)dx\right] \tag{29}$$

また　$\hat{P}_{N-1}(s,x)=U_{N-1}(s,x)$ (30)

(30) 式を (22) 式に代入すると

$$\hat{P}_N(s)=[\hat{f}_0(\alpha(s,N-1))U_{N-1}(s,0)+1]/\alpha(s,N) \tag{31}$$

ここで

$$U_i(s,0)=\sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i}\hat{P}_n(s,0)\,,\quad K\leqq i\leqq N-1 \tag{32}$$

であるから，(32) 式に (16) 式を代入すると

$$U_i(s,0)=\sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i}\hat{P}_n(s,0)=\sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i}\left\{\delta_{nN-1}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\int_0^\infty\mu_0(x)\hat{P}_{n-1}(s,x)dx\right\}$$

$$=\binom{N-1}{i}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\int_0^\infty\mu_0(x)\sum_{m=i-1}^{N-2}\binom{m+1}{i}\hat{P}_m(s,x)dx$$

$$=\binom{N-1}{i}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\int_0^\infty\mu_0(x)\sum_{m=i-1}^{N-1}\binom{m+1}{i}\hat{P}_m(s,x)dx-\binom{N}{i}\int_0^\infty\mu_0(x)\hat{P}_{N-1}(s,x)dx$$

$$=\binom{N-1}{i}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\int_0^\infty\mu_0(x)\sum_{m=i-1}^{N-1}\left[\binom{m}{i}+\binom{m}{i-1}\right]\hat{P}_m(s,x)dx$$

$$-\binom{N}{i}\int_0^\infty\mu_0(x)U_{N-1}(s,x)dx$$

$$=\binom{N-1}{i}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\int_0^\infty\mu_0(x)\sum_{m=i}^{N-1}\binom{m}{i}\hat{P}_m(s,x)dx+\int_0^\infty\mu_0(x)\sum_{m=i-1}^{N-1}\binom{m}{i-1}\hat{P}_m(s,x)dx$$

$$-\binom{N}{i}\int_0^\infty\mu_0(x)U_{N-1}(s,x)dx$$

$$=\binom{N-1}{i}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\int_0^\infty\mu_0(x)U_{i-1}(s,x)dx+\int_0^\infty\mu_0(x)U_i(s,x)dx$$

$$-\binom{N}{i}\int_0^\infty \mu_0(x)U_{N-1}(s,x)dx\,,\qquad K+1\leqq i\leqq N-1 \tag{33}$$

同様に $U_K(s,0)$ を求めると

$$U_K(s,0)=\binom{N-1}{K}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\int_0^\infty \mu_0(x)U_K(s,x)dx+\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_{K-1}(s,x)dx$$
$$+\sum_{m=K}^{N-1}(-1)^{m-K}\binom{m}{K-1}\int_0^\infty \mu_0(x)U_m(s,x)dx-\binom{N}{K}\int_0^\infty \mu_0(x)U_{N-1}(s,x)dx \tag{34}$$

ここで $\int_0^\infty \mu_0(x)U_i(s,x)dx=\hat{f}_0(\alpha(s,i))U_i(s,0)\,,$ (35)

および (31) 式を (33) 式に代入すると

$$[1-\hat{f}_0(\alpha(s,0))]\ U_i(s,0)=\hat{f}_0(\alpha(s,i-1))U_{i-1}(s,0)+\binom{N}{i}(N-i)\lambda_0/\alpha(s,N)$$
$$-\binom{N}{i}\alpha(s,i)\hat{f}_0(\alpha(s,N-1))U_{N-1}(s,0)/\alpha(s,N) \tag{36}$$

となる. (36) 式の両辺に $V_{i-1}^4(s)$ をかけ $i=K+1,\cdots,i$ について加えると,

$$\hat{f}_0(\alpha(s,i))V_i^4(s)U_i(s,0)=\hat{f}_0(\alpha(s,K))U_K(s,0)+\sum_{k=K+1}^{i}\left[\binom{N}{k}(N-k)\lambda_0V_{k-1}^4(s)/\alpha(s,N)\right]$$
$$-\left[\binom{N}{k}\alpha(s,k)\hat{f}_0(\alpha(s,N-1))V_{k-1}^4(s)U_{N-1}(s,0)/\alpha(s,N)\right] \tag{37}$$

となる. (37) 式において $i=N-1$ のとき

$$\sum_{k=K+1}^{N}\binom{N}{k}\alpha(s,k)V_{k-1}^4(s)\hat{f}_0(\alpha(s,N-1))U_{N-1}(s,0)/\alpha(s,N)$$
$$=\sum_{k=K+1}^{N-1}\binom{N}{k}(N-k)\lambda_0V_{k-1}^4(s)/\alpha(s,N)+\hat{f}_0(\alpha(s,K))U_K(s,0) \tag{38}$$

となり (38) 式に $E_{ij}(s), C_{ij}(s)$ を代入すると

$$U_{N-1}(s,0)=[\hat{f}_0(\alpha(s,K))U_K(s,0)]/[C_{K+1,N}(s)\hat{f}_0(\alpha(s,N-1))]$$
$$+[E_{K+1,N-1}(s)]/[C_{K+1,N}(s)\hat{f}_0(\alpha(s,N-1))] \tag{39}$$

(39) 式に $A_i^4(s), B_i^4(s)$ を適用すると

$$U_{N-1}(s,0)=A^4{}_{N-1}(s)U_K(s,0)+B_{N-1}^4(s) \tag{40}$$

(40) 式を (37) 式に代入して整理すると

$$U_i(s,0)=A_i^4(s)U_K(s,0)+B_i^4(s) \tag{41}$$

また $\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_{K-1}(s,x)dx=\sum_{m=K}^{N-1}(-1)^{m-K}\binom{m}{K}K\lambda_0\dfrac{[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(\alpha(s,m))]}{[m\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}_0^*(s))]}U_K(s,o)$ (42)

が成立するから (31), (35), (42) 式を (34) 式に代入すると,

$$U_K(s,0)=-\binom{N}{K}\left[\frac{\alpha(s,K)}{\alpha(s,N)}\right]\hat{f}_0(\alpha(s,N-1))U_{N-1}(s,0)+\binom{N}{K}\left[\frac{(N-K)\lambda_0}{\alpha(s,N)}\right]$$
$$+\hat{f}_0(\alpha(s,K))U_K(s,0)+\sum_{m=K}^{N-1}(-1)^{m-K}\left\{m\lambda_0\binom{m-1}{K-1}\left[\frac{\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(\alpha(s,m))}{m\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s))}\right]\right.$$
$$\left.+\binom{m}{K-1}\hat{f}(\alpha(s,m))\right\}U_m(s,0) \tag{43}$$

(43) 式に (41) 式を代入して整理すると

$$U_K(s,0)=\left\{\left[\binom{N}{K}(N-K)\lambda_0-\binom{N}{K}\alpha(s,K)\hat{f}_0(\alpha(s,N-1))B^4_{N-1}(s)\right]/\alpha(s,N)\right.$$
$$+\sum_{m=K}^{N-1}(-1)^{m-K}\left[\binom{m-1}{K-1}m\lambda_0(\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(\alpha(s,m)))/(m\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s)))\right.$$
$$\left.\left.+\binom{m}{K-1}\hat{f}_0(\alpha(s,m))\right]B^4_m(s)\right\}\Big/\left\{1-\hat{f}_0(\alpha(s,K))\right.$$
$$+\binom{N}{K}\alpha(s,K)\hat{f}_0(\alpha(s,N-1))A^4_{N-1}(s)/\alpha(s,N)$$
$$-\sum_{m=K}^{N-1}(-1)^{m-K}\left[\binom{m-1}{K-1}m\lambda_0(\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(\alpha(s,m,)))/(m\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s)))\right.$$
$$\left.\left.+\binom{m}{K-1}\hat{f}_0(\alpha(s,m))\right]B^4_m(s)\right\} \tag{44}$$

従って (27) 式より

$$\hat{P}_i(s)=\int_0^\infty P_i(s,x)dx=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}[(1-\hat{f}_0(\alpha(s,n)))/\alpha(s,n)]U_n(s,0) \tag{45}$$

故に時点アベイラビリテイ $P^4_A(t)$ のラプラス変換 $\hat{P}^4_A(s)$ は

$$\hat{P}^4_A(s)=\hat{P}_N(s)+\sum_{i=K}^{N-1}\hat{P}_i(s)$$
$$=[1+(A^4_{N-1}(s)U_K(s,0)+B^4_{N-1}(s))\hat{f}_0(\alpha(s,N-1))]/\alpha(s,N)$$
$$+\sum_{i=K}^{N-1}(-1)^{i-K}\binom{i-1}{K-1}(1-\hat{f}_0(\alpha(s,i)))[A^4_i(s)U_K(s,0)+B^4_i(s)]/\alpha(s,i) \tag{46}$$

となる．また，信頼度関数 $R_4(t)$ のラプラス変換形 $\hat{R}_4(s)$ は適当な変換に行うことによって $\hat{P}^4_A(s)$ から得られる．即ち，$\hat{f}^*(s)=0$ (S_1 の停止によってシステム停止になったとき，システムが作動状態になる確率＝0 を意味する．即ち保全率＝0)，$(\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_m))=0$，$K\leqq m\leqq N-1$ (S_0 の停止によってシステム停止になったとき，システムが作動状態になる確率＝0 を意味する）とおくとき，

$$\alpha(s,i)=s+i\lambda_0+\lambda \tag{47}$$

$$V^4_i(s)=\begin{cases}\displaystyle\prod_{j=K+1}^{i}\frac{[1-\hat{f}_0(s+j\lambda_0+\lambda)]}{\hat{f}_0(s+j\lambda_0+\lambda)}, & K+1\leqq i\leqq N\\ 1, & i=K\end{cases} \tag{48}$$

となり，これを $\hat{P}_A^4(s)$ に代入して $\hat{R}^4(s)$ が得られる．従って次の2つの定理を得る．

定理1　モデル4の時点アベイラビリティ $\hat{P}_A^4(t)$ のラプラス変換 $\hat{P}_A^4(s)$ は (46) 式で与えられる．

定理2　モデル4の信頼度関数 $R^4(t)$ のラプラス変換 $\hat{R}^4(s)$ は (46) 式で与えられる．ただし，$\hat{f}^*(s)=0$, $[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(\alpha(s,m))]=0$，$K\leqq m\leqq N-1$，$\alpha(s,i)$ および $V_i^4(s)$ はそれぞれ (47)，(48) 式で与えられる．またシステムの平均寿命 MTSF^4 は $\hat{R}^4(0)$ で与えられる．

次に定常状態における状態確率を求めるために次の確率関数を定義する．

$P_N=\lim_{t\to\infty}P_N(t)$，$P_i(x)=\lim_{t\to\infty}P_i(t,x)$，$P_{K-1}(x)=\lim_{t\to\infty}P_{K-1}(t,x)$，$P_{Nj}(x)=\lim_{t\to\infty}P_{Nj}(t,x)$，$P_{ij}(y;x)=\lim_{t\to\infty}P_{ij}(t,y;x)$ とおくと，次の様な差分・微分・積分方程式を得る．

$$[N\lambda_0+\lambda]P_N=\int_0^\infty\mu_0(x)P_{N-1}(x)dx+\sum_{j=1}^M\int_0^\infty\mu_j(x)P_{Nj}(x)dx \tag{1'}$$

$$\begin{aligned}[d/dx+i\lambda_0+\lambda+\mu_0(x)]P_i(x)&=(1-\delta_{iN-1})(i+1)\lambda_0P_{i+1}(x)\\&+\sum_{j=1}^M\int_0^\infty\mu_j(y)P_{ij}(y;x)dy,\qquad K\leqq i\leqq N-1\end{aligned} \tag{2'}$$

$$[d/dx+\mu_0(x)]P_{K-1}(x)=K\lambda_0P_K(x) \tag{3'}$$

$$[d/dx+\mu_j(x)]P_{Nj}(x)=0 \tag{4'}$$

$$[d/dy+\mu_j(y)]P_{ij}(y;x)=0 \tag{5'}$$

境界条件

$$P_i(0)=\delta_{iN-1}N\lambda_0P_N+\int_0^\infty\mu_0(x)P_{i-1}(x)dx,\quad K\leqq i\leqq N-1 \tag{6'}$$

$$P_{K-1}(0)=0 \tag{7'}$$

$$P_{Nj}(0)=\lambda_jP_N \tag{8'}$$

$$P_{ij}(0;x)=\lambda_jP_i(x) \tag{9'}$$

正規条件

$$P_N+\sum_{i=K}^{N-1}\int_0^\infty P_i(x)dx+\int_0^\infty P_{K-1}(x)dx+\sum_{j=1}^M\int_0^\infty P_{Nj}(x)dx+\sum_{i=K}^{N-1}\sum_{j=1}^M\int_0^\infty\int_0^\infty P_{ij}(y;x)dxdy=1 \tag{10'}$$

(4′)，(8′)，(5′)，(9′)，(1′) 式より

$$P_{Nj}(x)=\lambda_jP_N\exp\left[-\int_0^x\mu_j(x)dx\right] \tag{11'}$$

$$P_{ij}(y;x)=\lambda_jP_i(x)\exp\left[-\int_0^y\mu_j(y)dy\right] \tag{12'}$$

$$N\lambda_0P_N=\int_0^\infty\mu_0(x)P_{N-1}(x)dx \tag{13'}$$

となる．

(12′) 式を (2′) 式に代入し離散的変換 (14′) 式

$$\begin{cases} U_i(x) = \sum_{n=i}^{N-1} \binom{n}{i} P_n(x), \qquad K \leqq i \leqq N-1 & (14') \\ P_i(x) = \sum_{n=i}^{N-1} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} U_n(x) & (15') \end{cases}$$

を用いると，

$$[d/dx + i\lambda_0 + \mu_0(x)]U_i(x) = 0$$

となり，これを解くと

$$U_i(x) = U_i(0) \exp[-i\lambda_0 x - \int_0^x \mu_0(x)dx] \tag{16'}$$

を得る．(16′) 式と (15′) 式，(15′) 式，(13′) 式と (3′) 式より

$$P_i(x) = \sum_{n=i}^{N-1} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} U_n(0) \exp[-n\lambda_0 x - \int_0^x \mu_0(x)dx] \tag{17'}$$

$$P_{N-1}(x) = \sum_{n=N-1}^{N-1} (-1)^{n-N+1} \binom{n}{N-1} U_n(x) = U_{N-1}(x) \tag{18'}$$

$$P_N = \hat{f}_0((N-1)\lambda_0)U_{N-1}(0)/N\lambda_0 \tag{19'}$$

となる．(17′) 式と (3′) 式より

$$P_{K-1}(x) = \sum_{n=K}^{N-1} (-1)^{n-K} \binom{n}{K} K\lambda_0 U_n(0)[(1-\exp(-n\lambda_0 x))/n\lambda_0] \exp[-\int_0^x \mu_0(x)dx] \tag{20'}$$

となり，(14′) 式に (6′) 式を代入しモデル4の (33′) 式と同様にして (21′) 式，また (16′) 式を用いると (22′) 式を得る．

$$\begin{aligned} U_i(0) = \binom{N-1}{i} N\lambda_0 P_N + \int_0^\infty \mu_0(x)U_{i-1}(x)dx + \int_0^\infty \mu_0(x)U_i(x)dx \\ - \binom{N}{i} \int_0^\infty \mu_0(x)U_{N-1}(x)dx, \qquad K \leqq i \leqq N-1 \end{aligned} \tag{21'}$$

$$\int_0^\infty \mu_0(x)U_i(x)dx = \hat{f}_0(i\lambda_0)U_i(0) \tag{22'}$$

(19′) 式と (22′) 式を (21′) 式に代入すると (23′) 式を得る．

$$\begin{aligned} U_i(0) = \binom{N-1}{i} \hat{f}_0((N-1)\lambda_0)U_{N-1}(0) + \hat{f}_0((i-1)\lambda_0)U_{i-1}(0) \\ + \hat{f}_0(i\lambda_0)U_i(0) - \binom{N}{i} \hat{f}_0((N-1)\lambda_0)U_{N-1}(0) \end{aligned} \tag{23'}$$

(23′) 式を整理して両辺に $V_{i-1}^4(0)$ をかけて $i=K+1 \cdots i$ について加えると (24′) 式を得る．

$$\hat{f}_0(i\lambda_0)V_i^4(0)U_i(0) = \hat{f}_0(K\lambda_0)U_K(0) - \sum_{k=K+1}^{i} \binom{N-1}{k-1} V_{k-1}^4(0)\hat{f}_0((N-1)\lambda_0)U_{N-1}(0) \tag{24'}$$

(24′) 式において $i=N-1$ とおくと (25′) 式となり，(25′) 式を (24′) 式に代入すると (26′) 式を得る．

$$U_{N-1}(0)=\hat{f}_0(K\lambda_0)U_K(0)/[C_{K+1,N}(0)\hat{f}_0((N-1)\lambda)] \tag{25'}$$

$$U_i(0)=A_i^4(0)U_K(0) \tag{26'}$$

(17′) 式，(20′) 式，(11′) 式，(12′) 式より (27′)〜(30′) 式を得る。

$$P_i=\int_0^\infty P_i(x)dx=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-1}\binom{n}{i}[(1-\hat{f}_0(n\lambda_0))/n\lambda_0]U_n(0) \tag{27'}$$

$$P_{K-1}=\int_0^\infty P_{K-1}(x)dx=\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}[\mu_0-(1-\hat{f}_0(n\lambda_0))/n\lambda_0]U_n(0) \tag{28'}$$

$$P_{Nj}=\int_0^\infty P_{Nj}(x)dx=\lambda_jK_j^*P_N \tag{29'}$$

$$P_{ij}=\int_0^\infty\int_0^\infty P_{ij}(y;x)dxdy=\lambda_jK_j^*P_i \tag{30'}$$

ここに P_i, P_{K-1}, P_{Nj} および P_{ij} は定常状態における状態確率を表わす，即ち $P_i=P_i(\infty)$，$P_{K-1}=P_{K-1}(\infty)$，$P_{Nj}=P_{Nj}(\infty)$ および $P_{ij}=P_{ij}(\infty)$ を意味する。

(19′)，(27′)〜(30′) 式を (10′) 式に代入すると (31′) 式，(26′) 式を (31′) 式に代入すると (32′) 式を得る。

$$\begin{aligned}&[(1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*)\hat{f}_0((N-1)\lambda_0)/N\lambda_0]U_{N-1}(0)+(1\\&\quad+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*)\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}[(1-\hat{f}_0(n\lambda_0))/n\lambda_0]\\&\quad+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}[K_0^*-(1-\hat{f}_0(n\lambda_0))/n\lambda_0]U_n(0)=1\end{aligned} \tag{31'}$$

$$\begin{aligned}U_K(0)=\{&(1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*)[\hat{f}_0(K\lambda_0)/(C_{K+1,N}(0)N\lambda_0)]+(1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*)\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\\&\cdot\binom{n-1}{K-1}[(1-\hat{f}_0(n\lambda_0))/n\lambda_0]A_n^4(0)+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}\\&\cdot[K_0^*-(1-\hat{f}_0(n\lambda_0))/n\lambda_0]A_n^4(0)\}^{-1}\end{aligned} \tag{32'}$$

(32′)，(26′)〜(30′) 式より $\sum_{i=K}^{N-1}\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f_n=\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^nf_n\sum_{i=K}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n+K}$ $\cdot\binom{n-1}{K-1}f_n$ を考慮すると (33′)〜(37′) 式を得る。

$$P_i=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}[(1-\hat{f}_0(n\lambda_0))/n\lambda_0]A_n^4(0)U_K(0) \tag{33'}$$

$$P_{K-1}=\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}[K_0^*-(1-\hat{f}_0(n\lambda_0))/n\lambda_0]A_n^4(0)U_K(0) \tag{34'}$$

$$\sum_{j=1}^{M}P_{Nj}=\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*[\hat{f}_0(K\lambda_0)/(C_{K+1,N}(0)N\lambda_0)]U_K(0) \tag{35'}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=K}^{N}\sum_{j=1}^{M}P_{ij}=\{&[\hat{f}_0(K\lambda_0)/(C_{K+1,N}(0)N\lambda_0)]+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n+K}\binom{n-1}{K-1}[(1-\hat{f}_0(n\lambda_0))/n\lambda_0]\\&\cdot A_n^4(0)\}(\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*)U_K(0)\end{aligned} \tag{36'}$$

$$P_A^4(\infty)=P_N+\sum_{i=K}^{N-1}P_i$$

$$=\{[\hat{f}_0(K\lambda_0)/(C_{K+1,N}(0)N\lambda_0)]+\sum_{i=K}^{N-1}(-1)^{i-K}\binom{i-1}{K-1}[(1-\hat{f}_0(i\lambda_0))/i\lambda_0]A_i^4(0)\}U_K(0) \tag{37'}$$

ここに $U_K(0)$ は (32′) 式で与えられる。

従って次の定理を得る。

定理3　モデル4の定常アベイラビリティは (37′) 式で与えられ，サブシステム S_0, S_1 の停止によってシステムが作動していない定常状態における確率はそれぞれ (34′), (36′) 式で与えられる。

2. モデル5—割込反復形保全の場合

モデル4と異る点は割込反復形の保全を行うことである。則ち，サブシステム S_1 の停止でシステムが停止したとき，サブシステム S_0 の保全中のユニットの保全を中断して先にサブシステム S_1 の故障したユニットの保全を行い保全の完了後サブシステム S_0 のユニットの保全を最初からやり直す。このモデルの状態推移図は図5と同様である（割込継続形保全と割込反復形保全の差異は推移図に表示されていない)。モデル1の解析と同様にしてシステムの特性より次の差分・微分・積分方程式を得る。

$$[d/dt+N\lambda_0+\lambda]P_N(t)=\int_0^t\mu_0(x)P_{N-1}(t,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t\mu_j(x)P_{Nj}(t,x)dx \tag{1}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+i\lambda_0+\lambda+\mu_0(x)]P_i(t,x)=(1-\delta_{i,N-1})(i+1)\lambda_0P_{i+1}(t,x)\ ,\quad K\leqq i\leqq N-1 \tag{2}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\mu_0(x)]P_{K-1}(t,x)=K\lambda_0P_K(t,x)\ , \tag{3}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\mu_j(x)]P_{ij}(t,x)=0\ ,\qquad K\leqq i\leqq N,\ 1\leqq j\leqq M\ , \tag{4}$$

境界条件

$$P_i(t,0)=\delta_{iN-1}N\lambda_0P_N(t)+\int_0^t\mu_0(x)P_{i-1}(t,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t\mu_j(x)P_{ij}(t,x)dx\ ,\quad K\leqq i\leqq N-1 \tag{5}$$

$$P_{K-1}(t,0)=0\qquad , \tag{6}$$

$$P_{Nj}(t,0)=\lambda_jP_N(t)\ , \tag{7}$$

$$P_{ij}(t,0)=\lambda_j\int_0^tP_i(t,x)dx\ ,\quad K\leqq i\leqq N-1,\ 1\leqq j\leqq M\ , \tag{8}$$

初期条件

$$P_N(0)=1 \tag{9}$$

以上の (1)〜(8) 式を (9) 式のもとでラプラス変換すると，

$$[s+N\lambda_0+\lambda]\hat{P}_N(s)=\int_0^\infty\mu_0(x)\hat{P}_{N-1}(s,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)\hat{P}_{Nj}(s,x)dx+1\ , \tag{10}$$

$$[s+\partial/\partial x+i\lambda+\mu_0(x)]\hat{P}_i(s,x)=(1-\delta_{iN-1})(i+1)\lambda_0\hat{P}_{i+1}(s,x)\ , \tag{11}$$

$$[s+\partial/\partial x+\mu_0(x)]\hat{P}_{K-1}(s,x)=K\lambda_0\hat{P}_K(s,x)\ , \tag{12}$$

$$[s+\partial/\partial x+\mu_j(x)]\hat{P}_{ij}(s,x)=0\ , \tag{13}$$

$$\hat{P}_i(s,0)=\delta_{iN-1}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\int_0^\infty\mu_0(x)\hat{P}_{i-1}(s,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)\hat{P}_{ij}(s,x)dx\ , \tag{14}$$

$$\hat{P}_{K-1}(s,0)=0\ , \tag{15}$$

$$\hat{P}_{Nj}(s,0)=\lambda_j\hat{P}_N(s)\ , \tag{16}$$

$$\hat{P}_{ij}(s,0)=\lambda_j\int_0^\infty\hat{P}_j(s,x)dx=\lambda_j\hat{P}_i(s)\ , \tag{17}$$

以上の方程式を解くために以下のような離散的変換を導入する。

$$U_i(s,x)=\sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i}\hat{P}_n(s,x)\ ,\quad K\leqq i\leqq N-1 \tag{18}$$

$$Q_{ij}(s,x)=\sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i}\hat{P}_{nj}(s,x)\ , \tag{19}$$

$$\hat{P}_i(s,x)=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}U_i(s,x) \tag{20}$$

(11) 式に (18) 式を適用すると

$$[s+\partial/\partial x+i\lambda_0+\lambda+\mu_0(x)]U_i(s,x)=0$$

これを解くと，

$$U_i(s,x)=U_i(s,0)\exp\left[-(s+\gamma_i)x-\int_0^x\mu_0(x)dx\right] \tag{21}$$

となる。

(21)，(20)，(12) 式から (22)～(23) 式を得る。

$$\hat{P}_i(s,x)=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}U_n(s,0)\exp\left[-(s+\gamma_n)x-\int_0^x\mu_0(x)dx\right] \tag{22}$$

$$\hat{P}_{K-1}(s,x)=\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}K\lambda_0\binom{n}{K}U_n(s,0)\left[(1-\exp(-\lambda_n x))/\gamma_n\right]\exp\left[-sx-\int_0^x\mu_0(x)dx\right] \tag{23}$$

(20)，(13)，(16) 式より (24)，(25) 式を得る。

$$\hat{P}_{N-1}(s,x)=U_{N-1}(s,x) \tag{24}$$

$$\hat{P}_{Nj}(s,x)=\lambda_j\hat{P}_N(s)\exp\left[-sx-\int_0^x\mu_j(x)dx\right] \tag{25}$$

(24) と (25) 式を (10) 式に代入すると

$$\hat{P}_N(s)=[\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})U_{N-1}(s,0)+1]/\alpha(s,N) \tag{26}$$

$$P_i(s)=\int_0^\infty\hat{P}_i(s,x)dx=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}U_n(s,0)\left[(1-\hat{f}_0(s+\gamma_n))/(s+\gamma_n)\right]$$

という関係と (13), (17) 式より

$$\hat{P}_{ij}(s,x) = \lambda_j \sum_{n=i}^{N-1} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} U_n(s,0)\left[(1-\hat{f}_0(s+\gamma_n))/(s+\gamma_n)\right] \exp\left[-sx - \int_0^x \mu_j(x)dx\right] \tag{27}$$

を得る。(19) 式に (27) 式を代入し，関係式 (28) 式を用いて (29) 式を得る。

$$\sum_{n=i}^{m} (-1)^n \binom{m}{n}\binom{n}{i} = \begin{cases} (-1)^i, & m=i \\ 0, & m \neq i \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} Q_{ij}(s,x) &= \sum_{n=i}^{N-1} \binom{n}{i} \hat{P}_{nj}(s,x) \\ &= \sum_{n=i}^{N-1} \binom{n}{i} \lambda_j \sum_{m=n}^{N-1} (-1)^{m-n} \binom{m}{n} U_m(s,0)\left[(1-\hat{f}_0(s+\gamma_m))/(s+\gamma_m)\right] \exp\left[-sx - \int_0^x \mu_j(x)dx\right] \\ &= \lambda_j \exp\left[-sx - \int_0^x \mu_j(x)dx\right] \sum_{m=i}^{N-1} (-1)^m \left[(1-\hat{f}_0(s+\gamma_m))/(s+\gamma_m)\right] U_m(s,0) \\ &\qquad \cdot \sum_{n=i}^{m} (-1)^n \binom{m}{n}\binom{n}{i} \\ &= \lambda_j U_i(s,0)\left[(1-\hat{f}_0(s+\gamma_i))/(s+\gamma_i)\right] \exp\left[-sx - \int_0^x \mu_j(x)dx\right] \end{aligned} \tag{29}$$

(18) 式から (30) 式を得る。また (30) 式に (14) 式を代入すると，モデル4の (33) 式と同様にして (31) 式を得る。

$$U_i(s,0) = \sum_{n=i}^{N-1} \binom{n}{i} \hat{P}_n(s,0), \qquad K+1 \leqq i \leqq N-1, \tag{30}$$

$$\begin{aligned} U_i(s,0) = \binom{N-1}{i} N\lambda_0 \hat{P}_N(s) + \int_0^\infty \mu_0(x) U_{i-1}(s,x)dx + \int_0^\infty \mu_0(x) U_i(s,x)dx \\ - \binom{N}{i} \int_0^\infty \mu_0(x) U_{N-1}(s,x)dx + \sum_{j=1}^{M} \int_0^\infty \mu_j(x) Q_{ij}(s,x)dx \end{aligned} \tag{31}$$

同様に $U_K(s,0)$ で求めると

$$\begin{aligned} U_K(s,0) = \binom{N-1}{K} N\lambda_0 \hat{P}_N(s) + \int_0^\infty \mu_0(x) U_K(s,x)dx + \int_0^\infty \mu_0(x) \hat{P}_{K-1}(s,x)dx \\ + \sum_{m=K}^{N-1} (-1)^{m-K} \binom{m}{K-1} \int_0^\infty \mu_0(x) U_m(s,x)dx \\ - \binom{N}{K} \int_0^\infty \mu_0(x) U_{N-1}(s,x)dx + \sum_{j=1}^{M} \int_0^\infty \mu_j(x) Q_{Kj}(s,x)dx \end{aligned} \tag{32}$$

となる。

$$\int_0^\infty \mu_0(x) U_i(s,x)dx = \hat{f}_0(s+\gamma_i) U_i(s,0) \tag{33}$$

$$\sum_{j=1}^{M} \int_0^\infty \mu_j(x) Q_{ij}(s,x) = \left[(1-\hat{f}_0(s+\gamma_i))/(s+\gamma_i)\right] \lambda \hat{f}^*(s) U_i(s,0) \tag{34}$$

であるから，(26), (33), (34) 式を (31) 式に代入すると (35) 式が得られ，(35) 式を整理して

$V^5_{i-1}(s)$ をかけて $i=K+1, K+2, \cdots i$ について加えると (36) 式が得られ，さらに (36) 式で $i=N-1$ とおくと (37) 式を得る。(37) 式を (36) 式に代入して整理すると (38) 式となる。

$$U_i(s,0)=\binom{N-1}{i}N\lambda_0[\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})U_{N-1}(s,0)+1]/\alpha(s,N)+\hat{f}_0(s+\gamma_{i-1})U_{i-1}(s,0)$$
$$+\hat{f}_0(s+\gamma_i)U_i(s,0)-\binom{N}{i}\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})U_{N-1}(s,0)$$
$$+[(1-\hat{f}_0(s+\gamma_i))/(s+\gamma_i)]\lambda\hat{f}^*(s)U_i(s,0) \tag{35}$$

$$\hat{f}_0(s+\gamma_i)V^5_i(s)U_i(s,0)=\hat{f}_0(s+\gamma_K)U_K(s,0)+\sum_{k=K+1}^{i}\{\binom{N}{k}[(N-k)/\alpha(s,N)]\lambda_0V^5_{k-1}(s)$$
$$-\binom{N}{k}[\alpha(s,k)/\alpha(s,N)]\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})V^5_{k-1}(s)U_{N-1}(s,0)\} \tag{36}$$

$$U_{N-1}(s,0)=A^5_{\mathrm{N}-1}(s)U_K(s,0)+B^5_{N-1}(s) \tag{37}$$

$$U_i(s,0)=A^5_i(s)U_K(s,0)+B^5_i(s) \tag{38}$$

また，

$$\int_0^\infty\mu_0(x)\hat{P}_{K-1}(s,x)dx=\sum_{m=K}^{N-1}(-1)^{m-K}K\lambda_0\binom{m}{K}[(\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_m))/\gamma_m]U_m(s,0) \tag{39}$$

$$\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)Q_{Kj}(s,x)dx=[(1-\hat{f}_0(s+\gamma_K))/(s+\gamma_K)]\lambda\hat{f}^*(s)U_K(s,0) \tag{40}$$

という関係式を用いて，(26)，(32) 式より (41) 式を得る。

$$U_K(s,0)=\binom{N-1}{K}N\lambda_0[\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})U_{N-1}(s,0)+1]/\alpha(s,N)$$
$$+[(1-\hat{f}_0(s+\gamma_K))/(s+\gamma_K)]\lambda\hat{f}^*(s)U_K(s,0)+\hat{f}_0(s+\gamma_K)U_K(s,0)$$
$$-\binom{N}{K}\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})U_{N-1}(s,0)+\sum_{m=K}^{N-1}(-1)^{m-K}\binom{m}{K-1}\hat{f}_0(s+\gamma_m)U_m(s,0)$$
$$+\sum_{m=K}^{N-1}(-1)^{m-K}K\lambda_0\binom{m}{K}[(\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_m))/\gamma_m]U_m(s,0) \tag{41}$$

(41) 式に (38) 式を代入し整理すると

$$U_K(s,0)=\{\binom{N}{K}[N\lambda_0-\alpha(s,K)\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})B^5_{N-1}(s)]/\alpha(s,N)$$
$$+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}[K\lambda_0\binom{n}{K}(\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n))/\gamma_n+\binom{n}{K-1}\hat{f}_0(s+\gamma_n)]B^5_n(s)\}$$
$$/\{(1-\hat{f}_0(s+\gamma_K))\alpha(s,K)/(s+\gamma_K)+\binom{N}{K}[\alpha(s,K)/\alpha(s,N)]\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})A^5_{N-1}(s)$$
$$-\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}[K\lambda_0\binom{n}{K}(\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n))/\gamma_n+\binom{n}{K-1}\hat{f}_0(s+\gamma_n)]A^5_n\} \tag{42}$$

以上より時点アベイラビリティのラプラス変換形 $\hat{P}^5_A(s)$ は，

$$\hat{P}_A(s) = \hat{P}_N(s) + \sum_{i=K}^{N-1} \hat{P}_i(s)$$
$$= [\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})(A_{N-1}^5(s)U_K(s,0)+B_{N-1}^5(s))+1]/\alpha(s,N)$$
$$+\sum_{i=K}^{N-1}(-1)^{i-K}\binom{i-1}{K-1}[(1-\hat{f}_0(s+\gamma_i))/(s+\gamma_i)](A_n^5(s)U_K(s,0)+B_n^5(s)) \tag{43}$$

となる。また，信頼度関数 $R^5(t)$ のラプラス変換形 $\hat{R}^5(s)$ は適当な変換を行うことによって $\hat{P}_A^5(s)$ から得られる。即ち，$\hat{f}^*(s)=0$（S_1 の停止によってシステム停止になったとき，システムが作動状態になる確率＝0 を意味する，即ち保全率＝0），$(\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_m))=0, K\leqq m\leqq N-1$（$S_0$ の停止によってシステム停止になったとき，システムが作動状態になる確率＝0 を意味する）とおくとき，

$$\alpha(s,i) = s+i\lambda_0+\lambda \tag{44}$$

$$V_i^5(s) = \begin{cases} \prod_{k=K+1}^{i} \dfrac{[1-\hat{f}_0(s+\gamma_k)]}{\hat{f}_0(s+\gamma_k)}, & K+1\leqq i\leqq N-1 \\ 1, & i=K \end{cases} \tag{45}$$

となり，これを $\hat{P}_A^5(s)$ に代入して $\hat{R}^5(s)$ が得られる。このとき $\hat{R}^4(s)=\hat{R}^5(s)$ となる。従って次の２つの定理を得る。

定理４　モデル５の時点アベイラビリティ $P_A^5(t)$ のラプラス変換形 $\hat{P}_A^5(s)$ は (43) 式で与えられる。

定理５　モデル５の信頼度関数 $R^5(t)$ のラプラス変換形 $\hat{R}^5(s)$ は (43) 式で与えられる。ただし，$\hat{f}^*(s)=0$，$[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_m)]=0$，$K\leqq m\leqq N-1$，$\alpha(s,i)$ および $V_i^5(s)$ はそれぞれ (44)，(45) 式で与えられる。このとき $\hat{R}^5(s)=\hat{R}^4(s)$, $\mathrm{MTSF}^5(=R^5(0))=\mathrm{MTSF}^4(=R^4(0))$

次に定常状態における状態確率を求めるために次の量を定義する。

$$P_{ij}(x) = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t,x), \qquad P_i(x) = \lim_{t\to\infty} P_i(t,x)$$

$$P_i = P_i(\infty) = \int_0^\infty P_i(x)dx, \quad P_{ij}=P_{ij}(\infty) = \int_0^\infty P_{ij}(x)dx$$

このとき，このシステムの特性により定常状態における次の差分・微分・積分方程式を得る。

$$[N\lambda_0+\lambda]P_N = \int_0^\infty \mu_0(x)P_{N-1}(x)dx + \sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)P_{Nj}(x)dx, \tag{1'}$$

$$[d/dx+i\lambda_0+\lambda+\mu_0(x)]P_i(x) = (1-\delta_{iN-1})(i+1)\lambda_0 P_{i+1}(x), \quad K\leqq i\leqq N-1 \tag{2'}$$

$$[d/dx+\mu_0(x)]P_{K-1}(x) = K\lambda_0 P_K(x), \tag{3'}$$

$$[d/dx+\mu_j(x)]P_{ij}(x) = 0, \tag{4'}$$

境界条件

$$P_i(0) = \delta_{iN-1}N\lambda_0 P_N + \int_0^\infty \mu_0(x)P_{i-1}(x)dx + \sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)P_{ij}(x)dx, \quad K\leqq i\leqq N-1 \tag{5'}$$

$$P_{K-1}(0) = 0, \tag{6'}$$

$$P_{Nj}(0) = \lambda_j P_N\ , \tag{7'}$$

$$P_{ij}(0) = \lambda_j \int_0^\infty P_i(x)dx\ , \tag{8'}$$

正規条件

$$P_N + \sum_{i=K}^{N-1}\int_0^\infty P_i(x)dx + \int_0^\infty P_{K-1}(x)dx + \sum_{i=K}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty P_{ij}(x)dx = 1\ , \tag{9'}$$

以上の方程式を解くために以下の離散的変換を導入する。

$$U_i(x) = \sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i} P_n(x)\ , \tag{10'}$$

$$Q_{ij}(x) = \sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i} P_{nj}(x)\ , \qquad K \leqq i \leqq N-1 \tag{11'}$$

$$P_i(x) = \sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i} U_n(x) \tag{12'}$$

(10′) 式を (2′) 式に適用すると

$[d/dx + i\lambda_0 + \lambda + \mu_0(x)]U_i(x) = 0$ となり，これを解くと，

$$U_i(x) = U_i(0)\exp[-\gamma_i x - \int_0^x \mu_0(x)dx] \tag{13'}$$

を得る。(13′) 式を (12′) 式に代入すると (14′) 式が得られ，(14′) 式において $i=K$ のときの関係式を (3′) 式に代入すると (15′) 式を得る。

$$P_i(x) = \sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i} U_n(0)\exp[-\gamma_n x - \int_0^x \mu_0(x)dx]\ , \quad K \leqq i \leqq N-1 \tag{14'}$$

$$P_{K-1}(x) = \sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}K\lambda_0\binom{n}{K} U_n(0)\,[(1-\exp(-\gamma_n x))/\gamma_n]\exp[-\int_0^x \mu_0(x)dx] \tag{15'}$$

また，$i=N-1$ のときは

$$P_{N-1}(x) = U_{N-1}(x)\ , \tag{16'}$$

となる. (4′) 式と (7′) 式, (16′), (17′), (1′) 式より (17′), (18′) 式を得る。

$$P_{Nj}(x) = \lambda_j P_N \exp[-\int_0^x \mu_j(x)dx]\ , \tag{17'}$$

$$P_N = \hat{f}_0(\gamma_{N-1})U_{N-1}(0)/N\lambda_0\ , \tag{18'}$$

(14′), (15′), (17′), (18′) 式より

$$P_i = \int_0^\infty P_i(x)dx = \sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}[(1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n]U_n(0)\ , \tag{19'}$$

$$P_{K-1} = \int_0^\infty P_{K-1}(x)dx = \sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}[K\lambda_0/\gamma_n]\,[K_0^* - (1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n]U_n(0)\ , \tag{20'}$$

$$P_{Nj} = \int_0^\infty P_{Nj}(x)dx = \lambda_j K_j^* P_N \tag{21'}$$

$$P_{ij} = \int_0^\infty P_{ij}(x)dx = \lambda_j K_j^* P_i \tag{22'}$$

(5′) 式を (10′) 式に代入すると，(31) 式と同様にして

$$U_i(0)=\binom{N-1}{i}N\lambda_0P_N+\int_0^\infty\mu_0(x)U_{i-1}(x)dx+\int_0^\infty\mu_0(x)U_i(x)dx$$

$$-\binom{N}{i}\int_0^\infty\mu_0(x)U_{N-1}(x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)Q_{ij}(x)dx \qquad (23')$$

となる．

$$\int_0^\infty\mu_0(x)U_i(x)dx=\hat{f}_0(\gamma_i)U_i(0) \qquad (24')$$

$$\int_0^\infty\mu_j(x)Q_{ij}(x)dx=\lambda_j\sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i}\sum_{m=n}^{N-1}(-1)^{m-n}\binom{m}{n}[(1-\hat{f}_0(\gamma_m))/\gamma_m]U_m(0)$$

$$=\lambda_j\sum_{m=i}^{N-1}(-1)^m[(1-\hat{f}_0(\gamma_m))/\gamma_m]U_m(0)\sum_{n=i}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}\binom{n}{i}$$

$$=\lambda_j[(1-\hat{f}_0(\gamma_i))/\gamma_i]U_i(0) \qquad (25')$$

(24′) (25′) 式を (23′) 式に代入して整理すると，

$$(1-\hat{f}_0(\gamma_i))[i\lambda_0/\gamma_i]U_i(0)=\hat{f}_0(\gamma_{N-1})U_{i-1}(0)-\binom{N-1}{i-1}\hat{f}_0(\gamma_{N-1})U_{N-1}(0)\ , \qquad (26')$$

(26′) 式の両辺に $V_{i-1}^5(0)$ をかけて $i=K+1, K+2, \cdots, i$ について加えると，

$$\hat{f}_0(\gamma_i)V_i^5(0)U_i(0)=\hat{f}_0(\gamma_K)U_K(0)-\sum_{k=K+1}^{i}\binom{N-1}{k-1}V_{k-1}^5(0)\hat{f}_0(\gamma_{N-1})U_{N-1}(0)\ , \qquad (27')$$

(27′) 式において $i=N-1$ とおくと，

$$U_{N-1}(0)=\hat{f}_0(\gamma_K)U_K(0)/[C_{K+1,N}^*(0)\hat{f}_0(\gamma_{N-1})]\ , \qquad (28')$$

となる。(28′) 式を (27′) 式に代入して整理すると (29′) 式が得られ，さらに (9′) 式に (18′)～(22′) 式を代入して (29′) 式を用いると (30′) 式を得る。

$$U_i(0)=A_i^5(0)U_K(0) \qquad (29')$$

$$U_K(0)=\{(1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*)[\hat{f}_0(\gamma_K)/(C_{K+1,N}^*(0)N\lambda_0)$$

$$+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}(1-\hat{f}_0(\gamma_n))A_n^5(0)/\gamma_n]$$

$$+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}K\lambda_0[K_0^*-(1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n]A_n^5(0)/\gamma_n\}^{-1} \qquad (30')$$

従って (19′)～(22′)，(29′)，(30′) 式より (31′)～(35′) 式を得る。

$$P_i=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}[(1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n]A_n^5(0)U_K(0) \qquad (31')$$

$$P_{K-1}=\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}[K\lambda_0/\gamma_n][K_j^*-(1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n]A_n^5(0)U_K(0) \qquad (32')$$

$$\sum_{j=1}^{M} P_{Nj} = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j K_j^* [\hat{f}_0(\gamma_K)/(C_{K+1,N}^*(0)N\lambda_0)] U_K(0) \tag{33'}$$

$$\sum_{i=K}^{N} \sum_{j=1}^{M} P_{ij} = \{[\hat{f}_0(\gamma_K)/(C_{K+1,N}^*(0)N\lambda_0)] + \sum_{n=K}^{N-1} (-1)^{n+K} \binom{n-1}{K-1} [(1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n] \cdot A_n^5(0)\} (\sum_{j=1}^{K} \lambda_j K_j^*) U_K(0) \tag{34'}$$

$$P_A^5(\infty) = P_N + \sum_{i=K}^{N-1} P_i = \{[\hat{f}_0(\gamma_K)/(C_{K+1,N}^*(0)N\lambda_0)] + \sum_{i=K}^{N-1} (-1)^{i-K} \binom{i-1}{K-1} [(1-\hat{f}_0(\gamma_i))/\gamma_i] A_i^5(0)\} U_K(0) \tag{35'}$$

ここに $U_K(0)$ は (30′) 式で与えられる。

従って次の定理を得る。

定理6　モデル5の定常アベイラビリティは (35′) 式で与えられ，サブシステム S_0, S_1 の停止によってシステムが作動していない定常状態における確率はそれぞれ (32′)，(34′) 式で与えられる。

3.　モデル6—故障生起順保全の場合

モデルの状態推移図は図6に示される。このモデルの特性より次の差分・微分・積分方程式を得る。

$$[d/dt + N\lambda_0 + \lambda] P_N(t) = \int_0^t \mu_0(x) P_{N-1}(t,x)dx + \sum_{j=1}^{M} \int_0^t \mu_j(x) P_{Nj}(t,x)dx + \sum_{j=1}^{M} \int_0^t \mu_j(x) P_{N-1j}(t,x)dx\,, \tag{1}$$

$$[\partial/\partial t + \partial/\partial x + i\lambda_0 + \lambda + \mu_0(x)] P_i(t,x) = (1-\delta_{iN-1})(i+1)\lambda_0 P_{i+1}(t,x)\,, \quad K \leqq i \leqq N-1\,, \tag{2}$$

$$[\partial/\partial t + \partial/\partial x + \mu_0(x)] P_{K-1}(t,x) = K\lambda_0 P_K(t,x)\,, \tag{3}$$

$$[\partial/\partial t + \partial/\partial x + \mu_0(x)] P_{ij}^0(t,x) = \lambda_j P_i(t,x)\,, \quad K \leqq i \leqq N-1\,, \ 1 \leqq j \leqq M\,, \tag{4}$$

$$[\partial/\partial t + \partial/\partial x + \mu_j(x)] P_{ij}(t,x) = 0\,, \quad K \leqq i \leqq N\,, \ 1 \leqq j \leqq M\,, \tag{5}$$

境界条件

$$P_i(t,0) = \delta_{i,N-1} N\lambda_0 P_N(t) + \int_0^t \mu_0(x) P_{i-1}(t,x)dx + \sum_{j=1}^{M} \int_0^t \mu_j(x) P_{i-1j}(t,x)dx\,. \quad K+1 \leqq i \leqq N-1\,, \tag{6}$$

$$P_K(t,0) = \int_0^t \mu_0(x) P_{K-1}(t,x)dx\,, \tag{7}$$

$$P_{K-1}(t,0) = 0\,, \tag{8}$$

$$P_{ij}^0(t,0) = 0\,, \quad K \leqq i \leqq N-1\,, \ 1 \leqq j \leqq M\,, \tag{9}$$

$$P_{Nj}(t,0) = \lambda_j P_N(t)\,, \quad 1 \leqq j \leqq M\,, \tag{10}$$

$$P_{ij}(t,0)=\int_0^t \mu_0(x)P_{ij}^0(t,x)dx\,,\qquad K\leqq i\leqq N-1, 1\leqq j\leqq M\,,\tag{11}$$

初期条件

$$P_N(0)=1\,,\tag{12}$$

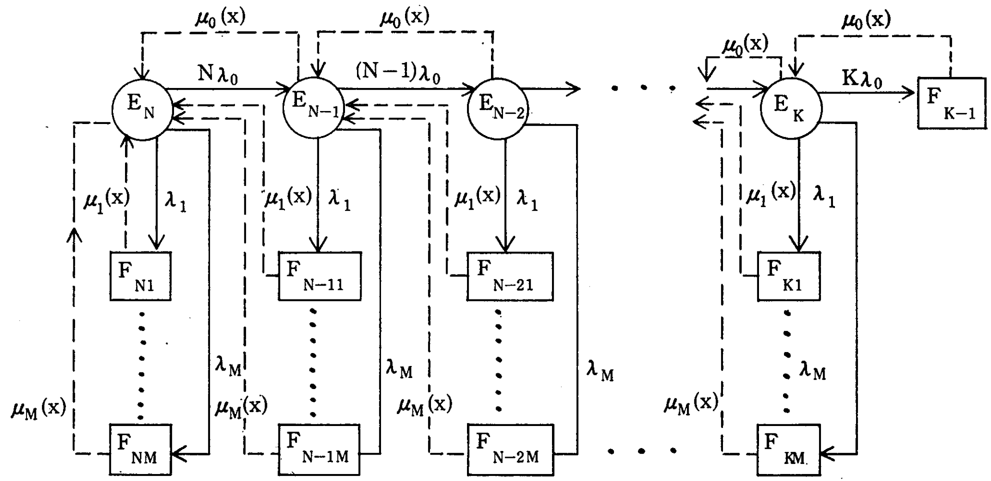

図 6　モデル 6 の状態推移図

以上 (1)〜(11) を初期条件 (12) 式のもとでラプラス変換すると

$$[s+N\lambda_0+\lambda]\hat{P}_N(s)=\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_{N-1}(s,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\hat{P}_{Nj}(s,x)dx$$
$$+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\hat{P}_{N-1j}(s,x)dx+1\,,\tag{13}$$

$$[s+\partial/\partial x+i\lambda_0+\lambda+\mu_0(x)]\hat{P}_i(s,x)=(1-\delta_{i,N-1})(i+1)\lambda_0\hat{P}_{i+1}(s,x)\,,\quad K\leqq i\leqq N-1\,,\tag{14}$$

$$[s+\partial/\partial x+\mu_0(x)]\hat{P}_{K-1}(s,x)=K\lambda_0\hat{P}_K(s,x)\,,\tag{15}$$

$$[s+\partial/\partial x+\mu_0(x)]\hat{P}_{ij}^0(s,x)=\lambda_j\hat{P}_i(s,x)\,,\qquad K\leqq i\leqq N-1,\ 1\leqq j\leqq M\,,\tag{16}$$

$$[s+\partial/\partial x+\mu_j(x)]\hat{P}_{ij}(s,x)=0\,,\qquad K\leqq i\leqq N,\ 1\leqq j\leqq M\,,\tag{17}$$

$$\hat{P}_i(s,0)=\delta_{i,N-1}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_{i-1}(s,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\hat{P}_{i-1j}(s,x)dx\,,$$
$$K+1\leqq i\leqq N-1\,,\tag{18}$$

$$\hat{P}_K(s,0)=\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_{K-1}(s,x)dx\,,\tag{19}$$

$$\hat{P}_{K-1}(s,0)=0\,,\tag{20}$$

$$\hat{P}_{ij}^0(s,0)=0\,,\tag{21}$$

$$\hat{P}_{Nj}(s,0)=\lambda_j\hat{P}_N(s)\ , \tag{22}$$

$$\hat{P}_{ij}(s,0)=\int_0^\infty \mu_0(x)P_{ij}^0(s,x)dx\ , \tag{23}$$

ここでモデル4の（24）式,（25）式で定義した離散的変換を用いると,（14）式は

$$[s+\partial/\partial x+i\lambda_0+\lambda+\mu_0(x)]U_i(s,x)=0\ , \qquad K\leqq i\leqq N-1$$

となり，これを解くと

$$U_i(s,x)=U_i(s,0)\exp[-(s+\gamma_i)x-\int_0^x\mu_0(y)dy]\ , \qquad K\leqq i\leqq N-1\ , \tag{24}$$

となり,（24）式をモデル4の（25）式に代入すると

$$\hat{P}_i(s,x)=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}U_n(s,0)\exp[-(s+\gamma_n)x-\int_0^x\mu_0(y)dy]\ , \tag{25}$$

となる。（25）式で $i=K$ とおいて（15）式に代入し方程式を解くと

$$\hat{P}_{K-1}(s,x)=\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}U_n(s,0)K\lambda_0[(1-\exp(-\gamma_n x))/\gamma_n]\exp[-sx-\int_0^x\mu_0(y)dy] \tag{26}$$

離散的変換の定義式から

$$\hat{P}_{N-1}(s,x)=U_{N-1}(s,x)=U_{N-1}(s,0)\exp[-(s+\gamma_{N-1})x-\int_0^x\mu_0(y)dy] \tag{27}$$

（17）式（22）式より

$$\hat{P}_{Nj}(s,x)=\lambda_j\hat{P}_N(s)\exp[-sx-\int_0^x\mu_j(y)dy] \tag{28}$$

（16）と（25）式より

$$\hat{P}_{ij}^0(s,x)=\exp[-sx-\int_0^x\mu_0(y)dy]\lambda_j\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}U_n(s,0)[1-\exp(-\gamma_n x)]/\gamma_n\ , \tag{29}$$

（23）式と（29）式より

$$\hat{P}_{ij}(s,0)=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\lambda_jU_n(s,0)[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/\gamma_n\ , \tag{30}$$

（17）式と（30）式より

$$\hat{P}_{ij}(s,x)=\lambda_j\exp[-sx-\int_0^x\mu_j(y)dy]\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}U_n(s,0)[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/\gamma_n\ , \tag{31}$$

（27），（28），（30）式を（13）式に代入して積分すると

$$[s+N\lambda_0+\lambda]\hat{P}_N(s)=\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})U_{N-1}(s,0)+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j\hat{f}_j(s)\hat{P}_N(s)$$
$$+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j\hat{f}_j(s)U_{N-1}(s,0)[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})]/\gamma_{N-1}+1$$

ここで， $\lambda\hat{f}^*(s)=\sum_{j=1}^{M}\lambda_j\hat{f}_j(s),\ \alpha(s,i)=s+i\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s))$ 　を用い,

$$D_i(s)=\hat{f}_0(s+\gamma_i)+\lambda\hat{f}^*(s)[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_i)]/\gamma_i,\quad K\leqq i\leqq N-1,\tag{32}$$

とおくと

$$\hat{P}_N(s)=[D_{N-1}(s)U_{N-1}(s,0)+1]/\alpha(s,N)\tag{33}$$

となる。

モデル4の (32), (31), (18) 式より

$$U_i(s,0)=\sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i}\hat{P}_n(s,0)=\sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i}\{\delta_{n,N-1}N\lambda_0\hat{P}_N(s)$$

$$+\int_0^\infty\mu_0(x)\hat{P}_{n-1}(s,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)\hat{P}_{n-1j}(s,x)dx\}$$

$$=\binom{N-1}{i}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\int_0^\infty\mu_0(x)\sum_{m=i-1}^{N-2}\binom{m+1}{i}\hat{P}_m(s,x)dx$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)\sum_{m=i-1}^{N-2}\binom{m+1}{i}\hat{P}_{mj}(s,x)dx$$

$$=\binom{N-1}{i}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\int_0^\infty\mu_0(x)\sum_{m=i-1}^{N-1}\binom{m+1}{i}\hat{P}_m(s,x)dx-\binom{N}{i}\int_0^\infty\mu_0(x)\hat{P}_{N-1}(s,x)dx$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)\sum_{m=i-1}^{N-1}\binom{m+1}{i}\hat{P}_{mj}(s,x)\,dx-\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\binom{N}{i}\hat{P}_{N-1j}(s,x)dx$$

$$=\binom{N-1}{i}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\int_0^\infty\mu_0(x)\sum_{m=i-1}^{N-1}[\binom{m}{i}+\binom{m}{i-1}]\hat{P}_m(s,x)dx$$

$$-\binom{N}{i}\int_0^\infty\mu_0(x)\hat{P}_{N-1}(s,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)\sum_{m=i-1}^{N-1}[\binom{m}{i}+\binom{m}{i-1}]\hat{P}_{mj}(s,x)dx$$

$$-\binom{N}{i}\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)\hat{P}_{N-1j}(s,x)dx$$

$$=\binom{N-1}{i}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\int_0^\infty\mu_0(x)\sum_{m=i}^{N-1}\binom{m}{i}\hat{P}_m(s,x)dx+\int_0^\infty\mu_0(x)\sum_{m=i-1}^{N-1}\binom{m}{i-1}\hat{P}_m(s,x)dx$$

$$-\binom{N}{i}\int_0^\infty\mu_0(x)U_{N-1}(s,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)\sum_{m=i}^{N-1}\binom{m}{i}\hat{P}_{mj}(s,x)dx$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)\sum_{m=i-1}^{N-1}\binom{m}{i-1}\hat{P}_{mj}(s,x)dx-\binom{N}{i}\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)\hat{P}_{N-1j}(s,x)dx$$

$$=\binom{N-1}{i}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\int_0^\infty\mu_0(x)U_i(s,x)dx+\int_0^\infty\mu_0(x)U_{i-1}(s,x)\,dx$$

$$-\binom{N}{i}\int_0^\infty\mu_0(x)U_{N-1}(s,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)\sum_{m=i}^{N-1}\binom{m}{i}\lambda_j\exp[-sx$$

$$-\int_0^x\mu_j(y)dy]\sum_{n=m}^{N-1}(-1)^{n-m}\binom{n}{m}U_n(s,0)\{[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/\gamma_n\}dx$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)\sum_{m=i-1}^{N-1}\binom{m}{i-1}\lambda_j\exp[-sx-\int_0^x\mu_j(y)dy]$$

$$\cdot\sum_{n=m}^{N-1}(-1)^{n-m}\binom{n}{m}U_n(s,0)\{[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/\gamma_n\}dx$$

$$-\binom{N}{i}\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\exp\left[-sx-\int_0^x \mu_j(y)dy\right]$$

$$\cdot U_{N-1}(s,0)\{[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})]/\gamma_{N-1}\}dx$$

$$=\binom{N-1}{i}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\hat{f}_0(s+\gamma_i)U_i(s,0)+\hat{f}_0(s+\gamma_{i-1})U_{i-1}(s,0)$$

$$-\binom{N}{i}\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})U_{N-1}(s,0)+\lambda\hat{f}^*(s)\left\{\sum_{m=i}^{N-1}\sum_{n=m}^{N-1}(-1)^{n+m}\binom{m}{i}\binom{n}{m}\right.$$

$$\left.+\sum_{m=i-1}^{N-1}\sum_{n=m}^{N-1}(-1)^{n+m}\binom{m}{i-1}\binom{n}{m}\right\}U_n(s,0)[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/\gamma_n$$

$$-\binom{N}{i}\lambda\hat{f}^*(s)U_{N-1}(s,0)[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})]/\gamma_{N-1}\,,\quad K+1\leqq i\leqq N-1 \tag{34}$$

となる。モデル5の (28) 式より

$$\sum_{m=i}^{N-1}\sum_{n=m}^{N-1}(-1)^{n+m}\binom{m}{i}\binom{n}{m}U_n(s,0)[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma)]/\gamma_n$$

$$=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^n U_n(s,0)\{[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/\gamma_n\}\sum_{m=i}^{n}(-1)^m\binom{m}{i}\binom{n}{m}$$

$$=(-1)^i U_i(s,0)\{[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_i)]/\gamma_i\}(-1)^i$$

$$=U_i(s,0)[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_i)]/\gamma_i \tag{35}$$

同様にして，

$$\sum_{m=i-1}^{N-1}\sum_{n=m}^{N-1}(-1)^{n+m}\binom{m}{i-1}\binom{n}{m}U_n(s,0)[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/\gamma_n$$

$$=\sum_{n=i-1}^{N-1}(-1)^n U_n(s,0)\{[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/\gamma_n\}\sum_{m=i-1}^{n}(-1)^m\binom{m}{i-1}\binom{n}{m}$$

$$=U_{i-1}(s,0)[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_{i-1})]/\gamma_i \tag{36}$$

となる。(34)，(35)，(36) 式より (37) 式を得る。

$$U_i(s,0)=\binom{N-1}{i}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\{\hat{f}_0(s+\gamma_i)+\lambda\hat{f}^*(s)[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_i)]/\gamma_i\}U_i(s,0)$$

$$+\{\hat{f}_0(s+\gamma_{i-1})+\lambda\hat{f}^*(s)[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_{i-1})]/\gamma_{i-1}\}U_{i-1}(s,0)-\binom{N}{i}\{\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})$$

$$+\lambda\hat{f}^*(s)[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})]/\gamma_{N-1}\}U_{N-1}(s,0) \tag{37}$$

$\alpha(s,i)$，(32)，(33)，(37) 式より

$$[1-D_i(s)]U_i(s,0)=D_{i-1}(s)U_{i-1}(s,0)-\binom{N}{i}[D_{N-1}(s)U_{N-1}(s,0)\alpha(s,i)$$

$$+(i-N)\lambda_0]/\alpha(s,N) \tag{38}$$

$$V_i^6(s) = \begin{cases} \prod_{k=K+1}^{i} (1-D_k(s))/D_k(s) , & K+1 \leqq i \leqq N-1 \\ 1 & , \quad i=K \end{cases} \tag{39}$$

とおき，(39) 式の両辺に $V_{i-1}^6(s)$ をかけて $i=K+1$, $K+2, \cdots i$ について加えると (40) 式を得る。

$$D_i(s)V_i^6(s)U_i(s,0) = D_K(s)U_K(s,0) - \sum_{k=K+1}^{i}\binom{N}{k}V_{k-1}^6(s)[\alpha(s,k)D_{N-1}(s)U_{N-1}(s,0) + (k-N)\lambda_0]/\alpha(s,N) \tag{40}$$

$$C_{ij}^+(s) = \sum_{k=i}^{j}\binom{N}{k}V_{k-1}^6(s)\alpha(s,k)/\alpha(s,N) \tag{41}$$

とおき，(40) 式で $i=N-1$ とおいて $U_{N-1}(s,0)$ を求めると (42) 式を得る。

$$U_{N-1}(s,0) = [D_K(s)U_K(s,0) + \sum_{k=K+1}^{N-1}\binom{N}{k}V_{k-1}^6(s)(N-k)\lambda_0/\alpha(s,N)]/[C_{K+1,N}^+(s)D_{N-1}(s)] \tag{42}$$

$$E_{ij}^+(s) = \sum_{n=i}^{j}\binom{N}{n}(N-n)\lambda_0 V_{n-1}^6(s)/\alpha(s,N) , \tag{43}$$

$$A_i^6(s) = \begin{cases} C_{i+1,N}^+(s)D_K(s)/[C_{K+1,N}(s)D_i(s)V_i^6(s)] , & K+1 \leqq i \leqq N-1 \\ 1 & , \quad i=K \end{cases} \tag{44}$$

$$B_i^6(s) = \begin{cases} [C_{i+1,N}^+(s)E_{K+1,i}^+(s) - C_{K+1,i}^+(s)E_{i+1,N}^+(s)]/[C_{K+1,N}^+(s)D_i(s)V_i^6(s)] , & K+1 \leqq i \leqq N-1 \\ 0 & , \quad i=K \end{cases} \tag{45}$$

とおき，関係式 $C_{i+1,N}^+(s)E_{K+1,i}^+(s) - C_{K+1,i}^+(s)E_{i+1,N}^+(s) = C_{K+1,N}^+(s)E_{K+1,i}^+ - C_{K+1,i}^+(s)E_{K+1,N}^+(s)$, $E_{i,N-1}^+(s) = E_{i,N}^+(s)$ を考慮し，(42) 式を (40) 式に代入すると (46) 式を得る。

$$U_i(s,0) = A_i^6(s)U_K(s,0) + B_i^6(s) , \quad K \leqq i \leqq N-1 \tag{46}$$

上式は $i=K$ および $i=N-1$ で成立することに注意しよう。

次に $U_K(s,0)$ を求めるために次の諸量を求めておく。離散的変換式，モデル5 の (28) 式，(31) 式および (26) 式から，(47)～(51) 式を得る。

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=K}^{N-1}\binom{m}{K-1}\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_m(s,x)dx \\
&= \sum_{m=K}^{N-1}\binom{m}{K-1}\int_0^\infty \mu_0(x)\sum_{n=m}^{N-1}(-1)^{n-m}\binom{n}{m}U_n(s,x)dx \\
&= \sum_{n=K}^{N-1}\sum_{m=K}^{n}(-1)^{n-m}\binom{m}{K-1}\binom{n}{m}\int_0^\infty \mu_0(x)U_n(s,x)dx \\
&= \sum_{n=K}^{N-1}(-1)^n\int_0^\infty \mu_0(x)U_n(s,x)dx[\sum_{m=K-1}^{n}(-1)^{-m}\binom{m}{K-1}\binom{n}{m} - (-1)^{-(K-1)}\binom{n}{K-1}] \\
&= \sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K-1}\int_0^\infty \mu_0(x)U_n(s,x)dx = \sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K-1}\hat{f}_0(s+\gamma_n)U_n(s,0) ,
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\sum_{m=K}^{N-1}\binom{m}{K}\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\hat{P}_{mj}(s,x)dx$$

$$=\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \sum_{m=K}^{N-1}\binom{m}{K}\mu_j(x)\lambda_j \exp\left[-sx-\int_0^x \mu_j(y)dy\right]\sum_{n=m}^{N-1}(-1)^{n-m}\binom{n}{m}U_n(s,0)$$

$$\cdot\{[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/\gamma_n\}dx$$

$$=\sum_{j=1}^{M}\lambda_j\hat{f}_j(s)\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^n\sum_{m=K}^{n}(-1)^m\binom{m}{K}\binom{n}{m}U_n(s,0)\,[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/\gamma_n$$

$$=\lambda\hat{f}^*(s)U_K(s,0)\,[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_K)]/\gamma_K\,, \tag{48}$$

$$\sum_{m=K}^{N-1}\binom{m}{K-1}\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\hat{P}_{mj}(s,x)dx$$

$$=\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \sum_{m=K}^{N-1}\binom{m}{K-1}\mu_j(x)\lambda_j \exp\left[-sx-\int_0^x \mu_j(y)dy\right]\sum_{n=m}^{N-1}(-1)^{n-m}\binom{n}{m}U_n(s,0)$$

$$\cdot\{[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/\gamma_n\}dx$$

$$=\lambda\hat{f}^*(s)\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^n U_n(s,0)\{[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/\gamma_n\}$$

$$\cdot\left[\sum_{m=K-1}^{N-1}(-1)^{-m}\binom{m}{K-1}\binom{n}{m}-(-1)^{-(K-1)}\binom{n}{K-1}\right]$$

$$=\lambda\hat{f}^*(s)\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K-1}U_n(s,0)\,[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/\gamma_n\,, \tag{49}$$

$$\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\hat{P}_{N-1j}(s,x)dx$$

$$=\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\lambda_j \exp\left[-sx-\int_0^x \mu_j(y)dy\right]\sum_{n=N-1}^{N-1}(-1)^{n-(N-1)}\binom{n}{N-1}U_n(s,0)$$

$$\cdot\{[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/\gamma_n\}dx$$

$$=\lambda\hat{f}^*(s)U_{N-1}(s,0)\,[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})]/\gamma_{N-1} \tag{50}$$

$$\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_{K-1}(s,x)dx=K\lambda_0\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}U_n(s,0)\int_0^\infty f_0(x)\exp(-sx)$$

$$\cdot\{[1-\exp(-\gamma_n x)]/\gamma_n\}dx$$

$$=K\lambda_0\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}U_n(s,0)\,[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/\gamma_n \tag{51}$$

離散的変換式，(18)～(19) 式，(47)～(51) 式より

$$U_K(s,0)=\sum_{n=K}^{N-1}\binom{n}{K}\hat{P}_n(s,0)=\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_{K-1}(s,x)dx+\sum_{n=K+1}^{N-1}\binom{n}{K}\{\delta_{n,N-1}N\lambda_0\hat{P}_N(s)$$

$$+\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_{n-1}(s,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\hat{P}_{n-1,j}(s,x)dx\}$$

$$=\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_{K-1}(s,x)dx+\binom{N-1}{K}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\sum_{n=K+1}^{N-1}\binom{n}{K}\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_{n-1}(s,x)dx$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\sum_{n=K+1}^{N-1}\binom{n}{K}\hat{P}_{n-1,j}(s,x)dx$$

$$=\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_{K-1}(s,x)dx+\binom{N-1}{K}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\sum_{m=K}^{N-2}\binom{m+1}{K}\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_m(s,x)dx$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\sum_{m=K}^{N-2}\binom{m+1}{K}\hat{P}_{mj}(s,x)dx$$

$$=\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_{K-1}(s,x)dx+\binom{N-1}{K}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\sum_{m=K}^{N-1}\binom{m+1}{K}\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_m(s,x)dx$$

$$-\binom{N}{K}\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_{N-1}(s,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\sum_{m=K}^{N-1}\binom{m+1}{K}\hat{P}_{mj}(s,x)dx$$

$$-\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\binom{N}{K}\hat{P}_{N-1,j}(s,x)dx$$

$$=\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_{K-1}(s,x)dx+\binom{N-1}{K}N\lambda_0\hat{P}_N(s)$$

$$+\sum_{m=K}^{N-1}\left\{\binom{m}{K}+\binom{m}{K-1}\right\}\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_m(s,x)dx-\binom{N}{K}\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_{N-1}(s,x)dx$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\sum_{m=K}^{N-1}\left[\binom{m}{K}+\binom{m}{K-1}\right]\hat{P}_{mj}(s,x)dx-\binom{N}{K}\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\hat{P}_{N-1,j}(s,x)dx$$

$$=\int_0^\infty \mu_0(x)\hat{P}_{K-1}(s,x)dx+\binom{N-1}{K}N\lambda_0\hat{P}_N(s)+\int_0^\infty \mu_0(x)U_K(s,x)dx$$

$$+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K-1}\int_0^\infty \mu_0(x)U_n(s,x)dx-\binom{N}{K}\int_0^\infty \mu_0(x)U_{N-1}(s,x)dx$$

$$+\lambda\hat{f}^*(s)U_K(s,0)\,[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_K)]/\gamma_K-\binom{N}{K}\lambda\hat{f}^*(s)U_{N-1}(s,0)$$

$$\cdot[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})]/\gamma_{N-1}+\lambda\hat{f}^*(s)\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K-1}U_n(s,0)$$

$$\cdot[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/\gamma_n$$

$$=K\lambda_0\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}U_n(s,0)\,[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/\gamma_n+\binom{N-1}{K}N\lambda_0\hat{P}_N(s)$$

$$+\{\hat{f}_0(s+\gamma_K)+\lambda\hat{f}^*(s)\,[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_K)]/\gamma_K\}U_K(s,0)$$

$$+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K-1}U_n(s,0)\{\hat{f}_0(s+\gamma_n)+\lambda\hat{f}^*(s)\,[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/\gamma_n\}$$

$$-\binom{N}{K}U_{N-1}(s,0)\{\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})+\lambda\hat{f}^*(s)\,[\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_{N-1})]/\gamma_{N-1}\} \qquad (52)$$

従って (32), (33), (45) 式を用いて整頓すると,

$$U_K(s,0)=\{\binom{N}{K}[(N-K)\lambda_0-D_{N-1}(s)B_{N-1}^6(s)\alpha(s,K)]/\alpha(s,N)+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K-1}B_n^6(s)$$

$$\cdot[D_n(s)+(n-K+1)\lambda_0(\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n))/\gamma_n]\}/\{1-D_K(s)$$

$$+\binom{N}{K}D_{N-1}(s)A_{N-1}^{6}(s)\alpha(s,K)/\alpha(s,N)$$

$$-\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K-1}A_{n}^{6}(s)\left[(n-K+1)\lambda_0(\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_n))/\gamma_n+D_n(s)\right]\} \quad (53)$$

となる。また，(28)，(33)，(45) 式から (54)～(55) 式を得る。

$$\hat{P}_N(s) = \{D_{N-1}(s)\left[A_{N-1}^{6}(s)U_K(s,0)+B_{N-1}^{6}(s)\right]+1\}/\alpha(s,N)\ , \quad (54)$$

$$\hat{P}_i(s) = \int_0^\infty \hat{P}_i(s,x)dx = \sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\{[1-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/(s+\gamma_n)\}U_n(s,0)$$

$$= \sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\{[1-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/(s+\gamma_n)\}\left[A_n^6(s)U_K(s,0)+B_n^6(s)\right] \quad (55)$$

従って時点アベイラビリティ $P_A^6(t)$ のラプラス変換 $P_A^6(s)$ は

$$\hat{P}_A^6(s) = \hat{P}_N(s)+\sum_{i=K}^{N-1}\hat{P}_i(s)$$

$$= \{D_{N-1}(s)\left[A_{N-1}^{6}(s)U_K(s,0)+B_{N-1}^{6}(s)\right]+1\}/\alpha(s,N)$$

$$+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}\{[1-\hat{f}_0(s+\gamma_n)]/(s+\gamma_n)\}\left[A_n^6(s)U_K(s,0)+B_n^6(s)\right] \quad (56)$$

である。また，信頼度関数 $R^6(t)$ のラプラス変換 $\hat{R}^6(s)$ はモデル4および5と同様にして，$\hat{f}^*(s)=0$, $\hat{f}_0(s)-\hat{f}_0(s+\gamma_m)=0$, $K\leqq m\leqq N-1$ とおいて求まる。このとき，$\alpha(s,i)=s+i\lambda_0+\lambda$, $V_i^6(s)=V_i^5(s)=V_i^4(s)$ となり，これを $\hat{P}_A^6(s)$ に代入して $\hat{R}^6(s)$ が得られる。また，$\hat{R}^6(s)=\hat{R}^5(s)=\hat{R}^4(s)$, $\mathrm{MTSF}^6=\mathrm{MTSF}^5=\mathrm{MTSF}^4$ である。従って次の定理を得る。

定理7　モデル6の時点アベイラビリティ $\hat{P}_A^6(t)$ のラプラス変換形 $\hat{P}_A^6(s)$ は (56) 式で与えられる。また信頼度関数 $R^6(t)$ のラプラス変換形 $\hat{R}^6(s)$ および MTSF^6 については $\hat{R}^6(s)=\hat{R}^5(s)=\hat{R}^4(s)$，$\mathrm{MTSF}^6=\mathrm{MTSF}^5=\mathrm{MTSF}^4$ が成立する。

次に定常状態の解析を行う。ここで新しく $P_{ij}^0(x)=\lim_{t\to\infty}P_{ij}^0(t,x)$ を導入すると，このモデルの特性より次の差分・微分・積分方程式を得る。

$$[N\lambda_0+\lambda]P_N = \int_0^\infty \mu_0(x)P_{N-1}(x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(y)P_{Nj}(y)dy+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(y)P_{N-1,j}(y)dy\ , \quad (1')$$

$$[d/dx+i\lambda_0+\lambda+\mu_0(x)]P_i(x) = (1-\delta_{iN-1})(i+1)\lambda_0P_{i+1}(x)\ , \quad K\leqq i\leqq N-1 \quad (2')$$

$$[d/dx+\mu_0(x)]P_{K-1}(x) = K\lambda_0P_K(x)\ , \quad (3')$$

$$[d/dx+\mu_0(x)]P_{ij}^0(x) = \lambda_jP_i(x)\ , \quad 1\leqq j\leqq M\ ,\ K\leqq i\leqq N-1 \quad (4')$$

$$[d/dy+\mu_j(y)]P_{ij}(y) = 0\ , \quad 1\leqq j\leqq M\ ,\ K\leqq i\leqq N \quad (5')$$

境界条件

$$P_i(0) = \delta_{iN-1}N\lambda_0P_N+\int_0^\infty \mu_0(x)P_{i-1}(x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(y)P_{i-1,j}(y)dy\ ,\ K+1\leqq i\leqq N-1 \quad (6')$$

$$P_K(0)=\int_0^\infty \mu_0(x)P_{K-1}(x)dx\ , \tag{7'}$$

$$P_{K-1}(0)=0\ , \tag{8'}$$

$$P_{ij}^0(0)=0\ , \tag{9'}$$

$$P_{Nj}(0)=\lambda_j P_N \tag{10'}$$

$$P_{ij}(0)=\int_0^\infty \mu_0(x)P_{ij}^0(x)dx\ , \tag{11'}$$

正規条件

$$P_N+\sum_{i=K}^{N-1}\int_0^\infty P_i(x)dx+\int_0^\infty P_{K-1}(x)dx+\sum_{i=K}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty P_{ij}^0(x)dx+\sum_{i=K}^{N}\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty P_{ij}(y)dy=1\ , \tag{12'}$$

ここで次の離散的変換（13′)，(14′）式を導入し，

$$U_i(x)=\sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i}P_n(x) \tag{13'}$$

$$K\leqq i\leqq N-1$$

$$P_i(x)=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}U_n(x) \tag{14'}$$

(13′）式を（2′）式に適用すると，

$$[d/dx+i\lambda_0+\lambda+\mu_0(x)]U_i(x)=0$$

となり，これを解くと（15′）式を得る.

$$U_i(x)=U_i(0)\exp[-\gamma_i x-\int_0^x \mu_0(x)dx] \tag{15'}$$

(15′）式を（14′）式に代入すると（16′）式となり，（16′）式で $i=K$ とおいて（3′）式に代入すると（17′）式を得る。

$$P_i(x)=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}U_n(0)\ \exp[-\gamma_n-\int_0^x \mu_0(x)dx] \tag{16'}$$

$$P_{K-1}(x)=\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}U_n(0)K\lambda_0[(1-\exp(\gamma_n x))/\gamma_n]\exp[-\int_0^x \mu_0(x)dx] \tag{17'}$$

また，

$$P_{N-1}(x)=\sum_{n=N-1}^{N-1}(-1)^{n-N+1}\binom{n}{N-1}U_n(x)=U_{N-1}(x) \tag{18'}$$

となり，(5′）式と（10′）式，(4′）式と（15′）式よりそれぞれ（19′)，(20′）式を得る。

$$P_{Nj}(y)=\lambda_j P_N\exp[-\int_0^y \mu_j(y)dy] \tag{19'}$$

$$P_{ij}^0(x)=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}U_n(0)\lambda_j[(1-\exp(-\gamma_n x))/\gamma_n]\exp[-\int_0^x \mu_0(x)dx] \tag{20'}$$

(11′)，(20′）式より（21′）式，(21′）式と（5′）式より（22′）式を得る.

$$P_{ij}(0)=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\lambda_j[(1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n]U_n(0) \tag{21'}$$

$$P_{ij}(y)=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\lambda_j U_n(0)\,[(1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n]\exp[-\int_0^y \mu_j(x)dx]\ ,\quad y>0 \tag{22'}$$

以上の関係式を（1′）式に代入して整理すると

$$N\lambda_0 P_N=\{\hat{f}_0(\gamma_{N-1})+\lambda[(1-\hat{f}_0(\gamma_{N-1}))/\gamma_{N-1}]\}U_{N-1}(0) \tag{23'}$$

となる。 $U_i(0)=\sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i}P_n(0)$　の関係式に（6′）式を代入して整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned}U_i(0)=&\binom{N-1}{i}N\lambda_0P_N+[\hat{f}_0(\gamma_i)+\lambda(1-\hat{f}_0(\gamma_i))/\gamma_i]U_i(0)\\&+[\hat{f}_0(\gamma_{i-1})+\lambda(1-\hat{f}_0(\gamma_{i-1}))/\gamma_{i-1}]U_{i-1}(0)\\&-\binom{N}{i}[\hat{f}_0(\gamma_{N-1})+\lambda(1-\hat{f}_0(\gamma_{N-1}))/\mu_{N-1}]U_{N-1}(0)\end{aligned} \tag{24'}$$

ここで　$D_i=\hat{f}_0(\gamma_i)+\lambda[1-\hat{f}_0(\gamma_i)]/\gamma_i$　とおくと（24′）式は次のようになる。

$$(1-D_i)U_i(0)=D_{i-1}U_{i-1}(0)-\binom{N-1}{i-1}D_{N-1}U_{N-1}(0) \tag{25'}$$

$$V_i^6=\begin{cases}\prod_{k=K+1}^{i}(1-D_k)/D_k\ , & K+1\leqq i\leqq N-1\\ 1\ , & i=K\end{cases} \tag{26'}$$

とおき，（25′）式の両辺に V_{i-1}^6 をかけて $i=K+1,K+2,\cdots,i$ について加えると（27′）式となる。

$$D_iV_i^6U_i(0)=D_KU_K(0)-\sum_{k=K+1}^{i}\binom{N-1}{k-1}V_{k-1}^6D_{N-1}U_{N-1}(0) \tag{27'}$$

（27′）式において $i=N-1$ とおいて整理すると

$$\sum_{k=K+1}^{N}\binom{N-1}{k-1}V_{k-1}^6D_{N-1}U_{N-1}(0)=D_KU_K(0)$$

となり，　$C_{ij}^+=\sum_{n=i}^{j}\binom{N-1}{n-1}V_{n-1}^6$ とおくと

$$U_{N-1}(0)=D_KU_K(0)/(C_{K+1,N}^+D_{N-1}) \tag{28'}$$

となり，（28′）を（27′）式に代入し，$A_i^6=C_{i+1,N}^+D_K/(C_{K+1,N}^+D_iV_i^6)$ とおいて整頓すると（29′）式を得る。

$$U_i(0)=A_i^6U_K(0) \tag{29'}$$

$$P_i=\int_0^\infty P_i(x)dx=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}U_n(0)(1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n\ , \tag{30'}$$

$$P_{K-1}=\int_0^\infty P_{K-1}(x)dx=\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{k}U_n(0)K\lambda_0[K_0^*-(1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n]/\gamma_n, \tag{31'}$$

$$P_{ij}^0=\int_0^\infty P_{ij}^0(x)dx=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}U_n(0)\lambda_j[K_0^*-(1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n]/\gamma_n\ , \tag{32'}$$

$$P_{Nj}=\int_0^\infty P_{Nj}(y)dy=\lambda_j K_j^* P_N\ , \tag{33'}$$

$$P_{ij}=\int_0^\infty P_{ij}(y)dy=\lambda_j K_j^* P_i\ , \tag{34'}$$

であるから，(23′) 式と (30′)～(34′) 式を (12′) 式に代入すると (35′) 式を得る.

$$U_K(0)=\{(1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*)[D_K/(C_{K+1,N}^+ N\lambda_0)+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}A_n^6(1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n]$$
$$+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}[K_0^*-(1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n]A_n^6\}^{-1} \tag{35'}$$

従って (23′) 式 (29′)～(35′) 式より (36′)～(42′) 式を得る.

$$P_i=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}[(1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n]A_n^6 U_K(0) \tag{36'}$$

$$P_{K-1}=\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}[K\lambda_0/\gamma_n][K_0^*-(1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n]A_n^6 U_K(0) \tag{37'}$$

$$\sum_{j=1}^{M}P_{Nj}=\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*[D_K/(C_{K+1,N}^+ N\lambda_0)]U_K(0) \tag{38'}$$

$$\sum_{i=K}^{N}\sum_{j=1}^{M}P_{ij}=\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*\{[D_K/(C_{K+1,N}^+ N\lambda_0)]+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}[(1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n]A_n^6\}U_K(0) \tag{39'}$$

$$\sum_{i=K}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}P_{ij}^0=\lambda\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}\{[K_0^*-(1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n]/\gamma_n\}A_n^6 U_K(0) \tag{40'}$$

$$\sum_{i=K}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}P_{ij}^0+\sum_{i=K}^{N}\sum_{j=1}^{M}P_{ij}=\{\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*[D_K/(C_{K+1,N}^+ N\lambda_0)]$$
$$+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}A_n^6\{\lambda K_0^*/\gamma_n+(\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*-\lambda/\gamma_n)[(1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n]\}\}U_K(0) \tag{41'}$$

$$P_A^6(\infty)=P_N+\sum_{i=K}^{N-1}P_i$$
$$=\{[D_K/(C_{K+1,N}^+ N\lambda_0)]+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}[(1-\hat{f}_0(\gamma_n))/\gamma_n]A_A^6\}U^K(0) \tag{42'}$$

従って次の定理を得る。

定理8　モデル6の定常アベイラビイティは (42′) 式で与えられ，サブシステム S_0, S_1 の停止によってシステムが作動していない定常状態における確率はそれぞれ (37′), (41′) 式で与えられる。

4. 若干の考察

3つのモデルの信頼性の比較を一般的に行うことは困難である。しかし保全時間が指数分布に従う場合はモデル4とモデル5の定常アベイラビリテイ（長時間使用での稼働率）は等しいと予想される。サブシステム S_1 の停止でシステムが停止したとき，サブシステム S_0 の保全中のユニットの

保全を中断して先に サブシステム S_1 の故障したユニットの保全を行うことは両方のモデルも同じであるが，相異点はモデル4は S_1 の故障ユニットの保全完了後 S_0 のユニットの保全を中断したところから続行（割込継続形保全）するが，モデル5は S_1 の故障ユニットの保全完了後 S_0 のユニットの保全を最初からやり直すこと（割込反復形保全）である。一方，保全時間が指数分布に従うときは時間間隔 Δt の間に保全の終了する確率はそれまでの保全時間に無関係である。つまりユニットの保全を何時間か行った後，Δt 時間に保全が完了する確率は保全を始めた時点から Δt 時間に保全の完了する確率と等しいことを意味する。従って，割込継続形保全と割込反復形保全の差はないと考えられる。これはモデル4の（37′）式，およびモデル5の（35′）式からも数学的に証明できる。

定理9　保全時間が指数分布に従う場合，モデル4の定常アベイラビリティ $P_A^4(\infty)$ とモデル5の定常アベイラビリティ $P_A^5(\infty)$ は等しい。

証明　保全時間分布 $f_0(t)$ を指数分布 $f_0(t)=\mu_0 e^{-\mu_0 t}$ とすると，

$$\hat{f}_0(s) = \mu_0/(s+\mu_0)\,,\ K_0^* = 1/\mu_0\,,\ V_i^4(0) = V_i^5(0)\,,\ C_{ij}(0) = C_{ij}^*(0) \tag{1}$$

となり，(2) 式を得る。

$$\begin{aligned} A_n^5(0) &= [C_{n+1,N}^*(0)\hat{f}_0(K\lambda_0+\lambda)]/[C_{K+1,N}^*(0)\hat{f}_0(n\lambda_0+\lambda)V_n^5(0)] \\ &= (n\lambda_0+\lambda+\mu_0)C_{n+1,N}(0)/[(K\lambda_0+\lambda+\mu_0)C_{K+1,N}(0)V_n^4(0)] \\ &= (n\lambda_0+\lambda+\mu_0)(K\lambda_0+\mu_0)A_n^4(0)/[(K\lambda_0+\lambda+\mu_0)(n\lambda_0+\mu_0)] \end{aligned} \tag{2}$$

モデル4の（32′），（37′）式およびモデル5の（30′），（35′）式より定常アベイラビリティを書きかえると，

$$P_A^4(\infty) = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^* + U_1^4/T_1^4} \tag{3}$$

$$P_A^5(\infty) = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^* + U_1^5/T_1^5} \tag{4}$$

ここに

$$U_1^4 = \sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}n\lambda_0 A_n^4(0)/[(n\lambda_0+\mu_0)\mu_0]$$

$$T_1^4 = \mu_0/[N\lambda_0(K\lambda_0+\mu_0)C_{K+1,N}(0)] + \sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}A_n^4(0)/(n\lambda_0+\mu_0)\,,$$

$$U_1^5 = \sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}n\lambda_0 A_n^5(0)/[(n\lambda_0+\lambda+\mu_0)\mu_0]$$

$$T_1^5 = \mu_0/[N\lambda_0(K\lambda_0+\lambda+\mu_0)C_{K+1,N}^*(0)] + \sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}A_n^5(0)/(n\lambda_0+\lambda+\mu_0)$$

(1)，(2) 式より

$$U_1^5=\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}n\lambda_0(K\lambda_0+\mu_0)A_0^4(0)/[(K\lambda_0+\lambda+\mu_0)(n\lambda_0+\mu_0)\mu_0]$$

$$=[(K\lambda_0+\mu_0)/(K\lambda_0+\lambda+\mu_0)]U_1^4 \tag{5}$$

$$T_1^5=\mu_0/[(N\lambda_0+\lambda+\mu_0)C_{K+1,N}(0)]$$

$$+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}(K\lambda_0+\mu_0)A_n^4(0)/[(K\lambda_0+\lambda+\mu_0)(n\lambda_0+\lambda)]$$

$$=[(K\lambda_0+\mu_0)/(K\lambda_0+\lambda+\mu_0)]T_1^4 \tag{6}$$

従って $U_1^4/T_1^4=U_1^5/T_1^5$ となり，$P_A^4(\infty)=P_A^5(\infty)$ を得る。

一般的モデルにおいて保全時間が一般分布に従う場合の定常アベイラビリティの比較は今後に残された問題である。ここでは現実によく用いられる 2-out-of 3 システムおよび 1-out-of 3 システム即ち $N=3,\ K=2$; $N=3,\ K=1$ の場合の信頼性測度を列記し若干の性質を述べる。

$N=3,\ K=2$ の場合

$$P_A^4(\infty)=\{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*+6\lambda_0[K_0^*-(1-\hat{f}(2\lambda_0))/2\lambda_0]/(3-\hat{f}_0(2\lambda_0))\}^{-1} \tag{7}$$

$$P_A^5(\infty)=\{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*+6\lambda_0^2[K_0^*-(1-\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda))/(2\lambda_0+\lambda)]/[3\lambda_0+(\lambda-\lambda_0)\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda)]\}^{-1} \tag{8}$$

$$P_A^6(\infty)=\{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*+3\lambda_0[(2\lambda_0+\lambda)K_0^*-1+\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda)]/[3\lambda_0+\lambda-\lambda_0\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda)]\}^{-1} \tag{9}$$

定理 10　　$P_A^5(\infty)>P_A^6(\infty)$

証明　　$P_A^5(\infty)>P_A^6(\infty)$

$$\Longleftrightarrow \frac{6\lambda_0^2[K_0^*-(1-\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda))/(2\lambda_0+\lambda)]}{[3\lambda_0+(\lambda-\lambda_0)\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda)]}<\frac{3\lambda_0[(2\lambda_0+\lambda)K_0^*-1+\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda)]}{[3\lambda_0+\lambda-\lambda_0\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda)]}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2\lambda_0}{[3\lambda_0+(\lambda-\lambda_0)\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda)]}<\frac{2\lambda_0+\lambda}{[3\lambda_0+\lambda-\lambda_0\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda)]}$$

上の不等式は $\lambda_0>0$，$\lambda>0$，$\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda)>0$，$3\lambda_0+(\lambda-\lambda_0)\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda)=2\lambda_0+\lambda\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda)+\lambda_0(1-\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda))>0$，$3\lambda_0+\lambda-\lambda_0\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda)=2\lambda_0+\lambda+\lambda_0(1-\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda))>0$ を用いて容易に確められる。

指数分布 $f_0(t)=\mu_0e^{-\mu_0t}$ のとき，$K_0^*=1/\mu_0$，$\hat{f}(s)=\mu_0/(s+\mu_0)$ を用いて

$$P_A^4(\infty)=\{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*+6\beta_0^2/(1+3\beta_0)\}^{-1}=P_A^5(\infty) \tag{10}$$

$$P_A^6(\infty)=\{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*+3\beta_0(2\beta_0+\beta)/(1+3\beta_0+\beta)\}^{-1} \tag{11}$$

ここに　$\beta_0=\lambda_0/\mu_0$，　$\beta=\lambda/\mu_0$

$6\beta_0^2/(1+3\beta_0)<3\beta_0(2\beta_0+\beta)/(1+3\beta_0+\beta)$ が，成立するので $P_A^5(\infty)>P_A^6(\infty)$ である。

$N=3$, $K=1$ の場合

$$P_A^4(\infty)=\{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*+[6(\lambda_0K_0^*-1)(1+\hat{f}_0(2\lambda_0))+3\hat{f}_0(\lambda_0)(3-2K_0^*\lambda_0+\hat{f}_0(2\lambda_0))]$$
$$/[6(1+\hat{f}_0(2\lambda_0))-\hat{f}_0(2\lambda_0)(9+\hat{f}_0(2\lambda_0))]\}^{-1} \tag{12}$$

$$P_A^5(\infty)=\{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*+6\lambda_0^2\{\lambda_0(\lambda_0+\lambda)\hat{f}_0(\lambda_0+\lambda)\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda)$$
$$+(2\lambda_0+\lambda)(\lambda_0+\lambda)(K_0^*(\lambda_0+\lambda)-1)\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda)$$
$$+[\lambda_0^2+(\lambda_0+\lambda)(2\lambda_0+\lambda)(1-K_0^*(\lambda_0+\lambda))]\hat{f}_0(\lambda_0+\lambda)+\lambda_0(2\lambda_0+\lambda)(K_0^*(\lambda_0+\lambda)-1)\}$$
$$/\{(\lambda_0+\lambda)(2\lambda_0+\lambda)[(\lambda-\lambda_0)(\lambda+\lambda_0)\hat{f}_0(\lambda_0+\lambda)\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda)+6\lambda_0(\lambda_0+\lambda)\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda)$$
$$-3\lambda_0(3\lambda_0+\lambda)\hat{f}(\lambda_0+\lambda)+6\lambda_0^2]\}\}^{-1} \tag{13}$$

$$P_A^6(\infty)=\{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*+3\lambda_0\{2[\lambda_0+\lambda+\lambda_0\hat{f}(2\lambda_0+\lambda)][(\lambda_0+\lambda)K_0^*-1+\hat{f}_0(\lambda_0+\lambda)]$$
$$-[\lambda+\lambda_0\hat{f}_0(\lambda_0+\lambda)][(2\lambda_0+\lambda)K_0^*-1+\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda)]\}/\{[\lambda+\lambda_0\hat{f}_0(\lambda_0+\lambda)][(\lambda-3\lambda_0)$$
$$+5\lambda_0\hat{f}_0(2\lambda_0+\lambda)]+6\lambda_0[\lambda_0+\lambda+\lambda_0\hat{f}(2\lambda_0+\lambda)](1-\hat{f}_0(\lambda_0+\lambda))\}\}^{-1} \tag{14}$$

指数分布のとき,

$$P_A^4(\infty)=\{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*+6\beta_0^3/[1+3\beta_0+6\beta_0^2]\}^{-1}=P_A^5(\infty) \tag{15}$$

$$P_A^6(\infty)=\{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*+3\beta_0[2\beta_0(\beta_0+\beta)+\beta(\beta+1)]/[6\beta_0^2+(3\beta_0+\beta+1)(\beta+1)]\}^{-1} \tag{16}$$

不等式 $6\beta_0^3/(1+3\beta_0+6\beta_0^2)<3\beta_0[2\beta_0(\beta_0+\beta)+\beta(\beta+1)]/[6\beta_0^2+(3\beta_0+\beta+1)(\beta+1)]$ が成立することが確められるので $P_A^5(\infty)>P_A^6(\infty)$ である。

保全分布が指数分布で N, K が一般の場合の $P_A^5(\infty)$, $P_A^6(\infty)$ の比較は今後に残された問題である。保全分布が IFR 分布（保全率が時間の増加関数である分布）の場合，割込継続形保全を行うモデル4と割込反復形保全を行うモデル5に対して $P_A^4(\infty)>P_A^5(\infty)$, 逆に保全分布が DFR 分布（保全率が時間の減少関数である分布）の場合 $P_A^4(\infty)<P_A^5(\infty)$ が成立することが予想されるが上記の簡単な場合においてすら証明されていない。しかしながら，分布が与えられる（母数を含めて）と，数値計算によって各モデルの定常アベイラビリティの比較は可能である.

参　考　文　献

〔1〕 D. K., Kulshrestha: "Reliability of a Parallel Redundant Complex system," Opns Res. 16, No. 1, 1968.

〔2〕 D. K. Kulshrestha: "Reliability of a Repairable Multicomponent System with Redundancy in Parallel." IEEE. Trans. on Reliability. 19, No. 2, 1970.

〔3〕 H. Nakamichi, J. Fukuta, S. Takamatsu, and M. Kodama, "Reliability Consideration on a Repairable Multicomponent System with Redundancy in Parallel." J. Opns. Res. Soc. of Japan. 17, No. 1, 1974.

〔4〕 M. Kodama: "Probabilistic Anatysis of a Multicomponent Series-Paraltel System under

Preemptive Repeat Repair Disciplin." Opns. Res. 24, No. 3, 1976.
〔5〕 児玉正憲：２段直列構成システムの信頼性・保全性Ｉ，経済学研究，第46巻 第１・２合併号，1981.
〔6〕 N. K. Jaiswal, Priority Queues, Acadmic Press, New York, 1968.

付 録

記 号:

E_N: サブシステム S_0 と S_1 のすべてのユニットが動作していてシステムが動作している状態

E_i: サブシステム S_0 の i 個のユニット，サブシステム S_1 のすべてのユニットが動作していてシステムが動作している状態，$K \leqq i \leqq N-1$

F_{K-1}: サブシステム S_0 の $N-K+1$ 個のユニットの故障でシステムが停止しており，故障したユニットの保全を行っている状態，

F_{ij}: サブシステム S_0 の i 個のユニットが作動していてサブシステム S_1 の j 番目のユニットの故障でシステムが停止しており，その故障ユニットの保全を行っている状態.

$\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$: S_0 の各ユニットの故障時間の確率密度関数；

$\lambda_j e^{-\lambda_j t}$: S_1 の j 番目 $(1 \leqq j \leqq M)$ のユニットの故障時間の確率密度関数；$\lambda = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j$

$f_j(t)$: S_1 の j 番目のユニットの保全時間の確率密度関数，$f_j(t) = \mu_j(t) \exp[-\int_0^t \mu_j(x) dx]$，$K \leqq j \leqq M$；$f^*(t) = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j f_j(t)/\lambda$；

K_j^*: $f_j(t)$ の１次の積率（平均保全時間）；

$P_i(t)$: 時刻 t でシステムが動作中で，S_0 の i 個のユニットが動作している確率，$K \leqq i \leqq N$；

$P_{K-1}(t,x)dx$: 時刻 t で S_0 の停止でシステムが停止していてその保全経過時間が $(x, x+dx)$ にある確率；

$P_{K-1}(t)$: 時刻 t で S_0 の停止でシステムが停止している確率，$P_{K-1}(t) = \int_0^t P_{K-1}(t,x) dx$；

$P_{ij}(t,x)dx$: 時刻 t で S_1 の j 番目のユニットの故障でシステムが停止していてその保全経過時間が $(x, x+dx)$ にあり，S_0 のユニットが i 個動作している確率 $K \leqq i \leqq N, 1 \leqq j \leqq M$；

$P_{ij}(t)$: 時刻 t で S_1 の j 番目のユニットの故障でシステムが停止していて，S_0 のユニットが i 個動作している確率，$P_{ij}(t) = \int_0^t P_{ij}(t,x) dx$；

$\hat{L}(s)$: 関数 $L(t)$ のラプラス変換，$\hat{L}(s) = \int_0^\infty e^{-st} L(t) dt$；

$f_0(t)$: S_0 の各ユニットの保全時間の確率密度関数，$f_0(t) = \mu_0(t) \exp[-\int_0^t \mu_0(x) dx]$；

K_0^*: $f_0(t)$ の１次の積率

$P_i(t,x)dx$: 時刻 t でシステムが動作中でかつ S_0 の i 個 $(K \leqq i \leqq N-1)$ のユニットが動作していてその保全中のユニットの保全経過時間が，$(x, x+dx)$ にある確率，$P_i(t) = \int_0^t P_i(t,x) dx$；

$P_{ij}(t,y,x)dy$: 時刻 t で S_1 の j 番目のユニットの故障でシステムが停止していて，その保全経過時間が，$(y, y+dy)$ にあり，S_0 の i 個のユニットが動作可能で故障したユニットの保全経過時間が

時刻 $t-y$ までに x である確率, $K \leqq i \leqq N-1$

δ_{ij}: クロネッカのデルタ

$$\alpha(s, i)=s+i\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s))$$

$$V_i(s)=\begin{cases}\prod_{j=K+1}^{i}[1-\hat{f}_0(\alpha(s, j))]/\hat{f}_0(\alpha(s, j)), & K+1 \leqq i \leqq N-1 \\ 1 & , \quad i=K\end{cases}$$

$$E_{ij}(s)=\sum_{n=i}^{j}\binom{N}{n}(N-n)\lambda_0 V_{n-1}^4(s)/\alpha(s, N)$$

$$C_{ij}(s)=\sum_{n=i}^{j}\binom{N}{n}\alpha(s, n)V_{n-1}^4(s)/\alpha(s, N)$$

$$A_i^4(s)=C_{i+1,N}(s)\hat{f}_0(\alpha(s, K))/[C_{K+1,N}(s)\hat{f}_0(\alpha(s, i))V_i^4(s)];$$

$$B_i^4(s)=[C_{i+1,N}(s)E_{K+1,i}(s)-C_{K+1,i}(s)E_{i+1,N}(s)]/[\hat{f}_0(\alpha(s, i))C_{K+1,N}(s)V_i^4(s)];$$

$$\gamma_i=i\lambda_0+\lambda;$$

$$V_i^5(s)=\begin{cases}\prod_{k=K+1}^{i}[(1-\hat{f}_0(s+\gamma_k))/\hat{f}_0(s+\gamma_k)][\alpha(s, k)/(s+\gamma_k)], & K+1 \leqq i \leqq N-1 \\ 1 & , \quad i=K;\end{cases}$$

$$E_{ij}^*(s)=\sum_{n=i}^{j}\binom{N}{n}(N-n)\lambda_0 V_{n-1}^5(s)/\alpha(s, N);$$

$$C_{ij}^*(s)=\sum_{n=i}^{j}\binom{N}{n}\alpha(s, n)V_{n-1}^5(s)/\alpha(s, N);$$

$$A_i^5(s)=[C_{i+1,N}(s)\hat{f}_0(s+\gamma_k)]/[C_{K+1,N}^*(s)\hat{f}_0(s+\gamma_i)V_i^5(s)];$$

$$B_i^5(s)=[C_{i+1,N}^*(s)E_{K+1,i}^*(s)-C_{K+1,i}^*(s)E_{i+1,N}^*(s)]/[C_{K+1,N}^*(s)\hat{f}_0(s+\gamma_i)V_i^5(s)];$$

$P_{ij}^0(t, x)dx$: 時刻 t で S_1 の j 番目のユニットの故障でシステムが停止していて S_0 の i 個のユニットが動作可能で S_0 の保全中の保全経過時間が $(x, x+dx)$ にある確率 $K \leqq i \leqq N-1,\ 1 \leqq j \leqq M$;