2段直列構成システムの信頼性・保全性 : (I)

児玉, 正憲

https://doi.org/10.15017/4475240

出版情報：經濟學研究. 46 (1/2), pp.99-123, 1981-02-10. 九州大学経済学会

2段直列構成システムの信頼性・保全性 I

児　玉　正　憲

目　　　次

はしがき

電子交換システム，情報処理システム，電子計算機システム，航空輸送システム，ロケットシステム，などのように大規模で，またシステムに課せられた使命が質的に高度化してくると，その内部のどれかの故障でシステムが停止する機会が増加し，また故障による機能停止に伴う損害が増大するから，信頼性が特に重視されることになる。

システムを高信頼度にするためには，システムを構成している要素の信頼度を高めることは勿論であるが，これにはおのずから限界がある。

このための1つの方法として，冗長法が考えられる。冗長法は機能的には不必要な余分な構成要素を附け加え，構成要素の故障がただちにシステムの故障となる機会を少なくすることにより，システムの信頼性を向上させようとするものである。

冗長度を与えたシステムで保全を伴う場合はさらに信頼性は向上する。このようなシステムの信頼性を量的に評価することは重要であるが，この場合の信頼性の評価は困難となり一般的条件のもとでは未解決なものが多い。

本論文で取扱うシステムはサブシステム S_0 とサブシステム S_1 が直列に連結されている2段直列構成システムで S_0 は N 個の同一なユニット（S_0 のサブシステム）から成る K-out-of-N システム（$K=1$ のとき並列システム，$K=N$ のとき直列システム）で S_1 は相異る M 個のユニット（S_1 のサブシステム）から成る直列システムである。S_0 が並列システム（$K=1$）の場合については各ユニットの故障生起，各ユニットの保全の仕方に適当な条件をおいて信頼性を評価しているが が S_0

が K-out-of-N システムの場合は未解決である。

S_0 が並列システムの場合については，Kulshrestha 〔1〕,〔2〕 はシステム故障が生じたときだけ保全を行う場合の定常アベイラビリティを求めている。Nakamichi et al. 〔3〕 は S_0 の故障したユニットを逐次保全を行い，サブシステム S_1 に優先権を与えて割込継続形 (Preemptive resume) の場合について解析している。Kodama 〔4〕 は同様に割込反復形 (Preemptive repeat) の場合を解析し, 行列形でなく，具体的な信頼性の評価を与えている。また故障生起順 (head-of-the-line) の場合も同様に解析可能であることを述べているが解は与えていない。この論文は上記の諸結果を特殊な場合として含み，さらに未解決な種々のモデルについて信頼性の評価を与えている一般的な研究で，これらの諸結果はシステムの信頼性・保全性設計に利用でき，さらにシステムの最適設計の基礎資料として価値を有するものである。

I　モデルの定義と記号

2段直列構成になっているサブシステム S_0 と S_1（図1）を1人で保守する。

サブシステム S_0: 同一のユニットから成る K-out-of-N: G システム（K 個以上作動していればシステムの機能を果す冗長システム)，サブシステム S_1: 異なる M 個のユニットからなる直列システム（すべてのユニットが作動しているときシステムの機能を果す冗長のないシステム)。保全されたユニットは保全の後新品と同様になり，ユニットの故障時間は指数分布に従い，保全時間は一般分布に従う M/G/1 型モデルである。システムが停止しているとき故障していないユニットの故障率は0であり，ユニットの故障は直ちに発見されるものとする。

システム停止は,

(1)　サブシステム S_0 において $N-K+1$ 個のユニットが故障したとき,

(2)　サブシステム S_1 において任意のユニット（1個）が故障したとき，のいずれか一方が起るとき生じるものとする。

保全方策の違いによって次のモデルが考えられる。

(A)　システム停止のときのみ保全を行う場合

この場合代表的な3つのモデルを考察する。

モデル1：サブシステム S_0 の停止によってシステム停止となった時は S_0 中の故障ユニット $N-K+1$ 個を保全し，保全完了後システムを動作させる。S_1 の j 番目 $(1\leqq j\leqq M)$ のユニットの故障によるシステム停止の場合はそのユニットのみ保全する（S_0 中に故障ユニットが存在してもこの時点ではその保全を行わない)

モデル2：モデル1と異る点は S_0 の停止によるシステム停止の場合，故障ユニット $N-K+1$ 個全部の保全をするのではなく1個の保全が完了したら直ちにシステムを動作させ保全は次のシステム停止まで中止する。

モデル3：モデル1と異る点は S_1 の停止によるシステム停止の場合，S_1 中の故障ユニットとそのとき故障中の S_0 のユニット全部を保全する。

(B) 逐次保全を行う場合

これはユニットが故障する時，保全待（1人で保守するための保全待ちの可能性が生じる）がなければ直ちに保全を行う場合である。

モデル4：サブシステム S_0 のユニットが故障した時，逐次保全を行う。サブシステム S_0 の停止でシステムが停止した時，保全を終えたユニットは直ちに動作させシステムが再び動作するようにする。サブシステム S_1 の停止でシステムが停止した時，サブシステム S_0 の保全中のユニットの保全を中断して先にサブシステム S_1 の故障したユニットの保全を行い，保全の完了後サブシステム S_0 のユニットの保全を続行する（割込継続形保全）

モデル5：モデル4と異る点は割込反復形の保全を行うことである。即ち，サブシステム S_1 の停止でシステムが停止した時，サブシステム S_0 の保全中のユニットの保全を中断して先にサブシステム S_1 の故障したユニットの保全を行い保全の完了後サブシステム S_0 のユニットの保全を最初からやり直す。

モデル6：モデル4と異る点は故障生起順形の保全を行うことである。即ち，サブシステム S_1 の停止でシステムが停止した時，サブシステム S_0 の保全中のユニットの保全の後，サブシステム S_1 の故障したユニットの保全を行う。

システムは任意の時刻において次の状態のどれか1つの状態にある。

E_N：サブシステム S_0 と S_1 のすべてのユニットが動作していてシステムが動作している状態

E_i：サブシステム S_0 の i 個のユニット，サブシステム S_1 のすべてのユニットが動作していてシステムが動作している状態，$K \leqq i \leqq N-1$

F_{K-1}：サブシステム S_0 の $N-K+1$ 個のユニットの故障でシステムが停止しており，故障したユニットの保全を行っている状態，

F_{ij}：サブシステム S_0 の i 個のユニットが動作していてサブシステム S_1 の j 番目のユニットの故障でシステムが停止しており，その故障ユニットの保全を行っている状態。

以上，$E.$ はシステムが動作の状態，$F.$ はシステムが停止の状態を表わしている。

次にシステム解析を行う上で必要な関数，記号等の定義を列記する。モデル1の解析に必要なものを最初に述べ，以下各モデルで必要なものを追加する。

記号：

（モデル1）

$\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$：$S_0$ の各ユニットの故障時間の確率密度関数；

$\lambda_j e^{-\lambda_j t}$：$S_1$ の j 番目 $(1 \leqq j \leqq M)$ のユニットの故障時間の確率密度関数；$\lambda = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j$

$f(t)$：S_0 の停止でシステムが停止した時，S_0

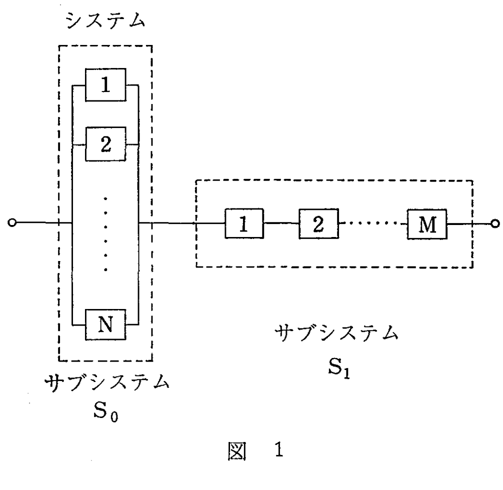

図 1

の $(N-K+1)$ 個のユニットを保全する場合の保全時間の確率密度関数, $f(t)=\mu(t)\exp[-\int_0^t \mu(x) dx]$;

$f_j(t)$: S_1 の j 番目のユニットの保全時間の確率密度関数, $f_j(t)=\mu_j(t)\exp[-\int_0^t \mu_j(x)dx]$, $K \leqq j \leqq M$; $f^*(t)=\sum_{j=1}^{M} \lambda_j f_j(t)/\lambda$;

K^*, K_j^*: $f(t)$ および $f_j(t)$ の1次の積率（平均保全時間）;

$P_i(t)$: 時刻 t でシステムが動作中で, S_0 の i 個のユニットが動作している確率, $K \leqq i \leqq N$;

$P_{K-1}(t,x)dx$: 時刻 t で S_0 の停止でシステムが停止していてその保全経過時間が $(x, x+dx)$ にある確率;

$P_{K-1}(t)$: 時刻 t で S_0 の停止でシステムが停止している確率, $P_{K-1}(t)=\int_0^t P_{K-1}(t,x)dx$;

$P_{ij}(t,x)dx$: 時刻 t で S_1 の j 番目のユニットの故障でシステムが停止していてその保全経過時間が $(x, x+dx)$ にあり, S_0 のユニットが i 個動作している確率 $K \leqq i \leqq N$, $1 \leqq j \leqq M$;

$P_{ij}(t)$: 時刻 t で S_1 の j 番目のユニットの故障でシステムが停止していて, S_0 のユニットが i 個動作している確率, $P_{ij}(t)=\int_0^t P_{ij}(t,x)dx$;

$\hat{L}(s)$: 関数 $L(t)$ のラプラス変換, $\hat{L}(s)=\int_0^\infty e^{-st}L(t)dt$;

$$g(s)=[s+\lambda(1-\hat{f}^*(s))]/\lambda_0$$

$$h(s,i)=\begin{cases}\prod_{j=K}^{i}[j+g(s)]/i, & K \leqq i \leqq N\\ 1 & , \quad i=K-1;\end{cases}$$

$$1/M^*=\sum_{i=K}^{N}\frac{1}{i};$$

（モデル2）

$f_0(t)$: S_0 の各ユニットの保全時間の確率密度関数, $f_0(t)=\mu_0(t)\exp[-\int_0^t \mu_0(x)dx]$;

K_0^*: $f_0(t)$ の1次の積率

（モデル3）

$f_{ij}(t)$: S_0 の i 個のユニットと S_1 の j 番目のユニットの保全時間の確率密度関数, $f_{ij}(t)=\mu_{ij}(t)\exp[-\int_0^t \mu_{ij}(x)dx]$, $0 \leqq i \leqq N-K$, $1 \leqq j \leqq M$;

K_{ij}^*: $f_{ij}(t)$ の1次の積率, $g^0(s)=(s+\lambda)/\lambda_0$;

$$h^0(s,i)=\begin{cases}\prod_{j=K}^{i}[j+g^0(s)]/j, & K \leqq i \leqq N,\\ 1 & , \quad i=K-1;\end{cases}$$

（モデル4）

$P_i(t,x)dx$: 時刻 t でシステムが動作中でかつ S_0 の i 個 $(K \leqq i \leqq N-1)$ のユニットが動作していてその保全中のユニットの保全経過時間が, $(x, x+dx)$ にある確率, $P_i(t)=\int_0^t P_i(t,x)dx$;

$P_{ij}(t,y,x)dy$: 時刻 t で S_1 の j 番目のユニットの故障でシステムが停止していて, その保全経過時間が, $(y, y+dy)$ にあり, S_0 の i 個のユニットが動作可能で故障したユニットの保全経過時間

が時刻 $t-y$ までに x である確率, $K \leqq i \leqq N-1$

δ_{ij}: クロネッカのデルタ

$$\alpha(s, i)=s+i\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s))$$

$$V_i^4(s)=\begin{cases}\prod_{j=K+1}^{i}[1-\hat{f}_0(\alpha(s,j))]/\hat{f}_0(\alpha(s,j)), & K+1 \leqq i \leqq N-1 \\ 1 & , \quad i=K\end{cases}$$

$$E_{ij}(s)=\sum_{n=i}^{j}\binom{N}{n}(N-n)\lambda_0 V_{n-1}^4(s)/\alpha(s,N)$$

$$C_{ij}(s)=\sum_{n=i}^{j}\binom{N}{n}\alpha(s,n)V_{n-1}^4(s)/\alpha(s,N)$$

$$A_i^4(s)=C_{i+1,N}(s)\hat{f}_0(\alpha(s,K))/[C_{K+1,N}(s)\hat{f}_0(\alpha(s,i))V_i^4(s)];$$

$$B_i^4(s)=[C_{i+1,N}(s)E_{K+1,i}(s)-C_{K+1,i}(s)E_{i+1,N}(s)]/[\hat{f}_0(\alpha(s,i))C_{K+1,N}(s)V_i^4(s)];$$

（モデル5）

$$\gamma_i=i\lambda_0+\lambda;$$

$$V_1^5(s)=\begin{cases}\prod_{k=K+1}^{i}[(1-\hat{f}_0(s+\gamma_k))/\hat{f}_0(s+\gamma_k)]/[\alpha(s,k)/(s+\gamma_k)], & K+1 \leqq i \leqq N-1 \\ 1 & , \quad i=K;\end{cases}$$

$$E_{ij}^*(s)=\sum_{n=i}^{j}\binom{N}{n}(N-n)\lambda_0 V_{n-1}^5(s)/\alpha(s,N);$$

$$C_{ij}^*(s)=\sum_{n=i}^{j}\binom{N}{n}\alpha(s,n)V_{n-1}^5(s)/\alpha(s,N);$$

$$A_i^5(s)=[C_{i+1,N}(s)\hat{f}_0(s+\gamma_k)]/[C_{K+1,N}^*(s)\hat{f}_0(s+\gamma_i)V_i^5(s)];$$

$$B_i^5(s)=[C_{i+1,N}^*(s)E_{K+1,i}^*(s)-C_{K+1,i}^*(s)E_{i+1,N}^*(s)]/[C_{K+1,N}^*(s)\hat{f}_0(s+\gamma_i)V_i^5(s)];$$

（モデル6）

$P_{ij}^0(t,x)dx$: 時刻 t で S_1 の j 番目のユニットの故障でシステムが停止していて S_0 の i 個のユニットが動作可能で S_0 の保全中の保全経過時間が $(x, x+dx)$ にある確率 $K \leqq i \leqq N-1$, $1 \leqq j \leqq M$;

以上のモデルについて，システムの信頼性の評価尺度である信頼度関数（時間 t の間システムが動作している確率）のラプラス変換形，システムの平均寿命（システムが停止するまでの平均時間），時点アベイラビリティ（システムが時刻 t で動作している確率）のラプラス変換形，定常アベイラビリティ（定常状態でシステムが動作している確率），また定常状態におけるシステムの状態確率を求める。

II　システム停止のときのみ保全を行う場合

1　モデル1—並列部分を一括保全する場合

このモデルの状態推移は図2に示される。このシステムの特性より次の状態方程式をうる。

$$P_N(t+h)=P_N[1-(N\lambda_0+\lambda)h]+\int_0^t \mu(x)hP_{K-1}(t,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t \mu_j(x)hP_{Nj}(t,x)dx+o(h)$$

$$(x>0) \qquad (1)$$

$$P_i(t+h)=P_i(t)\,[1-(i\lambda_0+\lambda)h]+(i+1)\lambda_0 hP_{i+1}(t)+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t \mu_j(x)hP_{ij}(t,x)\,dx+o(h)$$

$$(x>0,\ K\leqq i\leqq N-1) \qquad (2)$$

$$P_{K-1}(t+h,x+h)=P_{K-1}(t,x)\,[1-\mu(x)h]+o(h) \qquad (x>0) \qquad (3)$$

$$P_{ij}(t+h,x+h)=P_{ij}(t,x)\,[1-\mu_j(x)h]+o(h) \qquad (x>0,\ K\leqq i\leqq N,\ 1\leqq j\leqq M) \qquad (4)$$

ここに $o(h)$ は $h\to 0$ のとき $\frac{o(h)}{h}\to 0$ を意味する。また $\mu(x)h+o(h)$ は x まで S_0 の $N-K+1$ 個の故障中のユニットの保全が完了しないという条件のもとで $(x,x+h)$ 間に保全を完了する条件付確率を表わし，$\mu_j(x)h+o(h)$ は x まで S_1 の j 番目のユニットの保全が完了しないという条件のもとで $(x,x+h)$ 間にそのユニットの保全を完了する確率を表わしている。$h\to 0$ とするとき次の差分・微分・積分方程式を得る。

$$[d/dt+N\lambda_0+\lambda]P_N(t)=\int_0^t \mu(x)P_{K-1}(t,x)\,dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t \mu_j(x)P_{Nj}(t,x)\,dx, \qquad (5)$$

$$[d/dt+i\lambda_0+\lambda]P_i(t)=(i+1)\lambda_0 P_{i+1}(t)+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t \mu_j(x)P_{ij}(t,x)\,dx, \quad K\leqq i\leqq N-1, \qquad (6)$$

$$\{\partial/\partial t+\partial/\partial x+\mu(x)]P_{K-1}(t,x)=0, \qquad (7)$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\mu_j(x)]P_{ij}(t,x)=0, \qquad K\leqq i\leqq N,\ 1\leqq j<M, \qquad (8)$$

$x=0$ における境界条件を求めるために，次の関数を定義する。

$$q_{K-1}(t)=\int_0^h P_{K-1}(t,x)\,dx$$

これは時刻 t で S_0 の停止によってシステムは停止しており保全中のユニットの保全時間が $(0,h)$

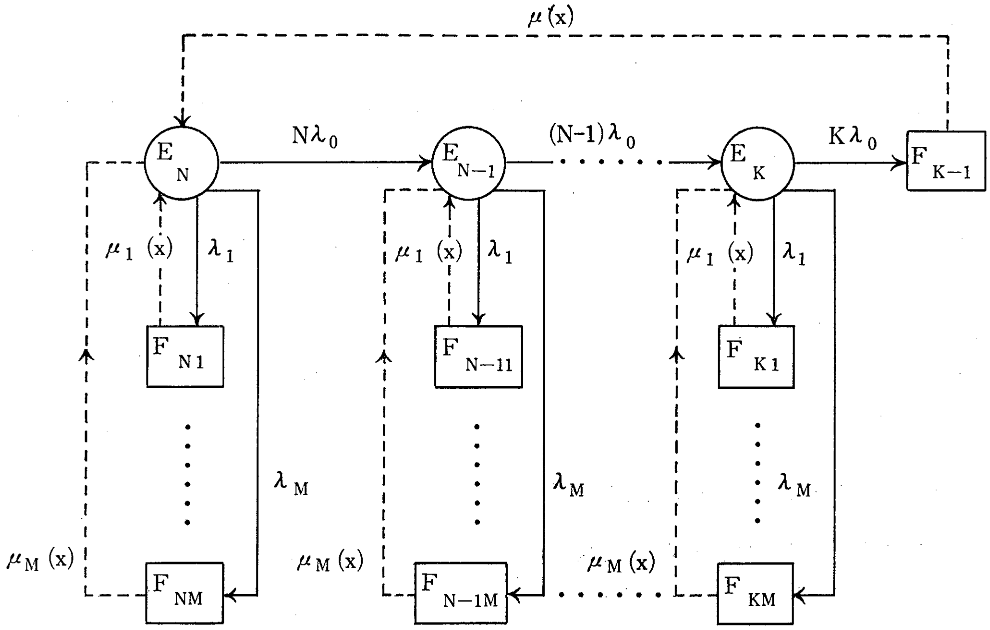

図2　モ デ ル 1 の 状 態 推 移 図

の間にある確率を表わす。このとき

$$q_{K-1}(t+h)=\int_0^h P_{K-1}(t+h,x)dx=K\lambda_0 hP_K(t)+o(h) \tag{9}$$

となり，左辺を展開すると，

$$q_{K-1}(t)+q'_{K-1}(t)h+o(h)=P_{K-1}(t,\theta)h+P'_{K-1}(t,\theta)h^2+o(h), \qquad (0<\theta<h)$$

となり $h\to 0$ とすると，次の式を得る。

$$P_{K-1}(t,0)=K\lambda_0 P_K(t), \tag{10}$$

同様な考えで

$$P_{ij}(t,0)=\lambda_j P_i(t), \qquad K\leqq i\leqq N,\ 1\leqq j\leqq M, \tag{11}$$

$t=0$ ですべてのユニットが故障していないと仮定すると，次の初期条件を得る。

$$P_N(0)=1, \tag{12}$$

初期条件 (12) 式のもとで (5)～18)，(10)～(11) 式を解くため (5)～(8)，(10)～(11) 式を (12) 式のもとでラプラス変換すると，

$$[s+N\lambda_0+\lambda]\hat{P}_N(s)=\int_0^\infty \mu(x)\hat{P}_{K-1}(s,x)dx+\sum_{j=1}^M\int_0^\infty \mu_j(x)\hat{P}_{Nj}(s,x)dx+1, \tag{13}$$

$$[s+i\lambda_0+\lambda[\hat{P}_i(s)=(i+1)\lambda_0\hat{P}_{i+1}(s)+\sum_{j=1}^M\int_0^\infty \mu_j(x)\hat{P}_{ij}(s,x)dx, \tag{14}$$

$$[s+\partial/\partial x+\mu(x)]\hat{P}_{K-1}(s,x)=0, \tag{15}$$

$$[s+\partial/\partial x+\mu_j(x)]\hat{P}_{ij}(s,x)=0, \tag{16}$$

$$\hat{P}_{K-1}(s,0)=K\lambda_0\hat{P}_K(s), \tag{17}$$

$$\hat{P}_{ij}(s,0)=\lambda_j\hat{P}_i(s), \tag{18}$$

となる。

(15)，(17)，(16)，(18) 式より

$$\hat{P}_{K-1}(s,x)=K\lambda_0\hat{P}_K(s)\exp[-sx-\int_0^x \mu(t)dt] \tag{19}$$

$$\hat{P}_{ij}(s,x)=\lambda_j\hat{P}_i(s)\exp[-sx-\int_0^x \mu_j(t)dt] \tag{20}$$

(19)，(20) 式を (13)，(14) 式に代入すると，

$$[s+N\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s))]\hat{P}_N(s)=K\lambda_0\hat{f}(s)\hat{P}_K(s)+1 \tag{21}$$

$$[s+i\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s))]\hat{P}_i(s)=(i+1)\lambda_0\hat{P}_{i+1}(s) \tag{22}$$

$g(s)\equiv[s+\lambda(1-\hat{f}^*(s))]/\lambda_0$ を (21)，(22) に代入して

$$(N+g(s))\lambda_0\hat{P}_N(s)=K\lambda_0\hat{f}(s)\hat{P}_K(s)+1 \tag{23}$$

$$(i+g(s))\lambda_0\hat{P}_i(s)=(i+1)\lambda_0\hat{P}_{i+1}(s) \tag{24}$$

(24) より

$$\hat{P}_K(s)=\frac{K+1}{K+g(s)}\cdot\frac{K+2}{K+1+g(s)}\cdot\cdots\cdots\cdots\cdot\frac{N}{N-1+g(s)}\hat{P}_N(s)$$

$$=\frac{N}{K}\frac{\hat{P}_N(s)}{h(s,N-1)} \tag{25}$$

(25) 式を (23) 式に代入すると

$$\hat{P}_N(s)=\frac{h(s,N-1)}{N\lambda_0[h(s,N)-\hat{f}(s)]} \tag{26}$$

また (24) 式より

$$\hat{P}_i(s)=\frac{i+1}{i+g(s)}\cdot\frac{i+2}{i+1+g(s)}\cdot\cdots\cdots\cdots\cdot\frac{N}{N-1+g(s)}\hat{P}_N(s)$$

$$=\frac{1}{i\lambda_0}\cdot\frac{h(s,i-1)}{[h(s,N)-\hat{f}(s)]},\qquad K\leqq i\leqq N \tag{27}$$

(19) 式より

$$\hat{P}_{K-1}(s)=\int_0^\infty\hat{P}_{K-1}(s,x)dx=K\lambda_0\hat{P}_K(s)[(1-\hat{f}(s)))]/s=[(1-\hat{f}(s))/s]/[h(s,N)-\hat{f}(s)] \tag{28}$$

(20) 式より

$$\hat{P}_{ij}(s)=\int_0^\infty\hat{P}_{ij}(s,x)dx=\lambda_j\hat{P}_i(s)[(1-\hat{f}_j(s)]/s=\frac{\lambda_j[(1-\hat{f}_j(s))/s]h(s,i-1)}{[h(s,N)-\hat{f}(s)]i\lambda_0} \tag{29}$$

また，時点アベイラビリティのラプラス変換 $\hat{P}_A^1(s)$ は (27) 式より

$$\hat{P}_A^1(s)=\sum_{i=K}^N\hat{P}_i(s)=\frac{1}{\lambda_0[h(s,N)-\hat{f}(s)]}\cdot\sum_{i=K}^N[h(s,i-1)/i] \tag{30}$$

となる。

次に定常アベイラビリティ $P_A(\infty)$ を求めよう。

$$P_i(\infty)=\lim_{s\to0}sP_i(s)=\lim_{s\to0}\frac{h(s,i-1)}{i\lambda_0}\cdot\frac{s}{[h(s,N)-\hat{f}(s)]}=\frac{1}{i\lambda_0}\lim_{s\to0}\frac{s}{[h(s,N)-\hat{f}(s)]}$$

$$=\frac{1}{i\lambda_0}\lim_{s\to0}\frac{1}{h'(s,N)-\hat{f}'(s)}=\frac{M^*}{i[1+\sum_{j=1}^M\lambda_jK_j^*+M^*\lambda_0K^*]} \tag{31}$$

以下同様な計算により

$$P_{K-1}(\infty)=\frac{M^*K^*\lambda_0}{1+\sum_{j=1}^M\lambda_jK_j^*+M^*\lambda_0K^*} \tag{32}$$

$$P_{ij}(\infty)=\frac{M^*K_j^*\lambda_j}{[1+\sum_{j=1}^M\lambda_jK_j^*+M^*\lambda_0K^*]i} \tag{33}$$

$$\sum_{i=K}^{N}\sum_{j=1}^{M}P_{ij}(\infty)=\sum_{i=K}^{N}\left[\frac{M^*\sum_{j=1}^{M}K_j^*\lambda_j}{i[1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*+M^*\lambda_0K^*]}\right]=\frac{\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*}{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*+M^*\lambda_0K^*} \tag{34}$$

を得る。(32), (33) および (34) 式はそれぞれサブシステム S_0 の停止による定常状態における不稼動率, S_0 中の i 個のユニットが作動中で S_1 の j 番目の ユニット の故障による定常状態におけるシステム停止の確率およびサブシステム S_1 の停止による定常状態における システム の不稼動率を表わす。(31) 式より

$$P_A^1(\infty)=\sum_{i=K}^{N}P_i(\infty)=\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*+M^*K^*\lambda_0} \tag{35}$$

を得る。信頼度関数 $R^1(t)$ のラプラス変換 $\hat{R}^1(s)$ は $\sum_{i=K}^{N}\hat{P}_i(s)$ において $\hat{f}^*(s)=0$ $\hat{f}(s)=0$ (これはシステム停止から作動状態に復帰する確率$=0$ を意味する) とおいて容易に求まる。即ち

$$\hat{R}^1(s)=\sum_{i=K}^{N}\frac{1}{i\lambda_0}\prod_{j=i}^{N}\left(\frac{j\lambda_0}{s+j\lambda_0+\lambda}\right)=\sum_{i=K}^{N}\frac{1}{s+i\lambda_0+\lambda}\prod_{j=i+1}^{N}\left(\frac{j\lambda_0}{s+j\lambda_0+\lambda}\right) \tag{36}$$

システムの平均寿命 MTSF^1 は $\hat{R}^1(0)$ で与えられる。即ち

$$\mathrm{MTSF}^1=\sum_{i=K}^{N}\frac{1}{(i\lambda_0+\lambda)}\prod_{j=i+1}^{N}\left(\frac{j\lambda_0}{j\lambda_0+\lambda}\right) \tag{37}$$

次に $\hat{R}^1(s)$ の逆変換 $R^1(t)$ を求めるため $\hat{R}^1(s)$ を部分分数展開とすると次のようになる。

$$\begin{aligned}\hat{R}^1(s)&=\sum_{m=K}^{N}\frac{1}{m\lambda_0}\prod_{j=m}^{N}\frac{j\lambda_0}{s+j\lambda_0+\lambda}\\&=\sum_{m=K}^{N}\frac{1}{m\lambda_0}\sum_{j=m}^{N}\frac{A_{jm}}{s+j\lambda_0+\lambda}=\sum_{m=K}^{N}\sum_{j=m}^{N}\frac{A_{jm}^*}{s+j\lambda_0+\lambda}\end{aligned}$$

ここに, $A_{im}=\lambda_0\prod_{r=m}^{N}r\Big/\prod_{\substack{r=m\\r\neq j}}^{N}(r-j)$, $A_{jm}^*=\prod_{r=m+1}^{N}r\Big/\prod_{r=m+1}^{N}(r-j)$

従って $\hat{R}^1(s)$ を逆変換すると (38) 式を得る。

$$R^1(t)=\sum_{m=K}^{N}\sum_{j=m}^{N}A_{jm}^*\exp[-(j\lambda_0+\lambda)t] \tag{38}$$

従って次の定理を得る。

定理1 モデル1の時点アベイラビリティのラプラス変換 $\hat{P}_A^1(s)$ は (30) 式で与えられ, 定常アベイラビリティ $P_A^1(\infty)$ は (35) 式で与えられる。

サブシステム S_0, S_1 の停止によってシステムが作動しない定常状態における確率はそれぞれ (32), (34) 式で与えられる。

定理2 モデル1の信頼度関数 $R^1(t)$, そのラプラス変換 $\hat{R}^1(s)$ およびシステムの平均寿命 MTSF^1 はそれぞれ (38), (36), (37) 式で与えられる。

2　モデル2—並列部分を個別保全する場合

このモデルの状態推移は図3に示される。モデル1の解析と同様にしてこのシステムの特性より，次の差分・微分・積分方程式を得る。

$$[d/dt+N\lambda_0+\lambda]P_N(t)=\sum_{j=1}^{M}\int_0^t\mu_j(x)P_{Nj}(t,x)dx, \tag{1}$$

$$[d/dt+i\lambda_0+\lambda]P_i(t)=(i+1)\lambda_0P_{i+1}(t)+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t\mu_j(x)P_{ij}(t,x)dx,\quad K+1\leqq i\leqq N-1, \tag{2}$$

$$[d/dt+K\lambda_0+\lambda]P_K(t)=(K+1)\lambda_0P_{K+1}(t)+\int_0^t\mu_0(x)P_{K-1}(t,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t\mu_j(x)P_{Kj}(t,x)dx \tag{3}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\mu_0(x)]P_{K-1}(t,x)=0 \tag{4}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\mu_j(x)]P_{ij}(t,x)=0,\qquad K\leqq i\leqq N,\ 1\leqq j\leqq M, \tag{5}$$

$$P_{K-1}(t,0)=K\lambda_0P_K(t), \tag{6}$$

$$P_{ij}(t,0)=\lambda_jP_i(t),\qquad K\leqq i\leqq N,\ 1\leqq j\leqq M, \tag{7}$$

$$P_N(0)=1, \tag{8}$$

以上 (1)～(7) 式を初期条件 (8) 式のもとでラプラス変換すると

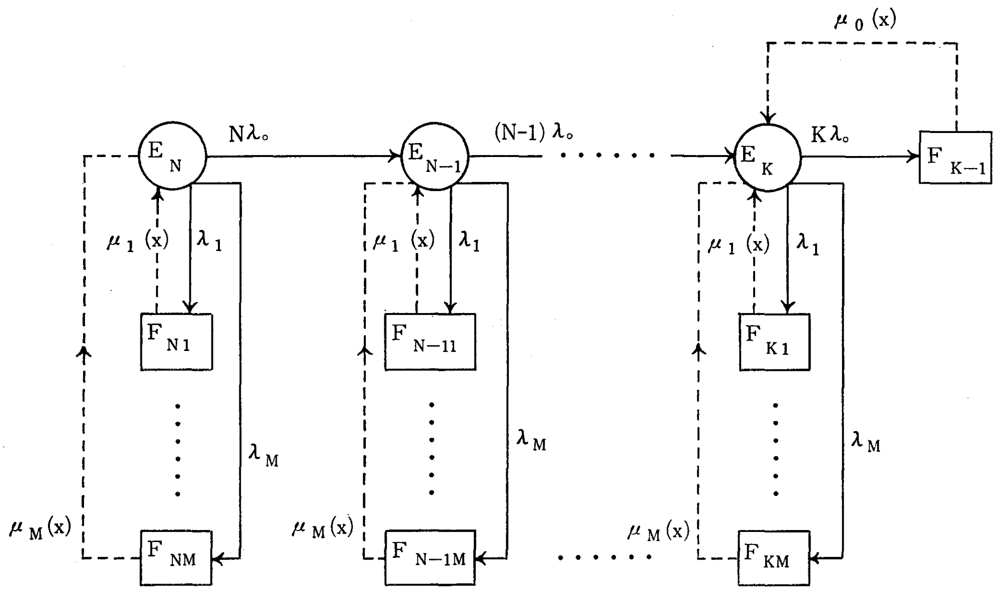

図3　モデル2の状態推移図

$$[s+N\lambda_0+\lambda]\hat{P}_N(s)=\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)\hat{P}_{Nj}(s,x)dx+1, \tag{9}$$

$$[s+i\lambda_0+\lambda]\hat{P}_i(s)=(i+1)\lambda_0\hat{P}_{i+1}(s)+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)\hat{P}_{ij}(s,x)dx, \tag{10}$$

$$[s+K\lambda_0+\lambda]\hat{P}_K(s)=(K+1)\lambda_0\hat{P}_{K+1}(s)+\int_0^\infty\mu_0(x)\hat{P}_{K-1}(s,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)\hat{P}_{Kj}(s,x)dx \tag{11}$$

$$[s+\partial/\partial x+\mu_0(x)]\hat{P}_{K-1}(s,x)=0, \tag{12}$$

$$[s+\partial/\partial x+\mu_j(x)]\hat{P}_{ij}(s,x)=0, \tag{13}$$

$$\hat{P}_{K-1}(s,0)=K\lambda_0\hat{P}_K(s), \tag{14}$$

$$\hat{P}_{ij}(s,0)=\lambda_j\hat{P}_i(s), \tag{15}$$

(12), (14), (13), (15) 式より

$$\hat{P}_{K-1}(s,x)=K\lambda_0\hat{P}_K(s)\exp[-sx-\int_0^x\mu_0(t)dt] \tag{16}$$

$$\hat{P}_{ij}(s,x)=\lambda_j\hat{P}_i(s)\exp[-sx-\int_0^x\mu_j(t)dt] \tag{17}$$

(16), (17) を (9), (10), (11) に代入すると

$$[s+N\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s))]\hat{P}_N(s)=1 \tag{18}$$

$$[s+i\lambda_0+(1-\hat{f}^*(s))]\hat{P}_i(s)=(i+1)\lambda_0\hat{P}_{i+1}(s) \tag{19}$$

$$[s+K\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s))]\hat{P}_K(s)=(K+1)\lambda_0\hat{P}_{K+1}(s)+K\lambda_0\hat{f}_0(s)\hat{P}_K(s) \tag{20}$$

$g(s)\equiv[s+\lambda(1-\hat{f}^*(s))]/\lambda_0$ を (18)～(20) に代入して

$$\hat{P}_N(s)=\frac{1}{(N+g(s))\lambda_0} \tag{21}$$

$$[i+g(s)]\lambda_0\hat{P}_i(s)=(i+1)\lambda_0\hat{P}_{i+1}(s) \tag{22}$$

$$[K(1-\hat{f}_0(s))+g(s)]\lambda_0\hat{P}_K(s)=(K+1)\lambda_0\hat{P}_{K+1} \tag{23}$$

(22) 式より

$$\hat{P}_{K+1}(s)=\frac{K+2}{[K+1+g(s)]}\cdot\frac{K+3}{[K+2+g(s)]}\cdots\cdots\cdots\cdot\frac{N}{[N-1+g(s)]}\hat{P}_N(s)$$

$$=\frac{N(K+g(s))}{h(s,N-1)K(K+1)}\hat{P}_N(s)=\frac{N(K+g(s))}{[h(s,N-1)K(K+1)\lambda_0](N+g(s))} \tag{24}$$

(22) 式より

$$\hat{P}_i(s)=\frac{i+1}{i+g(s)}\cdot\frac{i+2}{i+1+g(s)}\cdots\cdots\cdots\cdot\frac{N}{N-1+g(s)}\hat{P}_N(s)$$

$$=\frac{N}{i}\cdot\frac{h(s,i-1)}{h(s,N-1)}\hat{P}_N(s)=\frac{h(s,i-1)}{i\lambda_0h(s,N)} \tag{25}$$

故に

$$\hat{P}_K(s)=\frac{K+g(s)}{[K(1-\hat{f}_0(s))+g(s)]K\lambda_0h(s,N)} \tag{26}$$

(16), (17) 式より

$$\hat{P}_{K-1}(s)=\int_0^\infty\hat{P}_{K-1}(s,x)dx=K\lambda_0\hat{P}_K(s)[(1-\hat{f}_0(s))]/s=\frac{(1-\hat{f}_0(s))(K+g(s))}{sh(s,N)[K(1-\hat{f}_0(s))+g(s)]} \tag{27}$$

$$\hat{P}_{ij}(s)=\int_0^{\infty}\hat{P}_{ij}(s,x)dx=\lambda_j\hat{P}_i(s)[(1-\hat{f}_j(s))]/s=\frac{\lambda_j[1-\hat{f}_j(s)]}{s}\cdot\frac{h(s,N-1)}{i\lambda_0 h(s,N)} \tag{28}$$

よって定常状態における状態確率は

$$P_{K-1}(\infty)=\lim_{s\to 0}s\hat{P}_{K-1}(s)=\frac{KK_0^*}{h(0,N)}\lim_{s\to 0}\frac{s}{[K(1-f_0(s))+g(s)]}=\frac{KK_0^*\lambda_0}{[K\lambda_0K_0^*+1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*]} \tag{29}$$

$$P_K(\infty)=\lim_{s\to 0}s\hat{P}_K(s)=\frac{K}{K\lambda_0 h(0,N)}\cdot\frac{\lambda_0}{[K\lambda_0K_0^*+1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*]}=\frac{1}{[K\lambda_0K_0^*+1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*]} \tag{30}$$

$$P_i(\infty)=\lim_{s\to 0}s\hat{P}_i(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{h(s,i-1)}{i\lambda_0 h(s,N)}=0,\qquad K+1\leqq i\leqq N \tag{31}$$

$$P_{ij}(\infty)=\lim_{s\to 0}s\hat{P}_{ij}(s)=\begin{cases}0, & K+1\leqq i\leqq N\\ \dfrac{\lambda_jK_j^*}{[K\lambda_0K_0^*+1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*]}, & i=K\end{cases} \tag{32}$$

$$\sum_{j=1}^{M}P_{Kj}(\infty)=\frac{\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*}{[K\lambda_0K_0^*+1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*]} \tag{33}$$

となる。従って次の定理を得る。

定理3　モデル2の時点アベイラビリティ $P_A^2(t)$ のラプラス変換 $\hat{P}_A^2(s)=\sum_{i=K}^{N}\hat{P}_i^2(s)$ は (26) 式で与えられ，定常アベイラビリティは (30) 式で与えられる。サブシステム S_0, S_1 の停止によってシステムが作動していない定常状態における確率はそれぞれ (29)，(33) 式で与えられる。

信頼度関数 $R^2(t)$ のラプラス変換 $\hat{R}^2(s)$ は $\sum_{i=K}^{N}\hat{P}_i(s)$ において $\hat{f}_0(s)=0$, $\hat{f}^*(s)=0$ とおいて容易に求まる。即ち

$$\begin{aligned}\hat{R}^2(s)&=\hat{P}_K(s)+\sum_{i=K+1}^{N}\hat{P}_i(s)\\&=\frac{1}{K\lambda_0}\cdot\prod_{j=K}^{N}\left(\frac{j\lambda_0}{s+j\lambda_0+\lambda}\right)+\sum_{i=K+1}^{N}\frac{1}{i\lambda_0}\prod_{j=i}^{N}\left(\frac{j\lambda_0}{s+j\lambda_0+\lambda}\right)\\&=\sum_{i=K}^{N}\frac{1}{i\lambda_0}\prod_{j=i}^{N}\frac{j\lambda_0}{s+j\lambda_0+\lambda}\end{aligned} \tag{34}$$

これはモデル1の $\hat{R}^1(s)$ に一致する。従って

$$R^2(t)=R^1(t) \tag{35}$$

$$\mathrm{MTSF}^2=\mathrm{MTSF}^1 \tag{36}$$

従って次の定理を得る。

定理4　モデル2の信頼度関数 $R^2(t)$，そのラプラス変換 $\hat{R}^2(s)$ およびシステムの平均寿命 MTSF^2 はそれぞれ (35)，(34)，(36) 式で与えられる。

注意：$K=N$ の場合はモデル 1 とモデル 2 は一致し，次の差分・微分・積分方程式を解けばよい。

$$[d/dt+N\lambda_0+\lambda]P_N(t)=\int_0^t\mu_0(x)P_{N-1}(t,x)\,dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t\mu_j(x)P_{Nj}(t,x)\,dx, \tag{1'}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\mu_0]P_{N-1}(t,x)=0, \tag{2'}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\mu_j(x)\,[P_{Nj}(t,x)=0, \qquad 1\leqq j\leqq M \tag{3'}$$

$$P_{N-1}(t,0)=N\lambda_0P_N(t), \tag{4'}$$

$$P_{Nj}(t,0)=\lambda_jP_N(t), \tag{5'}$$

$$P_N(0)=1 \tag{6'}$$

上の方程式系のラプラス変換をとり解を求めると，次のようになる。

$$\hat{P}_N(s)=[s+N\lambda_0(1-\hat{f}_0(s))+\lambda(1-\hat{f}^*(s))]^{-1} \tag{7'}$$

$$\hat{P}_{N-1}(s)=\int_0^\infty\hat{P}_{N-1}(s,x)\,dx=N\lambda_0\hat{P}_N(s)\,[(1-\hat{f}_0(s))/s] \tag{8'}$$

$$\hat{P}_{Nj}(s)=\int_0^\infty\hat{P}_{Nj}(s,x)\,dx=\lambda_j\hat{P}_N(s)\,[(1-\hat{f}_j(s))/s] \tag{9'}$$

$$P_N(\infty)=\lim_{s\to0}s\hat{P}_N(s)=\frac{1}{NK_0^*\lambda_0+1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*} \tag{10'}$$

$$P_{N-1}(\infty)=\lim_{s\leftarrow0}s\hat{P}_{N-1}(s)=\frac{NK_0^*\lambda_0}{NK_0^*\lambda_0+1+\sum_{i=1}^{M}\lambda_iK_i^*} \tag{11'}$$

$$P_{Nj}(\infty)=\lim_{s\to0}s\hat{P}_{Nj}(s)=\frac{\lambda_jK_j^*}{NK_0^*\lambda_0+1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*} \tag{12'}$$

$$\sum_{j=1}^{M}P_{Nj}(\infty)=\frac{\sum_{j=1}^{N}\lambda_jK_j^*}{NK_0^*\lambda_0+1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*} \tag{13'}$$

従ってモデル 1，2 において $\dfrac{1}{M^*}=\sum_{i=K}^{N}\dfrac{1}{i}=\dfrac{1}{N}$，$K^*=K_0^*$, $N=K$ とおいた結果と一致する。即ち，モデル 1 で (5′)，(7′)，(8′)，(10′)，(11′)，(12′) 式，モデル 2 で (3′)（ただし $P_{K+1}(t)=P_{N+1}(t)=0$ とおく），(4′)，(5′)，(6′)，(7′)，(8′) 式を解いた結果と一致する。

モデル 1 とモデル 2 に対する中間的モデルとして，S_0 によるシステム停止の場合，S_0 中のユニットの $m(K\leqq m\leqq N)$ 個作動の状態にまで保全を行いシステムを動作させる。$m=N$, $m=K$ はそれぞれモデル 1 およびモデル 2 に対応する（このモデルをモデル (1-2)* と呼ぶことにする）。$K+1\leqq m\leqq N-1$ として解析する。ここで新しく次の記号を定義する。

$f^{(m)}(t)$：S_0 の停止でシステムが停止した時，S_0 中のユニットの $m(K\leqq m\leqq N)$ 個作動の状態まで保全する場合の保全時間の確率密度関数，$f^{(m)}(t)=\mu^{(m)}(t)\exp[-\int_0^t\mu^{(m)}(x)\,dx]$，$K\leqq m\leqq N$, ここで $f^{(K)}(t)\equiv f_0(t)$，$f^{(N)}(t)\equiv f(t)$

$K^{*(m)}=f^{(m(}(t)$ の 1 次の積率（平均保全時間）；

このモデルの状態推移図は図 3′ に示される。モデル 1 の解析と同様にして，このシフテムの特性

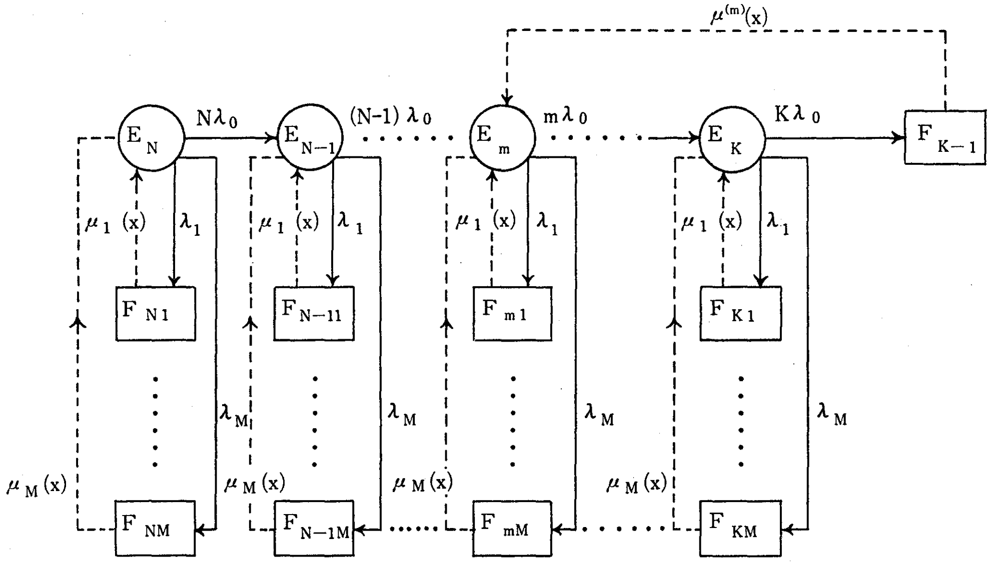

図 3′　モデル (1-2)* の状態推移図

より次の差分・微分・積分方程式を得る。

$$[d/dt+N\lambda_0+\lambda]P_N(t)=\sum_{i=1}^{M}\int_0^t \mu_i(x)P_{Ni}(t,x)dx, \tag{1*}$$

$$[d/dt+m\lambda_0+\lambda]P_m(t)=(m+1)\lambda_0 P_{m+1}(t)+\int_0^t \mu^{(m)}(x)P_{K-1}(t,x)dx$$
$$+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t \mu_j(x)P_{mj}(t,x)dx, \qquad K+1\leqq m\leqq N-1 \tag{2*}$$

$$[d/dt+i\lambda_0+\lambda]P_i(t)=(i+1)\lambda_0 P_{i+1}(t)+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t \mu_j(x)P_{ij}(t,x)dx,$$
$$i\neq m,\ K\leqq i\leqq N-1 \tag{3*}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\mu^{(m)}(x)]P_{K-1}(t,x)=0, \tag{4*}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\mu_j(x)]P_{ij}(t,x)=0, \tag{5*}$$

$$P_{K-1}(t,0)=K\lambda_0 P_K(t), \tag{6*}$$

$$P_{ij}(t,0)=\lambda_j P_i(t), \tag{7*}$$

$$P_N(0)=1 \tag{8*}$$

以上 (1*)〜(7*) 式を初期条件 (8*) 式のもとでラプラス変換すると

$$[s+N\lambda_0+\lambda]\hat{P}_N(s)=\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\hat{P}_{Nj}(s,x)dx+1 \tag{9*}$$

$$[s+m\lambda_0+\lambda]\hat{P}_m(s)=(m+1)\lambda_0\hat{P}_{m+1}(s)+\int_0^\infty \mu^{(m)}(x)\hat{P}_{K-1}(s,x)dx$$
$$+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\hat{P}_{mj}(s,x)dx, \qquad K+1\leqq m\leqq N-1 \tag{10*}$$

$$[s+i\lambda_0+\lambda]\hat{P}_i(s)=(i+1)\lambda_0\hat{P}_{i+1}(s)+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\hat{P}_{ij}(s,x)dx,$$
$$i\neq m,\ K\leqq i\leqq N-1 \tag{11*}$$

$$[s+\partial/x+\mu^{(m)}(x)]\hat{P}_{K-1}(s,x)=0, \tag{12*}$$

$$[s+\partial/\partial x+\mu_j(x)]\hat{P}_{ij}(s,x)=0, \tag{13*}$$

$$\hat{P}_{K-1}(s,0)=K\lambda_0\hat{P}_K(s), \tag{14*}$$

$$\hat{P}_{ij}(s,0)=\lambda_j\hat{P}_i(s), \qquad K\leqq i\leqq N \tag{15*}$$

(12*)～(15*) 式より(16*), (17*) 式を得る。

$$\hat{P}_{K-1}(s,x)=K\lambda_0\hat{P}_K(s)\exp[-sx-\int_0^x\mu^{(m)}(y)dy], \tag{16*}$$

$$\hat{P}_{ij}(s,x)=\lambda_j\hat{P}_i(s)\exp[-sx-\int_0^x\mu_i(y)dy] \tag{17*}$$

(16*), (17*) 式を (1*)～(3*) 式に代入して (18*)～(20*) 式を得る。

$$[s+N\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s))]\hat{P}_N(s)=1, \tag{18*}$$

$$[s+m\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s))]\hat{P}_m(s)=(m+1)\lambda_0\hat{P}_{m+1}(s)+K\lambda_0\hat{P}_K(s)\hat{f}^{(m)}(s), \tag{19*}$$

$$[s+i\lambda_0+\lambda(1-\hat{f}^*(s))]\hat{P}_i(s)=(i+1)\lambda_0\hat{P}_{i+1}(s) \qquad i\neq m,\ K\leqq i\leqq N-1 \tag{20*}$$

$g(s)=[s+\lambda(1-\hat{f}^*(s))]/\lambda_0$ を (18*)～(20*) 式に代入して (21*)～(23*) 式を得る。

$$\hat{P}_N(s)=\frac{1}{[N+g(s)]\lambda_0}, \tag{21*}$$

$$[m+g(s)]\hat{P}_m(s)=(m+1)\hat{P}_{m+1}(s)+K\hat{P}_K(s)\hat{f}^{(m)}(s), \tag{22*}$$

$$[i+g(s)]\hat{P}_i(s)=(i+1)\hat{P}_{i+1}(s) \tag{23*}$$

(23*) 式から (24*), (25*) 式を得る。

$$\hat{P}_K(s)=\frac{K+1}{K+g(s)}\cdot\frac{K+2}{K+1+g(s)}\cdots\frac{m}{m-1+g(s)}\hat{P}_m(s)=\frac{m}{K}\frac{\hat{P}_m(s)}{h(s,m-1)}, \tag{24*}$$

$$\hat{P}_{m+1}(s)=\frac{m+2}{m+1+g(s)}\cdot\frac{m+3}{m+2+g(s)}\cdots\frac{N}{N-1+g(s)}\hat{P}_N(s)=\frac{N}{(m+1)}\frac{h(s,m)}{h(s,N-1)}\hat{P}_N(s) \tag{25*}$$

(24*), (25*), (19*)式から

$$\hat{P}_K(s)=\frac{h(s,m)}{K\lambda_0[(1+g(s)/m)h(s,m-1)-\hat{f}^{(m)}(s)]h(s,N)} \tag{26*}$$

となる。また, (23*)—(25*) 式から (27*) 式を得る。

$$\hat{P}_i(s)=\begin{cases}\dfrac{K}{i}\hat{P}_K(s), & K\leqq i\leqq m\\[2ex] \dfrac{N}{i}\cdot\dfrac{h(s,i-1)}{h(s,N-1)}\hat{P}_N(s), & m+1\leqq i\leqq N\end{cases} \tag{27*}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=K}^{N}\hat{P}_i(s)&=\sum_{i=K}^{m}(1/i)K\hat{P}_K(s)+\sum_{i=m+1}^{N}[h(s,i-1)/i]\,[N\hat{P}_N(s)/h(s,N-1)]\\&=\frac{1}{\lambda_0h(s,N)}\left\{\sum_{i=K}^{m}(1/i)\frac{h(s,m)}{[(1+g(s)/m)h(s,m-1)-\hat{f}^{(m)}(s)]}+\sum_{i=m+1}^{N}[h(s,i-1)/i]\right\}\end{aligned}$$

(28*)

(16*), (17*) 式から

$$\hat{P}_{K-1}(s)=\int_0^\infty \hat{P}_{K-1}(s,x)dx=K\lambda_0\hat{P}_K(s)(1-\hat{f}^{(m)}(s)/s$$

$$=[(1-\hat{f}^{(m)}(s))/s]\cdot\frac{h(s,m)}{[(1+g(s)/m)h(s,m-1)-\hat{f}^{(m)}(s)]h(s,N)} \tag{29*}$$

$$\hat{P}_{ij}(s)=\int_0^\infty \hat{P}_{ij}(s,x)dx=\lambda_j\hat{F}_i(s)(1-\hat{f}_j(s))/s$$

$$=\lambda_j[(1-\hat{f}_j(s))/s]\cdot\frac{h(s,m)}{i\lambda_0[(1+g(s)/m)h(s,m-1)-\hat{f}^{(m)}(s)]h(s,N)},\quad K\leqq i\leqq m$$

$$=\lambda_j[(1-\hat{f}_j(s))/s]\cdot\frac{Nh(s,i-1)}{ih(s,N-1)[N+g(s)]\lambda_0},\quad m+1\leqq i\leqq N-1 \tag{30*}$$

を得る。

従って (27*)～(30*) 式から極限計算によって,

$$h(0,i)=0,\quad h'(0,i)=\left[\frac{d}{ds}h(s,i)\right]_{s=0}=\sum_{n=K}^{i}(1/n)(1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*)/\lambda_0,$$

$$g'(0)=\left[\frac{d}{ds}g(s)\right]_{s=0}=(1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*)/\lambda_0$$

を考慮すると (31*)～(34*) 式を得る。

$$P_i(\infty)=\lim_{s\to 0}s\hat{P}_i(s)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{i\{K^{*(m)}\lambda_0+(1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*)\sum_{j=K}^{m}(1/j)\}}, & K\leqq i\leqq m\\ 0, & m+1\leqq i\leqq N-1\end{cases} \tag{31*}$$

$$P_{K-1}(\infty)=\lim_{s\to 0}s\hat{P}_{K-1}(s)=K\lambda_0[(1-\hat{f}^{(m)}(s))/s]\lim_{s\to 0}s\hat{P}_K(s)$$

$$=\frac{K^{(m)}\lambda_0}{K^{(m)}\lambda_0+(1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*)\sum_{j=K}^{m}(1/j)}, \tag{32*}$$

$$P_{ij}(\infty)=\lim_{s\to 0}s\hat{P}_{ij}(s)=\lambda_jK_j^*\lim_{s\to 0}s\hat{P}_i(s)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{K^{(m)}\lambda_0}{i\{K^{(m)}\lambda_0+(1+\sum_{i=1}^{M}\lambda_jK_j^*)\sum_{j=K}^{m}(1/j)\}}, & K\leqq i\leqq m\\ 0, & m+1\leqq i\leqq N-1\end{cases} \tag{33*}$$

$$\sum_{i=K}^{N}\sum_{j=1}^{M}P_{ij}(\infty)=\sum_{i=K}^{m}\sum_{j=1}^{M}P_{ij}(\infty)$$

$$=\frac{\sum_{i=K}^{m}(1/i)\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*}{K^{(m)}\lambda_0+(1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_j^*)\sum_{i=K}^{m}(1/i)} \tag{34*}$$

$$P_A(\infty)=\sum_{i=K}^{N}P_i(\infty)=\sum_{i=K}^{m}P_i(\infty)$$

$$=\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*+[K^{(m)}\lambda_0/\sum_{i=K}^{m}(1/i)]} \tag{35*}$$

従って次の定理を得る。

定理5　モデル (1-2)* の時点でアベイラビリティのラプラス変換形は (28*) 式で与えられ，定常アベイラビリティは (35*) 式で与えられる。サブシステム S_0, S_1 の停止によってシステムが作動しない定常状態における確率はそれぞれ (32*), (34*) 式で与えられる。

定理6　モデル (1-2)* の信頼度関数，そのラプラス変換形および システム の平均寿命はモデル 1の結果に一致する。

3　モデル3—完全保全の場合

このモデルの状態推移は図4に示される。モデル1の解析と同様にして，この システム の特性より次の差分・微分・積分方程式を得る。

$$[d/dt+N\lambda_0+\lambda]P_N(t)=\int_0^t\mu(x)P_{K-1}(t,x)dx+\sum_{i=0}^{N-K}\sum_{j=1}^{M}\int_0^t\mu_{ij}(x)P_{N-ij}(t,x)dx \tag{1}$$

$$[d/dt+m\lambda_0+\lambda[P_m(t)=(m+1)\lambda_0P_{m+1}(t), \qquad K\leqq m\leqq N-1, \tag{2}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\mu(x)]P_{K-1}(t,x)=0, \tag{3}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\mu_{ij}(x)[P_{N-ij}(t,x)=0, \qquad 0\leqq i\leqq N-K,\ 1\leqq j\leqq M, \tag{4}$$

境界条件

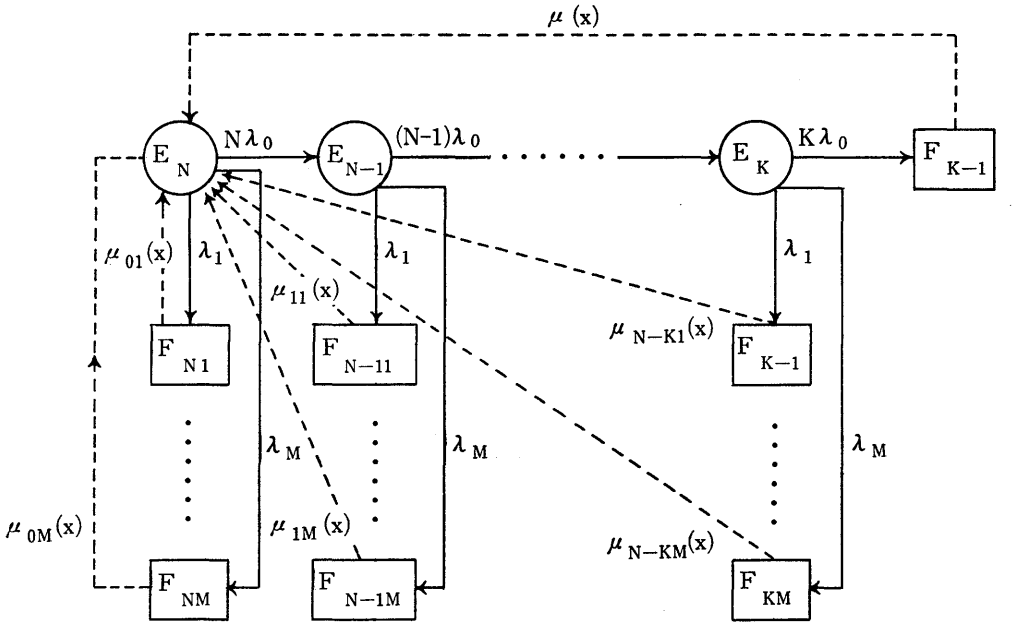

図4　モデル3の状態推移図

$$P_{K-1}(t,0)=K\lambda_0 P_K(t), \tag{5}$$

$$P_{N-ij}(t,0)=\lambda_j P_{N-i}(t), \qquad 0\leqq i\leqq N-K,\ 1\leqq j\leqq M \tag{6}$$

初期条件

$$P_N(0)=1, \tag{7}$$

以上 (1)～(6) 式を初期条件 (7) のもとでラプラス変換すると

$$[s+N\lambda_0+\lambda]\hat{P}_N(s)=\int_0^\infty \mu(x)\hat{P}_{K-1}(s,x)dx+\sum_{i=0}^{N-K}\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_{ij}(x)\hat{P}_{N-ij}(s,x)dx+1, \tag{8}$$

$$(s+m\lambda_0+\lambda)\hat{P}_m(s)=(m+1)\hat{P}_{m+1}(s), \tag{9}$$

$$[s+\partial/\partial x+\partial(x)]\hat{P}_{K-1}(s,x)=0, \tag{10}$$

$$[s+\partial/\partial x+\mu_{ij}(x)]\hat{P}_{N-ij}(s,x)=0, \tag{11}$$

$$\hat{P}_{K-1}(s,0)=K\lambda_0\hat{P}_K(s), \tag{12}$$

$$\hat{P}_{ij}(s,0)=\lambda_j\hat{P}_{N-i}(s), \tag{13}$$

(10), (12), (11), (13) 式より

$$\hat{P}_{K-1}(s,x)=K\lambda_0\hat{P}_K(s)\exp\left[-sx-\int_0^x \mu(t)dt\right] \tag{14}$$

$$\hat{P}_{N-ij}(s,x)=\lambda_j\hat{P}_{N-i}(s)\exp\left[-sx-\int_0^x \mu_{ij}(t)dt\right], \tag{15}$$

(14), (15) 式を (8) 式に代入すると

$$[s+N\lambda_0+\lambda]\hat{P}_N(s)=K\lambda_0\hat{f}(s)\hat{P}_K(s)+\sum_{i=0}^{N-K}\sum_{j=1}^{M}\lambda_j\hat{f}_{ij}(s)\hat{P}_{N-i}(s)+1 \tag{16}$$

(9) 式より

$$\hat{P}_K(s)=\frac{N}{K}\cdot\frac{\hat{P}_N(s)}{h^0(s,N-1)}\ , \tag{17}$$

$$\hat{P}_m(s)=\frac{N}{m}\cdot\frac{h^0(s,m-1)}{h^0(s,N-1)}\hat{P}_N(s), \tag{18}$$

(17), (18) 式を (16) 式に代入すると

$$(N+g^0(s))\lambda_0\hat{P}_N(s)=N\lambda_0\hat{f}(s)\frac{\hat{P}_N(s)}{h^0(s,N-1)}+\hat{P}_N(s)\sum_{i=0}^{N-K}\sum_{j=1}^{M}\lambda_j\hat{f}_{ij}(s)\frac{N}{N-i}\cdot\frac{h^0(s,N-i-1)}{h^0(s,N-1)}+1$$

従って

$$\hat{P}_N(s)=\frac{1}{\lambda_0(N+g^0(s))\left[1-\dfrac{\hat{f}(s)}{h^0(s,N)}-\dfrac{1}{\lambda_0 h^0(s,N)}\displaystyle\sum_{i=0}^{N-K}\sum_{j=1}^{M}\lambda_j h^0(s,N-i-1)\hat{f}_{ij}(s)/(N-i)\right]} \tag{19}$$

(14), (15) 式より

$$\hat{P}_{K-1}(s)=\int_0^\infty \hat{P}_{K-1}(s,x)dx=\frac{N\lambda_0[1-\hat{f}(s)]\hat{P}_N(s)}{sh^0(s,N-1)} \tag{20}$$

$$\hat{P}_{N-ij}(s)=\int_0^\infty \hat{P}_{N-ij}(s,x)dx=\lambda_j[1-\hat{f}_{ij}(s)]\hat{P}_{N-i}(s)/s \tag{21}$$

(17), (18), (19) 式より

$$\hat{P}_A^3(s)=\sum_{m=K}^{N}\hat{P}_m(s)=\frac{N\hat{P}_N(s)}{h^0(s,N-1)}\sum_{m=K}^{N}[h^0(s,m-1)/m[\tag{22}$$

関係式 $h^0(s,N)=1+g^0(s)\sum_{i=0}^{N-K}[h^0(s,N-i-1)/(N-i)]$, タウバ型定理およびロピタルの定理を用いて

$$P_m(\infty)=\lim_{s\to 0}s\hat{P}_m(s)=\frac{h^0(0,m-1)}{m}P^*(N,K) \tag{23}$$

$$P_{K-1}(\infty)=\lim_{s\to 0}s\hat{P}_{K-1}(s)=K^*\lambda_0P^*(N,K) \tag{24}$$

$$P_{N-ij}(\infty)=\lim_{s\to 0}s\hat{P}_{N-ij}(s)=[\lambda_jK_{ij}^*h^0(0,N-i-1)/(N-i)]P^*(N,K) \tag{25}$$

$$\sum_{i=0}^{N-K}\sum_{j=1}^{M}P_{N-ij}(\infty)=[\sum_{i=0}^{N-K}\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_{ij}^*h^0(0,N-i-1)/(N-i)]P^*(N,K) \tag{26}$$

となる。ここに

$$P^*(N,K)=[\sum_{i=0}^{N-K}h^0(0,N-i-1)/(N-i)+K^*\lambda_0+\sum_{i=0}^{N-K}\sum_{j=1}^{M}\lambda_jK_{ij}^*h^0(0,N-i-1)/(N-i)]^{-1} \tag{27}$$

従って (22) より定常アベイラビリティ $P_A^3(\infty)$ は

$$P_A^3(\infty)=P^*(N,K)\sum_{m=K}^{N}[h^0(0,m-1)/m] \tag{28}$$

従って次の定理を得る。

定理7　モデル3の時点アベイラビリティのラプラス変換 $\hat{P}_A^3(s)$ は (22) 式で与えられ，定常アベイラビリティ $P_A^3(\infty)$ は (28) 式で与えられる。サブシステム S_0, S_1 の停止によってシステムが作動しない定常状態における確率はそれぞれ (24), (26) 式で与えられる。

信頼度関数 $R^3(t)$ のラプラス変換 $\hat{R}^3(s)$ は $\sum_{m=K}^{N}\hat{P}_m(s)$ において，$\hat{f}(s)=0$, $\hat{f}_{ij}(s)=0$ とおいて容易に求まる。即ち，

$$\hat{R}^3(s)=\sum_{m=K}^{N}\frac{Nh^0(s,m-1)}{m\lambda_0(N+g^0(s))h^0(s,N-1)}=\sum_{m=K}^{N}\frac{1}{m\lambda_0}\prod_{j=m}^{N}[j\lambda_0/(s+j\lambda_0+\lambda)] \tag{29}$$

システムの平均寿命 MTSF^3 は $\hat{R}^3(0)$ で与えられる。即ち，

$$\mathrm{MTSF}^3=\sum_{m=K}^{N}\frac{1}{m\lambda_0}\prod_{j=m}^{N}[j\lambda_0/(j\lambda_0+\lambda)] \tag{30}$$

定理8　モデル3の信頼度関数 $R^3(t)$ のラプラス変換 $\hat{R}^3(s)$ およびシステムの平均寿命 MTSF^3 はそれぞれ (29), (30) 式で与えられる。これらはモデル1の結果に一致する。

注意：モデル3の場合，$K=N$ のときはモデル1，2で $K=N$ とおいた場合になる。その理由は，モデルの前提条件としてシステム停止のときユニット（故障していないユニット）は故障しな

いと仮定しているため，S_1 の停止でシステム停止となったとき，S_1 中の故障ユニットの保全の後，S_0 中には故障ユニットは存在しないためモデル1と同じになる。

4　定常確率の性質

この節では各モデルの定常状態における状態確率の性質を議論する。

定理9　モデル1とモデル2のアベイラビリティ $P_A^1(\infty)$ と $P_A^2(\infty)$ について次の関係が成立する。

$$KK_0^* \gtreqless M^*K^* \Longleftrightarrow P_A^1(\infty) \gtreqless P_A^2(\infty)$$

証明　$P_A^1(\infty)=\dfrac{1}{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*+M^*K^*\lambda_0} \gtreqless P_A^2(\infty)=\dfrac{1}{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*+KK_0^*\lambda_0}$

$$\Longleftrightarrow\ (1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*+KK_0^*\lambda_0) \gtreqless (1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j^* K_j^*+M^*K^*\lambda_0)$$

$$\Longleftrightarrow\ KK_0^* \gtreqless M^*K^*$$

この定理はモデル1および2のシステム停止のときの平均保全時間が既知であればどちらのモデルを選択すればよいかを定常アベイラビリティを直接計算しなくても教えてくれる。

定理10　モデル (1-2)* の定常アベイラビリティを最大にする m は

$$\frac{K^{(m)}}{\sum_{i=K}^{m}(1/i)} \tag{1}$$

を最小にする整数 $m^*(K \leqq m^* \leqq N)$ によって決定される。

証明　モデル (1-2)* の (35*) 式より $P_A(\infty)$ を最大にすることは (1) を最小にすることと等価であり，(1) を最小にする m^* の存在は明らか。m^* の唯一性は保証されない。

例　$K^{(m)}=mK_0^*$，$N=K+2$ の場合

$K^{(m)}=mK_0^*$ は各ユニットの平均保全時間が等しいことを意味する。このとき，

$g(m)=mK_0/\sum_{i=K}^{m}(1/i)$ とおくと，

$$g(K)=K^2K_0^*=K^2(2K+1)(3K^2+6K+2)K_0^*/[(2K+1)(3K^2+6K+2)]$$

$$g(K+1)=K(K+1)^2K_0^*/(2K+1)=K(K+1)^2(3K^2+6K+2)K_0^*/[(2K+1)(3K^2+6K+2)]$$

$$g(K+2)=K(K+1)(K+2)^2K_0^*/(3K^2+6K+2)=$$
$$K(K+1)(K+2)^2(2K+1)K_0^*/[((2K+1)(2K^2+6K+2)]$$

となり，

$$g_1(K)=K(2K+1)(3K^2+6K+2)=6K^4+15K^3+10K^2+2K,$$

$$g_2(K)=(K+1)^2(3K^2+6K+2)=3K^4+12K^3+17K^2+10K+2,$$

$$g_3(K)=(K+1)(K+2)^2(2K+1)=2K^4+11K^3+21K^2+16K+4$$

とおくとき，

$$g_3(1)>g_2(1)>g_1(1),$$

$$g_1(K)-g_2(K)=3K^4+3K^3-7K^2-8K-2=K^2(2K^2-7)+K(3K^2-8)+(K^4-2),$$
$$g_1(K)-g_3(K)=4K^4+4K^3-11K^2-14K-4=K^2(3K^2-11)+K(4K^2-14)+(K^4-4)$$
$$g_2(K)-g_3(K)=K^4+K^3-4K^2-4K-2=K^2(K^2-4)+K(K^2-4)-2$$

となるから，$K=2$ のとき，$g_1(K)>g_3(K)>g_2(K)$，$K\geqq 3$ のとき，$g_1(K)>g_2(K)>g_3(K)$ となる。従って，$K=1$ のとき，$m^*=K$, $K=2$ のとき，$m^*=K+1$, $K\geqq 3$ のとき，$m^*=K+2$ となる。

次に定常アベイラビリティの N および K が変化したときの挙動を調べる。$K^*=(N-K+1)K_0^*$ 即ちサブシステム S_0 の停止によってシステム停止が起ったとき，S_0 中の故障ユニットの平均保全時間をすべて K_0^* とするとき，次の補題および定理が成立する。ここでは便宜上，$P_A^i(\infty)\,(i=1,2,3)$ の代りに記号 $P_A^i(N,K)$ を用いる。

補題 1　$F(N,K)=(N-K+1)K_0^*/\sum_{i=K}^{N}(1/i)$ $(1\leqq K\leqq N)$ は (i) 固定した N に対して K の増加関数であり，(ii) 固定した K に対して N の増加関数である。

証明 (i)　$N\geqq K_2>K_1\geqq 1$ なる K_1,K_2 に対して

$$\sum_{i=K_2}^{N}1/i<(N-K_2+1)/(K_1+j),\quad 0\leqq j\leqq K_2-K_1-1$$

が成立するから，

$$(K_2-K_1)\sum_{i=K_2}^{N}1/i<\sum_{j=0}^{K_2-K_1-1}(N-K_2+1)/(K_1+j)=(N-K_2+1)\sum_{j=K_1}^{K_2-1}1/i$$

従って

$$\begin{aligned}F(N,K_2)-F(N,K_1)&=K_0^*\{(N-K_2+1)\sum_{i=K_1}^{K_2-1}1/i-(K_2-K_1)\sum_{i=K_2}^{N}1/i\}/\{\sum_{i=K_1}^{N}1/i\sum_{i=K_2}^{N}1/i\}\\&>K_0^*\{(N-K_2+1)\sum_{i=K_1}^{K_2-1}1/i-(N-K_2+1)\sum_{i=K_1}^{K_2-1}1/i\}/\{\sum_{i=K_1}^{N}1/i\sum_{i=K_2}^{N}1/i\}\\&=0.\end{aligned}\tag{2}$$

(ii)　$N\geqq N_2>N_1\geqq K$ なる N_1,N_2 に対して

$$\sum_{i=K}^{N_1}1/i>(N_1-K+1)/(N_1+j),\quad 1\leqq j\leqq N_2-N_1$$

が成立するから

$$(N_2-N_1)\sum_{i=K}^{N_1}1/i>(N_1-K+1)\sum_{j=1}^{N_2-N_1}1/(N_1+j)=(N_1-K+1)\sum_{i=N_1+1}^{N_2}1/i$$

従って

$$\begin{aligned}F(N_2,K)-F(N_1,K)&=K_0^*\{(N_2-N_1)\sum_{i=K}^{N_1}1/i-(N_1-K+1)\sum_{i=N_1+1}^{N_2}1/i\}/\{\sum_{i=K}^{N_1}1/i\sum_{i=K}^{N_2}1/i\}\\&>K_0^*\{(N_1-K+1)\sum_{i=N_1+1}^{N_2}1/i-(N_1-K+1)\sum_{i=N_1+1}^{N_2}1/i\}/\{\sum_{i=K}^{N_1}1/i\sum_{i=K}^{N_2}1/i\}\\&=0\end{aligned}\tag{3}$$

定理 11　(i) $P_A^i(N,K)$ $(i=1,2)$ は任意に固定された $N\geqq 1$ に対して $K(1\leqq K\leqq N)$ の減少関数である。(ii) $P_A^1(N,K)$，$P_A^2(N,K)$ は任意に固定された $K\geqq 1$ $(N\geqq K)$ に対して，それぞれ N

の減少関数，定数関数である。(iii) $P_A^1(N, K)$ は任意に固定された $K \geqq 1$ に対して $N \to \infty \Rightarrow P_A^1(N, K) \to 0$.

証明　(i)，(ii) はモデル1の (35) 式，$1/M^* = \sum_{i=K}^{N} 1/i$, $K^* = (N-K+1)K_0^*$，補題1およびモデル2の (30) 式より明らか。

(iii)　$(N-K+1)/\sum_{i=K}^{N}(1/i) > (N-K+1)/\int_K^N (1/x)dx$

$$= (N-K+1)/\log\left(\frac{N}{K}\right) \to \infty \qquad (N \to \infty) \tag{4}$$

が成立するから，(iii) を得る。

$$g(i) = \sum_{i=1}^{M} \lambda_j K_{ij}^*, \quad f(m) = h^0(0, m-1)/m \qquad (K \leqq m \leqq N)$$

とおくとき，次の補題および定理を得る。

補題2　$f(m)$ は (i) $\lambda/\lambda_0 > 1$ のとき，m の増加関数となり，(ii) $\lambda/\lambda_0 < 1$ のとき，m の減少関数となる。

証明　$N \geqq n_2 > n_1 \geqq K$ なる n_1, n_2 をとる。

(1)　$n_2 = n_1 + 1$ のとき，

$$\begin{aligned} f(n_2) - f(n_1) &= h^0(0, n_2-1)/n_2 - h^0(0, n_1-1)/n_1 \\ &= \prod_{j=K}^{n_1-1}(1+\lambda/j\lambda_0)\{n_1(1+\lambda/n\lambda_0) - (n_1+1)\}/n_1 n_2 \\ &= \prod_{j=K}^{n_1-1}(1+\lambda/j\lambda_0)(\lambda/\lambda_0 - 1)/(n_1 n_2) \\ &\gtreqless 0 \qquad , \lambda/\lambda_0 > 1 \;,\; \lambda/\lambda_0 = 1 \;,\; \lambda/\lambda_0 < 1 \end{aligned} \tag{5}$$

(2)　$n_2 = n_1 + k$ のとき命題が成立していると仮定する。この仮定は次式が成立していると等価である。

$$n_1 \prod_{j=n_1}^{n_1+k-1}(1+\lambda/j\lambda_0) \gtreqless (n_1+k) \qquad , \lambda/\lambda_0 > 1 \;,\; \lambda/\lambda_0 = 1 \;,\; \lambda/\lambda_0 < 1 \tag{6}$$

このとき，

$$\begin{aligned} & n_1 \prod_{j=n_1}^{n_1+k}(1+\lambda/j\lambda_0) - (n_1+k+1) \\ &= n_1 \prod_{j=n_1}^{n_1+k-1}(1+\lambda/j\lambda_0)(1+\lambda/(n_1+k)\lambda_0) - (n_1+k+1) \\ &\gtreqless (n_1+k)(1+\lambda/(n_1+k)\lambda_0) - (n_1+k+1) \qquad , \lambda/\lambda_0 > 1 \;,\; \lambda/\lambda_0 = 1 \;,\; \lambda/\lambda_0 < 1 \\ &= \lambda/\lambda_0 - 1 \end{aligned}$$

$$\gtreqless 0 \qquad \begin{array}{l} ,\ \lambda/\lambda_0 > 1 \\ ,\ \lambda/\lambda_0 = 1 \\ ,\ \lambda/\lambda_0 < 1 \end{array} \tag{7}$$

従って，$n_2=n_1+k+1$ のとき

$$f(n_2)-f(n_1)=\prod_{j=K}^{n_1-1}(1+\lambda/j\lambda_0)\{n_1\prod_{j=n_1}^{n_1+k}(1+\lambda/i\lambda_0)-(n_1+k+1)\}/\{n_1(n_1+k+1)\}$$

$$\gtreqless 0 \qquad \begin{array}{l} ,\ \lambda/\lambda_0 > 1 \\ ,\ \lambda/\lambda_0 = 1 \\ ,\ \lambda/\lambda_0 < 1 \end{array} \tag{8}$$

定理 12 (i) $g(i)$ が任意に固定された M に対して i の減少関数で，$\lambda/\lambda_0<1$ ならば $P_A^3(N, K)$ は任意に固定された $N\geqq 1$ に対して $K(1\leqq K\leqq N)$ の減少関数である。(ii) $g(i)$ が任意に固定された M に対して i の増加関数で，$\lambda/\lambda_0>1$ ならば $P_A^3(N, K)$ は任意に固定された $N\geqq 1$ に対して K の増加関数である。

証明 モデル3の (28) 式を変形すると次のようになる。

$$\begin{aligned} P_A^3(N, K) &= P^*(N, K)\sum_{m=K}^{N} h^0(0, m-1)/m \\ &= \{1+(N-K+1)K_0^*\lambda_0/[\sum_{m=K}^{N} h^0(0, m-1)/m] \\ &\quad +[\sum_{m=K}^{N}(\sum_{i=1}^{M}\lambda_j K_{N-mj}^*)h^0(0, m-1)/m]/[\sum_{m=K}^{N} h^0(0, m-1)/m]\}^{-1} \\ &= \{1+(N-K+1)K_0^*\lambda_0/\sum_{m=K}^{N} f(m)+\sum_{m=K}^{N} f(m)g(N-m)/\sum_{m=K}^{N} f(m)\}^{-1} \end{aligned} \tag{9}$$

ここで，$G(N, K)=\{(N-K+1)K_0^*\lambda_0+\sum_{m=K}^{N} f(m)g(N-m)\}/\sum_{m=K}^{N} f(m)$ おく，このとき $N\geqq K_2>K_1\geqq 1$ なる K_1, K_2 に対して，

$$\begin{aligned} &G(N, K_2)-G(N, K_1) \\ &\quad = K_0^*\lambda_0\{(N-K_2+1)\sum_{m=K_1}^{K_2-1} f(m)-(K_2-K_1)\sum_{m=K_2}^{N} f(m)\}/\{\sum_{m=K}^{N_1} f(m)\sum_{m=K}^{N_2} f(m)\} \\ &\quad +\sum_{m=K_1}^{K_2-1} f(m)\sum_{n=K_2}^{N} f(n)[g(N-n)-g(N-m)]/\{\sum_{m=K}^{N_1} f(m)\sum_{m=K}^{N_2} f(m)\} \end{aligned} \tag{10}$$

となる。

(i) $\lambda/\lambda_0<1$ ならば補題2より

$$\sum_{m=K_2}^{N} f(m)<(N-K_2+1)h^0(0, K_1+i-1)/(K_1+j)=(N-K_2+1)f(K_1+j),\ \ 0\leqq j\leqq K_2-K_1-1$$

が成立するから，

$$(K_2-K_1)\sum_{m=K_2}^{N} f(m)<(N-K_2+1)\sum_{j=0}^{K_2-K_1-1} f(K_1+j)=(N-K_2+1)\sum_{m=K_1}^{K_2-1} f(m)$$

従って，$g(l)$ が l の単調減少関数であることを考慮すると，(10) 式の分子を $G^*(N, K_2)-G^*(N, K_1)$ とすると，

$$G^*(N, K_2)-G^*(N, K_1)>\sum_{m=K_1}^{K_2-1} f(m) \sum_{n=K_2}^{N} f(n)\,[g(N-n)-g(N-m)]$$

$$\geqq 0 \qquad (11)$$

従って $P_A^3(N, K)$ は任意に固定された $N\geqq 1$ に対して K の減少関数となる。

(ii)　$\lambda/\lambda_0>1$ ならば補題2から $f(m)$ が m の増加関数となるから,

$$\sum_{m=K_2}^{N} f(m)>(N-K_2+1) f(K_1+j), \qquad 0\leqq j\leqq K_2-K_1-1$$

となり,

$$(K_2-K_1)\sum_{m=K_2}^{N} f(m)>(N-K_2+1)\sum_{m=K_1}^{K_2-1} f(m)$$

が成立し，$g(l)$ が l の増加関数であることを考慮すると,

$$G^*(N, K_2)-G^*(N, K_1)<\sum_{m=K_1}^{K_2-1} f(m) \sum_{n=K_2}^{N} f(n)\,[g(N-n)-g(N-m)]$$

$$\leqq 0 \qquad (12)$$

従って定理を得る。

次に具体例とし現実によく用いられている 2-out-of-3 システム，即ち $N=3$, $K=2$ の場合の各信頼性測度を列記し，若干の性質を求べる。

（モデル1）

$$\hat{R}^1(s)=(s+5\lambda_0+\lambda)/[(s+3\lambda_0+\lambda)(s+2\lambda_0+\lambda)],$$

$$\mathrm{MTSF}^1=(5\lambda_0+\lambda)/[(3\lambda_0+\lambda)(2\lambda_0+\lambda)], \quad R^1(t)=3e^{-(2\lambda_0+\lambda)t}-2e^{-(3\lambda_0+\lambda)t},$$

$$P_A^1(\infty)=\{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*+6K^*\lambda_0/5\}^{-1}, \quad P_1(\infty)=(6K^*\lambda_0/5)/[1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*+6K^*\lambda_0/5],$$

$$\sum_{i=2}^{3}\sum_{j=1}^{M} P_{ij}(\infty)=\sum_{j=j}^{M}\lambda_j K_j^*/[1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*+6K^*\lambda_0/5].$$

（モデル2）

$\hat{R}^2(s)$, MTSF^2, $R(t)^2$ はモデル1に同じ。

$$P_A^2(\infty)=\{1+\sum_{j=1}\lambda_j K_j^*+2K_0^*\lambda_0\}^{-1}, \quad P_1(\infty)=2K_0^*\lambda_0/[1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*+2K_0^*\lambda_0],$$

$$\sum_{j=1}^{M} P_{2j}(\infty)=\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*/[1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*+2K_0^*\lambda_0].$$

$P_A^1(\infty)$, $P_A^2(\infty)$ を比較して次の命題が成り立つ。

$$3K^* \lesseqqgtr 5K_0^* \Longleftrightarrow P_A^1(\infty) \gtreqqless P_A^2(\infty)$$

（モデル (1-2)*)

$\hat{R}^{(1-2)*}(s)$, MTSF$^{(1-2)*}$, $R(t)^{(1-2)*}$ はモデル1に同じ

$$P_A^{(1-2)*}(\infty)=\{1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*+[K^{(m)}\lambda_0/\sum_{i=2}^{m}(1/i)]\}^{-1},$$

$$P_1^{(1-2)*}(\infty)=K^{(m)}\lambda_0/[K^{(m)}\lambda_0+(1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*)\sum_{i=2}^{m}(1/i)]$$

$$\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{M} P_{ij}^{(1-2)*}(\infty)=[\sum_{i=1}^{m}(1/i)\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*]/[K^{(m)}\lambda_0+(1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^*)\sum_{i=2}^{m}(1/i)]$$

このとき定理 10 より次の命題を得る。

$$5K^{(2)} \lesseqqgtr 3K^{(3(} \Rightarrow m=2 \text{ のときの } P_A^{(1-2)*}(\infty) \gtreqqless m=3 \text{ のときの } P_A^{(1-2)*}(\infty)$$

（モデル3）

$\hat{R}^3(s)$, MTSF^3, $R^3(t)$ はモデル1に同じ

$$P_A^3(\infty)=(5\lambda_0+\lambda)/[5\lambda_0+\lambda+(\lambda+2\lambda_0)\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_{0j}^*+3\lambda_0(\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_{1j}^*+2K^*\lambda_0)],$$

$$P^3(\infty)=(6K^*\lambda_0^2)/[5\lambda_0+\lambda+(\lambda+2\lambda_0)\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_{0j}^*+3\lambda_0(\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_{1j}^*+2K^*\lambda_0)],$$

$$\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{M}P_{3-i,j}^3(\infty)=[3\lambda_0\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_{1j}^*+(2\lambda_0+\lambda)\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_{0j}^*]/[5\lambda_0+\lambda+(\lambda+2\lambda_0)\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_{0j}^* +3\lambda_0(\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_{1j}^*+2K^*\lambda_0)]$$

モデル1とモデル3について次の命題が成い立つ

$$(\lambda+2\lambda_0)\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_{0j}^*+3\lambda_0\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_{1j}^*<(5\lambda_0+\lambda)\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j^* \Rightarrow P_A^{(3)}(\infty)>P_A^1(\infty)$$

文　　献

〔1〕 Kulshrestha, D. K.: "Reliability of a Parallel Redundant Complex system, "Opns Res. 16. No. 1, 1968.

〔2〕 Kulshrestha, D. K.: "Reliability of a Repairable Multicomponent System with Redundancy in Parallel." IEEE. Trans. on Reliability. 19, No. 2, 1970.

〔3〕 H. Nakamichi, J. Fukuta, S. Takamatsu, and M. Kodama, "Reliability Consideration on a Repairable Multicomponent System with Redundancy in Parallel," J. Opns. Res. Soc. of Japan. 17, No. 1, 1974.

〔4〕 M. Kodama: "Probabilistic Analysis of a Multicomponent Series-Parallel System under Preemptive Repeat R pair Disciplin ." Opns. Res. 24, No. 3, 1976.