XXXV.

ÜBER FUNCTIONEN ZWEIER VARIABELN, WELCHE DURCH UMKEHRUNG DER INTEGRALE ZWEIER GEGEBENER FUNCTIONEN ENTSTEHN.

(Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 27, Mathematische Klasse, 2, S. 1—39.)

In der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt am 8. Januar 1881.

In einer Mittheilung, enthalten in den Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Februar 1880, p. 170 sqq.[1])), habe ich Functionen mehrerer Variabeln definirt, welche der Umkehrung von Integralen der Lösungen linearer homogener Differentialgleichungen ihre Entstehung verdanken. Ich habe daselbst und ausführlicher in BORCHARDTS Journal Bd. 89, p. 151 sqq.[2]) ein Beispiel derartiger Functionen geliefert, indem ich für den Fall der Differentialgleichungen zweiter Ordnung gewisse Einschränkungen machte. Später habe ich in den Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften (Juni 1880, p. 445 sqq.[3]) die Tabelle derjenigen Differentialgleichungen aufgestellt, welche diesen Einschränkungen entsprechen, und in dieser Tabelle zugleich die Integrale dieser Differentialgleichungen angegeben. [1

Indem ich nun bemüht war, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen aufzufinden, welchen die linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu genügen haben, um durch die erwähnte Umkehrung zwei Functionen zweier unabhängiger Variabeln zu ergeben, von der Beschaffenheit

---

1) Abh. XXX, S. 185 ff. dieses Bandes. Sch.

2) Abh. XXXI, S. 191 ff. dieses Bandes. Sch.

3) Abh. XXXII, S. 219 ff. dieses Bandes. Sch.

dass jede symmetrische Function jener Functionen eine eindeutige Function dieser Variabeln werde, gelangte ich zu einer Verallgemeinerung des Problems, indem ich an die Stelle der Lösungen linearer Differentialgleichungen zweiter
2] Ordnung gewisse näher charakterisirte Functionen setzte. Im Folgenden erlaube ich mir die Lösung dieses Problems für die so charakterisirten Functionen zu geben. — Zu diesen Functionen gehören beispielsweise die Lösungen linearer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung (also auch die algebraischen Functionen, welche immer solchen Differentialgleichungen genügen), so dass in dem Folgenden auch die Beantwortung des speciellen Problems enthalten ist, die Beschaffenheit dieser Lösungen anzugeben, damit durch die Umkehrung ihrer Integrale zwei Functionen zweier Variabeln entstehen, deren symmetrische Functionen sich eindeutig verhalten.

1.

Es seien $f(z)$, $\varphi(z)$ zwei Functionen von z, deren Quotient nicht einen constanten Werth habe, und welche für jeden Werth der unabhängigen Variabeln eine endliche oder eine unendliche Anzahl bestimmter Werthe annehmen und für jeden Werth $z = a$ dieser Veränderlichen, für den sie unendlich werden oder sich verzweigen, und ebenso für $z = \infty$ Entwickelungen zulassen nach ganzen Potenzen resp. von

$$(z-a)^{\frac{1}{n}}, \quad \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad (n \text{ eine positive ganze Zahl})$$

mit nur einer endlichen Anzahl negativer Exponenten und Producten solcher Potenzen mit ganzen positiven Potenzen resp. von $\log(z-a)$ und $\log\frac{1}{z}$, deren Exponenten eine endliche Zahl nicht übersteigen. Hierbei machen wir jedoch die Einschränkung, dass die kleinsten Exponenten der mit logarithmischen Factoren behafteten Potenzen von $z-a$ und $\frac{1}{z}$ die negative, resp. die positive Einheit nicht überschreiten. Wir wollen die Werthe a im Folgenden als singuläre Punkte der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$ bezeichnen.

Wenn z unzählig viele Umläufe vollzieht, so kann der Quotient

$$\zeta = \frac{\varphi(z)}{f(z)}$$

einen von z unabhängigen Werth annehmen. Wir wollen im Folgenden solche

Werthe von ζ kurz mit γ bezeichnen. Wir setzen voraus, dass alsdann wenigstens eine der Functionen $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ nach Vollziehung dieser [3
Umläufe für jeden Werth von z unendlich gross wird. Wenn ausserdem nach Vollziehung einer endlichen Anzahl von Umläufen für einen Werth $z = b$, ζ einen der Werthe γ erhält, so soll ebenfalls wenigstens eine der Functionen $\int f(z)\,dz$, $\int\varphi(z)\,dz$ für $z = b$ unendlich gross sein.

Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen können wir annehmen, dass für jeden singulären Punkt a und für $z = \infty$ die in den Exponenten der verschiedenen Potenzen von $z-a$, resp. $\frac{1}{z}$ auftretenden Brüche gleichen Nenner haben, und zwar für beide Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$, denselben, da wenn dieses nicht der Fall ist, man als Nenner n das kleinste Vielfache der verschiedenen Nenner einführen kann.

Ein Beispiel derartiger Functionen liefern die Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichungen von der in meiner Abhandlung Bd. 66 des Borchardtschen Journals p. 146[1]) Gl. (12.) characterisirten Gattung.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen anzugeben, damit die durch die Gleichungen

$$\text{(A.)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\delta_1}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{\delta_2}^{z_2} f(z)\,dz = u_1, \\ \displaystyle\int_{\delta_1}^{z_1} \varphi(z)\,dz + \int_{\delta_2}^{z_2} \varphi(z)\,dz = u_2 \end{cases}$$

— worin δ_1, δ_2 willkürliche Constanten, für welche den Grössen

$$f(\delta_1),\ f(\delta_2),\ \varphi(\delta_1),\ \varphi(\delta_2)$$

bestimmte Werthe zugeschrieben werden, und die zwischen denselben Grenzen in beiden Gleichungen sich erstreckenden Integrationen längs desselben Weges auszuführen sind — definirten Functionen z_1, z_2 der willkürlichen Veränderlichen u_1, u_2 die Wurzeln einer quadratischen Gleichung werden, deren Coefficienten in der Umgebung aller endlichen Werthenpaare dieser Veränderlichen sich eindeutig verhalten.

---

1) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 186. Sch.

4]

2.

Es sei in der Umgebung von $z_1 = \delta_1$, $z_2 = \delta_2$

$$(1.)\quad \begin{cases} f(z_1) = \alpha_0 + \alpha_1(z_1-\delta_1) + \cdots, \\ \varphi(z_1) = \alpha'_0 + \alpha'_1(z_1-\delta_1) + \cdots, \\ f(z_2) = \beta_0 + \beta_1(z_2-\delta_2) + \cdots, \\ \varphi(z_2) = \beta'_0 + \beta'_1(z_2-\delta_2) + \cdots, \end{cases}$$

so ergeben die Gleichungen (A.)

$$(2.)\quad \begin{cases} \alpha_0(z_1-\delta_1) + \beta_0(z_2-\delta_2) + \cdots = u_1, \\ \alpha'_0(z_1-\delta_1) + \beta'_0(z_2-\delta_2) + \cdots = u_2. \end{cases}$$

Da δ_1, δ_2 willkürliche Grössen bedeuten, und da $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ der Voraussetzung gemäss nicht einen constanten Werth hat, so kann man voraussetzen, dass die Grösse $\alpha_0\beta'_0 - \alpha'_0\beta_0$ von Null verschieden sei. Alsdann ergeben sich (cf. Jacobi in Crelles Journal Bd. 6, p. 274[1]) für $z_1-\delta_1$, $z_2-\delta_2$ Entwickelungen nach positiven ganzen Potenzen von u_1, u_2, welche in der Umgebung von $u_1 = 0, u_2 = 0$ gültig sind. Diese Entwickelungen definiren zunächst die Functionen z_1, z_2 in dieser Umgebung. Indem wir nun u_1, u_2 auf willkürlichen von einander unabhängigen Wegen von $0, 0$ ausgehend fortsetzen, werden z_1, z_2 sich auf entsprechenden Wegen fortsetzen und in den Umgebungen der durchlaufenen Werthe von u_1, u_2 holomorph sein, so lange keine der Grössen z_1, z_2 unendlich geworden, oder mit einem der singulären Punkte der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$ coincidirt, so lange ferner nicht einer der Quotienten

$$\zeta_1 = \frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}, \qquad \zeta_2 = \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$$

einen der Werthe γ erreicht, endlich so lange z_1, z_2 nicht solche Werthe erhalten haben, für welche die Gleichung

$$(B.)\quad \Delta = \begin{vmatrix} f(z_1) & f(z_2) \\ \varphi(z_1) & \varphi(z_2) \end{vmatrix} = 0$$

erfüllt ist. Denn sind $z_1 = b_1$, $z_2 = b_2$ Werthe, welche diesen Einschränkungen unterliegen, und welche den Werthen $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ entsprechen, so folgt

[1]) Jacobis Werke, Bd. 6 (1891), S. 47. Sch.

auf dieselbe Weise, wie wir es für die Umgebung von $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ nach- [5
gewiesen, dass z_1-b_1, z_2-b_2 in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ sich nach ganzen positiven Potenzen von u_1-v_1, u_2-v_2 entwickeln lassen.

Da u_1, u_2 von einander unabhängige Veränderliche sind, so hat man die Stellen $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, für welche eine der Grössen z_1, z_2 mit gewissen singulären Punkten der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$, wozu unter Umständen der unendlich ferne Punkt gehört, coincidirt, oder eine der Grössen ζ_1, ζ_2 gleich einem Werthe γ wird, oder endlich z_1, z_2 der Gleichung (B.) genügen, nur dann einer besonderen Untersuchung zu unterwerfen, wenn z_1, z_2 in die angegebenen Werthe einrücken, ohne dass zwischen den letzten Wegelementen, mit welchen u_1, u_2 resp. in v_1, v_2 eintreffen, eine bestimmte Beziehung vorausgesetzt werden muss.

Wenn dagegen keiner der angegebenen Werthe von z_1, z_2 für

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2$$

erreicht werden kann, ohne dass zwischen den letzten Wegelementen der Veränderlichen u_1, u_2 eine Beziehung vorausgesetzt wird, so müssen die Functionen z_1, z_2 der unabhängigen Veränderlichen u_1, u_2 in diesen Stellen auch andere als die genannten Ausnahmswerthe annehmen, also bei Umkreisung dieser Stellen, so lange u_1, u_2 von einander unabhängig bleiben, sich eindeutig verhalten, in diesen Stellen jedoch unbestimmt werden.

Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, bemerken wir, dass wir im Folgenden voraussetzen können, dass für $f(z)$, $\varphi(z)$ in den zur Umgebung eines singulären Punktes dieser Functionen oder eines nicht singulären Punktes derselben oder endlich des unendlich fernen Punktes gehörigen Entwickelungen die niedrigsten Dimensionen der Glieder übereinstimmen, und dass wenn ζ mit einem der Werthe γ coincidirt, $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ gleichzeitig unendlich werden. Denn wenn dieses nicht stattfindet, so seien

$$f_1(z) = \gamma_{11} f(z) + \gamma_{12}\varphi(z),$$
$$\varphi_1(z) = \gamma_{21} f(z) + \gamma_{22}\varphi(z),$$

wo $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ willkürliche Grössen bedeuten. Setzt man alsdann

$$(\alpha.)\quad \begin{cases} w_1 = \gamma_{11}u_1 + \gamma_{12}u_2, \\ w_2 = \gamma_{21}u_1 + \gamma_{22}u_2 \end{cases}$$

6] so gehen die Gleichungen (A.) über in

$$(\mathrm{A}'.)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\delta_1}^{z_1} f_1(z)\,dz + \int_{\delta_2}^{z_2} f_1(z)\,dz = w_1, \\ \displaystyle\int_{\delta_1}^{z_1} \varphi_1(z)\,dz + \int_{\delta_2}^{z_2} \varphi_1(z)\,dz = w_2. \end{cases}$$

Es haben nunmehr $f_1(z)$ und $\varphi_1(z)$ wegen der Willkürlichkeit von $\gamma_{11} \dots \gamma_{22}$ die verlangte Eigenschaft, und es sind die symmetrischen Functionen von z_1, z_2 alsdann in der Umgebung bestimmter Werthe von u_1, u_2 eindeutig, wenn dieselben Functionen in der Umgebung der entsprechenden Werthe von w_1, w_2 eindeutig sind, und wenn andererseits die letzten Wegelemente, mit welchen w_1, w_2 in gewisse Werthe w_1', w_2' einrücken, von einander abhängig werden, so werden dadurch auch bestimmte Beziehungen zwischen den letzten Wegelementen, mit welchen u_1, u_2 in die w_1', w_2' entsprechenden Werthe von u_1, u_2 eintreffen, festgestellt.

3.

Zunächst ergiebt sich der Satz:

I. *Die Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ dürfen nicht für ein und denselben endlichen Werth von z verschwinden.*

Es sei in der That $z = b$ zunächst ein nicht singulärer Werth der Functionen $f(z), \varphi(z)$, für welchen beide gleichzeitig verschwinden, und man habe in der Umgebung von $z = b$

$$(1.)\qquad \begin{cases} f(z) = \alpha_k(z-b)^k + \alpha_{k+1}(z-b)^{k+1} + \cdots, \\ \varphi(z) = \alpha_k'(z-b)^k + \alpha_{k+1}'(z-b)^{k+1} + \cdots, \end{cases}$$

wo k eine positive ganze Zahl.

Es bezeichne $z = c$ einen willkürlichen ebenfalls nicht singulären Werth von z, in dessen Umgebung

$$(1\mathrm{a}.)\qquad \begin{cases} f(z) = \beta_0 + \beta_1(z-c) + \cdots, \\ \varphi(z) = \beta_0' + \beta_1'(z-c) + \cdots, \end{cases}$$

7] und es mögen den Werthen $z_1 = b$, $z_2 = c$ die Stellen $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ entsprechen, alsdann folgt aus den Gleichungen (A.)

$$(2.)\qquad \begin{cases} u_1 - v_1 = \dfrac{\alpha_k}{k+1}(z_1-b)^{k+1} + \beta_0(z_2-c) + \dfrac{\alpha_{k+1}}{k+2}(z_1-b)^{k+2} + \dfrac{\beta_1}{2}(z_2-c)^2 + \cdots, \\ u_2 - v_2 = \dfrac{\alpha_k'}{k+1}(z_1-b)^{k+1} + \beta_0'(z_2-c) + \dfrac{\alpha_{k+1}'}{k+2}(z_1-b)^{k+2} + \dfrac{\beta_1'}{2}(z_2-c)^2 + \cdots. \end{cases}$$

Lassen wir nunmehr $z_1 - b$ und $z_2 - c$ derartig unendlich klein werden, dass

$$(3.)\qquad z_2 - c = \xi(z_1-b)^{k+1} + \eta,$$

wo ξ eine beliebige Grösse, η eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung als $(z_1-b)^{k+1}$ werde, so wird ξ derart bestimmt werden können, dass

$$u_2 - v_2 - \lambda(u_1 - v_1)$$

unendlich klein höherer Ordnung als $(z_1-b)^{k+1}$ wird, wenn man mit λ einen beliebig gegebenen Werth bezeichnet. In der That ergiebt sich ξ aus der Gleichung

$$(4.)\qquad \xi(\beta_0' - \lambda\beta_0) + \frac{\alpha_k' - \lambda\alpha_k}{k+1} = 0.$$

Da $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ nicht constant ist, so kann man $z_2 = c$ so wählen, dass keine der Gleichungen

$$\beta_0' - \lambda\beta_0 = 0, \quad \alpha_k'\beta_0 - \alpha_k\beta_0' = 0$$

erfüllt werde. Alsdann ist ξ eine endliche bestimmte Grösse, wenn λ einen endlichen Werth hat, und es sind die Grössen

$$\beta_0\xi + \frac{\alpha_k}{k+1}, \quad \beta_0'\xi + \frac{\alpha_k'}{k+1}$$

von Null verschieden. Demnach stellen $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$ unendlich kleine Grössen gleicher Ordnung mit $(z_1-b)^{k+1}$ vor, während $\frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}$ den willkürlich gegebenen [8
Werth λ erhält. Hieraus folgt zunächst, dass z_1, z_2 resp. die Werthe b, c annehmen, wenn die letzten Wegelemente, mit welchen u_1, u_2 resp. in v_1, v_2 einrücken, von einander unabhängig sind.

Andererseits folgt aus den Gleichungen (2.)

$$(u_2 - v_2)\beta_0 - (u_1 - v_1)\beta_0' = \frac{1}{k+1}(\alpha_k'\beta_0 - \alpha_k\beta_0')(z_1-b)^{k+1}$$

bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung. Da der Coefficient von

$(z_1-b)^{k+1}$ in dieser Gleichung nicht verschwindet, so folgt

$$z_1-b = \sqrt[k+1]{\frac{(u_2-v_2)\beta_0-(u_1-v_1)\beta'_0}{\alpha'_k\beta_0-\alpha_k\beta'_0}(k+1)}, \tag{5.}$$

d. h. z_1 erhält $k+1$ von c verschiedene Werthe, wenn u_1, u_2 resp. um v_1, v_2 Umläufe vollziehen. Es sind deshalb z_1+z_2, $z_1 z_2$ in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ nicht eindeutig, wenn $k \geqq 1$. Hieraus folgt, dass $f(z)$ und $\varphi(z)$ nicht für einen nicht singulären Werth b gleichzeitig verschwinden dürfen.

Es sei nunmehr a ein singulärer Punkt von der Beschaffenheit, dass $f(a) = 0$, $\varphi(a) = 0$.

In diesem Falle enthalten nach den Voraussetzungen der No. 1 die Entwickelungen von $f(z)$, $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z = a$ keine Logarithmen. Enthalten diese Entwickelungen die ganzen Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{n}}$, so setzen wir

$$(z-a)^{\frac{1}{n}} = t.$$

Es sei in der Umgebung von $z = a$

$$\begin{cases} f(z) = \alpha_k t^k + \alpha_{k+1} t^{k+1} + \cdots, \\ \varphi(z) = \alpha'_k t^k + \alpha'_{k+1} t^{k+1} + \cdots. \end{cases} \tag{6.}$$

9] Lässt man z_1 in a einrücken und gleichzeitig z_2 in einen beliebigen nicht singulären Punkt c, und bezeichnet wieder die zugehörigen Werthe von u_1, u_2 mit v_1, v_2, so ergiebt sich auf dieselbe Weise wie in dem eben behandelten Falle, wo z_1 in den nicht singulären Punkt b einrückte, dass $t_1 = (z_1-a)^{\frac{1}{n}}$ in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $k+n$ von c verschiedene Werthe annimmt. Demnach sind z_1+z_2, $z_1 z_2$ in der Umgebung dieser Werthe nicht eindeutig, wenn $f(z)$ und $\varphi(z)$ für $z = a$ gleichzeitig verschwinden.

Der am Anfang dieser No. ausgesprochene Satz ist hierdurch bewiesen.

Ist in Gl. (6.)

$$k+n > 0,$$

so können demnach z_1+z_2, $z_1 z_2$ nur dann in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ eindeutig sein, wenn $k+n = 1$, also

$$k = -(n-1).$$

Es ergiebt sich demnach der Satz:

II. Der Exponent der niedrigsten Potenz von $z-a$ in den Entwickelungen von $f(z)$, $\varphi(z)$ in der Umgebung eines singulären Punktes a ist eine negative Zahl, welche entweder die negative Einheit nicht überschreitet oder den Werth $-\frac{n-1}{n}$ hat (n pos. ganze Zahl).

Es sei in der Umgebung von $z = \infty$ der Exponent der niedrigsten Potenz in den Entwickelungen von $f(z)$ und $\varphi(z)$ grösser als die positive Einheit. Alsdann enthalten nach No. 1 diese Entwickelungen keine Logarithmen. Treten in denselben die ganzen Potenzen von $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$ auf, so setzen wir

$$\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}} = t.$$

Es sei

$$\begin{cases} f(z) = \alpha_k t^k + \alpha_{k+1} t^{k+1} + \cdots, \\ \varphi(z) = \alpha'_k t^k + \alpha'_{k+1} t^{k+1} + \cdots. \end{cases} \tag{7.}$$ [10

Lässt man z_1 unendlich werden, während z_2 mit einem willkürlichen nicht singulären Punkte c zusammenfällt, und bezeichnet wieder die zugehörigen Werthe von u_1, u_2 mit v_1, v_2, so folgert man wie in dem Falle eines endlichen singulären Werthes, dass $t_1 = \left(\frac{1}{z_1}\right)^{\frac{1}{n}}$ in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $k-n$ von c verschiedene Werthe annimmt, dass also z_1+z_2, $z_1 z_2$ in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ nicht eindeutig sind, wenn $k-n > 1$. Hieraus folgt:

III. Der Exponent der niedrigsten Potenz von $\frac{1}{z}$ in den Entwickelungen von $f(z)$ und $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z = \infty$ ist entweder eine Zahl, welche die positive Einheit nicht überschreitet, oder derselbe hat den Werth $1+\frac{1}{n}$ (n pos. ganze Zahl).

4.

Es mögen sich nunmehr z_1, z_2 den von einander verschiedenen Werthen b_1, b_2 annähern, welche nicht zu den singulären Punkten gehören, aber der Gleichung (B.) genügen.

Es sei in der Umgebung von $z_1 = b_1$, $z_2 = b_2$ resp.

$$(1.)\quad \begin{cases} f(z_1) = \alpha_0 + \alpha_1(z_1-b_1) + \alpha_2(z_1-b_1)^2 + \cdots, \\ \varphi(z_1) = \alpha'_0 + \alpha'_1(z_1-b_1) + \alpha'_2(z_1-b_1)^2 + \cdots, \\ f(z_2) = \beta_0 + \beta_1(z_2-b_2) + \beta_2(z_2-b_2)^2 + \cdots, \\ \varphi(z_2) = \beta'_0 + \beta'_1(z_2-b_2) + \beta'_2(z_2-b_2)^2 + \cdots, \end{cases}$$

so sind nach dem Satze I. voriger No. nicht gleichzeitig α_0 und α'_0 oder β_0 [11] und β'_0 Null. Wir können daher nach der Bemerkung am Schlusse der No. 2 voraussetzen, dass α_0, α'_0, β_0, β'_0 sämmtlich von Null verschieden sind. Aus den Gleichungen (A.) folgt, wenn $z_1 = b_1$, $z_2 = b_2$ die Werthe $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ entsprechen,

$$(2.)\quad \begin{cases} u_1 - v_1 = \alpha_0(z_1-b_1) + \beta_0(z_2-b_2) + \dfrac{\alpha_1}{2}(z_1-b_1)^2 + \dfrac{\beta_1}{2}(z_2-b_2)^2 \\ \qquad\qquad + \dfrac{\alpha_2}{3}(z_1-b_1)^3 + \dfrac{\beta_2}{3}(z_2-b_2)^3 + \cdots, \\ u_2 - v_2 = \alpha'_0(z_1-b_1) + \beta'_0(z_2-b_2) + \dfrac{\alpha'_1}{2}(z_1-b_1)^2 + \dfrac{\beta'_1}{2}(z_2-b_2)^2 \\ \qquad\qquad + \dfrac{\alpha'_2}{3}(z_1-b_1)^3 + \dfrac{\beta'_2}{3}(z_2-b_2)^3 + \cdots. \end{cases}$$

Der Voraussetzung gemäss findet die Gleichung:

$$(3.)\quad \alpha_0\beta'_0 - \alpha'_0\beta_0 = 0$$

statt.

Wenn z_1, z_2 sich resp. den Werthen b_1, b_2 annähern, *ohne* dass die Gleichung

$$(4.)\quad \alpha_0(z_1-b_1) + \beta_0(z_2-b_2) = 0$$

erfüllt wird, so werden $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$ unendlich kleine Grössen gleicher Ordnung mit derjenigen der beiden unendlich kleinen Grössen $z_1 - b_1$, $z_2 - b_2$, welche von der niedrigeren Ordnung ist. Es sei $z_2 - b_2$ von gleicher oder höherer Ordnung als $z_1 - b_1$. Multiplicirt man die erste der Gleichungen (2.) mit β'_0, die zweite mit β_0 und subtrahirt, so folgt nach Gleichung (3.)

$$(5.)\quad \beta'_0(u_1-v_1) - \beta_0(u_2-v_2) = \tfrac{1}{2}(\alpha_1\beta'_0 - \alpha'_1\beta_0)(z_1-b_1)^2 + \tfrac{1}{2}(\beta_1\beta'_0 - \beta'_1\beta_0)(z_2-b_2)^2 + \cdots$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist demnach von höherer Ordnung als $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$, d. h. man muss

$$(6.)\quad \beta'_0(u_1-v_1) - \beta_0(u_2-v_2) = 0$$

setzen. Welches daher auch die letzten Elemente der Wege sind, auf [12 welchen z_1, z_2 in b_1, b_2 eintreten — wenn sie nicht in der durch die Gleichung (4.) angegebenen Beziehung stehen —, so findet zwischen den zugehörigen letzten Wegelementen von u_1, u_2 die bleibende Relation (6.) statt.

Von einander unabhängig können die ebengenannten Wegelemente von u_1, u_2 nur werden, wenn zwischen den unendlich kleinen Grössen $z_1 - b_1$, $z_2 - b_2$ die Relation (4.) besteht, oder was auf dasselbe hinauskommt, wenn

$$(7.)\quad t = \alpha_0(z_1-b_1) + \beta_0(z_2-b_2)$$

eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung als jede der Grössen $z_1 - b_1$, $z_2 - b_2$ ist, welche gleich hohe Ordnung besitzen.

Führen wir die Bezeichnung aus Gl. (7.) in (2.) ein und setzen

$$(8.)\quad -\frac{\alpha_0}{\beta_0} = \varepsilon, \qquad \frac{\beta'_0}{\beta_0} = \frac{\alpha'_0}{\alpha_0} = \lambda,$$

so erhält man

$$(9.)\quad \begin{cases} u_1 - v_1 = t + \dfrac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1\varepsilon^2)(z_1-b_1)^2 + \varepsilon\dfrac{\beta_1}{\beta_0}(z_1-b_1)t + \dfrac{1}{2}\dfrac{\beta_1}{\beta_0^2}t^2 + \cdots, \\ u_2 - v_2 = \lambda t + \dfrac{1}{2}(\alpha'_1 + \beta'_1\varepsilon^2)(z_1-b_1)^2 + \varepsilon\dfrac{\beta'_1}{\beta_0}(z_1-b_1)t + \dfrac{1}{2}\dfrac{\beta'_1}{\beta_0^2}t^2 + \cdots. \end{cases}$$

Man kann t so unendlich klein werden lassen, dass

$$(10.)\quad t = \xi(z_1-b_1)^2,$$

wo ξ eine willkürlich bestimmte Grösse bedeutet. Aus den Gleichungen (9.) ergiebt sich dann bis auf unendlich kleine Grössen:

$$(11.)\quad \frac{u_2-v_2}{u_1-v_1} = \frac{\lambda\xi + \frac{1}{2}(\alpha'_1 + \beta'_1\varepsilon^2)}{\xi + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1\varepsilon^2)}.$$

Indem man ξ stetig ändernd dasselbe alle möglichen Werthe durch- [13 laufen lässt, nimmt $\frac{u_2-v_2}{u_1-v_1}$ jeden beliebigen Werth an, also treffen z_1, z_2 resp. in b_1, b_2 ein, welches auch die letzten Wegelemente sind, mit denen u_1, u_2 resp. in v_1, v_2 einrücken, wenn nicht die Gleichung

$$(12.)\quad \alpha'_1 + \beta'\varepsilon^2 - \lambda(\alpha_1 + \beta_1\varepsilon^2) = 0$$

stattfindet, in welchem Falle das Verhältniss $\frac{u_2-v_2}{u_1-v_1}$ in Gleichung (11.) einen von ξ unabhängigen Werth erhält.

Andererseits folgt, wenn man das Verhältniss $\frac{u_2-v_2}{u_1-v_1}$ willkürlich annimmt, aus Gleichung (9.) bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung

$$(13.)\qquad u_2-v_2-\lambda(u_1-v_1) = \tfrac{1}{2}[\alpha_1'+\beta_1'\varepsilon^2-\lambda(\alpha_1+\beta_1\varepsilon^2)](z_1-b_1)^2.$$

Diese Gleichung lieferte demnach in der Umgebung von $u_1=v_1$, $u_2=v_2$ zwei von b_2 verschiedene Werthe von z_1, und es könnten deshalb z_1+z_2 und z_1z_2 in dieser Umgebung nicht eindeutig sein, wenn nicht die Gleichung (12.) erfüllt wäre.

Findet demnach die Relation (4.) statt, so erfordert die Eindeutigkeit von z_1+z_2, z_1z_2 auch das Bestehen der Relation (12.).

Setzt man

$$\frac{df(z)}{dz} = f'(z),\qquad \frac{d\varphi(z)}{dz} = \varphi'(z)$$

und

$$(14.)\qquad \varphi'(z)f(z)-\varphi(z)f'(z) = F(z),$$

so geht die Gleichung (12.) über in

$$(15.)\qquad F(b_1)f(b_2)^2+F(b_2)f(b_1)^2 = 0.$$

Da b_1, b_2 ein willkürliches Werthenpaar bedeutete, welches der Gleichung (B.) genügt, so folgt:

14] I. Die Eindeutigkeit von z_1+z_2, z_1z_2 als Functionen von u_1, u_2 erfordert, dass für alle Werthenpaare z_1, z_2, welche der Gleichung (B.) genügen, die Gleichung

$$(\mathrm{C.})\qquad F(z_1)f(z_2)^2+F(z_2)f(z_1)^2 = 0$$

erfüllt werde.

Es sei durch die Gleichung

$$(\mathrm{D.})\qquad \frac{\varphi(z)}{f(z)} = \zeta$$

z als Function von ζ definirt. Aus dieser ergiebt sich

$$(\mathrm{E.})\qquad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{f(z)^2}{F(z)}.$$

Sind z_1, z_2 zwei Zweige der Function z von ζ, so hat man

$$(16.)\qquad \frac{dz_1}{d\zeta} = \frac{f(z_1)^2}{F(z_1)},\qquad \frac{dz_2}{d\zeta} = \frac{f(z_2)^2}{F(z_2)}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt mit Hülfe von Gleichung (C.)

$$(\mathrm{F.})\qquad \frac{dz_1}{d\zeta}f(z_1)+\frac{dz_2}{d\zeta}f(z_2) = 0.$$

Da andererseits die Gleichung

$$(\mathrm{G.})\qquad \frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)} = \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$$

stattfindet, so ergiebt sich aus Gleichung (F.) auch

$$(\mathrm{F'.})\qquad \frac{dz_1}{d\zeta}\varphi(z_1)+\frac{dz_2}{d\zeta}\varphi(z_2) = 0.$$

Es sei

$$z_1 = g_1(\zeta),\quad b_1 = g_1(\alpha),$$
$$z_2 = g_2(\zeta),\quad b_2 = g_2(\alpha).$$

Setzt man in die Gleichungen (2.)

$$z_1-b_1 = g_1(\zeta)-g_1(\alpha),$$ [15
$$z_2-b_2 = g_2(\zeta)-g_2(\alpha),$$

so wird den Gleichungen (F.), (F'.) entsprechend die rechte Seite identisch Null, d. h. für jeden Werth von ζ.

Demnach wird auch, wenn man mit Rücksicht darauf, dass t (Gleichung (7.)) unendlich klein höherer Ordnung werden muss, in Gleichung (2.)

$$(17.)\qquad \begin{cases} z_1-b_1 = dz_1 = g_1'(\alpha)\,d\zeta, \\ z_2-b_2 = \delta z_2 = dz_2+\nu\, dz_2, \end{cases}$$
$$dz_2 = g_2'(\alpha)\,d\zeta$$

substituirt, wo ν eine unendlich kleine Grösse und wo $g_i'(\zeta) = \frac{dg_i(\zeta)}{d\zeta}$,

$$(18.)\qquad \begin{cases} u_1-v_1 = du_1 = \nu\, dz_2\, f(b_2)+dz_2^2(2\nu+\nu^2)\dfrac{f'(b_2)}{2}+\cdots, \\ u_2-v_2 = du_2 = \nu\, dz_2\,\varphi(b_2)+dz_2^2(2\nu+\nu^2)\dfrac{\varphi'(b_2)}{2}+\cdots. \end{cases}$$

Es sind also du_1, du_2 von gleicher Ordnung mit $\nu\, dz_2$. Multiplicirt man die erste Gleichung (18.) mit $\varphi(b_2)$, die zweite mit $f(b_2)$ und subtrahirt, so ist

$$(19.)\qquad \varphi(b_2)\,du_1-f(b_2)\,du_2 = -\nu\, dz_2^2\, F(b_2)+\cdots.$$

Demnach ist die linke Seite von der Ordnung von νdz_2^2, oder es ist

$$\varphi(b_2)\,du_1 - f(b_2)\,du_2 = 0. \tag{20.}$$

Hieraus ergiebt sich:

II. Ist für jedes System von Lösungen $z_1 = b_1$, $z_2 = b_2$ der Gleichung (B.) die Gleichung (C.) erfüllt, so können z_1, z_2 nicht in b_1, b_2 einrücken, wenn die letzten Wegelemente auf welchen u_1, u_2 in v_1, v_2 anlangen, von einander unabhängig sind.

16] 5.

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, dass für $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $z_1 = a$, $z_2 = b$ werde, wo b einen nicht singulären Punkt, a einen solchen singulären Punkt bezeichnet, für welchen $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ endliche Werthe erhalten, und gleichzeitig die Gleichung (B.) durch $z_1 = a$, $z_2 = b$ erfüllt werde.

Nach Satz II. in No. 3 ist alsdann der Exponent der niedrigsten Potenz von $z-a$ in den Entwickelungen von $f(z)$ und $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z = a$, welche nach No. 1 keine Logarithmen enthalten, von der Form $-\frac{n-1}{n}$ (n pos. ganze Zahl).

Setzt man daher

$$\begin{cases} (z-a)^{\frac{1}{n}} = t, \\ nf(z)t^{n-1} = f_1(t), \quad n\varphi(z)t^{n-1} = \varphi_1(t) \end{cases} \tag{1.}$$

und substituirt in den Gleichungen (A.)

$$\begin{cases} z_1 = a + t_1^n, \quad z_2 = a + t_2^n, \\ \delta_1 = a + \eta_{11}^n, \quad \delta_2 = a + \eta_{12}^n, \end{cases} \tag{2.}$$

so verwandeln sich dieselben in

$$\begin{cases} \int_{\eta_{11}}^{t_1} f_1(t)\,dt + \int_{\eta_{12}}^{t_2} f_1(t)\,dt = u_1, \\ \int_{\eta_{11}}^{t_1} \varphi_1(t)\,dt + \int_{\eta_{12}}^{t_2} \varphi_1(t)\,dt = u_2. \end{cases} \tag{A''.}$$

Wenn $z_1 = a$, $z_2 = b$ wird, so wird

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \beta = \sqrt[n]{b-a},$$

und es sind nunmehr $t = 0$, $t = \beta$ keine singulären Punkte der Functionen $f_1(t)$, $\varphi_1(t)$. Damit t_1 in 0, t_2 in β nur unter Voraussetzung einer gewissen Beziehung zwischen den letzten Wegelementen, auf welchen u_1, u_2 in v_1, v_2 einrücken, anlangen können, ist vermöge derselben Discussion wie in der [17 vorigen No. erforderlich, dass gleichzeitig mit der Gleichung

$$\frac{\varphi_1(0)}{f_1(0)} = \frac{\varphi_1(\beta)}{f_1(\beta)} \tag{3.}$$

die Gleichung

$$F_1(0)f_1(\beta)^3 + F_1(\beta)f_1(0)^3 = 0 \tag{4.}$$

erfüllt werde, wo

$$F_1(t) = \varphi_1'(t)f_1(t) - \varphi_1(t)f_1'(t). \tag{5.}$$

Da aber

$$F_1(t) = n^3 t^{3(n-1)} F(z), \tag{6.}$$

so besagt die Gleichung (4.), dass die Gleichung (C.) auch für $z_1 = a$, $z_2 = b$ bestehen müsse.

Umgekehrt folgt wie in voriger No., dass wenn diese Bedingung erfüllt ist, z_1 in a, z_2 in b nur anlangen, wenn zwischen den letzten Wegelementen, auf denen u_1, u_2 in v_1, v_2 eintreffen, eine Beziehung besteht.

Ganz auf dieselbe Weise ergiebt sich: Wenn für

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2, \quad z_1 = a_1, \quad z_2 = a_2,$$

wo a_1, a_2 zwei verschiedene singuläre Punkte bedeuten, wovon auch einer mit dem unendlich fernen Punkte coincidiren kann, und wenn vorausgesetzt wird, dass $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$ die Gleichung (B.) befriedigen, und dass $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ für $z = a_1$, $z = a_2$ endlich sind, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass z_1, z_2 die angegebenen Werthe nur unter der Voraussetzung gewisser Relationen zwischen den letzten Wegelementen, auf welchen u_1, u_2 in v_1, v_2 eintreffen, erreichen können, dass diese Werthenpaare $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$ gleichzeitig die Gleichung (C.) befriedigen.

6.

Wenn für

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2$$

z_1, z_2 einen gleichen Werth b annehmen, so können $f(z_1), f(z_2)$ resp. $\varphi(z_1), \varphi(z_1)$
18] verschiedene Werthe erreichen. Diese Werthe seien $f(b), \varphi(b)$ für $z_1 = b$ und $f_1(b), \varphi_1(b)$ für $z_2 = b$. Findet nun die Gleichung (B.) für $z_1 = z = b$ statt, d. h.

$$(1.) \qquad \begin{vmatrix} f(b) & f_1(b) \\ \varphi(b) & \varphi_1(b) \end{vmatrix} = 0,$$

so muss nach der Schlussweise von No. 4, wenn man

$$(2.) \qquad [F(z_1)]_{z_1=b} = F(b), \quad [F(z_2)]_{z_2=b} = F_1(b)$$

setzt, die Gleichung

$$(3.) \qquad F(b)f_1(b)^2 + F_1(b)f(b)^2 = 0$$

erfüllt sein.

Die Gleichung (1.) kann unter den angegebenen Umständen nur erfüllt werden, wenn z als Function von ζ betrachtet, für einen gewissen Umlauf der letzteren Veränderlichen zu seinem ursprünglichen Werthe zurückkehrt, ohne dass gleichzeitig $f(z)$ und $\varphi(z)$ zu ihren Werthen zurückkehren. Findet dieses statt, und sei z ein einem willkürlichen Werthe von ζ entsprechender Werth, $f(z), \varphi(z)$ die zugehörigen Werthe der beiden Functionen, $f_1(z), \varphi_1(z)$ die Werthe, in welche dieselben nach dem angegebenen Umlaufe von ζ übergehen, wenn z zu seinem ursprünglichen Werthe zurückkehrt, alsdann ergiebt sich nach Gleichung (3.), dass für einen willkürlichen Werth von z die Gleichung

$$(\mathrm{H.}) \qquad F(z)f_1(z)^2 + F_1(z)f(z)^2 = 0$$

bestehen muss.

Durch denen der No. 4 analoge Betrachtungen ergiebt sich alsdann, dass z_1, z_2 den gemeinschaftlichen Werth nicht erreichen können, wenn nicht zwischen den letzten Wegelementen von u_1, u_2 eine Relation besteht.

Aus Betrachtungen, welche denen der vorigen Nummer analog sind, ergiebt sich ebenfalls, dass die Gleichung (H.) für singuläre und unendlich

grosse Werthe von z in gleicher Weise wie für nicht singuläre besteht, und dass auch z_1, z_2 einen gemeinsamen so beschaffenen Werth nicht erreichen [19
können, ohne dass gleichzeitig $f(z_1) = f(z_2)$, $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ werde, wenn nicht zwischen den letzten Wegelementen von u_1, u_2 eine Relation besteht.

7.

Lässt man u_1, u_2 willkürliche Wege durchlaufen und setzt längs derselben die Functionen z_1, z_2 stetig fort, so möge für $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, wo v_1, v_2 endliche Werthe bedeuten, einer oder beide der Quotienten

$$\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}, \quad \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$$

einen der mit γ bezeichneten Werthe annehmen, oder eine oder beide der Functionen z_1, z_2 solche singuläre Werthe der Functionen $f(z), \varphi(z)$ erreichen, dass eines oder beide der Integralwerthenpaare

$$\int f(z_1)\,dz_1, \ \int \varphi(z_1)\,dz_1, \ \int f(z_2)\,dz_2, \ \int \varphi(z_2)\,dz_2$$

unendlich werde, ohne dass z_1, z_2 unendlich viele Umläufe vollzogen.

Es seien, wenn die Fortsetzungen z. B. mittelst Kreisen vollzogen werden, K_1, K_2 die ersten Kreise resp. für die Variabeln u_1, u_2, auf deren Peripherien $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ werden. Es haben alsdann innerhalb dieser Kreise K_1, K_2 und in beliebig kleiner, aber nicht unendlich kleiner Entfernung von v_1, v_2

$$\int f(z_1)\,dz_1; \ \int \varphi(z_1)\,dz_1, \ \int f(z_2)\,dz_2, \ \int \varphi(z_2)\,dz_2$$

endliche Werthe. — Seien demnach $v_1 - \varepsilon_1, v_2 - \varepsilon_2$ Werthe von u_1, u_2 resp. innerhalb K_1, K_2, beliebig nahe an v_1, v_2, und mögen diesem Werthenpaare u_1, u_2 die Werthe b_1, b_2 von z_1, z_2 entsprechen. Führen die beiden Wege Γ_1, Γ_2 für u_1, u_2 von $v_1 - \varepsilon_1$ in v_1, resp. $v_2 - \varepsilon_2$ in v_2, so mögen z_1, z_2 gleichzeitig resp. auf den Wegen W_1, W_2 in c_1, c_2 anlangen. Es ist zu bemerken, dass die Wegstrecken W_1, W_2 unendlich lang sein können, während die entsprechenden Strecken auf Γ_1, Γ_2 beliebig klein sind. Sind $v_1 - \varepsilon_1 + \lambda_1, v_2 - \varepsilon_2 + \lambda_2$ Werthe von u_1, u_2 zwischen $v_1 - \varepsilon_1$ und v_1, resp. $v_2 - \varepsilon_2$ und v_2 längs Γ_1, Γ_2, und c_1', c_2' die zugehörigen Werthe von z_1, z_2 längs W_1, W_2, so folgt, dass

20]
$$\sigma_1 = \int_{b_1}^{c_1'} f(z)\,dz + \int_{b_2}^{c_2'} f(z)\,dz,$$
$$\sigma_2 = \int_{b_1}^{c_1'} \varphi(z)\,dz + \int_{b_2}^{c_2'} \varphi(z)\,dz$$

beliebig kleine Werthe annehmen müssen.

Nach der Voraussetzung ist für $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ wenigstens einer der Quotienten

$$\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)},\quad \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$$

gleich einem der mit γ bezeichneten Werthe. Es wird also nach No. 2 wenigstens je einer der Summanden von σ_1, σ_2 unendlich werden, wenn b_1, c_1'; b_2, c_2' längs W_1, W_2 sich c_1, c_2 annähern, folglich wird auch jedesmal der andere Summand unendlich.

Oder es hat eine oder beide der Grössen z_1, z_2 einen solchen singulären Werth der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$ erreicht, dass eines oder beide der Integralwerthenpaare

$$\int f(z_1)\,dz_1,\quad \int \varphi(z_1)\,dz_1,\quad \int f(z_2)\,dz_2,\quad \int \varphi(z_2)\,dz_2$$

unendlich werden, ohne dass z_1, z_2 unendlich viele Umläufe vollzogen, dann gilt dasselbe.

Da aber σ_1, σ_2 beliebig klein werden, so folgt, dass die Werthenreihen c_1', c_2' längs W_1, W_2 beliebig wenig verschieden von Werthenpaaren z_1, z_2 sind, welche den Gleichungen

$$(1.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{b_1}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{b_2}^{z_2} f(z)\,dz = 0,\\ &\int_{b_1}^{z_1} \varphi(z)\,dz + \int_{b_2}^{z_2} \varphi(z)\,dz = 0 \end{aligned}\right.$$

genügen. Stetige Reihen von Werthenpaaren z_1, z_2 welche den Gleichungen (1.) genügen, befriedigen aber die Gleichung

$$(2.)\qquad \frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)} = \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$$

21] und ausserdem entweder die Gleichung (C.) oder die Gleichung (H.). Demnach müssten c_1', c_2' beliebig wenig von einem Werthenpaare verschieden sein, welches gleichzeitig den Gleichungen (B.) und (C.) oder (H.) Genüge leistet. Nach No. 4 bis 6 werden aber solche Werthenpaare nur erreicht, wenn u_1, u_2 von einander abhängige Wege beschreiben.

Da andererseits nicht z_1, z_2 sich gleichzeitig ein und demselben Werthe der angegebenen Art annähern können, wenn gleichzeitig $f(z_1)$ und $f(z_2)$ so wie $\varphi(z_1)$ und $\varphi(z_2)$ ein und denselben Werth anstreben, ohne dass u_1, u_2 unendlich gross werden, so ergiebt sich der Satz:

Für **willkürliche** Wege von u_1, u_2 können für endliche Werthe dieser Variabeln nicht solche Werthe z_1, z_2 erreicht werden, dass einer oder beide der Quotienten

$$\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)},\quad \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$$

einen der mit γ bezeichneten Werthe annehmen, und auch nicht solche singuläre Werthe z_1, z_2 der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$, für welche eines oder beide der Integralwerthenpaare

$$\int f(z_1)\,dz_1,\quad \int \varphi(z_1)\,dz_1,\quad \int f(z_2)\,dz_2,\quad \int \varphi(z_2)\,dz_2$$

unendlich werden, ohne dass die Variabeln z_1, z_2 unendlich viele Umläufe vollzogen haben.

8.

Aus Gleichung (F.) ergiebt sich:

I. Die Function z von ζ kann nicht mehr als zweiwerthig sein.

Denn wären z_1, z_2, z_3 drei verschiedene Zweige der Function z von ζ, so wäre nach Gleichung (F.)

$$\frac{dz_1}{d\zeta} f(z_1) + \frac{dz_2}{d\zeta} f(z_2) = 0,$$
$$\frac{dz_1}{d\zeta} f(z_1) + \frac{dz_3}{d\zeta} f(z_3) = 0,$$

also

$$(1.)\qquad \frac{dz_2}{d\zeta} f(z_2) - \frac{dz_3}{d\zeta} f(z_3) = 0. \qquad [22$$

Andererseits ist nach derselben Gleichung (F.)

$$\frac{dz_2}{d\zeta} f(z_2) + \frac{dz_3}{d\zeta} f(z_3) = 0. \tag{2.}$$

Es müsste demnach

$$\frac{dz_2}{d\zeta} f(z_2) = 0, \qquad \frac{dz_3}{d\zeta} f(z_3) = 0$$

sein, d. h. es müsste z von ζ unabhängig sein, was für willkürliche Werthe von ζ nicht stattfindet.

Dividirt man die Gleichung (H.) durch $F(z)F_1(z)$ und setzt nach Gleichung (E.)

$$\frac{f(z)^2}{F(z)} = \frac{dz}{d\zeta} = \frac{f_1(z)^2}{F_1(z)}, \tag{3.}$$

so folgt

$$\frac{dz}{d\zeta}[f(z) + f_1(z)] = 0 \tag{4.}$$

oder

$$f(z) + f_1(z) = 0. \tag{J.}$$

Nach Satz I. ist

$$z = P(\zeta) + Q(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}, \tag{K.}$$

wo $P(\zeta), Q(\zeta), R(\zeta)$ eindeutige Functionen von ζ sind.

Setzen wir

$$f(z)^2 = g(\zeta), \tag{5.}$$

so folgt aus der Gleichung (J.), dass einem gegebenen Werthenpaare $\zeta, \sqrt{R(\zeta)}$ ein einziger Werth von $g(\zeta)$ entspricht. Ebenso entspricht ein einziger bestimmter Werth dieser Function einem Werthenpaare $\zeta, -\sqrt{R(\zeta)}$. Wir wollen denselben mit $g_1(\zeta)$ bezeichnen. Alsdann ist

23]

$$\left\{\begin{array}{l} g(\zeta) + g_1(\zeta) = 2S(\zeta), \\ \dfrac{g(\zeta)}{\sqrt{R(\zeta)}} - \dfrac{g_1(\zeta)}{\sqrt{R(\zeta)}} = 2T(\zeta), \end{array}\right. \tag{6.}$$

wo $S(\zeta), T(\zeta)$ eindeutige Functionen von ζ bedeuten.

Multiplicirt man die zweite der Gleichungen (6.) mit $\sqrt{R(\zeta)}$ und addirt die beiden Gleichungen, so folgt:

$$f(z)^2 = g(\zeta) = S(\zeta) + T(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}. \tag{L.}$$

Setzt man

$$\frac{d\zeta}{dz} = P_1(\zeta) + Q_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}, \tag{K'.}$$

wo $P_1(\zeta), Q_1(\zeta)$ nach Gleichung (K.) eindeutige Functionen von ζ sind, so folgt aus Gleichung (F.), dass

$$t = \frac{f(z)}{\sqrt{R(\zeta)}[P_1(\zeta) + Q_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}]} \tag{7.}$$

als Function von ζ aufgefasst durch die Umläufe von ζ, welche $\sqrt{R(\zeta)}$ in $-\sqrt{R(\zeta)}$ überführen, ungeändert bleibt. Dieselbe Eigenschaft besitzt danach auch t^2. Daher ist nach Gleichung (L.) t^2 eine eindeutige Function von ζ. Setzen wir demgemäss

$$t = \sqrt{R_1(\zeta)}, \tag{8.}$$

so folgt:

$$f(z) = [Q_1(\zeta)R(\zeta) + P_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}]\sqrt{R_1(\zeta)}, \tag{L'.}$$

wo $R_1(\zeta)$ eine eindeutige Function von ζ, und $\sqrt{R_1(\zeta)}$ durch die Umläufe von ζ, welche $\sqrt{R(\zeta)}$ in $-\sqrt{R(\zeta)}$ überführen, ungeändert bleibt.

Aus Gleichung (E.) und den Gleichungen (K.) und (L.) ergiebt sich

$$F(z) = W(\zeta) + U(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}, \tag{M.}$$

wo $W(\zeta), U(\zeta)$ eindeutige Functionen von ζ.

II. Demnach sind die Functionen $f(z)^2$ und $F(z)$ zweiwerthige [24 Functionen von ζ, welche durch die Umläufe von ζ gleichzeitig mit z unverändert bleiben oder geändert werden.

9.

Betrachtet man z als Function von ζ, so folgt aus den Gleichungen (C.) und (H.), dass $\frac{f(z)^2}{F(z)}$ für dasselbe ζ nur zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe annimmt. Es ist also

$$\frac{f(z)^2}{F(z)} = \sqrt{\Psi(\zeta)}, \tag{N.}$$

wo $\Psi(\zeta)$ eine eindeutige Function von ζ darstellt. Es ist nämlich nach Gl. (7.) und (8.) vor. No.

$$\Psi(\zeta) = R(\zeta)\, R_1(\zeta). \tag{N'.}$$

Ein Umlauf von ζ, welcher $\sqrt{R(\zeta)}$ in $-\sqrt{R(\zeta)}$ überführt, führt daher auch $\sqrt{\Psi(\zeta)}$ in $-\sqrt{\Psi(\zeta)}$ über.

Transformirt man die Gleichung (A.) in die Variable ζ und bezeichnet mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ zwei Werthe von ζ, welche resp. $z_1 = \delta_1$, $z_2 = \delta_2$ entsprechen, so verwandeln sich diese Gleichungen in

$$(\mathrm{A}_1.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\varepsilon_1}^{\zeta_1} \sqrt{\Psi(\zeta)}\, d\zeta + \int_{\varepsilon_2}^{\zeta_2} \sqrt{\Psi(\zeta)}\, d\zeta = u_1, \\ \displaystyle\int_{\varepsilon_1}^{\zeta_1} \zeta\sqrt{\Psi(\zeta)}\, d\zeta + \int_{\varepsilon_2}^{\zeta_2} \zeta\sqrt{\Psi(\zeta)}\, d\zeta = u_2. \end{cases}$$

10.

Für diejenigen Werthe von ζ, welche wir mit γ bezeichnet haben, erhält z jeden beliebigen Werth (s. No. 1), es sind daher diese Werthe γ singuläre
25] Punkte der Function z von ζ (Gl. (K.)), von solcher Beschaffenheit, dass eine Entwickelung von z nach steigenden Potenzen von $\zeta-\alpha$ mit nur einer endlichen Anzahl von Potenzen mit negativen Exponenten nicht möglich ist. Wir wollen für solche singuläre Punkte dieselbe Bezeichnung **wesentlich singuläre Punkte** anwenden, welche Herr WEIERSTRASS für eindeutige Functionen angewendet hat (Abh. der Berliner Akademie Jahrg. 1876, p. 11—15[1]).

Da die Functionen $P(\zeta)$, $Q(\zeta)$, $R(\zeta)$ in einem wesentlich singulären Punkte jeden beliebigen Werth annehmen (cf. WEIERSTRASS l. c. p. 59—60[2]), so ergiebt sich, dass $\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \zeta$ für einen solchen Punkt von z unabhängig werden muss.

Demnach sind die Werthe $\zeta = \gamma$ die einzigen wesentlich singulären Punkte der Function z von ζ.

Ist $\zeta = \alpha$ ein Werth, welcher mit keinem der wesentlich singulären Punkte coincidirt, und $z = a$ einer der beiden Werthe von z, welche ihm

[1]) Weierstrass' Werke, Bd. II (1895), S. 77 ff.. Sch.

[2]) Ebenda S. 122—124. Sch.

nach Gl. (K.) entsprechen, so ist in der Umgebung von $\zeta = \alpha$

$$z - a = c_{-k}(\zeta-\alpha)^{-\frac{k}{2}} + c_{-(k-1)}(\zeta-\alpha)^{-\frac{k-1}{2}} + \cdots + c_0 + c_1(\zeta-\alpha)^{\frac{1}{2}} + c_2(\zeta-\alpha)^{\frac{2}{2}} + \cdots, \tag{1.}$$

wo die Anzahl der Glieder mit negativen Exponenten eine endliche mit k bezeichnete Grösse ist.

Ist a ein singulärer Punkt der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$, so ist nach No. 1 in der Umgebung von $z = a$

$$f(z)^2 = P_0 + P_1 \log(z-a) + P_2[\log(z-a)]^2 + \cdots + P_\lambda[\log(z-a)]^\lambda, \tag{2.}$$

wo $P_0, P_1, \ldots, P_\lambda$ in der Umgebung von $z = a$ nach ganzen Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ entwickelt sind, mit nur einer endlichen Anzahl von Gliedern mit negativen Exponenten.

Aus Gl. (1.) folgt

$$z - a = (\zeta-\alpha)^{-\frac{k}{2}}\chi(\zeta), \tag{3.}$$ [26

wo $\chi(\zeta)$ für $\zeta = \alpha$ weder Null noch unendlich, und demnach $\log\chi(\zeta)$ nach positiven ganzen Potenzen von $(\zeta-\alpha)^{\frac{1}{2}}$ entwickelbar ist.

Demnach ist

$$f(z)^2 = P'_0 + P'_1 \log(\zeta-\alpha) + P'_2[\log(\zeta-\alpha)]^2 + \cdots + P'_\lambda[\log(\zeta-\alpha)]^\lambda, \tag{4.}$$

wenn man

$$(5.)\quad \begin{aligned} \left(-\frac{k}{2}\right)^i \{P_i + P_{i+1}(i+1)_1 \log\chi(\zeta) + P_{i+2}(i+2)_2[\log\chi(\zeta)]^2 + \cdots \\ + P_\lambda\lambda_{\lambda-i}[\log\chi(\zeta)]^{\lambda-i}\} = P'_i, \end{aligned}$$

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-l+1)}{1.2\ldots l} = m_l$$

setzt. Die Coefficienten $P'_0, P'_1, \ldots, P'_\lambda$ sind nach steigenden Potenzen von $\zeta-\alpha$ mit rationalen Exponenten entwickelbar, so dass Glieder mit negativen Exponenten nur in endlicher Anzahl auftreten.

Nach Satz II. No. 8 ist aber $f(z)^2$ eine zweiwerthige Function von ζ, erhält also bei Umläufen von ζ um α nur zwei Werthe, während die rechte Seite der Gleichung (4.) durch Wiederholung dieser Umläufe unendlich viele Werthe annimmt. Demnach muss

$$P'_1 = 0,\quad P'_2 = 0,\quad \ldots,\quad P'_\lambda = 0$$

sein. Hieraus folgt aber

$$(6.)\qquad P_1 = 0,\quad P_2 = 0,\quad \ldots,\quad P_\lambda = 0.$$

Demnach enthält die Entwickelung von $f(z)$ in der Umgebung von $z=a$ keine Logarithmen. Da $\varphi(z)^2 = \zeta^2 f(z)^2$ ebenfalls eine zweiwerthige Function von ζ ist, so folgt, dass auch die Entwickelung von $\varphi(z)$ keine Logarithmen enthält.

Aus der Gl. (4.) ergiebt sich

$$(7.)\qquad f(z)^2 = P'_0,$$

d. h. es ist auch $f(z)^2$ in der Umgebung von $\zeta=\alpha$ nach steigenden Potenzen 27] von $\zeta-\alpha$ mit rationalen Exponenten entwickelbar, derart dass die Anzahl der Glieder mit negativen Exponenten eine endliche ist.

Demnach ist $\zeta=\alpha$ auch kein wesentlich singulärer Punkt für die Function $f(z)^2$ von ζ.

Es sei nunmehr

$$(8.)\qquad \begin{cases} f(z) = e_\mu(z-a)^{\frac{\mu}{n}} + e_{\mu+1}(z-a)^{\frac{\mu+1}{n}} + \cdots, \\ \varphi(z) = e'_\mu(z-a)^{\frac{\mu}{n}} + e'_{\mu+1}(z-a)^{\frac{\mu+1}{n}} + \cdots, \end{cases}$$

wo e_μ, e'_μ von Null verschieden sind. Setzt man

$$\frac{e'_\mu}{e_\mu} = \alpha$$

und entwickelt $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ nach steigenden Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{n}}$, so erhält man

$$(9.)\qquad \zeta-\alpha = \varrho_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \varrho_2(z-a)^{\frac{2}{n}} + \cdots,$$

wo

$$\varrho_1 = \frac{e_\mu e'_{\mu+1} - e_{\mu+1}e'_\mu}{e_\mu^2}.$$

Ist der Coefficient ϱ_1 nicht Null, so folgt, dass $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ in der Umgebung von $\zeta=\alpha$ eindeutig ist. Ist dagegen $\varrho_1 = 0$, so kann ϱ_2 nicht verschwinden, weil sonst $z-a$ in der Umgebung von $\zeta=\alpha$ mehr als zwei Werthe annehmen würde, was mit dem Satze I. in No. 8 in Widerspruch stände.

Fasst man das Vorhergehende zusammen, so erhält man den Satz:

I. Die Functionen z und $f(z)^2$ von ζ haben dieselben wesentlich singulären Punkte, und zwar sind es diejenigen Werthe $\zeta=\gamma$, für welche

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \gamma$$

für jeden Werth von z. Die beiden Werthe von z, welche einem nicht wesentlich singulären Punkte $\zeta=\alpha$ der Function z von ζ entsprechen, sind entweder nicht singuläre Punkte der Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ oder solche singuläre Punkte a, dass die für [28 die Umgebung von a gültigen Entwickelungen von $f(z)$, $\varphi(z)$ keine Logarithmen enthalten, und dass in der Entwickelung nach steigenden Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{n}}$

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \alpha + \varrho_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \varrho_2(z-a)^{\frac{2}{n}} + \cdots$$

nicht gleichzeitig ϱ_1 und ϱ_2 verschwinden. Einem Werthe z, für welchen $\int f(z)dz$, $\int\varphi(z)dz$ endliche Werthe erhalten, entsprechen nur nicht wesentlich singuläre Werthe der Function z von ζ.

Es ist zu bemerken, dass hier $z=\infty$ den singulären Punkten beigezählt worden ist.

Aus der Gleichung

$$(10.)\qquad \zeta-\alpha = \varrho_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \varrho_2(z-a)^{\frac{2}{n}} + \cdots$$

folgt für $\frac{dz}{d\zeta}$

a) in dem Falle, dass ϱ_1 von Null verschieden ist,

$$(11.)\qquad \frac{dz}{d\zeta} = (z-a)^{1-\frac{1}{n}}\left\{\varkappa_0 + \varkappa_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \cdots\right\},$$

b) in dem Falle aber, dass ϱ_1 verschwindet,

$$(11a.)\qquad \frac{dz}{d\zeta} = (z-a)^{1-\frac{2}{n}}\left\{\lambda_0 + \lambda_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \cdots\right\},$$

wo $\varkappa_0$, λ_0 von Null verschiedene Grössen bedeuten.

Bezeichnen wir mit μ den Exponenten der niedrigsten Potenz von $z-a$ in der Entwickelung von $f(z)$ in der Umgebung von $z=a$, so ist nach

Satz II. No. 3

$$\mu = \frac{-n-k+1}{n},$$

wo k die Null oder eine positive ganze Zahl bedeutet. Es folgt daher aus Gl. (E.), dass im Falle a)

29] (12.) $$\frac{f(z)^2}{F(z)} = (z-a)^{-\frac{k}{n}}\left[\varkappa_0' + \varkappa_1'(z-a)^{\frac{1}{n}} + \cdots\right],$$

im Falle b)

(12a.) $$\frac{f(z)^2}{F(z)} = (z-a)^{-\frac{k+1}{n}}\left[\lambda_0' + \lambda_1'(z-a)^{\frac{1}{n}} + \cdots\right].$$

Im Falle a) ergiebt sich aus Gl. (10.) $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ als eindeutige Function von $\zeta-\alpha$

(13.) $$(z-a)^{\frac{1}{n}} = \mu_1(\zeta-\alpha) + \mu_2(\zeta-\alpha)^2 + \cdots.$$

Im Falle b) wird $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ eine eindeutige Function von $(\zeta-\alpha)^{\frac{1}{2}}$

(14.) $$(z-a)^{\frac{1}{n}} = \mu_1'(\zeta-\alpha)^{\frac{1}{2}} + \mu_2'(\zeta-\alpha)^{\frac{2}{2}} + \cdots,$$

wo μ_1, μ_1' von Null verschiedene Grössen bedeuten.

Demnach ist nach Gl. (N.) in der Umgebung von $\zeta = \alpha$ im Falle a)

(15.) $$\sqrt{\Psi(\zeta)} = (\zeta-\alpha)^{-k}\{\varkappa_0'' + \varkappa_1''(\zeta-\alpha) + \cdots\},$$

im Falle b)

(15a.) $$\sqrt{\Psi(\zeta)} = (\zeta-\alpha)^{-\frac{k+1}{2}}\{\lambda_0'' + \lambda_1''(\zeta-\alpha) + \cdots\},$$

wo $\varkappa_0'', \lambda_0''$ von Null verschieden sind.

Diese Gleichungen finden auch statt, wenn $\zeta = \alpha$, $z = \infty$ entspricht (s. Satz III. No. 3).

Hieraus folgt

II. Die nicht wesentlich singulären Punkte der Function z von ζ sind auch nicht wesentlich singuläre Punkte der Function $\Psi(\zeta)$.

Sei $\zeta = \beta$ ein nicht wesentlich singulärer Punkt der Function z von ζ, für welchen $\Psi(\zeta)$ unendlich wird, von der Art, dass die $\zeta = \beta$ entsprechenden beiden Werthe von z nicht zu den singulären Punkten der Functionen $f(z), \varphi(z)$

gehören. Ist $z = b$ einer dieser Werthe, so muss nach Gl. (N.) $F(b) = 0$ [30
sein und $F(z)$ in der Umgebung von $z = b$ die Entwickelung haben:

(16.) $$F(z) = (z-b)^l[\nu_0 + \nu_1(z-b) + \cdots],$$

wo l eine positive ganze Zahl und ν_0 von Null verschieden ist. Man hat hier zwei Fälle zu unterscheiden:

α) Es ist $f(b)$ von Null verschieden. Alsdann ergiebt die Gleichung (E.) in der Umgebung von $\zeta = \beta$

(17.) $$\frac{d\zeta}{dz} = (z-b)^l[\nu_0' + \nu_1'(z-b) + \cdots],$$

wo ν_0' von Null verschieden. Durch Integration dieser Gleichung folgt

$$\zeta - \beta = \frac{\nu_0'}{l+1}(z-b)^{l+1} + \cdots.$$

Da $z-b$ eine eindeutige Function von $(\zeta-\beta)^{\frac{1}{2}}$, so folgt, dass

(18.) $$\begin{cases} l = 1 \text{ und} \\ z-b = \nu_0''(\zeta-\beta)^{\frac{1}{2}} + \nu_1''(\zeta-\beta)^{\frac{2}{2}} + \cdots, \end{cases}$$

wo ν_0'' von Null verschieden. Durch Substitution dieses Werthes in $\frac{f(z)^2}{F(z)}$ folgt, dass in der Umgebung von $\zeta = \beta$

(19.) $$\sqrt{\Psi(\zeta)} = \varrho_{-1}(\zeta-\beta)^{-\frac{1}{2}} + \varrho_1(\zeta-\beta)^{\frac{1}{2}} + \cdots,$$

wo ϱ_{-1} von Null verschieden.

β) Es sei $f(b) = 0$. Da nach Satz I. No. 3 nicht gleichzeitig $\varphi(b) = 0$ sein kann, so folgt, dass in diesem Falle ζ unendlich gross wird. Gehört nun $\zeta = \infty$ nicht zu den wesentlich singulären Punkten von z als Function von ζ, und ist in der Umgebung von $z = b$

$$f(z) = (z-b)^m\{\varepsilon_0 + \varepsilon_1(z-b) + \cdots\},$$

wo ε_0 von Null verschieden, so folgt aus der Gleichung

(20.) $$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{1}{\zeta}$$

(21.) $$(z-b)^m\{\varepsilon_0' + \varepsilon_1'(z-b) + \cdots\} = \frac{1}{\zeta},$$ [31

wo ε_0' von Null verschieden. Da $z-b$ eine einwerthige Function von $\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}}$ in der Umgebung von $\zeta = \infty$ ist, so folgt: entweder

$$\text{(18a.)}\qquad \begin{cases} m = 1 \text{ und} \\ z-b = \varepsilon_1''\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \varepsilon_2''\left(\frac{1}{\zeta}\right)^2 + \cdots \end{cases}$$

oder

$$\text{(18b.)}\qquad \begin{cases} m = 2 \text{ und} \\ z-b = \varepsilon_1''\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_2''\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{2}{2}} + \cdots, \end{cases}$$

ε_1'' in beiden Fällen von Null verschieden.

Ist $\varphi(b) = \gamma_0$, so ist γ_0 von Null verschieden, und man erhält

$$F(z) = -m\varepsilon_0\gamma_0(z-b)^{m-1} + \cdots,$$

also

$$\frac{f(z)^2}{F(z)} = -\frac{\varepsilon_0^2 m}{\gamma_0}(z-b)^{2m+1} + \cdots.$$

Substituirt man hierin die Werthe (18a.) und (18b.), so folgt, dass in der Umgebung von $\zeta = \infty$ entweder

$$\text{(22.)}\qquad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \varrho_3\left(\frac{1}{\zeta}\right)^3 + \varrho_4\left(\frac{1}{\zeta}\right)^4 + \cdots$$

oder

$$\text{(22a.)}\qquad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \varrho_6\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{5}{2}} + \varrho_7\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{7}{2}} + \cdots.$$

Demnach ist im Falle β) $\Psi(\zeta)$ nicht unendlich.

Es sei nunmehr $\zeta = \beta$ ein Werth, welcher nicht zu den wesentlich singulären Punkten von z als Function von ζ gehört, und wiederum von der Beschaffenheit, dass die beiden ihm entsprechenden Werthe von z nicht zu den 32] singulären Punkten der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$ gehören, und für welchen $\Psi(\zeta)$ verschwindet. Ist b einer der beiden zu $\zeta = \beta$ gehörigen Werthe von z, so muss nach Gl. (N.) $f(b) = 0$ sein. Da aber nach Satz I. No. 3 nicht gleichzeitig $\varphi(b)$ verschwindet, so ergiebt sich, dass $\beta = \infty$ sein müsse.

Ist demnach $\zeta = \infty$ nicht ein wesentlich singulärer Punkt der Function z von ζ, und wird vorausgesetzt, dass $\Psi(\infty) = 0$, und bedeutet $z = b$ einen der beiden Werthe von z, welche $\zeta = \infty$ entsprechen (nach der in No. 2 gemachten Bemerkung entspricht $\zeta = \infty$, wenn dieser Punkt nicht zu den wesentlich singulären Punkten der Function z von ζ gehört, keinem singu-

lären Punkte der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$), so ergeben sich eben dieselben Gleichungen (20.)—(22a.). Die vorhergehende Untersuchung ergiebt den folgenden Satz:

III. Es sei $\zeta = \beta$ ein endlicher Werth, welcher nicht zu den wesentlich singulären Punkten der Function z von ζ gehört.

Ist einer der beiden Werthe von z, welche $\zeta = \beta$ entsprechen, ein singulärer Punkt a der Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$, und bezeichnet man den Exponenten der niedrigsten Potenz von $z-a$ in den für $f(z)$, $\varphi(z)$ in der Umgebung von a bestehenden Entwickelungen mit $\frac{-n-k+1}{n}$, wo $k = 0$ oder eine ganze positive Zahl, so bleibt $\sqrt{\Psi(\zeta)}$ entweder mit $(\zeta-\beta)^k$ oder mit $(\zeta-\beta)^{\frac{k+1}{2}}$ multiplicirt in der Umgebung von $\zeta = \beta$ eindeutig und für $\zeta = \beta$ endlich und von Null verschieden. Es ist der erstere Multiplicator oder der zweite anzuwenden, je nachdem z in der Umgebung von $\zeta = \beta$ einwerthig oder zweiwerthig ist. — Dasselbe findet statt, wenn $a = \infty$ und der Exponent der niedrigsten Potenz von $\frac{1}{z}$ mit $\frac{n+1-k}{n}$ bezeichnet wird.

Entspricht dem $\zeta = \beta$ ein nicht singulärer Werth $z = b$ der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$, und ist $\Psi(\beta) = \infty$, so ist $(\zeta-\beta)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\Psi(\zeta)}$ in der [33 Umgebung von $\zeta = \beta$ eindeutig und für $\zeta = \beta$ endlich und von Null verschieden.

Die Function $\Psi(\zeta)$ kann für keinen endlichen Werth von ζ verschwinden. Gehört $\zeta = \infty$ nicht zu den wesentlich singulären Punkten der Function z von ζ, so ist $\zeta^3\sqrt{\Psi(\zeta)}$ oder $\zeta^{\frac{5}{2}}\sqrt{\Psi(\zeta)}$ in der Umgebung von $\zeta = \infty$ eindeutig und für $\zeta = \infty$ endlich und von Null verschieden, je nachdem z in der Umgebung von $\zeta = \infty$ ein- oder zweiwerthig ist.

11.

Nach den in No. 2 bis 7 angestellten Untersuchungen verbleibt uns noch das Verhalten von z_1, z_2 als Functionen von u_1, u_2 zu untersuchen, in der Umgebung solcher Werthe $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, für welche

$$z_1 = z_2 = a,\quad f(z_1) = f(z_2) = f(a),\quad \varphi(z_1) = \varphi(z_2) = \varphi(a)$$

werden, sei es dass a nicht unendlich wird oder mit einem singulären Punkte der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$ zusammenfällt, sei es dass a mit einem solchen Punkte zusammenfällt oder unendlich wird, wenn nur $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ für $z = a$ nicht unendlich werden.

Ist $\zeta = \beta$ einer der Werthe von ζ, welche $z = a$ entsprechen, so ist nach Satz I. No. 10 β von den wesentlich singulären Punkten der Function z von ζ verschieden.

Ist a ein singulärer Punkt der Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$, so ergiebt sich aus der Forderung, dass $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ für $z = a$ nicht unendlich werden, nach den in No. 1 und 2 gemachten Voraussetzungen, dass die Entwickelungen von $f(z)$ und $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z = a$ keine Logarithmen enthalten, und dass nach Satz II. No. 3 der Exponent der niedrigsten Potenz von $z-a$ die Form $\frac{-n+1}{n}$ habe.

Es ist also in diesem Falle im Satze III. No. 10 $k = 0$, so dass diesem Satze gemäss in der Umgebung von $\zeta = \beta$ entweder

$$\sqrt{\Psi(\zeta)} = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(\zeta-\beta) + \cdots \tag{1.}$$

oder

34] $$\sqrt{\Psi(\zeta)} = \varepsilon_{-1}(\zeta-\beta)^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon_1(\zeta-\beta)^{\frac{1}{2}} + \cdots, \tag{1a.}$$

wo ε_0, ε_{-1} von Null verschieden.

Ist $a = \infty$ oder ein nicht singulärer Punkt der Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$, und β ein endlicher Werth, so hat nach demselben Satze $\sqrt{\Psi(\zeta)}$ in der Umgebung von $\zeta = \beta$ wiederum eine der beiden Entwickelungen (1.) oder (1a.).

Ist aber $\beta = \infty$, so ist entweder

$$\sqrt{\Psi(\zeta)} = \varrho_3\left(\frac{1}{\zeta}\right)^3 + \varrho_4\left(\frac{1}{\zeta}\right)^4 + \cdots \tag{2.}$$

oder

$$\sqrt{\Psi(\zeta)} = \varrho_5\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{5}{2}} + \varrho_7\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{7}{2}} + \cdots, \tag{2a.}$$

ϱ_3, ϱ_5 von Null verschieden.

Wir setzen gemäss Gleichung (K.)

$$\begin{cases} z_1 = P(\zeta_1) + Q(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}, \\ z_2 = P(\zeta_2) + Q(\zeta_2)\sqrt{R(\zeta_2)} \end{cases} \tag{3.}$$

und gemäss Gleichung (N.)

$$\frac{f(z_1)^3}{F(z_1)} = \sqrt{\Psi(\zeta_1)}, \qquad \frac{f(z_2)^3}{F(z_2)} = \sqrt{\Psi(\zeta_2)}. \tag{4.}$$

Der Voraussetzung gemäss ist $z_1 = z_2 = a$ für $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$. Es erhalten also auch $\sqrt{R(\zeta_1)}$, $\sqrt{R(\zeta_2)}$ für $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$ dasselbe Vorzeichen. Deshalb haben auch $\frac{dz_1}{d\zeta_1}$, $\frac{dz_2}{d\zeta_2}$ für $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$ gleiche Werthe. Da aber vorausgesetzt worden, dass $f(z_1) = f(z_2) = f(a)$, so folgt aus der Gl. (E.) und den Gln. (4.), dass $\sqrt{\Psi(\zeta_1)}$, $\sqrt{\Psi(\zeta_2)}$ für $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$ dasselbe Vorzeichen erhalten.

Durch die Substitutionen (3.) verwandeln sich die Gleichungen (A.) in (A$_1$.), und man erhält aus diesen in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$:

a) Wenn die Gleichung (1.) stattfindet: [35

$$\begin{cases} u_1 - v_1 = \varepsilon_0(t_1+t_2) + \frac{\varepsilon_1}{2}(t_1^2+t_2^2) + \cdots, \\ u_2 - v_2 = \beta\varepsilon_0(t_1+t_2) + \frac{\beta\varepsilon_1+\varepsilon_0}{2}(t_1^2+t_2^2) + \cdots, \end{cases} \tag{5.}$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\zeta_1 - \beta = t_1, \quad \zeta_2 - \beta = t_2. \tag{6.}$$

Da die Glieder der beiden Reihen die Form haben

$$\text{const.}\,(t_1^m + t_2^m),$$

so lassen sich dieselben so umformen, dass sie nach positiven ganzen Potenzen von

$$t_1 + t_2 = w_1, \quad t_1^2 + t_2^2 = w_2 \tag{7.}$$

entwickelt erscheinen:

$$\begin{cases} u_1 - v_1 = \varepsilon_0 w_1 + \frac{\varepsilon_1}{2} w_2 + \cdots, \\ u_2 - v_2 = \beta\varepsilon_0 w_1 + \frac{\beta\varepsilon_1+\varepsilon_0}{2} w_2 + \cdots, \end{cases} \tag{8.}$$

wo wir bloss die Glieder erster Dimension verzeichnet haben.

Da $\varepsilon_0(\beta\varepsilon_1+\varepsilon_0) - \beta\varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_0^2$ von Null verschieden, so ergeben nach dem Satze von Jacobi, welchen wir in No. 2 citirt, die Gleichungen (8.) w_1, w_2 als nach positiven ganzen Potenzen von $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$ fortschreitende Reihen.

Demnach sind w_1, w_2 in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ eindeutig, also haben $\zeta_1+\zeta_2$ und $\zeta_1\zeta_2$ dieselbe Eigenschaft.

b) Wenn die Gleichung (1a.) erfüllt ist, so folgt

$$\text{(5a.)}\quad \begin{cases} u_1-v_1 = 2\varepsilon_{-1}(t_1+t_2)+\frac{2}{3}\varepsilon_1(t_1^3+t_2^3)+\cdots, \\ u_2-v_2 = 2\beta\varepsilon_{-1}(t_1+t_2)+\frac{2}{3}(\beta\varepsilon_1+\varepsilon_{-1})(t_1^3+t_2^3)+\cdots, \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung setzt

36] $$\text{(6a.)}\quad (\zeta_1-\beta)^{\frac{1}{2}} = t_1,\quad (\zeta_2-\beta)^{\frac{1}{2}} = t_2.$$

Die Glieder der beiden Reihen haben die Form

$$\text{const.}\,(t_1^{2m+1}+t_2^{2m+1}).$$

Die sämmtlichen Glieder sind also durch t_1+t_2 theilbar. Werden also u_1-v_1, u_2-v_2, t_1, t_2 unendlich klein, so sind die Glieder, welche auf $2\varepsilon_{-1}(t_1+t_2)$ resp. $2\beta\varepsilon_{-1}(t_1+t_2)$ folgen, unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als diese letzteren. Demnach sind u_1-v_1, u_2-v_2 gleicher Ordnung mit t_1+t_2. Multiplicirt man die erste der Gln. (5a.) mit β und subtrahirt die zweite, so ergiebt sich, dass

$$\beta(u_1-v_1)-(u_2-v_2)$$

unendlich klein von höherer Ordnung als t_1+t_2, demnach höherer Ordnung als u_1-v_1 oder u_2-v_2, d. h. es muss

$$\text{(9.)}\quad \beta(u_1-v_1)-(u_2-v_2) = 0$$

sein.

Demnach rücken ζ_1, ζ_2 in denselben Werth β nur ein, wenn zwischen den letzten Wegelementen, auf welchen u_1, u_2 in v_1, v_2 eintreffen, die Relation (9.) besteht.

c) Für den Fall des Bestehens der Gleichung (2.) ergiebt sich:

$$\text{(5b.)}\quad \begin{cases} u_1-v_1 = -\frac{1}{2}\varrho_3(t_1^2+t_2^2)-\frac{1}{3}\varrho_4(t_1^3+t_2^3)-\cdots, \\ u_2-v_2 = -\phantom{\frac{1}{2}}\varrho_3(t_1+t_2)-\frac{1}{2}\varrho_4(t_1^2+t_2^2)-\cdots, \end{cases}$$

wenn man

$$\text{(6b.)}\quad \frac{1}{\zeta_1} = t_1,\quad \frac{1}{\zeta_2} = t_2$$

setzt.

Die Reihen (5b.) gestatten wieder eine derartige Umformung, dass sie nach positiven ganzen Potenzen von

$$\text{(7a.)}\quad t_1+t_2 = w_1,\quad t_1^2+t_2^2 = w_2$$

entwickelt erscheinen:

$$\text{(8a.)}\quad \begin{cases} u_1-v_1 = -\frac{1}{2}\varrho_3 w_2+\cdots, \\ u_2-v_2 = -\phantom{\frac{1}{2}}\varrho_3 w_1-\frac{1}{2}\varrho_4 w_2-\cdots. \end{cases}$$ [37

Mit Hülfe des citirten Satzes von Jacobi folgt, dass w_1, w_2 sich in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ nach ganzen positiven Potenzen von u_1-v_1, u_2-v_2 entwickeln lassen. Es sind demnach w_1, w_2, folglich auch $\zeta_1+\zeta_2$ und $\zeta_1\zeta_2$ in derselben Umgebung eindeutig.

d) Findet endlich die Gl. (2a.) statt, so ist

$$\text{(5c.)}\quad \begin{cases} u_1-v_1 = -\frac{2}{3}\varrho_5(t_1^3+t_2^3)-\frac{2}{5}\varrho_7(t_1^5+t_2^5)+\cdots, \\ u_2-v_2 = -2\varrho_5(t_1+t_2)-\frac{2}{3}\varrho_7(t_1^3+t_2^3)+\cdots, \end{cases}$$

wenn man setzt:

$$\text{(6c.)}\quad \zeta_1^{-\frac{1}{2}} = t_1,\quad \zeta_2^{-\frac{1}{2}} = t_2.$$

Die Glieder der Reihen sind sämmtlich durch t_1+t_2 theilbar. Werden also u_1-v_1, u_2-v_2, t_1, t_2 unendlich klein, so wird u_1-v_1 von höherer Ordnung als t_1+t_2, während u_2-v_2 von gleicher Ordnung mit t_1+t_2 ist. Es findet also wieder zwischen den letzten Wegelementen, auf welchen u_1, u_2 in v_1, v_2 eintreffen, eine Relation statt. Für *willkürliche* Wege von u_1, u_2 werden daher nicht ζ_1, ζ_2 gleichzeitig unendlich gross.

In der Umgebung von $\zeta = \beta$, wenn die Gleichung (1.) besteht, und von $\zeta = \infty$, wenn die Gleichung (2.) erfüllt ist, ist $\sqrt{\Psi(\zeta)}$, folglich nach einer Bemerkung in No. 9 auch $\sqrt{R(\zeta)}$ eindeutig.

Entspricht daher unter gleicher Voraussetzung den Werthen $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$ oder $\zeta_1 = \zeta_2 = \infty$ das Werthenpaar $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, so werden $\sqrt{R(\zeta_1)}, \sqrt{R(\zeta_2)}$, wenn u_1, u_2 in hinlänglicher Nähe an v_1, v_2 um diese Werthe Umläufe vollziehen, ihr Vorzeichen nicht wechseln, daher

$$G(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}+G(\zeta_2)\sqrt{R(\zeta_2)},\quad G(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}\,G(\zeta_2)\sqrt{R(\zeta_2)}$$

in derselben Umgebung eindeutig sein, wenn $G(\zeta)$ eine eindeutige Function

von ζ bedeutet. Sind daher z_1, z_2 diejenigen Werthe von z, welche den Werthenpaaren $(\zeta_1, \sqrt{R(\zeta_1)})$, $(\zeta_2, \sqrt{R(\zeta_2)})$ nach den Gleichungen (3.) entsprechen,
38] so folgt, dass $z_1 + z_2$ und $z_1 z_2$ in der Umgebung derselben Werthe u_1, u_2 eindeutig sind, in deren Umgebung sich $\zeta_1 + \zeta_2$, $\zeta_1 \zeta_2$ eindeutig verhalten.

12.

Aus den vorhergehenden Entwickelungen geht hervor, dass unter der in No. 2 gemachten Voraussetzung die durch die Gln. (A.) definirten Functionen z_1, z_2 der Variabeln u_1, u_2 Wurzeln einer quadratischen Gleichung sind, deren Coefficienten für endliche Werthe der willkürlichen Variabeln u_1, u_2 sich eindeutig verhalten. Wenn $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ willkürliche Grössen bedeuten, so sind die Grössen

$$\gamma_{11} u_1 + \gamma_{12} u_2, \quad \gamma_{21} u_1 + \gamma_{22} u_2$$

endlich für jedes endliche Werthenpaar von u_1, u_2, unendlich, wenn eine oder beide der letzteren Grössen unendlich gross werden. Es sind also auch ohne die Voraussetzung von No. 2 $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ eindeutige Functionen von u_1, u_2 für alle endlichen Werthe dieser Veränderlichen.

Fassen wir nunmehr die Untersuchungen von No. 2 bis 7 und No. 11 zusammen, so ergiebt sich das folgende Resultat:

Damit die durch die Gleichungen (A.) definirten Functionen z_1, z_2 **der willkürlichen und von einander unabhängigen** Variabeln u_1, u_2 einer quadratischen Gleichung genügen, deren Coefficienten für alle endlichen Werthe dieser Variabeln sich eindeutig verhalten, wenn die Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$ die in No. 1 angegebene Beschaffenheit haben, sind folgende nothwendige und hinreichende Bedingungen zu erfüllen: Die beiden Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ dürfen nicht für ein und denselben endlichen Werth von z verschwinden. Der Exponent der niedrigsten Potenz von $z-a$ in der Entwickelung von $\gamma f(z) + \delta \varphi(z)$ (γ, δ willkürliche Grössen) in der Umgebung eines singulären Punktes a der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$, muss eine negative Zahl sein, welche entweder die negative Einheit
39] nicht übersteigt, oder den Werth $-1 + \frac{1}{n}$ hat (n eine positive ganze Zahl). Dagegen muss der Exponent der niedrigsten Potenz von $\frac{1}{z}$ in der für die Umgebung von $z = \infty$ gültigen Entwickelung von $\gamma f(z) + \delta \varphi(z)$ entweder eine Zahl sein, welche die positive Einheit nicht übersteigt, oder den Werth $1 + \frac{1}{n}$ hat (n eine positive ganze Zahl). Die durch die Gleichung (D.) definirte Function z von ζ darf nicht mehr als zweiwerthig sein (Gl. (K.)), während $f(z)$ als Function von ζ die durch die Gleichungen (L.), (L'.) festgesetzte Beschaffenheit haben muss.

Heidelberg, December 1880.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 242, Zeile 12 $\alpha_0\beta_0' - \alpha_0'\beta_0$ statt $a_0\beta_0' - \alpha_0'\beta_0$,

„ 245, 246 in den Gleichungen (2.), (4.), (5.) und S. 245 in den Formeln Zeile 12, 9 und 2 v. u. α_k an Stelle von α_{k+1}, α_{k+1} an Stelle von α_{k+2} und α_k' an Stelle von α_{k+1}',

„ 249, Zeile 7 wenn statt dass,

„ „ , Gl. (9.) $+\varepsilon\frac{\beta_1}{\beta_0}(z_1-b_1)t$ statt $-\frac{\beta_1}{\beta_0}(z_1-b_1)t$

und $+\varepsilon\frac{\beta_1'}{\beta_0}(z_1-b_1)t$ statt $-\frac{\beta_1'}{\beta_0}(z_1-b_1)t$,

„ 253, Gl. (3.) $f_1(\beta)$ statt $\varphi_2(\beta)$,

„ 265, Zeile 9 v. u. β) Es sei statt Es sei β),

„ 266, „ 4 v. u. bedeutet $z = b$ einen statt es sei $z = b$ einer.

Es wurde hinzugefügt:

S. 252, Zeile 1 das zweite »von«,

„ 269, in der ersten der Gln. (5.) und

„ 271, in der zweiten der Gln. (8a.) $+\cdots$.

2) Eine französische Übersetzung dieser Abhandlung (von Herrn STEPHANOS) ist im **Bulletin des Sciences mathématiques**, 2e sér., t. V, 1881, S. 52–89 erschienen. SCH.

XXXVI.

SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES QUI NAISSENT DE L'INVERSION DES INTÉGRALES DE DEUX FONCTIONS DONNÉES.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. HERMITE.)

(Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, t. 92, Paris 1881.)

a.

(Séance du Lundi 6 Juin 1881, p. 1330–1331.)

J'ai publié sous ce titre, dans les **Mémoires de la Société royale** [1330 de **Göttingue** (t. XXVII)[1]), un travail dont voici les principaux résultats.

Je considère des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, uniformes ou non uniformes, qui admettent pour les points critiques $z = a$ et $z = \infty$ des développements suivant les puissances entières de

$$(z-a)^{\frac{1}{n}} \text{ ou } \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(n étant entier et positif), le nombre des termes où les exposants de ces puissances sont négatifs étant fini. J'admets encore que ces puissances puissent être multipliées par des puissances de $\log(z-a)$ ou $\log\frac{1}{z}$, dont les exposants entiers et positifs soient toujours finis. Enfin, je pose la restriction que les plus petits exposants de $z-a$ ou de $\frac{1}{z}$, dans les termes multipliés par des logarithmes, ne surpassent pas l'unité positive ou négative, ce qui revient à dire que les intégrales de ces termes sont respectivement infinies pour $z = a$ et $z = \infty$.

1) Mém. XXXV, p. 289 et suiv. de ce volume. Sch.

Si la variable z décrit un chemin entourant une infinité de fois une partie des points critiques, il peut arriver que le quotient

$$\zeta = \frac{\varphi(z)}{f(z)}$$

prenne une valeur γ, indépendante de z. Je suppose alors que, z décrivant le même chemin, une au moins des intégrales

$$\int f(z)\,dz,\ \int \varphi(z)\,dz$$

1331] devienne infinie. De même, si pour une valeur déterminée $z = b$, et en suivant un chemin d'une étendue finie, ζ acquiert une de ces valeurs que je viens de désigner par γ, je suppose aussi qu'au moins une des intégrales

$$\int f(z)\,dz,\ \int \varphi(z)\,dz$$

devient infinie pour $z = b$.

Cela étant, je me propose de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions z_1, z_2 des variables indépendantes u_1, u_2, définies par les équations

$$\text{(A.)}\qquad \left\{ \begin{aligned} \int_{\delta_1}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{\delta_2}^{z_2} f(z)\,dz &= u_1, \\ \int_{\delta_1}^{z_1} \varphi(z)\,dz + \int_{\delta_2}^{z_2} \varphi(z)\,dz &= u_2, \end{aligned} \right.$$

satisfassent à une équation du second degré dont les coefficients soient uniformes pour toutes les valeurs finies des variables u_1, u_2.

Les fonctions z_1, z_2 ne pourraient cesser d'être holomorphes que lorsque u_1, u_2 deviennent égales respectivement aux valeurs v_1, v_2 pour lesquelles l'une ou l'autre des quantités z_1, z_2 devient infinie ou égale à un des points critiques des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, ou bien quand un des quotients

$$\zeta_1 = \frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}, \qquad \zeta_2 = \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$$

acquiert une valeur γ indépendante de z_1 ou z_2, ou enfin lorsque les quantités z_1, z_2 sont liées par l'équation

$$\text{(B.)}\qquad f(z_1)\varphi(z_2) - f(z_2)\varphi(z_1) = 0.$$

Mais ici l'on doit faire une remarque importante, qui constitue une distinction caractéristique entre les fonctions d'une seule variable et celles de plusieurs variables, et dont il suffit de donner l'explication pour notre exemple. Ou les valeurs de z_1, z_2 qui correspondent aux valeurs $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ peuvent être atteintes quels que soient les derniers éléments des chemins par lesquels les variables u_1, u_2 tendent aux points v_1, v_2: alors les points v_1, v_2 peuvent être des points de ramification des fonctions

$$z_1 + z_2,\ z_1 z_2$$

de u_1, u_2, c'est à dire qui ont la propriété que, u_1, u_2 tournant autour de v_1, v_2 les fonctions

$$z_1 + z_2,\ z_1 z_2$$

changent de valeurs. Ou ces valeurs de z_1, z_2 ne peuvent être atteintes qu'en supposant une relation entre les derniers éléments des chemins de u_1, u_2: alors les points v_1, v_2 ne peuvent être que des points d'indétermination, mais non de ramification, parce que l'on suppose que les variables u_1, u sont indépendantes l'une de l'autre.

---

b.

(Séance du Lundi 13 Juin 1881, p. 1401—1403.)

Je montre d'abord que les fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$ ne doivent être zéro [1401 pour une même valeur finie de la variable z et que l'exposant le plus petit de $z-a$ dans les développements de $f(z)$, $\varphi(z)$ dans le voisinage d'un point singulier a de ces fonctions doit être un nombre négatif qui ou ne surpasse pas l'unité négative ou, si la puissance n'est pas multipliée par un facteur logarithmique, peut aussi avoir la valeur $-\frac{n-1}{n}$ (n nombre entier positif), et de même l'exposant le plus petit de $\frac{1}{z}$ dans les développements dans le voisinage de $z = \infty$ est un nombre qui ou ne surpasse pas l'unité positive ou, si la puissance n'est pas multipliée par un facteur logarithmique, peut aussi avoir la valeur $1 + \frac{1}{n}$ (n nombre entier positif).

Je recherche alors quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les valeurs

$$u_1 = v_1,\ \ u_2 = v_2$$

auxquelles correspondent des valeurs z_1, z_2 liées par l'équation (B.) ne soient pas des points de ramification pour les fonctions

$$z_1 + z_2,\ z_1 z_2,$$

et je trouve, en posant

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} f(z) - \frac{df(z)}{dz}\varphi(z) = F(z),$$

les conditions que voici:

Tout système z_1, z_2 qui satisfait à l'équation (B.) doit aussi satisfaire à l'équation

$$\text{(C.)} \qquad F(z_1)f(z_2)^2 + F(z_2)f(z_1)^2 = 0.$$

Je montre alors que, pour des valeurs finies

$$u_1 = v_1,\ \ u_2 = v_2,$$

aucun des quotients

$$\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)},\ \ \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$$

ne peut atteindre une des valeurs que j'ai désignées ci-dessus par γ, et aucune des intégrales

$$\int f(z_1)\,dz_1,\ \int\varphi(z_1)\,dz_1,\ \int f(z_2)\,dz_2,\ \int\varphi(z_2)\,dz_2,$$

en supposant les chemins d'intégration finis, ne devient infinie, sinon il y a une relation entre les derniers éléments des chemins par lesquels u_1, u_2 tendent aux points v_1, v_2.

1402] La coexistence des équations (B.) et (C.) entraîne les théorèmes suivants:

En posant

$$\text{(D.)} \qquad \frac{\varphi(z)}{f(z)} = \zeta,$$

et considérant z comme fonction de ζ, z doit avoir au plus deux valeurs pour une valeur donnée de ζ; donc

$$\text{(E.)} \qquad z = P(\zeta) + Q(\zeta)\sqrt{R(\zeta)},$$

où $P(\zeta)$, $Q(\zeta)$, $R(\zeta)$ sont fonctions uniformes de ζ.

De même, la fonction $f(z)^2$, comme fonction de ζ, n'a pas plus de deux valeurs pour une valeur donnée de ζ; donc

$$\text{(F.)} \qquad f(z)^2 = S(\zeta) + T(\zeta)\sqrt{R(\zeta)},$$

$S(\zeta)$, $T(\zeta)$ étant fonctions uniformes de ζ.

On a de même, pour $f(z)$

$$\text{(G.)} \qquad f(z) = [Q_1(\zeta)R(\zeta) + P_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}]\sqrt{R_1(\zeta)},$$

en posant

$$\frac{d\zeta}{dz} = P_1(\zeta) + Q_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)},$$

$R_1(\zeta)$ étant une fonction uniforme de ζ telle que les chemins de la variable ζ, qui changent $\sqrt{R(\zeta)}$ en $-\sqrt{R(\zeta)}$, ne changent pas la fonction $\sqrt{R_1(\zeta)}$.

En posant

$$\text{(H.)} \qquad \begin{cases} z_1 = P(\zeta_1) + Q(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}, \\ z_2 = P(\zeta_2) + Q(\zeta_2)\sqrt{R(\zeta_2)} \end{cases}$$

et

$$\text{(J.)} \qquad \psi(\zeta) = R(\zeta)R_1(\zeta),$$

les équations (A.) se transforment en

$$\text{(A}_2.) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\varepsilon_1}^{\zeta_1} \sqrt{\psi(\zeta)}\,d\zeta + \int_{\varepsilon_2}^{\zeta_2} \sqrt{\psi(\zeta)}\,d\zeta = u_1, \\ \displaystyle\int_{\varepsilon_1}^{\zeta_1} \zeta\sqrt{\psi(\zeta)}\,d\zeta + \int_{\varepsilon_2}^{\zeta_2} \zeta\sqrt{\psi(\zeta)}\,d\zeta = u_2, \end{cases}$$

en désignant par $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ deux valeurs de ζ correspondantes aux valeurs [1403

$$z_1 = \delta_1,\ \ z_2 = \delta_2$$

respectivement.

Je montre alors que les fonctions z et $f(z)^2$, considérées comme fonctions de ζ, ont les mêmes points singuliers essentiels, savoir les valeurs γ pour lesquelles

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \gamma$$

pour toute valeur de z. Les deux valeurs de z qui correspondent à un point $\zeta = \alpha$ non essentiellement singulier pour la fonction z de ζ sont ou des points non singuliers de $f(z)$ et $\varphi(z)$ ou des points singuliers $z = a$ de ces fonctions, tels que leurs développements dans le voisinage de $z = a$ ne contiennent point de logarithmes. Il faut de plus que, dans l'expression

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \alpha + \varrho_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \varrho_2(z-a)^{\frac{2}{n}} + \cdots,$$

les coefficients ϱ_1 et ϱ_2 ne s'annulent pas simultanément, et enfin qu'à toute valeur de z qui ne rend pas infinies les intégrales

$$\int f(z)\,dz,\ \int \varphi(z)\,dz$$

ne correspondent que des valeurs de ζ non essentiellement singulières pour la fonction z de ζ.

Je démontre alors les théorèmes que voici:

Soit $\zeta = \beta$ une valeur finie non essentiellement singulière pour la fonction z de ζ. Si l'une des deux valeurs de z qui correspondent à $\zeta = \beta$ est un point singulier $z = a$ des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, en représentant par

$$\frac{-n-k+1}{n} \quad (k = 0 \text{ ou un entier positif})$$

le plus petit exposant de $z-a$ dans leurs développements, dans le voisinage de $z = a$, l'une des quantités

$$(\zeta-\beta)^k\sqrt{\psi(\zeta)} \quad \text{ou} \quad (\zeta-\beta)^{\frac{k+1}{2}}\sqrt{\psi(\zeta)}$$

est uniforme dans le voisinage de $\zeta = \beta$ et ne devient ni zéro ni infinie pour $\zeta = \beta$. Cela a lieu également pour $z = \infty$, en désignant l'exposant le plus petit de $\frac{1}{z}$ par

$$\frac{n+1-k}{n}.$$

Si à la valeur $\zeta = \beta$ correspond une valeur non singulière b des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, mais qu'on ait $\psi(\beta) = \infty$, alors

$$(\zeta-\beta)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\psi(\zeta)}$$

reste uniforme dans le voisinage de $\zeta = \beta$. La fonction $\psi(\zeta)$ ne peut s'annuler pour aucune valeur finie de ζ. Si $\zeta = \infty$ n'est pas un point essentiellement singulier pour la fonction z de ζ, les quantités

$$\zeta^2\sqrt{\psi(\zeta)},\ \zeta^{\frac{3}{2}}\sqrt{\psi(\zeta)}$$

ne deviennent ni nulles ni infinies pour $z = \infty$ et sont uniformes dans le domaine de $z = \infty$. Au moyen des équations (A.), je démontre alors que $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ sont des fonctions uniformes de u_1, u_2 pour toutes les valeurs finies de ces variables.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 278, Zeile 8 v. u. das zweite z statt $z-n$,
„ 280, „ 14, 15 $\zeta = \beta$ statt $z = \beta$.

SCH.

XXXVII.

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA FORME $f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$.

(Extrait d'une lettre adressée à M. HERMITE.)

(Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, t. 93, Paris 1881, p. 1063—1065; Séance du 19 Décembre 1881.)

Je vous ai déjà parlé du prix que j'attache à la méthode pour intégrer [1063
les équations différentielles de la forme

$$f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0,$$

que vous avez donnée dans vos Leçons à l'École Polytechnique. Je crois qu'il serait possible d'en tirer le Tableau de toutes les équations de ce genre qui admettent pour solutions des fonctions uniformes de la variable. Voici un exemple: supposons que l'on cherche toutes les équations

$$(1.) \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)^m = F(u) = (u-a_1)^{n_1}(u-a_2)^{n_2}\dots$$

qui s'intègrent par des fonctions uniformes et doublement périodiques, problème qu'ont résolu MM. BRIOT et BOUQUET. La difficulté principale qu'il faut [1064
vaincre consiste dans la détermination des dénominateurs des fraction $\frac{n_i}{m}$, supposées réduites à leur plus simple expression. On y parvient comme il suit, en employant votre méthode d'intégration. Je pose

$$\frac{n_i}{m} = \frac{\nu_i}{\mu_i},$$

où ν_i, μ_i n'ont aucun diviseur commun, et semblablement

$$\frac{n_1+n_2+\cdots}{m} = \frac{\nu}{\mu},$$

ν et μ étant premiers entre eux. Cela posé, si l'équation (1.) est intégrable par des fonctions uniformes et doublement périodiques, il faut que le nombre p, désignant la classe de la fonction algébrique η de u, définie par l'équation

$$\eta^m = F(u) \tag{2.}$$

soit égal à l'unité. Nommons ω le nombre des points de ramification simple de cette fonction, et employons une formule connue de RIEMANN (Théorie des fonctions ABÉLiennes, Journal de BORCHARDT, t. 54, no. 7[1])

$$\omega - 2m = 2(p-1);$$

vous voyez qu'on en conclut

$$\omega = 2m. \tag{3.}$$

Or, dans le point a_i se confondent $\frac{\mu_i - 1}{\mu_i} m$ points de ramification simple; d'ailleurs les entiers $n_1, n_2, \ldots$ n'ont point tous un même facteur commun avec le nombre m, et comme, dans $z = \infty$, se confondent encore $\frac{\mu - 1}{\mu} m$ points de ramification simple, l'équation (3.) donne:

$$\zeta - 1 = \Sigma \frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu}, \tag{4.}$$

en désignant par ζ le nombre des points $a_1, a_2, \ldots$ pour lesquels $\mu > 1$, le signe Σ se rapportant à tous ces points.

De cette équation résulte d'abord

$$\zeta \geqq 2, \tag{5.}$$

1065] et d'autre part, ayant

$$\mu_i \geqq 2, \quad \mu \geqq 1,$$

on conclut de l'équation (4.)

$$\zeta \leqq 4. \tag{6.}$$

On a donc ces trois cas à distinguer:

I. $\zeta = 2, \quad \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu} = 1;$

II. $\zeta = 3, \quad \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu} = 2;$

III. $\zeta = 4, \quad \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_4} + \frac{1}{\mu} = 3.$

Les solutions de ces équations fournissent le Tableau qu'ont donné MM. BRIOT et BOUQUET dans le Journal de l'École Polytechnique (XXXVI^e Cahier, p. 222).

[1]) Werke (1892), p. 144. Sch.

XXXVIII.

ÜBER FUNCTIONEN, WELCHE DURCH LINEARE SUBSTITUTIONEN UNVERÄNDERT BLEIBEN.

(Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.-A.-Universität, Göttingen 1882, Nr. 5, 4. März 1882, Sitzung am 4. März; S. 81—84.)

In einer Note d. d. 30. December 1881, welche Herr F. KLEIN einer [81 in den Mathematischen Annalen unter dem 17. December 1881 gedruckten [82 Arbeit des Herrn H. POINCARÉ in Paris: »sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires« angehängt hat, sagt Herr KLEIN, dass ich über die Functionen, welche durch lineare Substitutionen unverändert bleiben, nirgends etwas veröffentlicht habe.

Dieser Ausspruch ist nicht den Thatsachen entsprechend. Ich begnüge mich zum Nachweis der Unrichtigkeit desselben meine folgenden Arbeiten zu citiren:

1. Meine Arbeit: »sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces. Extrait d'une lettre adressée à M. HERMITE. BORCHARDTS Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 83, p. 13, November 1876[1]).

In dieser Arbeit ist für die in dem Titel genannten Differentialgleichungen die durch die Gleichung

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \zeta$$

[1]) Abh. XXIV, S. 65 ff. dieses Bandes. Sch.

definirte Function z von ζ (wo $f(z)$, $\varphi(z)$ ein Fundamentalsystem von Integralen bedeutet) einer eingehenden Behandlung unterworfen worden.

2. In meiner Arbeit: »Über eine Klasse von Functionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen« in BORCHARDTS Journal für die reine und ange-
83] wandte Mathematik, Band 89, p. 151, 14. Februar 1880[1]), habe ich für die allgemeinen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die durch die Gleichung

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \zeta$$

definirte Function z von ζ (wo $f(z)$, $\varphi(z)$ wieder ein Fundamentalsystem von Integralen bedeutet) als Grundlage für meine dortigen Untersuchungen eingeführt (S. daselbst p. 158[2]). (Vergl. auch die Notiz in den »Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vom 4. Februar 1880[3], worin die Resultate der vorgenannten Arbeit angegeben sind. — Vergl. auch meinen Brief an BORCHARDT, veröffentlicht in BORCHARDTS Journal, Bd. 90, p. 71[4])).

Wie aus Briefen hervorgeht, mit welchen unmittelbar nach Erscheinen meiner unter 2. bezeichneten Arbeit Herr POINCARÉ mich beehrte, hat dieselbe Herrn POINCARÉ zu seinen ausgezeichneten Untersuchungen über die Functionen, welche durch lineare Substitutionen unverändert bleiben, den directen Anlass gegeben.

Ich unterlasse es in eine Erörterung darüber einzutreten, in wie weit meine beiden vorgenannten Arbeiten auf die Arbeiten des Herrn KLEIN einen Einfluss ausgeübt haben mögen. Ich begnüge mich vielmehr eine Note des Herrn KLEIN anzuführen, welche Bezug nimmt auf

3. meine Arbeit: »Über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie« in BORCHARDTS Journal,

[1]) Abh. XXXI, S. 191 ff. dieses Bandes. Sch.
[2]) S. 199 dieses Bandes. Sch.
[3]) Abh. XXX, S. 185 ff. dieses Bandes. Sch.
[4]) Abh. XXXIV, S. 225 ff. dieses Bandes. Sch.

Band 81, p. 97, Juli 1875[1]). (Vergl. auch die Angabe der Resultate dieser Arbeit in den Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Juli 1875[2]).)

Die Note des Herrn KLEIN, welche auf diese Abhandlung Bezug nimmt, [84
steht in seinem ersten Aufsatze über lineare Differentialgleichungen. Dieser befindet sich in den Mathematischen Annalen, Band XI, p. 115 sqq. In derselben (p. 118) bemerkt Herr KLEIN, dass er durch das Studium meiner unter 3. erwähnten Arbeit zu seinen Entwickelungen veranlasst worden sei.

Heidelberg, Februar 1882.

[1]) Abh. XX, S. 11 ff. dieses Bandes. Sch.
[2]) Abh. XIX, S. 1 ff. dieses Bandes. Sch.

XXXIX.

ÜBER LINEARE HOMOGENE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, ZWISCHEN DEREN INTEGRALEN HOMOGENE RELATIONEN HÖHEREN ALS ERSTEN GRADES BESTEHEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1882, XXX, S. 703—710; vorgelegt am 8. Juni; ausgegeben am 29. Juni.)

Ein Fundamentalsystem von Integralen einer homogenen linearen [703
Differentialgleichung ist dadurch characterisirt, dass zwischen den Elementen des Systems keine homogene Gleichung ersten Grades mit constanten Coefficienten stattfinden darf. Man kann aber voraussetzen, dass zwischen den Elementen homogene Relationen höheren Grades bestehen. Ist die Ordnung der Differentialgleichung die m^{te}, so ist nur erforderlich, dass die Anzahl solcher Relationen nicht grösser als $m-2$ sei. Es ist alsdann die besondere Natur der Integrale unter Voraussetzung solcher Relationen zu ergründen.

Im Folgenden sind die hauptsächlichsten Resultate einer Arbeit angegeben, welche ich ausführlicher zu veröffentlichen gedenke, und welche ausser einer Reihe von Sätzen über Differentialgleichungen einer beliebigen Ordnung die Lösung des eben in Anregung gebrachten Problems für den Fall der Differentialgleichungen dritter Ordnung enthält.

Es ist einleuchtend, dass die Differentialgleichungen, welche algebraisch integrirbar sind, zu der Klasse von Differentialgleichungen gehören, zwischen deren Integralen homogene Relationen bestehen.

1.

Es sei

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^3y}{dz^3} + p\frac{d^2y}{dz^2} + q\frac{dy}{dz} + ry = 0$$

eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit in z rationalen
704] Coefficienten, gehörig zu der Klasse von Differentialgleichungen, welche sich in meiner Arbeit (BORCHARDTS Journal für Mathematik Bd. 66, S. 146[1]) Gl. (12.)) characterisirt finden, und es werde vorausgesetzt, dass die Wurzeln sämmtlicher determinirender Fundamentalgleichungen rationale Zahlen sind, und dass zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung (A.) y_1, y_2, y_3 eine irreductibele Gleichung

$$\text{(B.)} \qquad f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

stattfinde, wo $f(y_1, y_2, y_3)$ eine ganze rationale und homogene Function n^{ten} Grades von y_1, y_2, y_3 bedeutet.

Bezeichnen wir mit $H(f)$ die HESSEsche Covariante von f, so ist

$$\text{(1.)} \qquad H(f) = X(z)$$

Wurzel einer rationalen Function von z, welche nicht identisch verschwindet.

Substituirt man in (A.)

$$\text{(2.)} \qquad y = X(z)^{\frac{1}{3n-6}}v,$$

so geht dieselbe über in

$$\text{(A'.)} \qquad \frac{d^3v}{dz^3} + p'\frac{d^2v}{dz^2} + q'\frac{dv}{dz} + r'v = 0.$$

Ist v_1, v_2, v_3 das y_1, y_2, y_3 entsprechende Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (A'.), so ist

$$\text{(B'.)} \qquad f(v_1, v_2, v_3) = 0.$$

Ist z ein beliebiger Werth, und nimmt auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale von (A.) für $z = z_1$ je einen gleichen Werth an, wie für $z = z$, so erhalten v_1, v_2, v_3 auf denselben Wegen in z_1 Werthe, welche aus denen für z durch Multiplication mit derselben Einheitswurzel hervorgehen.

---

[1]) Abh. VI, Band I, S. 186 dieser Ausgabe. Sch.

Ist n grösser als Zwei, so ist z_1 eine algebraische Function von z, und es sind sämmtliche Integrale der Gleichung (A.) algebraisch.

2.

Bezeichnen wir mit u_1, u_2, u_3 das resp. y_1, y_2, y_3 entsprechende Fundamentalsystem von Integralen der zu (A.) adjungirten Differentialgleichung:

$$\text{(A''.)} \qquad \frac{d^3u}{dz^3} - \frac{d^2(pu)}{dz^2} + \frac{d(qu)}{dz} - ru = 0^{*)},$$

so finden wir

$$\text{(C.)} \qquad \frac{\partial f}{\partial y_i} = Mu_i, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

wo M Wurzel einer rationalen Function von z.

Ist insbesondere n gleich Zwei, so ergiebt sich zwischen p, q, r in [705 der Gleichung (A.) die Relation:

$$\text{(1.)} \qquad 2r = -\tfrac{1}{2}p^{(2)} - \tfrac{2}{3}pp^{(1)} - \tfrac{4}{27}p^3 + \tfrac{2}{3}pq + q^{(1)},$$

wo $p^{(i)} = \frac{d^ip}{dz^i}$, $q^{(i)} = \frac{d^iq}{dz^i}$ gesetzt ist, und man hat

$$\text{(2.)} \qquad M = e^{-\frac{2}{3}\int p\,dz}.$$

Findet umgekehrt die Relation (1.) statt, so besteht zwischen y_1, y_2, y_3 eine Gleichung (B.) vom zweiten Grade.

Bestimmt man zwei Functionen p_1, p_0 aus den Gleichungen:

$$\text{(3.)} \qquad 3p_1 = p, \quad 2p_1^2 + p_1^{(1)} + 4p_0 = q, \quad p_1^{(1)} = \frac{dp_1}{dz},$$

so ergiebt Gleichung (1.)

$$\text{(4.)} \qquad r = 4p_0p_1 + 2p_0^{(1)}, \quad p_0^{(1)} = \frac{dp_0}{dz},$$

d. h. ist n gleich zwei, so ist die Gleichung (A.) übereinstimmend mit derjenigen Differentialgleichung, welcher das Quadrat jedes Integrals der Gleichung:

$$\text{(5.)} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + p_1\frac{dy}{dz} + p_0y = 0$$

genügt.

---

*) Vergleiche über die Definition adjungirter Differentialgleichungen meine Arbeit in BORCHARDTS Journ. für Mathem. Bd. 76, S. 183[1]), und eine Arbeit des Hrn. FROBENIUS in demselben Journal, Bd. 77, S. 245.

---

[1]) Abh. XVI, Band I, S. 421 dieser Ausgabe. Sch.

3.

Es seien sämmtliche Integrale der Gleichung:

$$\text{(1.)} \qquad \frac{d^m y}{dz^m} + f_1(z)\frac{d^{m-1}y}{dz^{m-1}} + \cdots + f_m(z)y = 0$$

mit rationalen Coefficienten, algebraisch. Gehören zu einem beliebigen Werthe z genau die Werthe $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ von der Beschaffenheit, dass auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale von (1.) in $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ je einen gleichen Werth erhält wie in z, so kann man eine rationale Function $\varphi(z)$ von z angeben, von der Art, dass auf denselben Wegen $y\varphi(z)^{-\frac{1}{\mu}}$ in $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ Werthe erhält, die sich nur durch Einheitswurzeln als Factoren von dem Werthe von $y\varphi(z)^{-\frac{1}{\mu}}$ in z unterscheiden, wo y ein willkürliches Integral der Gleichung (1.) und μ eine ganze Zahl bedeutet.

Setzt man

$$\text{(2.)} \qquad y = \varphi(z)^{\frac{1}{\mu}} w,$$

so genügt w der Gleichung

$$\text{(3.)} \qquad \frac{d^m w}{dz^m} + g_1(z)\frac{d^{m-1}w}{dz^{m-1}} + \cdots + g_m(z)w = 0$$

706] mit rationalen Coefficienten. Ein willkürliches Integral dieser Gleichung erhält auf geeigneten Wegen in $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ Werthe, welche sich von dem Werthe desselben in z durch Einheitswurzeln als Factoren unterscheiden.

Es sei

$$\text{(4.)} \qquad t = (\alpha - z)(\alpha - z_1)\ldots(\alpha - z_{\sigma-1}),$$

wo α eine willkürliche Grösse, so ist t eine rationale Function von z.

Die Gleichung (3.) lässt sich in eine Gleichung:

$$\text{(5.)} \qquad \frac{d^m w}{dt^m} + h_1(t)\frac{d^{m-1}w}{dt^{m-1}} + \cdots + h_m(t)w = 0$$

mit der unabhängigen Variabeln t transformiren, deren Coefficienten rationale Functionen von t werden.

Die Gleichung (5.) besitzt die beiden Eigenschaften, dass erstlich zu einem beliebigen Werthe t kein anderer t_1 gehört, für welchen jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (5.) je einen gleichen Werth annimmt, wie in t; und dass zweitens die Anzahl der Werthe, welche ein willkürliches Inte-

gral derselben Gleichung durch alle Umläufe von t annimmt, und wovon nicht der Quotient zweier constant, übereinstimmt mit der Anzahl der Werthe, welche ein willkürliches Integral der Gleichung (1.) durch alle Umläufe von z annimmt, und wovon nicht der Quotient zweier constant.

Ist ν die Anzahl derjenigen allen Umläufen der unabhängigen Variabeln z entsprechenden Werthe eines willkürlichen Integrals einer linearen homogenen algebraisch integrirbaren Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, mit rationalen Coefficienten, von welchen Werthen nicht der Quotient zweier constant, so ist die Anzahl der verschiedenen Werthe von z, welche zu einem Werthe des Quotienten zweier willkürlicher Integrale derselben Differentialgleichung gehören, nicht kleiner als $\frac{m-1}{2}\nu$.

4.

Die Gleichung (B.) können wir als eine algebraische Gleichung zwischen

$$\text{(1.)} \qquad \eta = \frac{y_2}{y_1}, \quad \zeta = \frac{y_3}{y_1}$$

betrachten.

Wir bezeichnen nach Riemann mit p die Klasse dieser algebraischen Gleichung, d. h. die Anzahl der linearunabhängigen Integrale erster Gattung, welche zu derselben gehören.

Seien $J_1, J_2, \ldots, J_p$ solche linearunabhängige Integrale erster Gattung, [707 in der Form, welche nach dem Vorgange des Herrn Aronhold*) von Clebsch und Herrn Gordan**) für die Abelschen Functionen eingeführt worden ist, so dass also

$$\text{(2.)} \qquad dJ_k = \frac{\varphi_i(y_1, y_2, y_3)}{c_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3\frac{\partial f}{\partial y_3}} \sum \pm c_1 y_2 dy_3, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

wo $\varphi_i = 0$ eine Curve $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung darstellt, welche durch die sämmtlichen Doppel- und Rückkehrpunkte der Curve (B.) hindurchgeht.

Wir finden zunächst

$$\text{(3.)} \qquad \frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3\frac{\partial f}{\partial y_3}} = (n-1)^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{\Delta}{X(z)}}\, dz = \frac{\Delta}{M} dz,$$

*) Monatsberichte der Akademie, April 1861.

**) Theorie der Abelschen Functionen, S. 2.

wo $X(z)$, M, Δ Wurzeln rationaler Functionen von z sind, und zwar $X(z)$ dieselbe Bedeutung hat wie in Gleichung (1.) No. 1, M dieselbe Bedeutung wie in Gleichung (C.), und endlich

$$\text{(4.)} \qquad \Delta = e^{-\int p\,dz}.$$

Wir zeigen alsdann, dass $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ als Functionen von z ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung p^{ter} Ordnung

$$\text{(D.)} \qquad \frac{d^p w}{dz^p} + Q_1 \frac{d^{p-1} w}{dz^{p-1}} + \cdots + Q_p w = 0$$

mit in z rationalen Coefficienten bilden.

Giebt es einen Umlauf U von z, welcher y_1, y_2, y_3 resp. in y_1', y_2', y_3' überführt und zugleich den Quotienten λ zweier willkürlicher Integrale der Gleichung (D.) ungeändert lässt, ohne dass $\frac{y_2'}{y_1'} = \frac{y_2}{y_1}$, $\frac{y_3'}{y_1'} = \frac{y_3}{y_1}$, so muss eine zweimalige Anwendung dieses Umlaufes $\frac{y_2}{y_1}$, $\frac{y_3}{y_1}$ ungeändert lassen.

Ist ν die Anzahl der allen Umläufen von z entsprechenden Werthe eines willkürlichen Integrals der Gleichung (A.), wovon nicht der Quotient zweier constant, so ist $\frac{1}{2}\nu$ oder ν die Anzahl der allen Umläufen von z entsprechenden Werthe eines willkürlichen Integrals der Gleichung (D.), wovon nicht der Quotient zweier constant, je nachdem es Umläufe der Art U giebt oder nicht giebt.

Die Anzahl der Stellen (η, ζ) der Riemannschen Fläche, welche einem gegebenen Werthe des Quotienten

$$\frac{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_p\varphi_p}{c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 + \cdots + c_p'\varphi_p},$$

708] wo $c_1, c_2, \ldots, c_p$, $c_1', c_2', \ldots, c_p'$ willkürliche Constanten, entsprechen, ist bekanntlich $2p-2$*).

Ist daher die Gleichung (A.) so beschaffen, dass nicht jeder Quotient zweier Integrale derselben für einen beliebigen Werth von z und noch für einen anderen Werth z_1 je einen gleichen Werth annehmen kann, so ist die Anzahl der Werthe z, welche einem gegebenen Werthe des Quotienten λ zweier

*) Riemann, Abelsche Functionen[1]).

[1]) Werke (1892), S. 117. Sch.

willkürlicher Integrale der Gleichung (D.) entsprechen, $p-1$ oder $2p-2$, je nachdem es Umläufe der Art U giebt oder nicht giebt. In dem einen oder dem anderen Falle folgt aus No. 3

$$\text{(E.)} \qquad \begin{cases} p-1 \geqq \dfrac{p-1}{2}\,\dfrac{1}{2}\nu \quad \text{oder} \\ 2p-2 \geqq \dfrac{p-1}{2}\nu \end{cases}$$

also für $p > 1$

$$\text{(F.)} \qquad \nu \leqq 4.$$

Nach No. 3 ergiebt sich, dass (F.) auch bestehen bleibt, wenn für einen beliebigen Werth z und noch andere Werthe z_1 jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (A.) je einen gleichen Werth annimmt.

Das durch (F.) ausgedrückte Resultat lässt sich auch folgendermassen aussprechen:

Ist die Klasse p der Gleichung (B.) grösser als Eins, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln*) derjenigen algebraischen Gleichung, welcher das allgemeine Integral der Gleichung (A.) genügt, nicht grösser als Vier.

5.

Ist p gleich Eins, so gehört zur Gleichung (B.) nur ein Integral erster Gattung J.

Wir zeigen, dass

$$\text{(1.)} \qquad dJ = \frac{\varphi(y_1, y_2, y_3)\sum \pm c_1 y_2\, dy_3}{c_1\dfrac{\partial f}{\partial y_1} + c_2\dfrac{\partial f}{\partial y_2} + c_3\dfrac{\partial f}{\partial y_3}} = \psi(z, \eta)\,dz = R\,dz,$$

wo $\psi(z, \eta)$ eine rationale Function von z und η und R Wurzel einer rationalen Function von z.

Aus den Untersuchungen der Herren Briot und Bouquet**) ergiebt sich, dass R^4 oder R^6 eine rationale Function von z sein müsse.

*) Über die Bedeutung dieser Bezeichnung siehe meine Arbeit in Borchardts Journal für Mathem. Bd. 81, S. 111[1]), No. 9.

**) Journal de l'École Polytechnique, t. 21, p. 222.

[1]) Abh. XX, S. 27 dieses Bandes. Sch.

Ist die Gleichung (A.) so beschaffen, dass nicht für ein beliebiges z und 709] noch für einen anderen Werth z_1 jeder Quotient zweier Integrale derselben je einen gleichen Werth annimmt, so ergiebt sich, dass η und demnach auch eine gewisse Potenz eines willkürlichen Integrals y der Gleichung (A.) eine rationale Function von z und R ist.

Es ist daher die Anzahl der reducirten Wurzeln derjenigen algebraischen Gleichung, welcher das allgemeine Integral der Gleichung (A.) genügt, durch eine der Zahlen 2, 3, 4, 6 gegeben.

Nach No. 3 bleibt dieser Satz auch bestehen, wenn für ein beliebiges z und noch andere Werthe z_1 jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (A.) je einen gleichen Werth annehmen kann.

Ist endlich p gleich Null, so ist bekanntlich

$$\eta = \frac{f_2(s)}{f_1(s)}, \quad \zeta = \frac{f_3(s)}{f_1(s)}, \tag{2.}$$

wo $f_1(s), f_2(s), f_3(s)$ ganze rationale Functionen n^{ten} Grades einer Variabeln s darstellen.

Wir beweisen, dass s als Function von z der Quotient zweier Integrale ξ_1, ξ_2 einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit der unabhängigen Variabeln z und mit in z rationalen Coefficienten ist.

Es sei

$$\xi_1^n f_i(s) = \varphi_i(\xi_1, \xi_2), \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{3.}$$

so findet sich

$$y_i = \varrho\, \varphi_i(\xi_1, \xi_2), \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4.}$$

wo ϱ Wurzel einer rationalen Function von z ist.

Das allgemeine Integral der Gleichung (A.) ist also im Falle $p = 0$ abgesehen von der Wurzel einer rationalen Function als Factor durch eine ganze rationale und homogene Function n^{ten} Grades des Fundamentalsystems von Integralen ξ_1, ξ_2 einer algebraisch integrirbaren linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in z rationalen Coefficienten*) darstellbar.

*) Über solche Differentialgleichungen zweiter Ordnung vergl. meine Arbeiten in BORCHARDTS Journal Bd. 81, S. 97 und Bd. 85, S. 1[1]).

[1]) Abh. XX, S. 11 und XXV, S. 115 dieses Bandes. Sch.

Für $n = 2$ ergeben sich ebenfalls die Gleichungen (2.) und die daraus hervorgehenden (4.). Die Functionen $\varphi_i(\xi_1, \xi_2)$ sind in diesem Falle vom zweiten Grade und ϱ ist eine Constante, während die Differentialgleichung zweiter Ordnung in diesem Falle nicht algebraisch integrirbar zu sein braucht, in Übereinstimmung mit dem in No. 2 gegebenen Resultate.

6.

Für die lineare homogene Differentialgleichung (A.), zwischen deren Integralen eine Gleichung (B.) stattfindet, ergeben sich nach dem Vorhergehenden folgende Resultate:

I. Ist der Grad n der Gleichung (B.) gleich Zwei, so ist die Glei- [710 chung (A.) übereinstimmend mit der Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher das Quadrat jedes Integrals einer beliebigen linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten genügt.

II. Ist n grösser als Zwei, so sind die Integrale der Gleichung (A.) algebraische Functionen von z.

Hierbei ergeben sich drei Fälle:

a) Ist die Klasse p der algebraischen Gleichung (B.) grösser als Eins, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln derjenigen algebraischen Gleichung, welcher das allgemeine Integral der Gleichung (A.) genügt, nicht grösser als Vier.

b) Ist p gleich Eins, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln Zwei, Drei, Vier oder Sechs.

c) Ist p gleich Null, so sind die Integrale der Gleichung (A.), abgesehen von einer Wurzel einer rationalen Function als einem für alle gültigen Factor, rationale ganze homogene Functionen n^{ten} Grades des Fundamentalsystems von Integralen ξ_1, ξ_2 einer algebraisch integrirbaren linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten.

Da jede algebraisch integrirbare Gleichung (A.) die Eigenschaft hat, dass zwischen den Elementen des Fundamentalsystems y_1, y_2, y_3 eine Gleichung (B.) besteht, so sind durch diese Resultate auch alle die Fälle erschöpft, in welchen eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit rationalen Coefficienten nur algebraische Integrale besitzt.

Die Vergleichung der auf die Anzahl der reducirten Wurzeln bezüglichen Sätze, für den Fall, dass die Gleichung (A.) algebraisch integrirbar ist, mit den Resultaten des Herrn C. Jordan*) behalte ich mir für die ausführlichere Abhandlung über den gegenwärtigen Gegenstand vor.

*) Borchardts Journal für Mathem., Bd. 84, S. 89.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

S. 293, Gl. (3.) wurde $\sqrt[3]{\frac{\Delta}{X(z)}}$ statt $\sqrt[3]{\frac{X(z)}{\Delta}}$ gesetzt,

" 295, Zeile 6 wurden die Worte »für $p > 1$« eingeschaltet.

2) Die Eingangs (S. 289) erwähnte Arbeit ist die folgende Abh. XL. Sch.

XL.

ÜBER LINEARE HOMOGENE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, ZWISCHEN DEREN INTEGRALEN HOMOGENE RELATIONEN HÖHEREN ALS ERSTEN GRADES BESTEHEN.

(Acta Mathematica, Band 1, 1882, S. 321—362.)

Ein Fundamentalsystem von Integralen einer homogenen linearen [321
Differentialgleichung ist dadurch characterisirt, dass zwischen den Elementen des Systems keine homogene Gleichung ersten Grades mit constanten Coefficienten stattfinden darf. Man kann aber voraussetzen, dass zwischen den Elementen homogene Relationen höheren Grades bestehen. Ist die Ordnung der Differentialgleichung die m^{te}, so ist nur erforderlich, dass die Anzahl solcher Relationen nicht grösser als $m-2$ sei. — Es ist alsdann die besondere Natur der Integrale unter Voraussetzung solcher Relationen zu ergründen.

Im Folgenden habe ich die Lösung dieses Problems für die Differentialgleichungen dritter Ordnung durchgeführt. Für diese kann es nur eine Relation der genannten Art geben. Bemerkenswerth sind die Anwendungen, welche wir bei unserer Untersuchung von der Theorie der Abelschen Integrale haben machen können.

Es ist einleuchtend, dass die Differentialgleichungen, welche algebraisch integrirbar sind, zu der Klasse von Differentialgleichungen gehören, zwischen deren Integralen homogene Relationen bestehen.

Wir haben in der folgenden Arbeit auch eine Reihe von Sätzen über algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen aufgestellt, von welchen [322 wir in derselben Arbeit Gebrauch machen, die aber auch anderweitige Anwendungen zulassen.

Die Resultate dieser Arbeit habe ich in der auch gegenwärtig festgehaltenen Reihenfolge bereits in den Sitzungsberichten der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 8. Juni 1882 [1]), veröffentlicht.

1.

Es sei

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^3y}{dz^3} + p\frac{d^2y}{dz^2} + q\frac{dy}{dz} + ry = 0$$

eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit in z rationalen Coefficienten, gehörig zu der Klasse von Differentialgleichungen, welche sich in meiner Arbeit (BORCHARDTS Journal für Mathem. Bd. 66, S. 146 [2]), Gl. (12.)) characterisirt finden, und es werde vorausgesetzt, dass die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen rationale Zahlen sind, und dass zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung (A.) y_1, y_2, y_3 eine irreductible Gleichung

$$\text{(B.)} \qquad f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

stattfinde, wo $f(y_1, y_2, y_3)$ eine ganze rationale und homogene Function n^{ten} Grades von y_1, y_2, y_3 bedeutet.

Bezeichnen wir mit $H(f)$ die HESSEsche Covariante von f, so ist $H(f)$ nicht identisch Null, da der Voraussetzung nach f nicht in lineare Factoren zerlegbar ist*).

Ein beliebiger Umlauf von z führe $y_\varkappa$ über in

$$\text{(1.)} \qquad y'_\varkappa = a_{\varkappa 1}y_1 + a_{\varkappa 2}y_2 + a_{\varkappa 3}y_3, \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

so geht f, folglich auch $H(f)$ durch denselben Umlauf in sich selbst mit einer Constanten multiplicirt über. Demnach ist $\frac{d \log H(f)}{dz}$ eine eindeutige 323] Function von z. Da ausserdem der vorausgesetzten Natur der Integrale der Gleichung (A.) wegen diese Function für jeden im Endlichen gelegenen

*) Vergl. GORDAN und NÖTHER, in den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen, 13. Dec. 1875, 10. Jan. 1876.

1) Abh. XXXIX, S. 289 ff. dieses Bandes. Sch.
2) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 186. Sch.

Punkt p in der z-Ebene mit einer bestimmten Potenz von $z-p$, und für $z=\infty$ mit einer bestimmten Potenz von $\frac{1}{z}$ multiplicirt endlich und stetig wird, so ist dieselbe eine rationale Function. Da $H(f)$ ebenfalls für jeden im Endlichen befindlichen Punkt p mit einer bestimmten Potenz von $z-p$ und für $z=\infty$ mit einer bestimmten Potenz von $\frac{1}{z}$ multiplicirt endlich und stetig wird, so ist demnach

$$\text{(2.)} \qquad H(f) = X(z)$$

Wurzel einer rationalen Function von z.

Setzen wir

$$\text{(3.)} \qquad \frac{y_2}{y_1} = \eta, \qquad \frac{y_3}{y_1} = \zeta,$$
$$H(f) = y_1^{3n-6} H_1(\eta, \zeta),$$

so verwandelt sich die Gl. (2.) in

$$\text{(4.)} \qquad \left[y_1 X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}\right]^{3n-6} H_1(\eta, \zeta) = 1.$$

Ist z ein beliebiger Werth, und nimmt auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (A.) für $z = z_1$ je einen gleichen Werth an wie für $z = z$, so folgt aus der Gleichung (4.), dass auf denselben Wegen $y_1 X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}$ in z_1 einen Werth annimmt, welcher aus dem für z durch Multiplication mit einer Einheitswurzel λ hervorgeht. Da jeder Quotient zweier Integrale für $z = z_1$ denselben Werth wie für z annimmt, so folgt, dass auch $y_2 X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}$, $y_3 X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}$ für $z = z_1$ Werthe annehmen, welche aus denen für z durch Multiplication mit λ hervorgehen.

Substituirt man daher in (A.)

$$y = X(z)^{\frac{1}{3n-6}} v,$$

wodurch dieselbe in

$$\text{(A'.)} \qquad \frac{d^3v}{dz^3} + p'\frac{d^2v}{dz^2} + q'\frac{dv}{dz} + r'v = 0$$

übergehen möge, so hat das y_1, y_2, y_3 entsprechende Fundamentalsystem [324 von Integralen v_1, v_2, v_3 der Gleichung (A'.) die Eigenschaft, für $z = z_1$ Werthe anzunehmen, welche aus denen für z durch Multiplication mit derselben Einheitswurzel λ hervorgehen.

Zwischen v_1, v_2, v_3 findet die Gleichung

$$\text{(B'.)} \qquad f(v_1, v_2, v_3) = 0$$

statt.

Sei

$$v_1 = \varphi_1(z), \quad v_2 = \varphi_2(z), \quad v_3 = \varphi_3(z),$$

so ist der Voraussetzung gemäss, wenn man von z auf geeigneten Wegen nach z_1 geht,

$$\text{(5.)} \qquad \varphi_\varkappa(z_1) = \lambda \varphi_\varkappa(z), \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

wo λ eine Einheitswurzel bedeutet.

Die Functionen $\varphi_\varkappa(z_1)$ genügen der Gleichung

$$\text{(6.)} \qquad \frac{d^3 v}{dz_1^3} + p'(z_1)\frac{d^2 v}{dz_1^2} + q'(z_1)\frac{dv}{dz_1} + r'(z_1) v = 0.$$

Es sei

$$z = \psi(z_1), \quad \frac{d^i z}{dz_1^i} = \psi^{(i)}(z_1).$$

Transformirt man Gl. (6.) in die unabhängige Variable z, so folgt

$$\text{(6a.)} \qquad \frac{d^3 v}{dz^3}\psi'^3 + [3\psi'\psi'' + p'(z_1)\psi'^2]\frac{d^2 v}{dz^2} + [\psi^{(3)} + p'(z_1)\psi^{(2)} + q'(z_1)\psi']\frac{dv}{dz} + r'(z_1)v = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung durch ψ'^3, so muss dieselbe wegen Gleichung (5.) mit Gleichung (A'.) übereinstimmen. Man erhält also

$$\text{(7.)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{3\psi^{(2)}}{\psi'^2} + \frac{p'(z_1)}{\psi'} &= p'(z), \\ \frac{\psi^{(3)}}{\psi'^3} + p'(z_1)\frac{\psi^{(2)}}{\psi'^3} + \frac{q'(z_1)}{\psi'^2} &= q'(z), \\ \frac{r'(z_1)}{\psi'^3} &= r'(z). \end{aligned} \right.$$

325] Aus der ersten dieser Gleichungen folgt

$$\text{(8.)} \qquad \psi'^3 = C\frac{\Delta'(z_1)}{\Delta'(z)},$$

wo

$$\text{(9.)} \qquad \Delta'(z) = e^{-\int p'(z)\,dz}$$

gesetzt ist und C eine Constante bedeutet. Diese Constante ist von Null verschieden, da ψ' nicht identisch verschwinden darf.

Aus der letzten der Gleichungen (7.) und aus Gleichung (8.) erhält man

$$\text{(10.)} \qquad r'(z_1) = C\frac{\Delta'(z_1)}{\Delta'(z)} r'(z).$$

Aus den Gleichungen (7.) ergiebt sich ferner

$$\text{(11.)} \qquad \left[q'(z) - \frac{1}{3}\frac{dp'(z)}{dz} - \frac{2}{9}p'(z)^2\right]^3 \frac{C^2}{\Delta'(z)^2} = \left[q'(z_1) - \frac{1}{3}\frac{dp'(z_1)}{dz_1} - \frac{2}{9}p'(z_1)^2\right]^3 \frac{1}{\Delta'(z_1)^2}.$$

Da der vorausgesetzten Natur der Gleichung (A.) gemäss Δ' Wurzel einer rationalen Function ist, so findet demnach nach Gleichung (10.) oder (11.) zwischen z und z_1 eine algebraische Gleichung statt, wenn nicht

$$\text{(12.)} \qquad \left[q'(z) - \frac{1}{3}\frac{dp'(z)}{dz} - \frac{2}{9}p'(z)^2\right]^3 = C'\Delta'(z)^2$$

und zugleich

$$\text{(13.)} \qquad r'(z) = C''\Delta'(z),$$

wo C' und C'' Constanten bedeuten.

Nach Gl. (9.) ist

$$\text{(14.)} \qquad p'(z) = -\frac{d\log\Delta'(z)}{dz},$$

und aus Gl. (12.) ergiebt sich

$$\text{(15.)} \qquad q'(z) = -\frac{1}{3}\frac{d^2\log\Delta'}{dz^2} + \frac{2}{9}\left(\frac{d\log\Delta'}{dz}\right)^2 + \gamma\Delta'^{\frac{2}{3}},$$

wo γ eine Constante bedeutet.

Setzt man [326

$$\text{(16.)} \qquad \frac{d\log v}{dz} = \omega,$$

so folgt aus Gleichung (A'.)

$$\text{(17.)} \qquad \frac{d^2\omega}{dz^2} + 3\frac{d\omega}{dz}\omega + \omega^3 + p'(z)\left[\frac{d\omega}{dz} + \omega^2\right] + q'(z)\omega + r'(z) = 0.$$

Die Gleichung (17.) wird aber, unter der Voraussetzung dass $p'(z), q'(z), r'(z)$ die durch die Gleichungen (14.), (15.), (13.) gegebenen Werthe haben, befriedigt durch

$$\omega = \mu \Delta'(z)^{\frac{1}{3}}, \tag{18.}$$

wo μ eine Wurzel der Gleichung

$$\mu^3 + \gamma\mu + C'' = 0. \tag{19.}$$

Ist $C'' = 0$, so ist nach Gl. (13.) $r'(z) = 0$.

In diesem Falle wird die Gleichung (A'.) befriedigt durch

$$v_1 = \int \Delta'^{\frac{1}{3}}(z)\, dz.$$

Ein zweites Integral v_2 ergiebt sich

$$v_2 = v_1^2 + \text{const.}$$

Da ein drittes Integral $v_3 = 1$ genügt, so findet also in diesem Falle zwischen v_1, v_2, v_3 die Gleichung zweiten Grades

$$v_2 v_3 = v_1^2 + \text{const.}\, v_3^2$$

statt.

Es kann $\Delta'(z)$ nicht constant sein, da sonst nach den Gleichungen (13.), (14.), (15.) $p'(z)$, $q'(z)$, $r'(z)$ constant wären, die Gleichung (A'.) also durch eine Function der Form $e^{\varkappa z}$ befriedigt würde, wo $\varkappa$ constant; dieses widerspricht aber der vorausgesetzten Natur der Gleichung (A.). Es muss demnach Δ' für einen singulären Punkt a der Gleichung (A'.) oder für $z = \infty$ unendlich werden. Es wird aber die logarithmische Ableitung eines Integrals v der Gl. (A'.) nicht unendlich für $z = \infty$.

327] Wenn demnach C'' von Null verschieden ist, so folgt aus Gleichung (18.), dass $\Delta'(z)$ nur für die singulären Punkte a der Gl. (A'.) unendlich werden kann. Nun aber ist $\omega(z-a) = (z-a)\frac{d \log v}{dz}$ für $z = a$ gleich einer rationalen Zahl.

Es sei daher in der Umgebung von $z = a$

$$\Delta'(z)^{\frac{1}{3}} = a_0(z-a)^{-1} + \cdots;$$

alsdann muss nach Gleichung (18.) $\mu\alpha_0$ eine rationale Zahl sein. Hieraus ergiebt sich zunächst, dass γ nicht verschwinden darf, da sonst gleichzeitig $\mu\alpha_0, \mu\varepsilon\alpha_0, \mu\varepsilon^2\alpha_0$ rationale Zahlen sein müssten, wenn μ eine der Wurzeln der Gleichung $\mu^3 + C'' = 0$, ε eine primitive dritte Wurzel der Einheit bezeichnet; was nicht möglich ist.

Es ergiebt sich daher aus den Gln. (12.), (13.)

$$r'(z) = g(z)^3, \tag{20.}$$

wo $g(z)$ eine rationale Function von z bedeutet.

Der vorausgesetzten Natur der Gl. (A.) zu Folge ist in der Umgebung eines singulären Punktes a der Gleichung (A'.)

$$r'(z) = \frac{\zeta_{-3}}{(z-a)^3} + \frac{\zeta_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{\zeta_{-1}}{(z-a)} + \zeta_0 + \zeta_1(z-a) + \cdots,$$

folglich ist, wenn $a_1, a_2, \ldots, a_\varkappa$ die Gesammtheit der singulären Punkte der Gleichung (A'.) bedeuten,

$$r'(z)(z-a_1)^3(z-a_2)^3 \ldots (z-a_\varkappa)^3 = h(z)^3,$$

wo $h(z)$ eine ganze rationale Function bedeutet.

Aus demselben Grunde muss in der Umgebung von $z = \infty$

$$r'(z) = \frac{\eta_3}{z^3} + \frac{\eta_4}{z^4} + \cdots$$

sein.

Also ist $r'(z)z^3$ für $z = \infty$ nicht unendlich, und demnach $h(z)$ höchstens vom Grade $\varkappa - 1$, also

$$g(z) = \frac{h(z)}{(z-a_1)\ldots(z-a_\varkappa)} = \frac{\varepsilon_1}{z-a_1} + \frac{\varepsilon_2}{z-a_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_\varkappa}{z-a_\varkappa}. \tag{21.}$$

Aus den Gleichungen (13.), (20.), (21.), (18.) folgt demnach [328

$$\omega = \frac{\mu}{C''^{\frac{1}{3}}}\left[\frac{\varepsilon_1}{z-a_1} + \frac{\varepsilon_2}{z-a_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_\varkappa}{z-a_\varkappa}\right].$$

Aus dem oben Bemerkten ergiebt sich, dass $\frac{\mu}{C''^{\frac{1}{3}}}\varepsilon_i$ rationale Zahlen sind, und demnach

$$v = \left[(z-a_1)^{\varepsilon_1}(z-a_2)^{\varepsilon_2} \ldots (z-a_\varkappa)^{\varepsilon_\varkappa}\right]^{\frac{\mu}{C''^{\frac{1}{3}}}} \tag{22.}$$

eine Wurzel einer rationalen Function darstellt.

Von den Wurzeln der Gleichung (19.) sind wenigstens zwei μ_1, μ_2 von einander verschieden. Setzt man in (22.) $\mu = \mu_1$ und $\mu = \mu_2$, so erhält man zwei Integrale von (A'.) v_1, v_2, deren Quotient nicht constant. Substituirt man v_1, v_2 in Gl. (B'.), so folgt, dass auch v_3 eine algebraische Function von z wird.

Aus den vorhergehenden Entwickelungen folgt, dass die Gleichungen (12.) und (13.) nur stattfinden dürfen, wenn entweder $n = 2$ oder die Gleichung (A.) algebraisch integrirbar ist.

Wir fanden oben, dass, wenn die Gleichungen (12.) und (13.) nicht bestehen, zwischen z und z_1 eine algebraische Gleichung stattfindet. Ist daher η gegeben, so folgen aus Gl. (B.) für ζ n Werthe $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$. Den n Werthepaaren $(\eta, \zeta_1), (\eta, \zeta_2), \dots, (\eta, \zeta_n)$ entspricht demnach nur eine endliche Anzahl von Werthen z, d. h.:

Einem gegebenen Werthe von η entspricht nur eine endliche Anzahl von Werthen z. Es findet also eine Gleichung der Form

$$(23.)\qquad z^l + A_1 z^{l-1} + \dots + A_l = 0$$

statt, wo $A_1, A_2, \dots, A_l$ eindeutige Functionen von η sind.

Setzt man in Gl. (A.)

$$y = y_1 \int \omega\, dz,$$

so erhält man

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \left(\frac{3\, d\log y_1}{dz} + p\right)\frac{d\omega}{dz} + \left[\frac{3}{y_1}\frac{d^2 y_1}{dz^2} + 2p\frac{d\log y_1}{dz} + q\right]\omega = 0.$$

329] Von dieser Gleichung bilden $\frac{d\eta}{dz}, \frac{d\zeta}{dz}$ ein Fundamentalsystem von Integralen. Es ist also*)

$$\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2 \frac{d}{dz}\left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right) = \frac{\Delta}{y_1^3},$$

wo

$$\Delta = \sum \pm y_1 \frac{dy_2}{dz} \frac{d^2 y_3}{dz^2} = e^{-\int p\, dz}$$

oder

$$(24.)\qquad \left(\frac{d\eta}{dz}\right)^3 \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{\Delta}{y_1^3}.$$

Durch die Substitution (3.) gehe (B.) in

$$(B''.)\qquad F(\eta, \zeta) = 0$$

über. Aus dieser Gleichung ergiebt sich $\frac{d^2\zeta}{d\eta^2}$ als rationale Function von η

*) S. meine Abh. Bd. 66 des Borch. Journ. p. 130[1]).

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 169. Sch.

und ζ

$$(25.)\qquad \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = G(\eta, \zeta).$$

Aus Gleichung (4.) folgt

$$(26.)\qquad y_1 = \sqrt[3n-6]{\frac{X(z)}{H_1(\eta, \zeta)}}.$$

Also ergiebt Gl. (24.)

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{\sqrt[3]{\Delta}}{\sqrt[3n-6]{X(z)}} \frac{\sqrt[3n-6]{H_1(\eta, \zeta)}}{\sqrt[3]{G(\eta, \zeta)}}$$

oder

$$(27.)\qquad \sqrt[3n-6]{\frac{\Delta^{n-2}}{X(z)}}\, dz = \sqrt[3n-6]{\frac{G(\eta, \zeta)^{n-2}}{H_1(\eta, \zeta)}}\, d\eta.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass, wenn η in einen willkürlichen Werth β einrückt, und b einen zugehörigen Werth von z bedeutet, in der Umgebung dieser Werthe zwischen z und η eine Gleichung besteht der Form

$$(28.)\qquad \sum_a c_a (z-b)^{\frac{a}{\alpha}} = \sum_a e_a (\eta - \beta)^{\frac{a}{\delta}}, \qquad [330$$

wo α, δ positive ganze Zahlen bedeuten, und wo die unendlichen Reihen auf beiden Seiten nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten. Aus dieser Gleichung ergiebt sich aber bekanntlich $z-b$ dargestellt durch eine nach Potenzen von $(\eta-\beta)^{\frac{1}{\gamma}}$ fortschreitende Reihe, mit nur einer endlichen Anzahl negativer Potenzen dieser Grösse, wo γ eine positive ganze Zahl bedeutet. Daher kann z als Function von η nicht wesentlich singuläre Punkte besitzen. Derselbe Schluss gilt auch, wenn $\eta = \infty$ oder $z = \infty$ wird. In der Gleichung (23.) sind demnach die Coefficienten *rationale* Functionen von η.

Es ist also η, folglich auch ζ eine algebraische Function von z, und die Gleichung (26.) ergiebt, dass y_1 die gleiche Eigenschaft besitzt.

Die vorhergehenden Schlüsse sind nur in dem Falle nicht zulässig, dass $n = 2$, weil alsdann $H(f)$ constant, und daher die Gleichung (4.) nicht existirt.

Man erhält also den Satz:

Findet zwischen den Integralen der Gleichung (A.) eine Gleichung (B.) höheren als zweiten Grades statt, so ist die Gleichung (A.) algebraisch integrirbar.

2.

Bezeichnen wir mit u_1, u_2, u_3 das y_1, y_2, y_3 entsprechende Fundamentalsystem von Integralen der zu (A.) adjungirten Differentialgleichung

$$\frac{d^3u}{dz^3} - \frac{d^2(pu)}{dz^2} + \frac{d(qu)}{dz} - ru = 0$$

derart, dass

$$u_1 = \left(y_2 \frac{dy_3}{dz} - y_3 \frac{dy_2}{dz}\right)\frac{1}{\Delta},$$

$$u_2 = \left(y_3 \frac{dy_1}{dz} - y_1 \frac{dy_3}{dz}\right)\frac{1}{\Delta},$$

$$u_3 = \left(y_1 \frac{dy_2}{dz} - y_2 \frac{dy_1}{dz}\right)\frac{1}{\Delta},^{*)}$$

331] so folgt aus den Gleichungen

$$(1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y_1} y_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y_2} y_2 + \dfrac{\partial f}{\partial y_3} y_3 = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\dfrac{dy_1}{dz} + \dfrac{\partial f}{\partial y_2}\dfrac{dy_2}{dz} + \dfrac{\partial f}{\partial y_3}\dfrac{dy_3}{dz} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\dfrac{d^2y_1}{dz^2} + \dfrac{\partial f}{\partial y_2}\dfrac{d^2y_2}{dz^2} + \dfrac{\partial f}{\partial y_3}\dfrac{d^2y_3}{dz^2} = M, \end{cases}$$

wo

$$M = -\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}\left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2}\left(\frac{dy_2}{dz}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y_3^2}\left(\frac{dy_3}{dz}\right)^2 \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_3}\frac{dy_2}{dz}\frac{dy_3}{dz} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y_3 \partial y_1}\frac{dy_3}{dz}\frac{dy_1}{dz} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{dy_1}{dz}\frac{dy_2}{dz}\right\},$$

$$(\text{C.})\qquad \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa} = Mu_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, 3).$$

Es sei allgemein $\Phi(y_1, y_2, y_3)$ eine ganze rationale und homogene Function der Variablen y_1, y_2, y_3, welche durch die Substitution

$$(2.)\qquad a_{\varkappa 1} y_1 + a_{\varkappa 2} y_2 + a_{\varkappa 3} y_3 \ \text{ für } \ y_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

in $j\Phi$ übergeführt wird, wo j eine von y_1, y_2, y_3 unabhängige Grösse, und

*) Vergleiche über die Definition adjungirter Differentialgleichungen meine Arbeit in BORCHARDTS Journ. Bd. 76, S. 183 [1]), und eine Arbeit des Herrn FROBENIUS in demselben Journ. Bd. 77, S. 245.

1) Abh. XVI, Band I dieser Ausgabe, S. 421. Sch.

bezeichnet man mit Φ', $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_\varkappa}\right)'$ das, was aus Φ resp. $\frac{\partial \Phi}{\partial y_\varkappa}$ nach Ausübung der Substitution (2.) wird, so folgt aus der Gleichung

$$(3.)\qquad \Phi' = j\Phi,$$

$$(4.)\qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_\varkappa}\right)' = j\left[\beta_{\varkappa 1}\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + \beta_{\varkappa 2}\frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + \beta_{\varkappa 3}\frac{\partial \Phi}{\partial y_3}\right], \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

wo $\beta_{\varkappa i}$ die Elemente der zu (2.) inversen Substitution bedeuten.

Irgend einem Umlaufe von z möge nun die auf y_1, y_2, y_3, wenn diese Grössen wieder die Integrale der Gleichung (A.) bedeuten, ausgeübte Substitution (2.) entsprechen; dann ist:

$$(5.)\qquad f(\alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \alpha_{13} y_3, \cdots) = f' = jf(y_1, y_2, y_3),$$

wo j eine Constante. Dieses ergiebt sich daraus, dass die Function f' mit der Function f wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung (B.) [332 einen gemeinschaftlichen von f verschiedenen Factor nicht besitzen kann, während y_1, y_2, y_3 der Gleichung $f' = 0$ genügen müssen. Wenn demnach diese Functionen nicht bis auf einen constanten Factor identisch wären, so würden die beiden Gleichungen $f = 0$, $f' = 0$ constante Werthe der Verhältnisse $\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}$ liefern, was nicht möglich ist.

Da die Gleichung (5.) also erfüllt ist, so kann man in Gl. (4.) $\Phi = f$ setzen. Andererseits geht durch denselben Umlauf von z $u_\varkappa$ in

$$\beta_{\varkappa 1} u_1 + \beta_{\varkappa 2} u_2 + \beta_{\varkappa 3} u_3, \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

über. Demnach führt die Gleichung (4.) für $\Phi = f$ zu dem Schlusse, dass M durch den genannten Umlauf von z in jM übergeht. Hieraus ergiebt sich wie für $H(f)$ in vor. No.:

dass M Wurzel einer rationalen Function von z ist.

Ist insbesondere $n = 2$, so ist $\frac{\partial f}{\partial y_\varkappa}$ als lineare homogene Function von y_1, y_2, y_3 Integral der Gleichung (A.). Es muss demnach, wenn man in (A.) die Substitution

$$(6.)\qquad y = Mu$$

ausführt, die resultirende Differentialgleichung mit der adjungirten zur Gleichung (A.) übereinstimmen. Dieses drückt sich durch die Gleichungen

$$\frac{3M'+pM}{M} = -p,$$

$$\frac{3M^{(2)}+2pM'+qM}{M} = -2p'+q,$$

$$\frac{M^{(3)}+pM^{(2)}+qM'+rM}{M} = -p^{(2)}+q'-r$$

aus, wo die oberen Accente Ableitungen andeuten.

Von diesen liefert die erste

$$(7.)\qquad M = e^{-\frac{2}{3}\int p\,dz}.$$

Die zweite wird durch die Gleichung (7.) von selbst erfüllt, während die dritte unter Anwendung der Gleichung (7.) übergeht in:

$$(8.)\qquad 2r = -\tfrac{1}{3}p^{(2)}-\tfrac{2}{3}pp'-\tfrac{4}{27}p^3+\tfrac{2}{3}pq+q'.$$

333] Findet umgekehrt diese Gleichung statt, und wählt man M der Gleichung (7.) gemäss, so ist die durch die Substitution (6.) aus (A.) entstehende Gleichung mit ihrer adjungirten identisch, und es folgt aus der Gleichung

$$y_\varkappa = Mu_\varkappa,$$

$$(9.)\qquad y_1^2+y_2^2+y_3^2 = 0.$$

Demnach ist die Gleichung (8.) die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwischen y_1, y_2, y_3 eine homogene Gleichung zweiten Grades besteht.

Bestimmt man zwei Functionen p_1, p_0 aus den Gleichungen

$$(10.)\qquad 3p_1 = p,\quad 2p_1^2+p_1'+4p_0 = q,$$

wo

$$p_1' = \frac{dp_1}{dz},$$

so folgt aus Gleichung (8.)

$$(11.)\qquad r = 4p_0p_1+2p_0',$$

wo

$$p_0' = \frac{dp_0}{dz}.$$

Die Gleichung (A.) ist also in diesem Falle übereinstimmend mit

$$(12.)\qquad \frac{d^3y}{dz^3}+3p_1\frac{d^2y}{dz^2}+(2p_1^2+p_1'+4p_0)\frac{dy}{dz}+(4p_0p_1+2p_0')y = 0.$$

Bestimmt man aber die Differentialgleichung, welcher das Quadrat jedes Integrals der Gl.:

$$(13.)\qquad \frac{d^2y}{dz^2}+p_1\frac{dy}{dz}+p_0y = 0$$

genügt, so ergiebt sich ebenfalls die Gl. (12.).

Ist demnach $n = 2$, so ist die Gleichung (A.) übereinstimmend mit derjenigen Differentialgleichung, welcher das Quadrat jedes Integrals einer Differentialgleichung zweiter Ordnung (13.) genügt*).

3. [334

Es seien die sämmtlichen Integrale der Gleichung

$$(1.)\qquad \frac{d^my}{dz^m}+f_1(z)\frac{d^{m-1}y}{dz^{m-1}}+\cdots+f_m(z)y = 0$$

mit rationalen Coefficienten, algebraisch. Ferner werde vorausgesetzt, dass für einen willkürlichen Werth von z jeder Quotient zweier Integrale von (1.) auf geeigneten Wegen in z_1 denselben Werth annehme wie in z. Alsdann muss das Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \dots, y_m$ auf denselben Wegen in $vy_1, vy_2, \dots, vy_m$ übergehen, wo v eine bestimmte Function von z.

Es möge

$$y = c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_my_m,$$

wo $c_1, c_2, \dots, c_m$ willkürliche Constanten, der irreductiblen Gleichung

$$(2.)\qquad y^r+\varphi_1(z)y^{r-1}+\cdots+\varphi_r(z) = 0$$

genügen, wo $\varphi_\varkappa(z)$ rationale Functionen von z. Dann ist der Voraussetzung gemäss

$$v^ry^r+\varphi_1(z_1)v^{r-1}y^{r-1}+\cdots+\varphi_r(z_1) = 0$$

*) Nach dem Erscheinen meines obengenannten Aufsatzes in den Sitzungsber. der Akad. 8. Juni 1882[1]) machte mich Herr BRIOSCHI durch ein Schreiben vom 22. Juli desselben Jahres auf eine in dem Bulletin de la société mathématique de France, t. VII, 1879 enthaltene Notiz aufmerksam, worin Herr BRIOSCHI auf einem von dem unsrigen verschiedenen Wege die Bedingungen herleitet, unter welchen eine Differentialgleichung dritter Ordnung durch die Quadrate der Integrale einer Differentialgleichung zweiter Ordnung befriedigt wird. In derselben Notiz leitet Herr BRIOSCHI auch die Bedingungen ab dafür, dass einer Gleichung vierter Ordnung die Cuben der Integrale einer Gleichung zweiter Ordnung genügen.

[1]) Abh. XXXIX, S. 289 ff. dieses Bandes. Sch.

oder

$$y^r + \frac{\varphi_1(z_1)}{v} y^{r-1} + \cdots + \frac{\varphi_r(z_1)}{v^r} = 0. \tag{3.}$$

Die Wurzeln der Gleichungen (2.) und (3.) sind übereinstimmend. Ist daher $\varphi_i(z)$ der erste Coefficient in (2.), welcher nicht identisch verschwindet, so ist

$$\varphi_i(z) = \frac{\varphi_i(z_1)}{v^i}$$

335] oder

$$v^i = \frac{\varphi_i(z_1)}{\varphi_i(z)}. \tag{4.}$$

Also ist, wenn man setzt

$$y = F(z),$$

$$\frac{F(z_1)^i}{\varphi_i(z_1)} = \frac{F(z)^i}{\varphi_i(z)}$$

oder

$$\left[\frac{F(z_1)}{\sqrt[i]{\varphi_i(z_1)}}\right]^i = \left[\frac{F(z)}{\sqrt[i]{\varphi_i(z)}}\right]^i. \tag{5.}$$

I. Setzt man also

$$y = \sqrt[i]{\varphi_i(z)}\,\omega, \tag{6.}$$

so genügt ω einer linearen homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten

$$\frac{d^m \omega}{dz^m} + g_1(z)\frac{d^{m-1}\omega}{dz^{m-1}} + \cdots + g_m(z)\omega = 0, \tag{7.}$$

deren Integrale für z_1 auf geeigneten Wegen Werthe annehmen, welche sich von denen in z nur um eine und dieselbe Einheitswurzel als Factor unterscheiden.

Sind $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ genau die sämmtlichen Werthe, von der Beschaffenheit, dass auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (1.) oder was dasselbe ist der Gleichung (7.) in $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ je einen gleichen Werth annimmt wie in z, so erhält ein willkürliches Integral der Gleichung (7.) auf denselben Wegen in $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ Werthe, die sich von dem Werthe desselben in z nur durch Einheitswurzeln als Factoren unterscheiden.

II. Es sei

$$t = (\alpha - z)(\alpha - z_1)\ldots(\alpha - z_{\sigma-1}) = \varphi(z, \alpha), \tag{8.}$$

wo α eine willkürliche Grösse ist, so ist $\varphi(z, \alpha)$ eine rationale Function von z.

Denn da $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ die Gesammtheit der Werthe darstellt, welche jedem Quotienten zweier Integrale der Gl. (1.) denselben Werth verschaffen wie für z, so können durch irgend einen Umlauf von z nur $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ [336 eine Vertauschung unter einander erfahren. Da überdiess vorausgesetzt ist, dass Gl. (1.) algebraisch integrirbar sei, so sind $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ von z algebraisch abhängig, daher ist t eine algebraische Function von z, welche durch Umläufe von z nicht verändert wird, d. h. eine rationale Function von z.

III. Die Function $\varphi(z, \alpha)$ hat die Eigenschaft

$$\varphi(z_\varkappa, \alpha) = \varphi(z, \alpha). \tag{9.}$$

Denn es möge für $z = z_\varkappa$ $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ resp. in $z_1', z_2', \ldots, z_{\sigma-1}'$ übergehen. Wenn nicht $z_\varkappa, z_1', z_2', \ldots, z_{\sigma-1}'$ abgesehen von der Reihenfolge mit $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}, z$ übereinstimmten, so müsste jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (1.) für mehr als σ Werthe von z je einen gleichen Werth annehmen, gegen unsere Voraussetzung.

IV. Zu einem bestimmten willkürlichen Werthe von t der Gleichung (8.) gehören genau die Werthe $z, z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ von z.

In der That wird nach Satz III. die Gleichung

$$t = \varphi(z, \alpha)$$

durch $z = z$, $z = z_1$, $z = z_2$, $\ldots$, $z = z_{\sigma-1}$ befriedigt. Ist andererseits z' ein von diesen verschiedener Werth von z, so kann nicht die Gleichung

$$\varphi(z, \alpha) = \varphi(z', \alpha)$$

bestehen, wegen der Willkürlichkeit von α.

Durch einen beliebigen Umlauf von t muss dem Satze IV. gemäss z in einen der Werthe $z, z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ übergehen. Ist $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (7.) zugehörig dem Werthenpaare (t, z), so erhält $\omega_\varkappa$ durch einen beliebigen Umlauf von t, d. h. dem Werthenpaare $(t, z_\varkappa)$ entsprechend, nach Satz I. den Werth $\omega'_\varkappa$

$$\omega'_\varkappa = j[\alpha_{\varkappa 1}\omega_1 + \cdots + \alpha_{\varkappa m}\omega_m], \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, m) \tag{10.}$$

wo j eine Einheitswurzel bedeutet.

Transformiren wir daher die Gleichung (7.) in eine Gleichung

$$\frac{d^m\omega}{dt^m} + h_1(t)\frac{d^{m-1}\omega}{dt^{m-1}} + \cdots + h_m(t)\omega = 0 \tag{11.}$$

mit der unabhängigen Variabeln t.

337] Nun ist*) für das Werthsystem (t, z)

$$h_i(t) = -\frac{\Delta_i}{\Delta}, \tag{12.}$$

wo

$$\Delta = \sum \pm\, \omega_1 \frac{d\omega_2}{dz}\frac{d^2\omega_3}{dz^2}\cdots\frac{d^{m-1}\omega_m}{dz^{m-1}}$$

und Δ_i aus Δ hervorgeht, wenn man die $m-i^{\text{te}}$ Horizontalreihe in Δ durch $\frac{d^m\omega_1}{dz^m}, \frac{d^m\omega_2}{dz^m}, \ldots, \frac{d^m\omega_m}{dz^m}$ ersetzt.

In gleicher Weise ist für $(t, z_\varkappa)$

$$h_i(t) = -\frac{\Delta'_i}{\Delta'}, \tag{13.}$$

wo Δ' und Δ'_i aus Δ resp. Δ_i erhalten werden, wenn man $\omega_\varkappa$ durch $\omega'_\varkappa$ ersetzt. Aus Gleichung (10.) ergiebt sich aber:

$$\frac{\Delta'_i}{\Delta'} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \tag{14.}$$

das heisst:

V. Die Coefficienten der Differentialgleichung (11.) sind rationale Functionen von t.

VI. Ist t ein willkürlicher Werth, so giebt es **nicht** einen davon verschiedenen Werth t_1 von der Beschaffenheit, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (11.) auf geeigneten Wegen je einen gleichen Werth wie in t annehmen könnte.

Wenn nämlich jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (11.) in t und t_1 je einen gleichen Werth annimmt, so kommt dieselbe Eigenschaft

*) Siehe meine Arbeit Bd. 66 des BORCHARDTschen Journ., S. 143 [1]).

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 183. Sch.

jedem Quotienten zweier Integrale der Gleichung (7.) zu. Dieses ist jedoch nicht möglich. Denn es mögen dem willkürlichen Werthe t die Werthe $z, z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ von z nach Gl. (8.) entsprechen. Alsdann sind die dem Werthe t_1 nach derselben Gleichung entsprechenden Werthe $z', z'_1, z'_2, \ldots, z'_{\sigma-1}$ von z sämmtlich von den Werthen $z, z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ verschieden. Wäre nämlich einer der ersteren mit $z_\varkappa$ übereinstimmend, so wäre

$$t_1 = \varphi(z_\varkappa, \alpha) = \varphi(z, \alpha) = t$$

nach Satz III. Es müsste demnach für das Werthsystem $z, z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$, [338
$z'_1, z'_2, \ldots, z'_{\sigma-1}$ jeder Quotient zweier Integrale je einen gleichen Werth annehmen. Der Voraussetzung gemäss soll dieses nur für σ Werthe stattfinden.

Es seien $U_0, U_1, \ldots, U_{\sigma-1}$ die Umläufe von z, für welche ein willkürliches Integral der Gleichung (1.), y resp. in $y, y', y'', \ldots, y^{(r-1)}$ übergeht, derart dass nicht der Quotient zweier dieser Werthe constant, während jeder andere Umlauf von z jeden dieser Werthe nur in einen derselben mit einem constanten Factor multiplicirten Werthe überführt.

Im Anschluss an eine Bezeichnung, welche ich in meiner Arbeit über algebraisch integrirbare Differentialgleichungen zweiter Ordnung*) eingeführt habe, will ich im Folgenden $y, y', y'', \ldots, y^{(r-1)}$ ein reducirtes Werthsystem des Integrals y nennen. Die Elemente eines reducirten Werthsystems sind demnach nur bis auf Einheitswurzeln als Factoren bestimmt.

Ein Umlauf s von t führe z in $z_\varkappa$ über auf einem Wege S, welcher das allgemeine Integral ω in $j\omega$ verwandle, wo j eine Einheitswurzel, so werden die Wege $SU_0, SU_1, SU_2, \ldots, SU_{\sigma-1}$ ω resp. in $j\omega, j\omega', j\omega'', \ldots, j\omega^{(r-1)}$ verwandeln, wo $SU_\varkappa$ den aus S und $U_\varkappa$ zusammengesetzten Weg von z bezeichnet, und wo nach Satz I. $\omega, \omega', \omega'', \ldots, \omega^{(r-1)}$ abgesehen von Einheitswurzeln als Factoren durch dieselben Substitutionen aus $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ hervorgehen wie $y, y', \ldots, y^{(r-1)}$ aus $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Die Wege $SU_0, SU_1, \ldots, SU_{\sigma-1}$ bringen alle denselben Werth von t hervor, und die Quotienten zweier der Werthe $j\omega, j\omega', \ldots, j\omega^{(r-1)}$ sind nicht constant. Alle anderen Wege, welche von z nach $z_\varkappa$ überführen, bringen nur Werthe von ω hervor, welche von den zuletzt genannten sich um constante Factoren unterscheiden. Also alle Umläufe

*) BORCHARDTs Journ. Bd. 81, S. 111 [1]).

[1]) Abh. XXI, S. 27 dieses Bandes. Sch.

von t, welche von z in $z_\varkappa$ überführen, bringen genau r Werthe hervor, deren Quotienten nicht constant. Die Umläufe von t aber, welche von z nach z_l führen, wo l von $\varkappa$ verschieden, bringen nach demselben Schlusse nur Werthe $j'\omega, j'\omega', j'\omega'', \dots, j'\omega^{(r-1)}$ hervor, wo j' eine von j verschiedene Einheitswurzel sein kann. Dasselbe gilt von den Umläufen von t, welche $z_\varkappa$ in sich selbst überführen. Demnach ist $\omega, \omega', \omega'', \dots, \omega^{(r-1)}$ ein reducirtes Werthsystem des willkürlichen Integrals ω der Gleichung (11.), und man erhält den Satz:

VII. Die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems
339] eines willkürlichen Integrals der Gleichung (11.) ist übereinstimmend mit der Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems eines willkürlichen Integrals der Gleichung (1.).

4.

I. Es sei W ein Umlauf der unabhängigen Variabeln z, durch welchen jeder Quotient zweier Integrale der beliebigen Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dz^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dz^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0 \tag{1.}$$

mit rationalen Coefficienten unverändert bleibt, so wird durch denselben Umlauf jedes Integral in sich selbst multiplicirt mit einer und derselben Constanten übergeführt.

Es sei in der That $y_1, y_2, \dots, y_m$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1.), so ist

$$\Sigma \pm y_1 \frac{dy_2}{dz} \frac{d^2 y_3}{dz^2} \cdots \frac{d^{m-1} y_m}{dz^{m-1}} = e^{-\int p_1 dz} \text{ *)}. \tag{2.}$$

Der Voraussetzung gemäss gehen nach Vollzug des Umlaufes W die Integrale $y_1, y_2, \dots, y_m$ resp. in $y_1 v, y_2 v, \dots, y_m v$ über. Daher ist nach Gleichung (2.)

$$\Sigma \pm (vy_1) \frac{d(vy_2)}{dz} \frac{d^2(vy_3)}{dz^2} \cdots \frac{d^{m-1}(vy_m)}{dz^{m-1}} = je^{-\int p_1 dz}, \tag{3.}$$

wo j eine Constante bedeutet. Nun aber ergiebt sich identisch

$$\Sigma \pm (vy_1) \frac{d(vy_2)}{dz} \cdots \frac{d^{m-1}(vy_m)}{dz^m} = v^m \Sigma \pm y_1 \frac{dy_2}{dz} \cdots \frac{d^{m-1} y_m}{dz^{m-1}}. \tag{4.}$$

*) Siehe meine Abhandlung Bd. 66 des BORCHARDTschen Journ., S. 128[1]).

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 166. Sch.

Aus den Gleichungen (2.), (3.), (4.) folgt demnach

$$v^m = j, \tag{5.}$$

womit unser Satz erwiesen ist.

Es sei die Differentialgleichung [340

$$\frac{d^m v}{dt^m} + q_2(t) \frac{d^{m-2} v}{dt^{m-2}} + \cdots + q_m(t) v = 0 \tag{6.}$$

mit in t rationalen Coefficienten, von welchen der mit $\frac{d^{m-1} v}{dt^{m-1}}$ multiplicirte verschwindet, algebraisch integrirbar. Setzt man

$$t = \frac{1}{\xi},$$

so verwandelt sich die Gleichung (6.) in

$$\frac{d^m v}{d\xi^m} \xi^{2m} + m(m-1) \frac{d^{m-1} v}{d\xi^{m-1}} \xi^{2m-1} + \cdots = 0. \tag{6a.}$$

Bezeichnen wir mit $s_1, s_2, \dots, s_m$ die Wurzeln der zu $t = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, so ergiebt sich aus Gl. (6a.)

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_m = -\frac{m(m-1)}{2}. \tag{7.}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass wenigstens eine der Grössen $s_1, s_2, \dots, s_m$ negativ und absolut grösser als $\frac{m-1}{2}$, da nicht zwei derselben einander gleich sein können in Folge der Voraussetzung, dass Gleichung (6.) algebraisch integrirbar*).

Ein willkürliches Integral v der Gleichung (6.) hat die Form

$$v = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \cdots + c_m \eta_m, \tag{8.}$$

wo $c_1, c_2, \dots, c_m$ willkürliche Constanten, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ das zu $t = \infty$ gehörige Fundamentalsystem von Integralen bedeuten. Daher ist v für $t = \infty$ unendlich wie eine Potenz t^r, deren Exponent r grösser als $\frac{m-1}{2}$.

Nach einem beliebigen Umlaufe von t gehe v über in v', wo

$$\begin{aligned} v' &= c'_1 \eta_1 + c'_2 \eta_2 + \cdots + c'_m \eta_m, \\ c'_\varkappa &= c_1 \alpha_{1\varkappa} + c_2 \alpha_{2\varkappa} + \cdots + c_m \alpha_{m\varkappa}, \end{aligned} \tag{9.}$$

*) Siehe meine Abhandlung Bd. 66 des BORCHARDTschen Journ., S. 157[1]).

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 199. Sch.

341] wenn durch denselben Umlauf $\eta_{i\varkappa}$ in $\eta'_{i\varkappa}$ übergeführt wird, wo

$$\eta'_{i\varkappa} = \alpha_{\varkappa 1}\eta_{i1} + \alpha_{\varkappa 2}\eta_{i2} + \cdots + \alpha_{\varkappa m}\eta_{im}.$$

Da die Grössen $c_1, c_2, \ldots, c_m$ willkürlich angenommen wurden und die Determinante der Grössen $\alpha_{i\varkappa}$ nicht verschwindet, so kann man $c_1, c_2, \ldots, c_m$ so wählen, dass auch in v' das Glied, welches wie t^r unendlich wird, nicht herausfällt. Daher ist auch v' für $t = \infty$ unendlich wie t^r.

Bildet man daher das Product der μ verschiedenen Werthe von v, welche allen Umläufen von t entsprechen, so ist dasselbe für $t = \infty$ unendlich wie $t^{\mu r}$. Es ist daher die irreductible algebraische Gleichung, welcher das allgemeine Integral v genügt, mindestens vom Grade $r\mu$, also höheren als $\frac{\mu(m-1)^{\text{ten}}}{2}$ Grades in Bezug auf t.

Wir wollen jetzt von der Gleichung (6.) voraussetzen, dass für einen willkürlichen Werth von t nicht ein zweiter Werth t_1 existirt, von der Beschaffenheit, dass auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale derselben Gleichung je einen gleichen Werth wie in t annehmen könnte.

Es mögen nun einem beliebigen Werthe eines willkürlichen Integrals v_1 der Gl. (6.) ξ verschiedene Werthe von t, nämlich $t, t_1, t_2, \ldots, t_{\xi-1}$ entsprechen. Alsdann gehören zwei Werthenpaaren $(v_1, t_\varkappa)$, (v_1, t_l), wo $\varkappa \lesseqgtr l$, zwei verschiedene Werthe eines von v_1 verschiedenen willkürlichen Integrals v_2 zu, da sonst jeder Quotient zweier Integrale für zwei verschiedene Werthe von t gleiche Werthe annehmen müsste, gegen unsere Voraussetzung. Demnach entsprechen einem Werthe von v_1 genau ξ Werthe von v_2, und einem Werthe von v_2 genau ξ Werthe von v_1, und es findet zwischen v_1, v_2 eine irreductible algebraische Gleichung

$$\varphi(v_1, v_2) = 0 \tag{10.}$$

statt, vom Grade ξ sowohl in Bezug auf v_1 als auch in Bezug auf v_2. Da v_1, v_2 nur gleichzeitig, nämlich für singuläre Punkte der Gl. (6.) oder für $t = \infty$ unendlich werden, so ist der Coefficient von v_1^ξ eine Constante, die Coefficienten aller übrigen Potenzen von v_1 ganze rationale Functionen von v_2, und zwar der Coefficient von v_1^0 vom Grade ξ in v_2, die übrigen Coefficienten von niedrigerem Grade in v_2. Umgekehrt ist der Coefficient von v_2^ξ eine Constante, die Coefficienten der übrigen Potenzen von v_2 ganze rationale Functionen

von v_1, der Coefficient von v_2^0 vom Grade ξ in v_1, die übrigen Coefficienten [342 von niedrigerem Grade in v_1. Wir setzen zunächst voraus, dass nicht für einen Werth von t jedes willkürliche Integral verschwinde. Dann enthält die Gleichung (10.) ein von v_1, v_2 **freies** Glied.

Wir substituiren nun in Gl. (10.)

$$v_2 = v_1 u, \tag{11.}$$

wodurch diese Gleichung in

$$\psi(u, v_1) = 0 \tag{12.}$$

übergeführt werde. Die Gleichung (12.) ist sowohl in Bezug auf u als auch in Bezug auf v_1 vom Grade ξ. Da die Gleichung (10.) in Bezug auf v_1, v_2 irreductibel ist, so kommt diese Eigenschaft auch der Gleichung (12.) in Bezug auf u und v_1 zu. Es entsprechen daher einem willkürlichen Werthe von u genau ξ Werthe von v_1.

Wenn es Umläufe von t giebt, welche ein willkürliches Integral v der Gl. (6.) in jv überführen, so ist nach Satz I. j eine Constante, und zwar, weil v eine algebraische Function von z, eine Einheitswurzel. Die zu allen solchen Umläufen gehörigen Werthe von j genügen daher einer Gleichung

$$x^\lambda = 1 \tag{13.}$$

wo λ eine ganze Zahl.

Nach Satz I. werden v_1^λ und u durch dieselben Umläufe von t verändert und nicht verändert, daher ist v_1^λ eine rationale Function von t und u. Es mögen nun einem willkürlichen Werth von u α verschiedene Werthe von t entsprechen, so entsprechen also demselben Werthe von u höchstens $\lambda\alpha$ verschiedene Werthe von v_1. Es ist also

$$\lambda\alpha \geqq \xi. \tag{14.}$$

Nach einem Satze meiner Abhandlung über algebraisch integrirbare Differentialgleichungen*) haben die Exponenten von v_1 in der irreductiblen Gleichung zwischen v_1 und t den grössten gemeinschaftlichen Theiler λ.

*) Siehe BORCHARDTs Journ. Bd. 81, S. 112 [1]).

[1]) Abd. XXI, S. 27 dieses Bandes. Sch.

343] Ist daher ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des willkürlichen Integrals v_1, so ist

$$\mu = \lambda\nu. \tag{15.}$$

Nach den obigen Entwickelungen ist

$$\xi > \frac{\mu(m-1)}{2}. \tag{16.}$$

Aus den Gleichungen (14.), (15.), (16.) ergiebt sich demnach

$$\alpha > \frac{\nu(m-1)}{2}. \tag{17.}$$

Wenn es Werthe von t giebt, für welche jedes Integral der Gleichung (6.) verschwindet, so gehören dieselben zu den singulären Punkten dieser Gleichung.

Es sei in diesem Falle

$$\omega_1 = v_1 + \varkappa_1, \quad \omega_2 = v_2 + \varkappa_2, \tag{18.}$$

wo $\varkappa_1, \varkappa_2$ willkürliche Constanten bedeuten. Die Functionen ω_1, ω_2 werden für $t = \infty$ und für diejenigen singulären Punkte der Gleichung (6.), für welche v_1, v_2 unendlich werden, gleichzeitig unendlich. Für die singulären Punkte derselben Gleichung, für welche v_1, v_2 gleichzeitig verschwinden, erhalten sie die von Null verschiedenen Werthe $\varkappa_1, \varkappa_2$. Sie werden aber auch nicht für irgend einen anderen Werth von t gleichzeitig Null, da man $\varkappa_2$ so wählen kann, dass für diejenigen Werthe von t, für welche v_1 den Werth $-\varkappa_1$ erhält, v_2 nicht gleich $-\varkappa_2$ werde. Setzt man daher in Gl. (10.) $\omega_1 - \varkappa_1, \omega_2 - \varkappa_2$ resp. für v_1, v_2, so erhält man eine in Bezug auf ω_1, ω_2 irreductible Gleichung

$$\varphi_1(\omega_1, \omega_2) = 0 \tag{10a.}$$

vom Grade ξ sowohl in Bezug auf ω_1 als auch in Bezug auf ω_2. Die Coefficienten von ω_2^ξ und von ω_1^ξ sind Constanten, während die Coefficienten der übrigen Potenzen von ω_1, ω_2 resp. in Bezug auf ω_2, ω_1 von niedrigerem Grade als dem ξ^{ten} sind. Die Gleichung (10a.) enthält ein von ω_1, ω_2 freies Glied.

Setzt man daher in diese Gleichung

$$\omega_2 = p\,\omega_1, \tag{11a.}$$

344] so geht sie in die in Bezug auf p und ω_1 irreductible Gleichung

$$\psi_1(p, \omega_1) = 0 \tag{12a.}$$

über, welche in Bezug auf jede der Variabeln p und ω_1 vom Grade ξ ist. Es entsprechen daher einem willkürlichen Werthe von p genau ξ Werthe von ω_1.

Da $\varkappa_1, \varkappa_2$ willkürlich gewählte Grössen bedeuten, so folgt, dass alle Umläufe von t, welche p ungeändert lassen, gleichzeitig v_1, v_2 also auch ω_1, ω ungeändert lassen. Demnach ist ω_1 eine rationale Function von p und t. Ist daher β die Anzahl der verschiedenen Werthe von t, welche einem willkürlichen Werthe von p entsprechen, so ist die Anzahl der Werthe ω, welche demselben Werthe von p zugehören, nicht grösser als β. Demnach ist

$$\xi \leqq \beta \tag{14a.}$$

oder

$$\beta > \frac{\mu(m-1)}{2}. \tag{16a.}$$

Die Anzahl der allen möglichen Umläufen von t entsprechenden Werthe von v_1 und v_2, folglich auch von p ist gleich μ. Daher genügt p einer irreductiblen Gleichung

$$p^\mu + B_1 p^{\mu-1} + \cdots + B_\mu = 0. \tag{19.}$$

Da einem willkürlichen Werthe von p β verschiedene Werthe von t entsprechen, so erhält p als rationale Function von t und v_1 an mindestens β Stellen der Riemannschen Fläche (t, v_1) einen gleichen Werth. Diese Function wird also auch in mindestens β Stellen dieser Fläche Null und unendlich. Da aber p nur für das System derjenigen endlichen nicht singulären Werthe von t unendlich wird, für welche ω_1 verschwindet, und nur für diejenigen endlichen nicht singulären Werthe von t Null wird, für welche ω_2 verschwindet, diese beiden Werthsysteme aber kein gemeinschaftliches Element besitzen, so folgt, dass

$$B_\mu = \frac{G(t)}{H(t)}, \tag{20.}$$

wo $G(t)$, $H(t)$ ganze rationale Functionen, ohne gemeinschaftlichen Theiler, beide mindestens vom Grade β.

Nun sei [345

$$u^\nu + A_1 u^{\nu-1} + \cdots + A_\nu = 0 \tag{19a.}$$

die irreductible Gleichung, welcher u genügt, und setzen wir

$$A_\nu = \frac{G_1(t)}{H_1(t)}, \tag{20a.}$$

wo $G_1(t)$, $H_1(t)$ ganze rationale Functionen ohne gemeinschaftlichem Theiler. Es bedeute ϱ den höheren der beiden Grade derselben.

Setzt man in (19.) $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 0$, so wird $p = u$, und es werden je λ Wurzeln dieser Gleichung, welche solchen Umläufen von t entsprechen, durch die ein willkürliches Integral v der Gleichung (6.) mit einer Einheitswurzel j multiplicirt wurde, einander gleich. Es ist demnach

$$(u^\nu + A_1 u^{\nu-1} + \cdots + A_\nu)^\lambda = u^\mu + B_1^{(0)} u^{\mu-1} + \cdots + B_\mu^{(0)}, \tag{21.}$$

wo $B_i^{(0)}$ den Werth von B_i für $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 0$ bedeutet. Hieraus folgt

$$A_\nu^\lambda = B_\mu^{(0)}. \tag{22.}$$

Die Werthsysteme, für welche p unendlich oder Null wird, gehen für $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 0$ in Werthsysteme über, für welche u resp. unendlich oder Null wird. Da u nur für endliche nicht singuläre Werthe von t unendlich oder Null wird, so enthalten auch die beiden letzteren Werthsysteme kein gemeinschaftliches Element. Bezeichnet man daher mit $G^{(0)}(t)$, $H^{(0)}(t)$ die Resultate der Substitution von $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 0$ in $G(t)$, $H(t)$, so haben $G^{(0)}(t)$, $H^{(0)}(t)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler, und es folgt aus Gl. (22.) oder

$$\left[\frac{G_1(t)}{H_1(t)}\right]^\lambda = \frac{G^{(0)}(t)}{H^{(0)}(t)},$$

dass die Grade von $G^{(0)}(t)$, $H^{(0)}(t)$ genau das λ-fache resp. der Grade von $G_1(t)$, $H_1(t)$ sind. Daher ist

$$\lambda\varrho \geqq \beta,$$

also nach Gleichung (16a.)

$$\varrho > \frac{\nu(m-1)}{2}. \tag{23.}$$

346] Aus (17.) und (23.) folgt, dass die Anzahl der verschiedenen Werthe von t, welche einem willkürlichen Werthe von u entsprechen, grösser als $\frac{\nu(m-1)}{2}$ ist.

Es sei

$$\frac{d^m y}{dt^m} + h_1(t)\frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \cdots + h_m(t) y = 0 \tag{24.}$$

eine beliebige lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welche

nur algebraische Integrale besitzt. Setzt man

$$y = e^{-\frac{1}{m}\int h_1(t)\,dt}\, v, \tag{25.}$$

so erhält man für v eine wie (6.) beschaffene Differentialgleichung.

Setzen wir voraus, dass für einen willkürlichen Werth von t nicht ein zweiter Werth t_1 existirt von der Beschaffenheit, dass auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (24.) in t_1 denselben Werth wie in t annehme, so besitzt die wie Gl. (6.) beschaffene Gleichung dieselbe Eigenschaft. Es ist daher die Anzahl der verschiedenen Werthe von t, welche dem Werthe des Quotienten zweier willkürlichen Integrale der wie (6.) beschaffenen Gleichung entsprechen, grösser als $\frac{\nu(m-1)}{2}$, wenn ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals dieser Gleichung bedeutet. Aus Gl. (25.) ergiebt sich, dass ν auch die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (24.) bedeutet. Da andererseits für zwei Werthe von t, für welche ein Quotient zweier willkürlicher Integrale der wie (6.) beschaffenen Gleichung gleiche Werthe annimmt, auch der Quotient zweier willkürlicher Integrale der Gl. (24.) gleiche Werthe erhält, und umgekehrt, so folgt, dass auch die Anzahl der verschiedenen Werthe von t, welche einem willkürlichen Werthe des Quotienten zweier willkürlichen Integrale der Gleichung (24.) entsprechen, grösser als $\frac{\nu(m-1)}{2}$ ist, wo ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (24.) bedeutet.

Unter Berücksichtigung der Sätze I., VI., VII. der No. 3 erhält man daher das folgende Theorem:

II. Ist ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals einer beliebigen linearen homogenen algebraisch integrirbaren Differentialgleichung [347 m^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten, so ist die Anzahl der verschiedenen Werthe der unabhängigen Variabeln, welche einem willkürlichen Werthe des Quotienten zweier willkürlichen Integrale derselben Differentialgleichung entsprechen, grösser als $\frac{\nu(m-1)}{2}$.

5.

Wir betrachten die Gleichung (B.) als eine algebraische Gleichung zwischen η, ζ und bezeichnen nach Riemann mit p die Klasse dieser algebraischen Gleichung, d. h. die Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Gattung, welche zu derselben gehören.

Seien $J_1, J_2, \ldots, J_p$ solche linear unabhängige Integrale erster Gattung, in der Form, welche nach dem Vorgange des Herrn Aronhold*) von Clebsch und Herrn Gordan**) eingeführt worden ist, so dass also

$$(1.)\qquad dJ_\varkappa = \frac{\varphi_\varkappa(y_1, y_2, y_3)}{c_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3\frac{\partial f}{\partial y_3}} \sum \pm c_1 y_2 dy_3 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, p),$$

wo $\varphi_\varkappa = 0$ eine Curve $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung darstellt, welche durch die sämmtlichen Doppelpunkte und Rückkehrpunkte der Curve (B.) hindurchgeht.

Nach No. 2 ist

$$(2.)\qquad \sum \pm c_1 y_2 dy_3 = (c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3)\Delta dz$$

und nach Gleichung (C.)

$$(3.)\qquad c_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3\frac{\partial f}{\partial y_3} = (c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) M;$$

folglich ist

$$(4.)\qquad \frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3\frac{\partial f}{\partial y_3}} = \frac{\Delta}{M} dz.$$

Nach No. 1 Gl. (24.) ist

$$(5.)\qquad \left(\frac{d\eta}{dz}\right)^3 \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{\Delta}{y_1^3}.$$

348] Andererseits ist nach Gl. (C.)

$$(6.)\qquad \frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{d\zeta}{dz} : \frac{d\eta}{dz} = -\frac{u_2}{u_3} = -\frac{f_2}{f_3},$$

wenn man zur Abkürzung $f_\varkappa$ für $\frac{\partial f}{\partial y_\varkappa}$ setzt. Bezeichnet man ferner $\frac{\partial^2 f}{\partial y_\iota \partial y_\varkappa}$ mit $f_{\iota\varkappa}$, und mit $F_{\iota\varkappa}$ den Coefficienten von $f_{\iota\varkappa}$ in der Hesseschen Covariante von f,

*) Monatsberichte der K. Akademie der Wissensch. zu Berlin, April 1861.

**) Theorie der Abelschen Functionen, S. 2.

so folgt

$$d\frac{d\zeta}{d\eta} = [F_{11}(y_2 dy_3 - y_3 dy_2) + F_{12}(y_3 dy_1 - y_1 dy_3) + F_{13}(y_1 dy_2 - y_2 dy_1)] \frac{1}{(n-1)f_3^2},$$

also

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{(F_{11}u_1 + F_{12}u_2 + F_{13}u_3)y_1^2}{u_3(n-1)f_3^2},$$

demnach nach Gl. (C.)

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{(F_{11}f_1 + F_{12}f_2 + F_{13}f_3)y_1^2}{(n-1)f_3^3},$$

also endlich

$$(7.)\qquad \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{1}{(n-1)^2}\frac{H(f)y_1^3}{f_3^3}.$$

Substituirt man diesen Werth in (5.) und setzt ausserdem für $\frac{d\eta}{dz}$ seinen Werth

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{\Delta}{y_1^2}u_3 = \frac{\Delta}{y_1^2}\frac{f_3}{M},$$

so folgt

$$(8.)\qquad \frac{1}{M^3} = \frac{(n-1)^2}{\Delta^2 X(z)},$$

also ist nach Gl. (4.)

$$(9.)\qquad \frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3\frac{\partial f}{\partial y_3}} = (n-1)^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{\Delta}{X}}\, dz.$$

In den Gln. (4.) und (9.) sind Δ, M, X Wurzeln rationaler Functionen von z, und zwar hat X dieselbe Bedeutung wie in Gl. (2.) No. 1, M dieselbe Bedeutung wie in Gl. (C.), während

$$(10.)\qquad \Delta = e^{-\int p\,dz}.$$

Durch einen beliebigen Umlauf von z möge $y_\varkappa$ in $y'_\varkappa$ übergehen, wo [349

$$(11.)\qquad y'_\varkappa = \alpha_{\varkappa 1}y_1 + \alpha_{\varkappa 2}y_2 + \alpha_{\varkappa 3}y_3, \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

so genügen y'_1, y'_2, y'_3 der irreductiblen Gleichung

$$(12.)\qquad f(y'_1, y'_2, y'_3) = 0.$$

Es sind demnach $\varphi_\varkappa(y'_1, y'_2, y'_3) = 0$ Curven $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung in y'_1, y'_2, y'_3, welche durch die Doppel- und Rückkehrpunkte von (12.) hindurchgehen. Daher sind

$$J'_\varkappa = \int \frac{\varphi_\varkappa(y'_1, y'_2, y'_3) \sum \pm c_1 y'_2 dy'_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y'_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y'_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y'_3}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

die p linear unabhängigen Integrale erster Gattung, welche zu der Gleichung (12.) gehören. Diese Integrale als Functionen von z sind demnach für keinen Werth von z unendlich. Setzt man für y'_1, y'_2, y'_3 ihre Werthe aus Gl. (11.) in $\varphi_\varkappa(y'_1, y'_2, y'_3)$, so wird

$$\varphi_\varkappa(y'_1, y'_2, y'_3) = \psi_\varkappa(y_1, y_2, y_3),$$

wo $\psi_\varkappa$ eine ganze rationale und homogene Function $n-3^{\text{ten}}$ Grades ist. Ferner hat man nach Gl. (4.) oder Gl. (9.)

$$\frac{\sum \pm c_1 y'_2 dy'_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y'_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y'_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y'_3}} = j \frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}},$$

wo j eine Einheitswurzel bedeutet, folglich ist

$$J'_\varkappa = j \int \frac{\psi_\varkappa(y_1, y_2, y_3)}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}} \sum \pm c_1 y_2 dy_3.$$

Da $J'_\varkappa$ für keinen Werth von z, folglich auch für kein Werthsystem y_1, y_2, y_3 unendlich wird, so ist $J'_\varkappa$ ein Integral erster Gattung gehörig zur Gleichung (B.). Hieraus ergiebt sich, dass $\psi_\varkappa(y_1, y_2, y_3) = \varphi_\varkappa(y'_1, y'_2, y'_3)$ durch eine lineare homogene Function von $\varphi_1(y_1, y_2, y_3), \ldots, \varphi_p(y_1, y_2, y_3)$ dargestellt wird, oder:

350] I. Die Functionen $\varphi_1(y_1, y_2, y_3), \ldots, \varphi_p(y_1, y_2, y_3)$ genügen einer linearen homogenen Gleichung p^{ter} Ordnung

$$\text{(D.)} \qquad \frac{d^p \omega}{dz^p} + Q_1 \frac{d^{p-1} \omega}{dz^{p-1}} + \cdots + Q_p \omega = 0$$

mit in z rationalen Coefficienten.

Es sei U ein Umlauf der Variabeln z, durch welchen ein Quotient λ zweier willkürlicher Integrale der Gleichung (D.) ungeändert bleibt, ohne dass gleichzeitig $\frac{y'_2}{y'_1} = \frac{y_2}{y_1}$, $\frac{y'_3}{y'_1} = \frac{y_3}{y_1}$, wo y'_1, y'_2, y'_3 die Functionen bedeuten, in

welche resp. y_1, y_2, y_3 durch denselben Umlauf übergehen, nämlich

$$\text{(13.)} \qquad y'_\varkappa = \alpha_{\varkappa 1} y_1 + \alpha_{\varkappa 2} y_2 + \alpha_{\varkappa 3} y_3. \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

Ist alsdann $y_1 = b_1$, $y_2 = b_2$, $y_3 = b_3$ ein Werthsystem, für welches λ Null oder Unendlich wird, und setzt man

$$\text{(14.)} \qquad b'_\varkappa = \alpha_{\varkappa 1} b_1 + \alpha_{\varkappa 2} b_2 + \alpha_{\varkappa 3} b_3, \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

so wird λ auch für $y_1 = b'_1$, $y_2 = b'_2$, $y_3 = b'_3$ Null resp. unendlich. Fixirt man daher $p-1$ willkürliche Werthsysteme

$$b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} \text{ von } y_1, y_2, y_3 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1),$$

für welche λ unendlich wird, so wird λ auch für die $p-1$ Werthsysteme

$$\text{(15.)} \qquad b'_{i\varkappa} = \alpha_{\varkappa 1} b_{i1} + \alpha_{\varkappa 2} b_{i2} + \alpha_{\varkappa 3} b_{i3} \quad (\varkappa = 1, 2, 3;\ i = 1, 2, \ldots, p-1)$$

von y_1, y_2, y_3 unendlich.

Nach der Voraussetzung ist nicht gleichzeitig $\frac{b'_{i2}}{b'_{i1}} = \frac{b_{i2}}{b_{i1}}$ und $\frac{b'_{i3}}{b'_{i1}} = \frac{b_{i3}}{b_{i1}}$. Andererseits ist auch nicht gleichzeitig $\frac{b'_{i2}}{b'_{i1}} = \frac{b'_{l2}}{b'_{l1}}$ und $\frac{b'_{i3}}{b'_{i1}} = \frac{b'_{l3}}{b'_{l1}}$ $(l \gtrless i)$ oder $\frac{b'_{i2}}{b'_{i1}} = \frac{b_{l2}}{b_{l1}}$, $\frac{b'_{i3}}{b'_{i1}} = \frac{b_{l3}}{b_{l1}}$, da man die Werthe von z, welche zu einem Systeme b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} und zu einem Systeme b_{l1}, b_{l2}, b_{l3} gehören, vollständig von einander unabhängig gewählt hat. Demnach constituiren die Werthsysteme b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} und die Werthsysteme $b'_{i1}, b'_{i2}, b'_{i3}$ $2p-2$ verschiedene Werthsysteme, für welche λ unendlich wird.

Bezeichnet man die durch zweimalige Wiederholung der Substitution (13.) aus b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} hervorgehenden Werthe mit $b''_{i1}, b''_{i2}, b''_{i3}$, so ist erstlich nicht [351 gleichzeitig $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b''_{l2}}{b''_{l1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b''_{l3}}{b''_{l1}}$, oder $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b'_{l2}}{b'_{l1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b'_{l3}}{b'_{l1}}$, oder $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b_{l2}}{b_{l1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b_{l3}}{b_{l1}}$ $(i \gtrless l)$ aus denselben Gründen wie oben. Andererseits ist auch, weil wir die zu b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} gehörigen Werthe von z willkürlich gewählt haben, nicht gleichzeitig $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b'_{i2}}{b'_{i1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b'_{i3}}{b'_{i1}}$, ohne dass auch gleichzeitig

$$\text{(16.)} \qquad \frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b_{i2}}{b_{i1}} \text{ und } \frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b_{i3}}{b_{i1}}.$$

Da nun λ durch den Umlauf U von z ungeändert bleibt, so muss diese Function auch für die Werthsysteme $b''_{i1}, b''_{i2}, b''_{i3}$ unendlich werden. Nun aber kann λ ausser für die $2p-2$ verschiedenen Werthsysteme (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}), $(b'_{i1}, b'_{i2}, b'_{i3})$

nicht mehr unendlich werden, da bekanntlich der Quotient der Differentiale zweier Integrale erster Gattung der Klasse p für nicht mehr als $2p-2$ Stellen der Riemannschen Fläche unendlich wird*); es müssen demnach die Gln. (16.) stattfinden. Dieselben liefern wegen der willkürlichen Wahl der zu b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} gehörigen Werthe von z den Satz:

II. Giebt es einen Umlauf U von z, welcher y_1, y_2, y_3 überführt resp. in y'_1, y'_2, y'_3 und zugleich den Quotienten λ zweier willkürlicher Integrale der Gleichung (D.) unverändert lässt, ohne dass gleichzeitig $\frac{y'_2}{y'_1} = \frac{y_2}{y_1}$ und $\frac{y'_3}{y'_1} = \frac{y_3}{y_1}$, so muss eine zweimalige Anwendung dieses Umlaufes $\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}$ ungeändert lassen.

Wenn ausser dem Umlaufe U noch ein anderer $\overline{U}$ die Eigenschaft hat, dass durch dessen Anwendung λ ungeändert bleibt, ohne dass zugleich der Quotient zweier willkürlicher Integrale der Gl. (A.) ungeändert bleibt, so ergiebt sich wiederum aus dem Umstande, dass λ nur für $2p-2$ Werthsysteme von y_1, y_2, y_3 unendlich werden kann, wenn man mit $\overline{b_{i\varkappa}}$ den durch Anwendung der $\overline{U}$ entsprechenden Substitution aus $b_{i\varkappa}$ hergeleiteten Werth bezeichnet, dass

$$\frac{\overline{b_{i2}}}{\overline{b_{i1}}} = \frac{b'_{i2}}{b'_{i1}}, \qquad \frac{\overline{b_{i3}}}{\overline{b_{i1}}} = \frac{b'_{i3}}{b'_{i1}}, \tag{17.}$$

352] d. h. wegen der willkürlichen Wahl der zu $b_{i\varkappa}$ gehörigen Werthe von z, der Umlauf $\overline{U}$ führt den Quotienten zweier willkürlicher Integrale der Gl. (A.) in denselben Werth über wie U, oder, was nach dem Satze I. No. 4 dasselbe ist, der Umlauf $\overline{U}$ führt y_1, y_2, y_3 resp. in jy'_1, jy'_2, jy'_3 über, wenn U dieselben Functionen resp. in y'_1, y'_2, y'_3 überführt, und wo j eine Einheitswurzel bedeutet.

Es seien $S_0, S_1, S_2, \dots, S_{\sigma-1}$ diejenigen Umläufe von z, welche ein reducirtes Werthsystem eines willkürlichen Integrals ω der Gl. (D.), nämlich $\omega, \omega', \omega'', \dots, \omega^{(\sigma-1)}$ hervorbringen. Jeder andere Umlauf bringt also nur einen dieser Werthe mit einer Einheitswurzel multiplicirt hervor. Den Umläufen $S_0, S_1, \dots, S_{\sigma-1}$ entsprechen die Werthe $y, y', y'', \dots, y^{(\sigma-1)}$ eines willkürlichen Integrals y der Gleichung (A.). Es können nicht zwei der letztgenannten Werthe ein constantes Verhältniss besitzen, da sonst auch zwei entsprechende

*) Riemann, Abelsche Functionen, in Borchardts Journ., Bd. 54 [1]).

[1]) Riemanns Werke (1892), S. 88ff. Sch.

Werthe der Reihe $\omega, \omega', \omega'', \dots, \omega^{(\sigma-1)}$ ein constantes Verhältniss hätten. — Die Umläufe $S_0U, S_1U, \dots, S_{\sigma-1}U$ erzeugen die Werthe $y^{(\sigma)}, y^{(\sigma+1)}, \dots, y^{(2\sigma-1)}$, während dieselben $\omega, \omega', \dots, \omega^{(\sigma-1)}$ nur mit constanten Factoren multipliciren. Die Werthe $y^{(\sigma)}, y^{(\sigma+1)}, \dots, y^{(2\sigma-1)}$ unterscheiden sich der Voraussetzung nach von $y, y', y'', \dots, y^{(\sigma-1)}$ nicht bloss um constante Factoren. Jeder andere Umlauf von z bringt aber nach dem obigen nur Werthe hervor, welche gleich sind einem der Werthe der Reihe $y, y', y'', \dots, y^{(2\sigma-1)}$ multiplicirt mit einer Constanten. Diese letztere Reihe ist also ein reducirtes Werthsystem von y.

Giebt es aber keinen Umlauf der Art U, so ist $y, y', y'', \dots, y^{(\sigma-1)}$ ein reducirtes Werthsystem von y. Man erhält also den Satz

III. Ist ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (A.), so ist $\frac{1}{2}\nu$ oder ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (D.), je nachdem es Umläufe der Art U giebt oder nicht giebt.

Es seien (η_i, ζ_i), $i = 1, 2, \dots, 2p-2$, die $2p-2$ Stellen der Riemannschen Fläche (η, ζ), in welchen λ einen willkürlich vorgeschriebenen Werth annimmt. Von diesen Stellen können $p-1$ willkürlich gegeben sein. Wir bezeichnen die letzteren mit $(\eta_1, \zeta_1), \dots, (\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$; dieselben können so gewählt werden, dass sie zu $p-1$ verschiedenen Werthen von z gehören. Wenn zu einer der übrigen Stellen $(\eta_p, \zeta_p), \dots, (\eta_{2p-2}, \zeta_{2p-2})$ ein Werth von z gehört, welcher auch einer der ersteren $p-1$ Stellen entspricht, wenn z. B. $(\eta_{p+\varkappa}, \zeta_{p+\varkappa})$ zu demselben z gehört, wie (η_i, ζ_i), so gäbe es einen Umlauf von z, welcher η_i, ζ_i resp. [353 in $\eta_{p+\varkappa}, \zeta_{p+\varkappa}$ überführte. Da durch denselben Umlauf λ in sich selbst übergeführt wird, und bei willkürlicher Wahl von $(\eta_1, \zeta_1), \dots, (\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$ die Gleichungen $\eta_{p+\varkappa} = \eta_i$, $\zeta_{p+\varkappa} = \zeta_i$ nicht gleichzeitig erfüllt sind, so wäre dieser Umlauf der Art U.

Giebt es also keinen Umlauf der Art U, so gehören zu einem willkürlichen Werthe von λ genau $\varepsilon(2p-2)$ verschiedene Werthe von z, wenn man mit ε die Anzahl der verschiedenen Werthe von z bezeichnet, für welche gleichzeitig jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A.) je einen gleichen Werth annimmt.

Wenn es aber einen Umlauf der Art U giebt, so mögen mit η', ζ' die Werthe bezeichnet werden, in welche derselbe η, ζ überführt. Es nimmt alsdann λ für $(\eta'_1, \zeta'_1), \ldots, (\eta'_{p-1}, \zeta'_{p-1})$ denselben Werth an wie für $(\eta_1, \zeta_1), \ldots, (\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$. Da diese letzteren Stellen untereinander verschieden sind, so sind es auch die ersteren. Der Voraussetzung gemäss ist auch keine der ersteren mit einer der letzteren übereinstimmend. Es fallen demnach $(\eta_p, \zeta_p), \ldots, (\eta_{2p-2}, \zeta_{2p-2})$ mit $(\eta'_1, \zeta'_1), \ldots, (\eta'_{p-1}, \zeta'_{p-1})$ zusammen. Da die Werthe von z, welche zu den verschiedenen Stellen $(\eta_1, \zeta_1), \ldots, (\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$ gehören, von einander verschieden sind, so ergiebt sich, dass in dem Falle der Existenz eines Umlaufes der Art U zu einem willkürlichen Werthe von λ genau $\varepsilon(p-1)$ verschiedene Werthe von z gehören. Man erhält also den Satz:

IV. Je nachdem es Umläufe der Art U giebt oder nicht giebt, ist die Anzahl der verschiedenen Werthe von z, welche zu einem willkürlichen Werthe des Quotienten zweier willkürlicher Integrale der Gleichung (D.) gehören, $\varepsilon(p-1)$ oder $2\varepsilon(p-1)$, wenn ε die Anzahl der verschiedenen Werthe von z bedeutet, für welche gleichzeitig jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A.) je einen gleichen Werth annimmt.

Besitzt die Gl. (A.) die Eigenschaft, dass nicht zu einem willkürlichen Werthe z ein Werth z_1 gehört der Art, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A.) in z und z_1 je einen gleichen Werth annimmt, so ist $\varepsilon = 1$. Es folgt alsdann nach Satz II. No. 4, Satz III. und Satz IV. dieser No.

$$\text{(E.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} p-1 \geqq \dfrac{p-1}{2}\,\dfrac{1}{2}\nu \\ \text{oder} \\ 2(p-1) \geqq \dfrac{p-1}{2}\nu, \end{array} \right.$$

je nachdem es Umläufe der Art U giebt oder nicht giebt.

354] In beiden Fällen folgt für $p > 1$

$$\text{(F.)} \qquad \nu \leqq 4.$$

Wenn zu einem willkürlichen Werthe z ein Werth z_1 gehört von der Art, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A.) in z und z_1 je einen gleichen Werth annimmt, so kann man, da $n > 2$, also die Gleichung (A.) algebraisch integrirbar vorausgesetzt ist, nach No. 3 durch Multiplication der abhängigen Variabeln y mit einer Wurzel einer rationalen Function von z und Transformation der unabhängigen Variabeln z in eine Veränderliche t die

Gleichung (A.) in eine Gleichung überführen der Form

$$\text{(A''.)} \qquad \frac{d^3\omega}{dt^3} + h_1(t)\frac{d^2\omega}{dt^2} + h_2(t)\frac{d\omega}{dt} + h_3(t)\omega = 0 \qquad \text{(s. dort Gl. (11.))}$$

mit rationalen Coefficienten, welche die Eigenschaft besitzt, dass nicht zu einem willkürlichen Werthe von t ein Werth t_1 gehört der Art, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A''.) in t und t_1 je einen gleichen Werth annimmt. (Satz VI. No. 3).

Die Natur der Transformationen, welche von (A.) zu (A''.) führen, bringt es mit sich, dass die Gleichung (B.) auch für ein Fundamentalsystem $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ von Integralen der Gl. (A''.) bestehen bleibt, dass also

$$\text{(18.)} \qquad f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 0.$$

Bildet man die zu (18.) gehörigen Integrale erster Gattung, so ist demnach die Anzahl der linear unabhängigen ebenfalls p. Da ferner nach Satz VII. No. 3 die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A''.) mit der Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A.) übereinstimmt, so ergiebt sich, dass die Gleichungen (E.) und (F.) auch bestehen bleiben, wenn für einen willkürlichen Werth von z und noch andere Werthe z_1 jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A.) je einen gleichen Werth annimmt.

Das durch (F.) ausgedrückte Resultat lässt sich auch folgendermassen aussprechen:

V. Ist die Klasse p der Gleichung (B.) grösser als Eins, so ist die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (A.) nicht grösser als Vier, oder, was dasselbe ist, die Anzahl der reducirten Wurzeln*) [355 der algebraischen Gleichung, welcher dieses allgemeine Integral genügt, ist nicht grösser als Vier.

*) Über die Bedeutung dieser Bezeichnung s. meine Arbeit in BORCHARDTs Journal Bd. 81, S. 111, No. 9[1]).

[1]) Abh. XX, S. 27 dieses Bandes. Sch.

6.

Für

$$p = 1$$

gehört zur Gl. (B.) nur **ein** Integral erster Gattung J. Es sei wie in No. 5

$$(1.)\qquad dJ = \frac{\varphi(y_1, y_2, y_3)\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}}.$$

Führt man auf der rechten Seite die Variabeln η, ζ ein, so erhält man

$$(2.)\qquad dJ = \varphi_1(\eta, \zeta)\, d\eta,$$

wo φ_1 eine rationale Function von η, ζ. Andererseits sind ζ und $\frac{d\eta}{dz}$ rationale Functionen von η, z. Folglich erhält man für die unabhängige Variable z

$$(3.)\qquad dJ = \psi(z, \eta)\, dz,$$

wo ψ eine rationale Function von z, η.

Nach No. 5 wird entsprechend einem Umlauf von z, welcher y_1, y_2, y_3 resp. in y_1', y_2', y_3' überführt,

$$(4.)\qquad \varphi(y_1', y_2', y_3') = j\varphi(y_1, y_2, y_3),$$

wo j eine Constante und zwar, weil für $n > 2$ $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ eine algebraische Function von z ist, eine Einheitswurzel bedeutet. Demnach ist $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ eine Wurzel einer rationalen Function von z. Aus dieser Bemerkung und aus Gleichung (4.) oder Gl. (9.) No. 5 ergiebt sich demnach, dass auch

$$(5.)\qquad dJ = R\, dz,$$

wo R Wurzel einer rationalen Function von z bedeutet.

356] Setzen wir voraus, dass die Gleichung (A.) so beschaffen sei, dass **nicht** für einen willkürlichen Werth von z und noch für andere Werthe von z jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A.) je einen gleichen Werth annimmt, so ist demnach z eine rationale Function von η, ζ. Da wir vorausgesetzt haben, dass J das zu (η, ζ) gehörige Integral erster Gattung sei, so sind η, ζ eindeutige Functionen von J, folglich ist auch z eine eindeutige Function von J.

Demnach ergiebt sich aus dem Bestehen der Gleichung (5.) nach den Untersuchungen der Herren Briot und Bouquet*), **dass R^4 oder R^6 eine rationale Function von z sein müsse.**

Unter derselben Voraussetzung über die Gl. (A.) ergiebt sich auch, dass η, z eindeutige Functionen von J. Demnach ist auch die Klasse der algebraischen Function η von z gleich Eins und $\psi(z, \eta)$ nach Gleichung (3.) die Ableitung des zu (z, η) gehörigen Integrals erster Gattung.

Der Ausdruck

$$\frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}}$$

bleibt ungeändert, wenn man an die Stelle von $y_\varkappa$ setzt $b_{\varkappa 1} y_1 + b_{\varkappa 2} y_2 + b_{\varkappa 3} y_3$, wo $b_{\varkappa \lambda}$ beliebige Constanten bedeuten, d. h. der genannte Ausdruck ist von der Wahl des Fundamentalsystems y_1, y_2, y_3 unabhängig. Gleichermassen ist $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ bis auf einen constanten Factor von der Wahl dieses Fundamentalsystems unabhängig, folglich ist auch bis auf einen constanten Factor R von der Wahl dieses Fundamentalsystems unabhängig.

Aus (3.) und (5.) folgt

$$(6.)\qquad R = \psi(z, \eta),$$

d. h. es ist R eine rationale Function von η, z. Wir behaupten aber, dass auch umgekehrt η eine rationale Function von z, R ist. Denn gäbe es einen Umlauf von z, welcher R ungeändert liesse, dagegen η in η' verwandelte, so würde in den beiden Blättern η, η' der Riemannschen Fläche der algebraischen Function η von z die Function R für dasselbe z denselben Werth annehmen. Wir können aber das Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3 so wählen, dass für [357 $z = z_1$, wo z_1 ein willkürlicher Werth, in den beiden genannten Blättern η denselben Werth η_1 erhält. Dann ist

$$(7.)\qquad \int_{(z_1, \eta_1)}^{(z, \eta)} \psi(z, \eta)\, dz \equiv \int_{(z_1, \eta_1)}^{(z, \eta')} \psi(z, \eta)\, dz,$$

d. h. gleich bis auf Vielfache von Periodicitätsmoduln, für Integrationswege, welche in den beiden Blättern η, η' übereinander laufen. Es ist demnach in

*) Journal de l'École Polytechnique, t. 21, p. 222.

der genannten Riemannschen Fläche

$$\text{(8.)} \qquad \int_{(z,\eta)}^{(z,\eta')} \psi(z,\eta)\,dz \equiv 0,$$

d. h. gleich bis auf Vielfache von Periodicitätsmoduln. Aus Gl. (8.) folgt nach einem bekannten Satze, dass es eine rationale Function von z, η giebt, welche für einen beliebig gegebenen Werth und nur für diesen unendlich wird, dass demnach die Klasse der algebraischen Function η von z gleich Null sei. Da aber nach dem oben Bewiesenen diese Klasse gleich Eins, so folgt, dass es keinen Umlauf von z giebt, welcher R ungeändert lässt, ohne gleichzeitig η ungeändert zu lassen, dass also η eine rationale Function von z, R ist.

Da eine gewisse Potenz jedes Integrals der Gleichung (A.) eine rationale Function von η, z ist, so ergiebt sich auch, dass eine gewisse Potenz jedes solchen Integrals durch eine rationale Function von z, R dargestellt werden kann.

Es ist daher, wenn λ eine gewisse ganze Zahl bedeutet,

$$\text{(9.)} \qquad y^\lambda = \alpha_0 + \alpha_1 R + \alpha_2 R^2 + \alpha_3 R^3 \quad \text{oder} \quad y^\lambda = \beta_0 + \beta_1 R + \cdots + \beta_5 R^5,$$

je nachdem R^4 oder R^6 rationale Function von z wird, wenn man mit $\alpha_\varkappa$ und $\beta_\varkappa$ rationale Functionen von z bezeichnet.

Die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A.) wird daher durch eine der Zahlen 2, 3, 4, 6 gegeben.

Da nach S. VII. No. 3 die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A.) stets gleich ist derselben Anzahl für eine Differentialgleichung dritter Ordnung, welche die Eigenschaft 358] hat, dass nicht für einen willkürlichen Werth der unabhängigen Variabeln und noch andere Werthe derselben jeder Quotient zweier Integrale derselben je einen gleichen Werth annimmt, und für welche gleichzeitig dieselbe Gleichung (B.) erfüllt ist, so folgt allgemein der Satz:

I. Ist $p = 1$, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln derjenigen algebraischen Gleichung, welcher das allgemeine Integral der Gleichung (A.) genügt, durch eine der Zahlen 2, 3, 4, 6 gegeben.

Es sei endlich

$$p = 0.$$

Alsdann giebt es bekanntlich eine rationale Function s von η, ζ

$$\text{(10.)} \qquad s = \varphi(\eta, \zeta)$$

von der Beschaffenheit, dass

$$\text{(11.)} \qquad \eta = \frac{f_2(s)}{f_1(s)}, \qquad \zeta = \frac{f_3(s)}{f_1(s)},$$

wo $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$ ganze rationale Functionen n^{ten} Grades der Variabeln s ohne einen allen gemeinschaftlichen Theiler.

Ein beliebiger Umlauf der Variabeln z führe η, ζ resp. in η', ζ' über, so ist

$$\text{(12.)} \qquad \eta' = \frac{\alpha_{21} + \alpha_{22}\eta + \alpha_{23}\zeta}{\alpha_{11} + \alpha_{12}\eta + \alpha_{13}\zeta}, \qquad \zeta' = \frac{\alpha_{31} + \alpha_{32}\eta + \alpha_{33}\zeta}{\alpha_{11} + \alpha_{12}\eta + \alpha_{13}\zeta}.$$

Setzt man in die aus (11.) sich ergebende Gleichung

$$s' = \varphi(\eta', \zeta'),$$

wo also s' den Werth bezeichnet, in welchen s durch den genannten Umlauf übergeht, die Werthe aus (12.) ein, so ergiebt sich nach Gl. (11.), dass s' eine rationale Function von s. Da aber auch umgekehrt s eine rationale Function von s' sein muss, so folgt:

Zwischen s und s' findet eine Gleichung der Form

$$\text{(13.)} \qquad ass' + bs + cs' + d = 0$$

statt, wo a, b, c, d Constanten sind.

Wir setzen

$$\text{(14.)} \qquad \xi_1^2 = \frac{dz}{ds}, \qquad \xi_2 = \xi_1 s.$$

Aus Gl. (13.) folgt: [359

$$\text{(15.)} \qquad \frac{ds'}{dz} = \frac{bc - ad}{(as+c)^2}\frac{ds}{dz}.$$

Da s nicht constant, so ist $bc - ad$ von Null verschieden.

Nach dem genannten Umlaufe von z mögen ξ_1, ξ_2 resp. in ξ_1', ξ_2' übergehen, so ergiebt sich aus (14.) und (15.)

$$\xi_1'^2 = \frac{dz}{ds'} = \frac{1}{bc-ad}(as+c)^2\xi_1^2,$$

$$\xi_2'^2 = \frac{1}{bc-ad}(bs+d)^2\xi_1^2,$$

also

$$(16.)\qquad \begin{cases} \xi_1' = \dfrac{1}{\sqrt{bc-ad}}(a\xi_2+c\xi_1), \\ \xi_2' = \dfrac{1}{\sqrt{bc-ad}}(b\xi_2+d\xi_1). \end{cases}$$

Da aber s, folglich auch ξ_1, ξ_2 algebraische Functionen von z sind, so lässt sich dieses Resultat auch folgendermassen aussprechen:

Es ist s der Quotient zweier Integrale ξ_1, ξ_2 einer linearen homogenen algebraisch integrirbaren Differentialgleichung zweiter Ordnung mit der unabhängigen Variabeln z und mit in z rationalen Coefficienten.

Es sei

$$(17.)\qquad f_\varkappa(s)\xi_1^n = \psi_\varkappa(\xi_1, \xi_2), \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

wo $\psi_\varkappa$ ganze rationale und homogene Functionen von ξ_1, ξ_2 n^{ten} Grades bedeuten.

Aus den Gleichungen (11.) folgt alsdann

$$(18.)\qquad y_\varkappa = \varrho\psi_\varkappa(\xi_1, \xi_2), \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

Wenn $\varrho, \xi_1, \xi_2, y_\varkappa$ nach einem Umlaufe von z resp. in $\varrho', \xi_1', \xi_2', y_\varkappa'$ übergehen, so dass

$$y_\varkappa' = \alpha_{\varkappa 1}y_1 + \alpha_{\varkappa 2}y_2 + \alpha_{\varkappa 3}y_3, \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

und nach Gl. (16.)

$$\psi_\varkappa(\xi_1', \xi_2') = \chi_\varkappa(\xi_1, \xi_2),$$

360] wo $\chi_\varkappa$ ebenfalls eine ganze rationale und homogene Function n^{ten} Grades von ξ_1, ξ_2 bezeichnet, so ergiebt sich aus (18.)

$$(19.)\qquad \varrho'\chi_\varkappa(\xi_1, \xi_2) = \varrho[\alpha_{\varkappa 1}\psi_1 + \alpha_{\varkappa 2}\psi_2 + \alpha_{\varkappa 3}\psi_3].$$

Demnach ist $\frac{\varrho'}{\varrho}$ eine rationale Function von s.

Wenn die Function $\frac{\varrho'}{\varrho}$ für einen Werth von s verschwindet, so muss für denselben Werth

$$\alpha_{\varkappa 1}f_1 + \alpha_{\varkappa 2}f_2 + \alpha_{\varkappa 3}f_3 = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

sein, d. h. da die Determinante der Grössen $\alpha_{\varkappa i}$ nicht verschwindet,

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0$$

sein, was nicht möglich ist, da $f_1(s), f_2(s), f_3(s)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen.

Demnach in $\frac{\varrho'}{\varrho}$ eine Constante. Da aber ϱ eine algebraische Function von z ist, so folgt, dass ϱ Wurzel einer rationalen Function von z. Also

II. Im Falle $p = 0$ ist das allgemeine Integral der Gleichung (A.) abgesehen von einer Wurzel einer rationalen Function als Factor durch eine ganze rationale und homogene Function n^{ten} Grades des Fundamentalsystems von Integralen ξ_1, ξ_2 einer algebraisch integrirbaren linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in z rationalen Coefficienten darstellbar*).

Betrachten wir nunmehr die Gl. (B.) für den Fall $n = 2$.

Es sei

$$(20.)\qquad a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 + 2a_{12}y_1y_2 + 2a_{13}y_1y_3 + 2a_{23}y_2y_3 = 0$$

diese Gleichung, so ergiebt sich, wenn man mit η_0, ζ_0 ein beliebiges Werthsystem von η, ζ bezeichnet, welches derselben genügt, und wenn man setzt

$$(21.)\qquad s = \frac{\zeta - \zeta_0}{\eta - \eta_0},$$

$$(22.)\qquad \eta = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{A_0 + A_1 s + A_2 s^2}, \qquad \zeta = \frac{b_0' + b_1' s + b_2' s^2}{A_0 + A_1 s + A_2 s^2}.$$

Aus den Gln. (21.), (22.) ergiebt sich analog wie aus den Gln. (10.), (11.), [361 dass zwischen zwei Zweigen s und s' der Function s von z eine bilineare Gleichung von der Form (13.) stattfindet.

Aus dieser Gleichung folgert man wie oben, dass s der Quotient zweier Integrale ξ_1, ξ_2 einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in z rationalen Coefficienten ist, jedoch mit dem Unterschiede, dass hier die Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht algebraisch integrirbar zu sein braucht, da s nicht algebraisch sein muss. Auch

*) Über solche Differentialgleichungen zweiter Ordnung vergl. meine Abhandlungen in BORCH. Journ. Bd. 81, S. 97 und Bd. 85, S. 1[1]).

[1]) Abh. XX, S. 11 und Abh. XXV, S. 115 dieses Bandes. Sch.

für diesen Fall gelten die Gln. (18.), und in diesen sind die Functionen ψ_x ganze rationale Functionen zweiten Grades, während ϱ constant wird. Dieses Resultat ist mit dem in No. 2 gegebenen übereinstimmend.

7.

Für die lineare homogene Differentialgleichung (A.), zwischen deren Integralen eine Gleichung (B.) besteht, ergeben sich nach dem Vorhergehenden folgende Resultate:

I. Ist der Grad n der Gleichung (B.) gleich Zwei, so ist die Gleichung (A.) übereinstimmend mit der Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher das Quadrat jedes Integrals einer beliebigen linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten genügt.

II. Ist n grösser als Zwei, so sind die Integrale der Gleichung (A.) algebraische Functionen von z.

Hierbei ergeben sich drei Fälle:

a) Ist die Klasse p der algebraischen Gleichung (B.) grösser als Eins, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln derjenigen algebraischen Gleichung, welcher das allgemeine Integral der Gleichung (A.) genügt, nicht grösser als Vier.

b) Ist p gleich Eins, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln Zwei, Drei, Vier oder Sechs.

c) Ist p gleich Null, so sind die Integrale der Gleichung (A.) abgesehen von einer Wurzel einer rationalen Function als einem für alle gültigen Factor, rationale ganze und homogene Functionen n^{ten} Grades des Fundamentalsystems 362] von Integralen ξ_1, ξ_2 einer algebraisch integrirbaren linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten.

Da jede algebraisch integrirbare Gleichung (A.) die Eigenschaft hat, dass zwischen den Elementen des Fundamentalsystems y_1, y_2, y_3 eine Gleichung (B.) besteht, so sind durch diese Resultate auch alle die Fälle erschöpft, in welchen eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit rationalen Coefficienten nur algebraische Integrale besitzt.

Heidelberg 1882.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 306, Fussnote p. 130 statt p. 128,
„ 307, Gl. (28.) $(z-b)^{\frac{a}{\alpha}}$ statt $(z-\alpha)^{\frac{a}{\alpha}}$,
$(\eta-\beta)^{\frac{a}{\delta}}$ statt $(\eta-\beta)^{\frac{a}{\beta}}$,
„ „ , Zeile 13 δ statt β,
„ 309, „ 8 dann statt so,
„ „ , Gl. (5.) $\alpha_{13}y_3$, statt $\alpha_{13}y_3+$,
„ 311, Zeile 3 v. u. Functionen statt Function,
„ 319, „ 10 (10.) statt (12.),
„ 322, „ 11 v. u. der statt vom,
„ „ , „ 3 v. u. Es sei statt Ist,
„ 325, Gl. (9.) $\sqrt[3]{\frac{\Delta}{X}}\,dz$ statt $\sqrt[3]{\frac{\Delta}{X}}$,
„ 326, Zeile 2 $\pm c_1 y_2' dy_3'$ statt $c_1 y_2' dy_3'$,
„ 327, „ 3 v. u. U von z statt von U,
„ 330, „ 3 keine statt keiner, einer statt einem;
„ „ wurde das Formelzeichen (E.) auf beide Ungleichungen bezogen,
„ 336, Zeile 12 v. u. wurde $\varrho, \xi_1, \varrho_2, y_x$ umgestellt,
„ „ , letzte Zeile, wurde vor $x = 1, 2, 3$ ein »für« unterdrückt.

2) Dem Schlusse auf S. 307, Zeile 9–21 liegt die wesentliche Voraussetzung zu Grunde, dass η der Quotient zweier Integrale der Differentialgleichung (1.) ist; wäre für η als Function von z nichts weiter bekannt als die Gln. (23.), (27.), so könnte man nicht schliessen, dass z eine algebraische Function von η sei, sondern es könnte, wenn der Rang der zwischen $\frac{d\eta}{dz}$ und η bestehenden algebraischen Gleichung gleich 0 oder 1 wäre, z auch eine transcendente Function von η sein (vergl. Fuchs, Über Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, 1884, Abh. XLIII dieses Bandes, und Poincaré, Sur un théorème de M. Fuchs, Acta Mathem. Bd. VII, 1885, S. 1 ff.). In einer späteren Arbeit, »Über algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen«, Sitzungsberichte der K. preuss. Akademie, 1890, S. 469 ff., hat Fuchs für den in Rede stehenden Nachweis zwei andere, auf verschiedenen Principien beruhende Verfahrungsarten entwickelt.

Sch.

XLI.

ÜBER FUNCTIONEN EINER BELIEBIGEN ANZAHL UNABHÄNGIGER VARIABELN, WELCHE DURCH UMKEHRUNG DER INTEGRALE EINER GLEICH GROSSEN ANZAHL GEGEBENER FUNCTIONEN ENTSTEHEN.

(Sitzungsberichte der K. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1883, XX, S. 507—516; vorgelegt am 5. April; ausgegeben am 26. April 1883.)

In früheren Arbeiten*) habe ich mich mit den Bedingungen be- [507 schäftigt, dass die Gleichungen

$$\int_{\delta_1}^{z_1} f_1(z_1)\,dz_1 + \int_{\delta_2}^{z_2} f_1(z_2)\,dz_2 = u_1,$$

$$\int_{\delta_1}^{z_1} f_2(z_1)\,dz_1 + \int_{\delta_2}^{z_2} f_2(z_2)\,dz_2 = u_2$$

eindeutig lösbar seien. Es ergaben sich ausser den Bedingungen, welche das Verhalten von $f_1(z)$ und $f_2(z)$ in der Umgebung von singulären Stellen der Variabeln z und der Integrale dieser Functionen in Bezug auf unendlich oft wiederholte Umläufe betreffen, die beiden Bedingungen, dass $f_1(z), f_2(z)$ nicht gleichzeitig für ein und denselben endlichen Werth von z verschwinden dürfen, und dass die Gleichung

$$A_1 f_1(z) + A_2 f_2(z) = 0$$

für nicht mehr als zwei Werthsysteme $(z, f_k(z))$ befriedigt werden darf, und

---

*) Vergl. insbesondere Abhandlungen der Göttinger Societät, 8. Januar 1881[1]), welche Abhandlung auch im Bulletin des Herrn Darboux, Jahrgang 1881, wiedergegeben ist.

---

[1]) Abh. XXXV, S. 239 ff. dieses Bandes. Sch.

dass diese Lösungen den Gleichungen

$$\sum_1^2{}_i f_k(z_i)\,dz_i = 0 \qquad (k=1,\ )$$

Genüge leisten.

508] Im Folgenden erlaube ich mir mit Hülfe der in meinen genannten Arbeiten angewendeten Principien die Verallgemeinerung dieser letzteren Bedingungen für die eindeutige Lösbarkeit der Gleichungen

$$\sum_1^n{}_i \int_{\delta_i}^{z_i} f_k(z_i)\,dz_i = u_k, \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

wenn n einen beliebigen Werth hat, zu liefern, indem ich mir für eine andere Gelegenheit vorbehalte, auf die Zusammenstellung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die eindeutige Lösbarkeit dieser Gleichungen in dem allgemeinen Falle überhaupt — in Übereinstimmung mit den Methoden meiner oben citirten Arbeiten — näher einzugehen.

1.

Es seien $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$ Functionen der Beschaffenheit, dass jede symmetrische Function der den Gleichungen:

$$\text{(A.)} \qquad \sum_1^n{}_i \int_{\delta_i}^{z_i} f_k(z_i)\,dz_i = u_k \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

genügenden Werthe $z_1, z_2, \dots, z_n$ eine eindeutige Function der unabhängigen Variabeln $u_1, u_2, \dots, u_n$ darstelle. Die Grössen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ bedeuten willkürlich gegebene Constanten, und es wird vorausgesetzt, dass in jeder der n Gleichungen das auf dieselbe Variable z_i bezügliche Integral auf demselben Wege ausgeführt werde.

Es seien $c_1, c_2, \dots, c_n$ gegebene Werthe von $z_1, z_2, \dots, z_n$ und $v_1, v_2, \dots, v_n$ zugehörige Werthe von $u_1, u_2, \dots, u_n$. Wir wollen voraussetzen, dass $c_1, c_2, \dots, c_n$ nicht zu den singulären Werthen einer der Functionen $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$ gehören. Alsdann ergiebt sich aus den Gleichungen (A.) nach dem Taylorschen Satz:

$$\text{(1.)} \quad \sum_1^n{}_i f_k(c_i)(z_i-c_i) + \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i f_k'(c_i)(z_i-c_i)^2 + \frac{1}{6}\sum_1^n{}_i f_k^{(2)}(c_i)(z_i-c_i)^3 + \cdots = u_k - v_k, \quad (k=1,2,\dots,n)$$

wo

$$f_k^{(\lambda)}(z) = \frac{d^\lambda f_k(z)}{dz^\lambda}.$$

Wenn die Grössen $c_1, c_2, \dots, c_n$ so beschaffen sind, dass die Determinante

$$D = \sum \pm f_1(c_1) f_2(c_2) \dots f_n(c_n)$$

nicht verschwindet, alsdann ergeben sich aus den Gleichungen (1.)*) für [509 $z_1-c_1, z_2-c_2, \dots, z_n-c_n$ Darstellungen durch Reihen, welche nach positiven ganzen Potenzen von $u_1-v_1, u_2-v_2, \dots, u_n-v_n$ entwickelt sind. Demnach sind in diesem Falle $z_1, z_2, \dots, z_n$ in der Umgebung der Werthe $v_1, v_2, \dots, v_n$ von $u_1, u_2, \dots, u_n$ eindeutig.

Setzen wir dagegen voraus, dass $c_1, c_2, \dots, c_n$ so beschaffen sind, dass

$$\text{(B.)} \qquad D = 0$$

ohne dass jedoch die Unterdeterminanten erster Ordnung Null sind, alsdann kann man z. B. aus den ersten $n-1$ Gleichungen (1.) $z_2-c_2, z_3-c_3, \dots, z_n-c_n$ durch Reihen darstellen, welche nach positiven ganzen Potenzen von $z_1-c_1, u_1-v_1, u_2-v_2, \dots, u_{n-1}-v_{n-1}$ fortschreiten.

Bezeichnen wir die mit $f_k(c_i)$ multiplicirte Unterdeterminante von D mit $\mathfrak{A}_{ki}$, so ist

$$\text{(2.)} \quad \mathfrak{A}_{n1}(z_i-c_i) = \mathfrak{A}_{ni}(z_1-c_1) + \alpha_{i1}(u_1-v_1) + \alpha_{i2}(u_2-v_2) + \cdots$$
$$+ \alpha_{i,n-1}(u_{n-1}-v_{n-1}) + P_{i2} + P_{i3} + \cdots, \qquad (i=2,3,\dots,n)$$

wo P_{il} eine homogene Function l^{ter} Ordnung der Variabeln

$$z_1-c_1,\ u_1-v_1,\ u_2-v_2,\ \dots,\ u_{n-1}-v_{n-1}$$

bezeichnet, und wo die α_{ik} Unterdeterminanten der Determinante $\mathfrak{A}_{n1}$ darstellen.

Setzt man die Werthe (2.) in die n^{te} der Gleichungen (1.), so erhält man gemäss Gleichung (B.)

$$\text{(C.)} \qquad \mathfrak{A}_{11}(u_1-v_1) + \mathfrak{A}_{21}(u_2-v_2) + \cdots + \mathfrak{A}_{n1}(u_n-v_n) = \mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_3 + \cdots,$$

wo $\mathfrak{Q}_l$ eine ganze homogene Function von $z_1-c_1, u_1-v_1, u_2-v_2, \dots, u_{n-1}-v_{n-1}$ l^{ter} Ordnung bezeichnet.

Wenn nicht alle Glieder der unendlichen Reihe $\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3, \dots$ für $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_{n-1} = v_{n-1}$ und für einen beliebigen Werth von z_1 verschwinden, so sei unter den von $u_1-v_1, u_2-v_2, \dots, u_{n-1}-v_{n-1}$ unabhängigen Gliedern $C_m(z_1-c_1)^m$ das von der niedrigsten Ordnung. Alsdann würden sich

*) Vergl. Jacobi in Crelles Journal Bd. 6, S. 274 [1]).

[1]) Jacobis Werke, Bd. 6 (1891), S. 47. Sch.

aus der Gleichung (C.) für willkürliche Werthe von $u_1-v_1, u_2-v_2, \ldots, u_n-v_n$, deren Modul hinlänglich klein, m Werthe von z_1-c_1 ergeben, deren Moduln ebenfalls unterhalb einer gewissen Grenze bleiben*). Es würde sich demnach 510] in der Umgebung von $u_1=v_1, u_2=v_2, \ldots, u_n=v_n$ nicht jede symmetrische Function von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ eindeutig verhalten, und zwar würden $u_k=v_k$ wirkliche singuläre Stellen derselben sein, weil, wenn u_k auf willkürlichem Wege in v_k einrückt, gleichzeitig $z_i=c_i$ wird.

Wenn dagegen keines der Glieder $\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3, \ldots$ ein von u_k-v_k unabhängiges Glied enthält, so wird der Gleichung (C.) gemäss, wenn die u_k-v_k unendlich klein erster Ordnung werden, der Ausdruck

$$\mathfrak{A}_{11}(u_1-v_1)+\mathfrak{A}_{21}(u_2-v_2)+\cdots+\mathfrak{A}_{n1}(u_n-v_n)$$

unendlich klein zweiter Ordnung sein, d. h. es würde zwischen diesen unendlich kleinen Grössen die Gleichung

$$(3.)\qquad \mathfrak{A}_{11}(u_1-v_1)+\mathfrak{A}_{21}(u_2-v_2)+\cdots+\mathfrak{A}_{n1}(u_n-v_n) = 0$$

stattfinden.

Demnach würden**) die z_i nur dann in die c_i eintreffen können, wenn die letzten Wegelemente, auf welchen u_k nach v_k gelangt, von einander abhängig werden, also $u_1, u_2, \ldots, u_n$ nicht mehr als von einander unabhängige Variabeln sich verhalten.

Wenn die Grössen $\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3, \ldots$ kein von u_k-v_k unabhängiges Glied enthalten, so wird die Gleichung (C.) für beliebige Werthe z_1 befriedigt, wenn

*) Dieses ergiebt sich am einfachsten aus einem Satze, welchen Herr Weierstrass in einem lithographirten Hefte, betitelt: »Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze, zusammengestellt und dem mathematischen Verein zu Berlin übergeben. Berlin, H. S. Hermann«, S. 1–6[1]), bewiesen hat. Dieser Satz des Herrn Weierstrass lässt sich kurz dahin aussprechen: Eine nach ganzen positiven Potenzen der $n+1$ Variablen $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ fortschreitende Reihe 510] $F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von der Beschaffenheit, dass $F(x, 0, \ldots, 0) = F_0(x)$ nicht für jeden Werth von x verschwindet, und zwar so, dass die niedrigste in $F_0(x)$ auftretende Potenz von x die m^{te} sei, lässt sich für hinlänglich kleine Moduln der Variablen in ein Product zweier Factoren zerlegen, wovon der eine für verschwindende Werthe der Variablen weder Null noch unendlich wird, der andere aber die Form hat $x^m+f_1x^{m-1}+\cdots+f_m$, wo f_k eine nach ganzen positiven Potenzen der n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fortschreitende Reihe darstellt.

**) Vergl. meine citirte Abhandlung in den Abh. der Göttinger Societät[2]), No. 4.

[1]) Weierstrass' Werke, Bd. II (1895), S. 135 ff. Sch.

[2]) Abh. XXXV, S. 239 ff. dieses Bandes. Sch.

$u_k=v_k$, oder, was dasselbe ist, wenn man in den Gleichungen (1.) $u_k=v_k$ setzt, so werden dieselben identisch für die Variable z_1 befriedigt, wenn man für z_i-c_i $(i=2, 3, \ldots, n)$ die nach Potenzen von z_1-c_1 fortschreitenden Reihen (2.) substituirt.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass in der Umgebung von $u_k=v_k$, welchen die Werthe $z_i=c_i$ entsprechen, für die $D=0$, jede symmetrische Function von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sich eindeutig verhalte, ist also die, dass die Integrale von $n-1$ der Differentialgleichungen

$$(\mathrm{D.})\qquad \sum_1^n {}_i f_k(z_i)\,dz_i = 0 \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

mit den Anfangswerthen $z_i=c_i$ auch der n^{ten} dieser Differentialgleichungen genügen.

2. [511

Sind $z_1, z_2, \ldots, z_n$ Functionen einer Variabeln ζ, welche die gleichzeitigen Werthe $z_i=c_i$ erhalten und den Differentialgleichungen (D.) genügen, so folgt aus diesen Gleichungen:

$$(1.)\qquad \sum_1^n {}_i f_k(c_i)\left(\frac{dz_i}{d\zeta}\right)_0 = 0, \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

$$(2.)\qquad \sum_1^n {}_i f_k'(c_i)\left(\frac{dz_i}{d\zeta}\right)_0^2 + \sum_1^n {}_i f_k(c_i)\left(\frac{d^2z_i}{d\zeta^2}\right)_0 = 0, \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

wo $\left(\frac{dz_i}{d\zeta}\right)_0, \left(\frac{d^2z_i}{d\zeta^2}\right)_0$ die Werthe von $\frac{dz_i}{d\zeta}, \frac{d^2z_i}{d\zeta^2}$ für die Anfangswerthe $z_i=c_i$ bezeichnen.

Vermöge der Gleichung (B.) werden die Gleichungen (1) gleichzeitig befriedigt, und man erhält

$$(3.)\qquad \left(\frac{dz_i}{d\zeta}\right)_0 = \varrho\,\mathfrak{A}_{mi},$$

wo m eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ bedeutet und ϱ von i unabhängig ist.

Multiplicirt man die Gleichungen (2.) der Reihe nach mit $\mathfrak{A}_{1l}, \mathfrak{A}_{2l}, \ldots, \mathfrak{A}_{nl}$ und addirt dieselben, so ergiebt sich aus Gleichung (B.)

$$(4.)\qquad \sum_1^n {}_k \sum_1^n {}_i \mathfrak{A}_{kl} f_k'(c_i)\left(\frac{dz_i}{d\zeta}\right)_0^2 = 0,$$

wo für l eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ gewählt werden kann.

Substituirt man die Werthe (3.) in (4.), so folgt

$$\sum_1^n {}_k \sum_1^n {}_i \mathfrak{A}_{ki} f_k'(c_i) \mathfrak{A}_{mi}^2 = 0,$$

oder mit Rücksicht auf die aus (B.) sich ergebende Eigenschaft

$$\frac{\mathfrak{A}_{mi}}{\mathfrak{A}_{mk}} = \frac{\mathfrak{A}_{m'i}}{\mathfrak{A}_{m'k}},$$

$$\text{(5.)} \qquad \mathfrak{A}_{m1} \frac{\partial D}{\partial c_1} + \mathfrak{A}_{m2} \frac{\partial D}{\partial c_2} + \cdots + \mathfrak{A}_{mn} \frac{\partial D}{\partial c_n} = 0.$$

Die Grössen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ waren willkürlich und nur durch die Gleichung (B.) verbunden. Wir erhalten daher den folgenden Satz:

Sind $z_1, z_2, \ldots, z_n$ beliebige Variabeln, welche nur durch die Gleichung

$$\text{(E.)} \qquad \Delta = \sum \pm f_1(z_1) f_2(z_2) \ldots f_n(z_n) = 0$$

512] mit einander verbunden sind, so ist unter Voraussetzung der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichungen (A.)

$$\text{(F.)} \qquad A_{m1} \frac{\partial \Delta}{\partial z_1} + A_{m2} \frac{\partial \Delta}{\partial z_2} + \cdots + A_{mn} \frac{\partial \Delta}{\partial z_n} = 0,$$

wo A_{ki} den Coefficienten von $f_k(z)$ in Δ bedeutet und m irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ bezeichnet.

3.

Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_{2n-2}$ Werthe, welche sämmtlich der Gleichung

$$\text{(G.)} \qquad A_1 f_1(z) + A_2 f_2(z) + \cdots + A_n f_n(z) = 0$$

genügen, wo A_k eine willkürliche Grösse bezeichnet.

Ist $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ irgend eine Combination von n Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, 2n-2$, so ist

$$\text{(E'.)} \qquad \Delta(\alpha, \beta, \ldots, \nu) = \begin{vmatrix} f_1(z_\alpha) & f_1(z_\beta) & \ldots & f_1(z_\nu) \\ f_2(z_\alpha) & f_2(z_\beta) & \ldots & f_2(z_\nu) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(z_\alpha) & f_n(z_\beta) & \ldots & f_n(z_\nu) \end{vmatrix} = 0.$$

Solcher Gleichungen erhält man demgemäss

$$\frac{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n-2}.$$

Zu jeder derselben gehört nach dem Satze voriger Nummer eine Gleichung der Form

$$\text{(F'.)} \qquad A_{m\alpha}(\alpha, \beta, \ldots, \nu) \frac{\partial \Delta(\alpha, \beta, \ldots, \nu)}{\partial z_\alpha} + A_{m\beta}(\alpha, \beta, \ldots, \nu) \frac{\partial \Delta(\alpha, \beta, \ldots, \nu)}{\partial z_\beta} + \cdots + A_{m\nu}(\alpha, \beta, \ldots, \nu) \frac{\partial \Delta(\alpha, \beta, \ldots, \nu)}{\partial z_\nu} = 0,$$

wo $A_{mi}(\alpha, \beta, \ldots, \nu)$ den Coefficienten von $f_m(z_i)$ in $\Delta(\alpha, \beta, \ldots, \nu)$ bezeichnet.

Von den $2n-2$ Werthsystemen $(z_i, f_k(z_i))$ können $n-1$ beliebig gewählt werden, während die übrigen $n-1$ dadurch bestimmt sind.

Wählen wir $(z_i, f_k(z_i))$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$ als die willkürlichen und bezeichnen der Kürze halber

$$\Delta(1, 2, \ldots, n-1, \varrho) \text{ für } \varrho = n, n+1, \ldots, 2n-2$$ [513

mit Δ_ϱ und den Coefficienten von $f_k(z_i)$ in Δ_ϱ mit $A_{ki}(\varrho)$, so ist

$$\text{(1.)} \qquad \frac{\partial z_\varrho}{\partial z_i} \frac{\partial \Delta_\varrho}{\partial z_\varrho} + \frac{\partial \Delta_\varrho}{\partial z_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$\text{(2.)} \qquad \frac{\partial \Delta(\alpha, \beta, \ldots, \nu)}{\partial z} = 0,$$

wenn $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ von i verschieden sind, und

$$\text{(2a.)} \qquad \frac{\partial \Delta(\alpha, \beta, \ldots, \nu)}{\partial z_i} = \frac{A_{1i}(\alpha, \beta, \ldots, \nu)}{A_{1i}(n)} \frac{\partial \Delta_n}{\partial z_i},$$

wenn eine der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ mit i übereinstimmt.

Ebenso ist

$$\text{(3.)} \qquad \frac{\partial \Delta(\alpha, \beta, \ldots, \nu)}{\partial z_\varrho} = 0,$$

wenn $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ von ϱ verschieden sind, aber

$$\text{(3a.)} \qquad \frac{\partial \Delta(\alpha, \beta, \ldots, \nu)}{\partial z_\varrho} = \frac{A_{1\varrho}(\alpha, \beta, \ldots, \nu)}{A_{1\varrho}(\varrho)} \frac{\partial \Delta_\varrho}{\partial z_\varrho},$$

wenn eine der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ mit ϱ übereinstimmt.

Setzt man die Werthe (2.) bis (3a.) in (F'.) ein, so erhält man

$$\frac{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n-2}$$

lineare homogene Gleichungen zwischen den $2n-2$ Grössen

$$\frac{\partial\Delta_n}{\partial z_1}, \frac{\partial\Delta_n}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial\Delta_n}{\partial z_{n-1}}, \frac{\partial\Delta_n}{\partial z_n}, \frac{\partial\Delta_{n+1}}{\partial z_{n+1}}, \frac{\partial\Delta_{n+2}}{\partial z_{n+2}}, \ldots, \frac{\partial\Delta_{2n-2}}{\partial z_{2n-2}}.$$

Es bestimmen $2n-2$ derselben die Verhältnisse dieser Grössen, folglich nach den Gleichungen (2.) bis (3a.) die Verhältnisse irgend zweier Ableitungen der Determinanten $\Delta(\alpha, \beta, \ldots, \nu)$, und zwar ergeben sich vermöge der zwischen den Grössen $A_{mi}(\alpha, \beta, \ldots, \nu)$ stattfindenden Relationen die Gleichungen

$$\text{(H.)} \quad A_{mi}(i, n, n+1, \ldots, 2n-2)\frac{\partial\Delta_\varrho}{\partial z_i} + A_{m\varrho}(i, n, n+1, \ldots, 2n-2)\frac{\partial\Delta_\varrho}{\partial z_\varrho} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1, \ \varrho = n, n+1, \ldots, 2n-2).$$

514] Demnach folgt aus den Gleichungen (1.)

$$\text{(4.)} \quad \frac{\partial z_\varrho}{\partial z_i} A_{mi}(i, n, n+1, \ldots, 2n-2) - A_{m\varrho}(i, n, n+1, \ldots, 2n-2) = 0.$$

Hieraus ergiebt sich:

Wenn die Gleichungen (A.) eindeutig lösbar sind, so finden zwischen den Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_{2n-2}$, welche der Gleichung (G.) genügen, die n Differentialgleichungen

$$\text{(J.)} \qquad \sum_1^{2n-2} {}_i f_k(z_i)\,dz_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

statt.

Man sieht, dass für unsere Functionen $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ ein ähnliches Theorem besteht, wie für die Differentialquotienten der Integrale erster Gattung der algebraischen Functionen. Es ist bemerkenswerth, dass wir dieses Theorem in unserem allgemeinen Falle aus der Voraussetzung der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichungen (A.) direct herleiten konnten. Selbstverständlich gilt unsere Deduction auch für den speciellen Fall des Theorems bezüglich der Abel'schen Integrale, welcher in der Theorie der Abel'schen Functionen mit Hülfe des Abel'schen Theorems hergeleitet wird*).

*) Vergl. Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, in Borchardt's Journal, Bd. 54[1]), No. 14.

[1]) Riemanns Werke (1892), Abh. VI, S. 100 ff. Sch.

4.

In gleicher Weise, wie ich es für den besonderen Fall $n = 2$ bewiesen habe*), gilt hier der Satz:

I. Damit die Gleichungen (A.) eindeutig lösbar seien, dürfen nicht $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ gleichzeitig für ein und denselben endlichen Werth von z verschwinden.

Dieses vorausgesetzt, folgern wir aus dem Vorhergehenden den Satz:

II. Die Gleichung (G.) wird durch nicht mehr als $2n-2$ Werthsysteme $(z_i, f_k(z_i))$ mit endlichem z_i befriedigt.

Denn genügt ausser den Werthsystemen $(z_i, f_k(z_i))$ für $i = 1, 2, \ldots, 2n-2$ noch $z = z^1$, $f_k(z) = f_k(z^1)$, so hat man nach dem Satze der vorigen Nummer (Gleichung (J.))

$$\text{(1.)} \qquad \sum_1^{2n-2} {}_i f_k(z_i)\,dz = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$ [515

und

$$\text{(2.)} \qquad \sum_1^{2n-2} {}_i f_k(z_i)\,dz - f_k(z_\alpha)\,dz_\alpha + f_k(z^1)\,dz^1 = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

wo α eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 2n-2$ bedeutet.

Durch Subtraction von (1.) und (2.) ergiebt sich

$$\text{(3.)} \qquad f_k(z^1)\,dz^1 - f_k(z_\alpha)\,dz_\alpha = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Da $n-1$ von den Grössen z_i willkürlich gewählt werden können, so seien z. B. $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ willkürlich veränderlich. Aus (3.) folgt z. B. successive für $\alpha = 1$, $\alpha = 2$

$$\text{(4.)} \qquad f_k(z_1)\,dz_1 = f_k(z_2)\,dz_2, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

woraus sich die Gleichungen

$$\text{(5.)} \qquad \frac{f_k(z_1)}{f_1(z_1)} = \frac{f_k(z_2)}{f_1(z_2)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ergeben würden, welche nicht Statt haben können, da z_1, z_2 von einander unabhängig sind.

Es ist ausserdem dem Satze I. zu Folge nicht möglich, dass die Gleichung (G.) durch einen constanten, d. h. von $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ unabhängigen endlichen

*) S. z. B. meine erwähnte Arbeit in den Abhandlungen der Gött. Societät, 8. Jan. 1881[1]), No. 3.

[1]) Abh. XXXV, S. 239 ff. dieses Bandes. Sch.

Werth $z = b$ befriedigt werde, da dieses nur geschehen könnte, wenn (G.) für willkürliche Werthe von $A_1, A_2, \dots, A_n$, durch $z = b$ befriedigt würde, oder dass $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$ gleichzeitig für $z = b$ verschwinden würden.

5.

Sind $z_n, z_{n+1}, \dots, z_{2n-2}$ unabhängige Variabeln, und bestimmt man die Coefficienten $A_1, A_2, \dots, A_n$ so, dass die Werthsysteme $(z_i, f_k(z_i))$ für $i = n, n+1, \dots, 2n-2$ der Gleichung (G.) genügen, so sind die übrigen Werthsysteme $(z_i, f_k(z_i))$ für $i = 1, 2, \dots, n-1$, welche (G.) genügen, Functionen von $z_n, z_{n+1}, \dots, z_{2n-2}$, und es finden zwischen $z_1, z_2, \dots, z_{2n-2}$ die Gleichungen (J.) statt.

Sind insbesondere $z_{n+1}, z_{n+2}, \dots, z_{2n-2}$ Constanten, und zwar $z_{n+i} = \gamma_i$, so werden $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ Functionen von z_n, welche den Differentialgleichungen (D.) genügen. Hieraus folgt:

I. Das allgemeine Integral der Differentialgleichungen (D.) ist durch die Wurzeln der Gleichung

516]

$$\text{(K.)} \qquad \begin{vmatrix} f_1(z) & f_1(z_n) & f_1(\gamma_1) & \dots & f_1(\gamma_{n-2}) \\ f_2(z) & f_2(z_n) & f_2(\gamma_1) & \dots & f_2(\gamma_{n-2}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(z) & f_n(z_n) & f_n(\gamma_1) & \dots & f_n(\gamma_{n-2}) \end{vmatrix} = 0$$

mit der Unbekannten z dargestellt, in welcher $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-2}$ willkürliche Constanten bedeuten.

Aus der vorigen Nummer ergiebt sich:

II. Die Gleichung (K.) wird durch nicht mehr als $n-1$ Werthenpaare $(z, f_k(z))$ (Functionen von $z_n, f_k(z_n)$) befriedigt.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original.

S. 345, Gl. (2.) wurde »$= 0$« hinzugefügt,

" 350, " (K.) und Zeile 5 v. u. wurde γ_{n-2} statt γ_{n-1} gesetzt. Sch.

XLII.

SUR UN DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE. PAR CH. HERMITE ET L. FUCHS.

(Acta Mathematica, t. 4, 1884, p. 89—92.)

1. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite par M. Fuchs. [89

Peut-être vous intéressera-t-il de voir la manière dont je me suis démontré votre théorème ainsi énoncé:

»Soit α et β deux exposants dont la somme $\alpha + \beta = k$, k étant entier et positif, et $\frac{B}{A}$ la réduite d'ordre n du développement en fraction continue de $(x-a)^\alpha (x-b)^\beta$. Les polynômes A et B, des degrés n et $n+k$, se déterminent, sauf un facteur constant, en posant:

$$\text{(I.)} \qquad \mathrm{D}_x^n[(x-a)^{n+\alpha}(x-b)^{n+\beta}] = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta A,$$

$$\text{(II.)} \qquad \mathrm{D}_x^{n+k}[(x-a)^{n+k-\alpha}(x-b)^{n+k-\beta}] = (x-a)^{-\alpha}(x-b)^{-\beta} B\text{«}.$$

D'abord comme on peut changer l'expression $(x-a)^\alpha(x-b)^\beta$ au moyen d'une substitution linéaire et entière en $t^\alpha(1-t)^\beta$, je considère immédiatement une telle expression, ou plutôt $x^\lambda(1-x)^\mu$, en mettant λ et μ au lieu de α et β.

Je me restreindrai à la démonstration de la formule (I.), parce qu'on peut procéder de la même manière pour prouver la seconde.

Il suit d'une formule donnée par Jacobi, dans un mémoire posthume [90 (Journal de Borchardt t. 56, p. 149[1]), § 3), que l'on a l'équation:

$$\text{(1.)} \quad \mathrm{D}_x^n[x^{n+\lambda}(1-x)^{n+\mu}] = (1+\lambda)(2+\lambda)\dots(n+\lambda)x^\lambda(1-x)^\mu F(-n, k+n+1, 1+\lambda, x).$$

1) Jacobi, Werke, t. VI (1891), p. 144 et suiv. Sch.

Or on peut poser:

$$x^\lambda(1-x)^\mu = G_k(x) \pm \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-k+1)}{1.2\dots k} F\left(\lambda, 1, 1+k, \frac{1}{x}\right), \tag{2.}$$

$G_k(x)$ étant un polynôme entier du degré k. En développant

$$F\left(\lambda, 1, k+1, \frac{1}{x}\right)$$

en fraction continue, on voit que le dénominateur de la réduite d'ordre n est identique à la quantité A (sauf un facteur constant), et l'on déduit des formules de Heine (Journal de Borchardt, t. 57, p. 231, et aussi Handbuch der Kugelfunctionen, t. I, chap. V), sauf un facteur constant:

$$A = F(-n, k+n+1, 1+\lambda, x). \tag{3.}$$

On peut donc substituer dans l'équation (1.) à la fonction

$$F(-n, k+n+1, 1+\lambda, x),$$

la quantité A, ce qui démontre la première de vos deux formules.

Heidelberg, 17. Octobre 1883.

91] 2. Extrait d'une lettre adressée à M. Fuchs par M. Hermite.

. . . Je me permets maintenant de vous communiquer une autre manière de parvenir au résultat que vous avez établi. Sous ce nouveau point de vue, je puis supposer k indifféremment positif ou négatif, j'admettrai seulement lorsque le second cas se présente que $n+k$ soit positif. Cela étant, je pose, en développant suivant les puissances descendantes de la variable:

$$(x-a)^{n+\alpha}(x-b)^{n+\beta} = P + \frac{\varepsilon}{x} + \frac{\varepsilon'}{x^2} + \cdots,$$

P désignant la partie entière, et je prends les dérivées d'ordre n des deux membres de cette égalité.

J'obtiens ainsi

$$D_x^n[(x-a)^{n+\alpha}(x-b)^{n+\beta}] = (x-a)^\alpha(x-b)^\beta A = D_x^n P + \frac{\eta}{x^{n+1}} + \frac{\eta'}{x^{n+2}} + \cdots,$$

et cette relation met immédiatement en évidence que $\frac{D_x^n P}{A}$ est la réduite d'ordre n du développement en fraction continue de la quantité

$$(x-a)^\alpha(x-b)^\beta,$$

le numérateur étant du degré $n+k$, et le dénominateur du degré n.

On parvient à la même réduite, si l'on part de l'égalité suivante:

$$(x-a)^{n+k-\alpha}(x-b)^{n+k-\beta} = Q + \frac{\zeta}{x} + \frac{\zeta'}{x^2} + \cdots,$$

où la partie entière Q est du degré $2n+k$.

En prenant en effet la dérivée d'ordre $n+k$ des deux membres, nous trouvons:

$$(x-a)^{-\alpha}(x-b)^{-\beta} B = D_x^{n+k} Q + \frac{\vartheta}{x^{n+k+1}} + \frac{\vartheta'}{x^{n+k+2}} + \cdots,$$

et comme tout à l'heure on en conclut que $\frac{D_x^{n+k} Q}{B}$ est une réduite du [92 développement de $(x-a)^{-\alpha}(x-b)^{-\beta}$.

La fraction inverse $\frac{B}{D_x^{n+k} Q}$ est par conséquent, d'après le degré de son dénominateur, la réduite d'ordre n de la quantité $(x-a)^\alpha(x-b)^\beta$, et vous voyez que vous pouvez écrire, sauf un facteur constant:

$$B = D_x^n P, \quad D_x^{n+k} Q = A.$$

Ces relations mettent en évidence une liaison bien singulière, et que jusqu'ici je n'ai point cherché à approfondir, entre P, Q, A et B; je me contenterai d'avoir établi par la première le résultat que j'avais en vue.

Paris, 1. Février 1884.

XLIII.

ÜBER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, DEREN INTEGRALE FESTE VERZWEIGUNGSPUNKTE BESITZEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1884, XXXII, S. 699—710; vorgetragen am 26. Juni; ausgegeben am 3. Juli 1884.)

Ist eine Differentialgleichung gegeben, so kann man nach einem be- [699 kannten Satze von Cauchy ein und nur ein Integral finden von der Beschaffenheit, dass für einen willkürlich angenommenen Werth z_0 der unabhängigen Variabeln z das Integral y und seine $n-1$ ersten Ableitungen $y', y^{(2)}, \dots, y^{(n-1)}$ willkürlich vorgeschriebene Werthe

$$y = \eta_0, \quad y' = \eta_1, \quad y^{(2)} = \eta_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = \eta_{n-1}$$

erhalten, wenn zugleich festgesetzt wird, welchen von den aus der Differentialgleichung sich ergebenden diesen Werthen zugehörigen Werthen der n^{ten} Ableitung $y^{(n)}$ man gewählt hat. Wir wollen der Kürze halber diese Bestimmungsstücke eines Integrals der Differentialgleichung nach der Analogie der in der Mechanik gebräuchlichen Bezeichnung die Anfangswerthe des Integrals nennen. Diejenigen Werthe von z, für welche sich das Integral y verzweigt, wollen wir als die Verzweigungspunkte desselben bezeichnen. Es ergiebt sich nun, dass im Allgemeinen diese Punkte in zwei Kategorien zerfallen, nämlich in solche, welche von den Anfangswerthen abhängen und sich mit der stetigen Änderung der letzteren stetig verschieben, und in solche, welche feste Lagen in der z-Ebene haben. Man kann es als eines der wesentlichsten Merkmale einer linearen Differentialgleichung bezeichnen, dass die Verzweigungspunkte ihrer Integrale sämmtlich zur zweiten Kategorie gehören, und eben diese Eigenschaft ist es, welche den Verlauf der Integrale bei den linearen Differentialgleichungen übersichtlicher macht als bei den nicht linearen. Ich habe mir daher die Aufgabe gestellt, diejenigen Differentialgleichungen überhaupt zu characterisiren, deren Integrale nur Verzweigungspunkte der zweiten Kategorie besitzen. Im Folgenden erlaube ich mir, die Resultate meiner Untersuchung zunächst für den Fall der Differentialgleichungen erster Ordnung zu entwickeln. Aber man wird aus der Darstellung erkennen, dass im Wesentlichen dieselbe Methode für die Differentialgleichungen höherer Ordnung ihre Gültigkeit behält.

700] Eine weitere Eigenschaft der linearen Differentialgleichungen, welche sich aus dem Verhalten ihrer Integrale in der Umgebung eines singulären Punktes ergiebt, ist die, dass die Grössen, welche die Art der daselbst erfolgenden Verzweigung des Integrals bestimmen, ebenfalls von den Anfangswerthen desselben unabhängig sind, in dem Sinne, dass jene Grössen sich nicht stetig mit diesen Anfangswerthen ändern. Um daher diejenigen Klassen von Differentialgleichungen zu finden, welche den linearen Differentialgleichungen am nächsten stehen, muss die Aufgabe behandelt werden: Es soll angegeben werden, welche unter den Differentialgleichungen mit nicht verschiebbaren Verzweigungspunkten der Integrale die Eigenschaft haben, dass auch die Grössen, welche die Art der in festen Punkten stattfindenden Verzweigungen der Integrale bestimmen, sich nicht mit den Anfangswerthen derselben stetig ändern. Die Resultate der auf diese Aufgabe gerichteten Untersuchung hoffe ich bei anderer Gelegenheit vorlegen zu können.

1.

Es seien drei Grössen x, y, z durch eine Gleichung

$$F(x,y,z) = 0 \tag{1.}$$

mit einander verbunden von der Beschaffenheit, dass F eine ganze rationale Function von y und z mit von x abhängigen Coefficienten darstellt. Ferner sei $D(x,y)$ die Discriminante der algebraischen Function z von y, so dass also

$$D(x,y) = 0 \tag{2.}$$

die Resultante der Elimination von z zwischen Gleichung (1.) und der

Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{3.}$$

ist. Bedeutet $y = \eta$ eine Wurzel der Gleichung (2.), $z = \zeta$ eine den Gleichungen (1.) und (3.) gemeinschaftliche Wurzel, wenn in denselben y durch η ersetzt wird, und substituirt man in (1.)

$$\begin{cases} y = \eta + u, \\ z = \zeta + v, \end{cases} \tag{4.}$$

so verwandelt sich diese Gleichung in

$$F_1(x,u,v) = 0, \tag{5.}$$

wo F_1 eine ganze rationale Function von u und v mit von x abhängenden Coefficienten darstellt.

Es sei B ein Gebiet der x-Ebene, innerhalb dessen η und ζ überall [701 eindeutig und stetig verlaufen und der Modul der Differenz zwischen η und einer von η im Allgemeinen verschiedenen Wurzel der Gleichung (2.) nirgends unterhalb eine gewisse Grenze herabsinkt, so ist für alle Werthe von x dieses Gebietes und für alle Werthe von u innerhalb eines hinlänglich kleinen in der u-Ebene um $u = 0$ beschriebenen Kreises K die Discriminante $D_1(x,u)$ von $F_1(x,u,v)$ mit Ausnahme des Mittelpunktes dieses Kreises von Null verschieden; für $u = 0$ aber ist $D_1(x,u)$ Null für jedes x des Gebietes B. Jede Wurzel v der Gleichung (5.) lässt sich für alle Werthe x des Gebietes B und die Werthe u des Gebietes K in der Form

$$v = g_0 u^{\frac{k}{\alpha}} + g_1 u^{\frac{k+1}{\alpha}} + g_2 u^{\frac{k+2}{\alpha}} + \cdots \tag{6.}$$

darstellen, worin k eine positive oder negative ganze Zahl oder auch Null, α eine positive ganze Zahl bedeutet, und worin $g_0, g_1, g_2, \dots$ innerhalb B stetige und eindeutige Functionen von x sind, welche demnach innerhalb eines um einen Punkt a des Gebietes B beschriebenen ganz in dieses Gebiet fallenden Kreises nach positiven ganzen Potenzen von $x-a$ entwickelt werden können.

2.

Wenn die Verzweigungspunkte der Integrale einer Differentialgleichung sich mit den Änderungen der Anfangswerthe stetig verschieben, so wird man im Allgemeinen die letzteren so variiren können, dass jeder Punkt eines gewissen Gebietes der unabhängigen Variabeln Verzweigungspunkt wird.

Umgekehrt wenn die Verzweigungspunkte sich nicht mit den Änderungen der Anfangswerthe stetig verschieben sollen, so darf es nicht geschehen, dass man Integrale bestimmen könne, welche sich in einem beliebigen Punkte eines gewissen Gebietes der unabhängigen Variabeln verzweigen. Sind nämlich $a, a', a'', \dots$ einander hinlänglich nahe gelegene Punkte eines solchen Gebietes, $J, J', J'', \dots$ Integrale, welche sich bezüglich in $a, a', a'', \dots$ derart verzweigen, dass für $J^{(k)}$ die in der Umgebung von $a^{(k)}$ gelegenen Punkte nicht Verzweigungspunkte sind, und setzt man jedes der Integrale $J, J', J'', \dots$ bis zu ein und demselben Punkte P des Gebietes der unabhängigen Variabeln fort, wo die Integrale oder ihre Ableitungen nicht gleiche Werthe annehmen, — was immer möglich ist, da die Integrale nicht im ganzen Gebiete der unabhängigen
702] Variabeln identisch sind — so sind im Allgemeinen die Werthe der Integrale und ihrer Ableitungen in P beliebig wenig von einander verschieden; man könnte also dadurch, dass man in P als Ausgangspunkt die Anfangswerthe stetig ändert, die Verzweigungspunkte stetig verschieben (von a nach a' oder a'' etc.).

3.

Es sei

$$F(z, y, y') = 0 \tag{A.}$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung, wo F eine ganze rationale Function der abhängigen Variabeln y und ihrer ersten Ableitung y' nach der unabhängigen Variabeln z ist, deren Coefficienten von z abhängen. Wir können voraussetzen, dass F in dem Sinne irreductibel sei, dass dasselbe nicht in gleichbeschaffene Functionen niedrigeren Grades in Bezug auf y' zerlegbar ist.

Ein Integral y der Gleichung (A.) kann sich bekanntlich*) für einen Punkt $z = z_0$, in dessen Umgebung die Coefficienten der Gleichung (A.) eindeutig und stetig sind, nur dann verzweigen, wenn dem Integrale für $z = z_0$ ein Werth $y = y_0$ zukommt von der Beschaffenheit, dass die Wurzeln y' der

*) Vergl. Briot et Bouquet, Journal de l'École Polytechnique, cah. 36, p. 191.

Gleichung

$$F(z_0, y_0, y') = 0 \tag{1.}$$

vielfach oder auch unendlich gross werden.

Es sei demgemäss $D(z, y)$ die Discriminante der algebraischen Function y' von y, das heisst die Resultante der Elimination von y' zwischen der Gleichung (A.) und

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \tag{B.}$$

und es sei η eine Wurzel der Gleichung

$$D(z, y) = 0 \tag{C.}$$

und $y' = \zeta$ eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen (A.) und (B.), wenn in denselben y durch η ersetzt wird.

Setzen wir in (A.)

$$\begin{cases} y = \eta + u, \\ y' = \zeta + v, \end{cases} \tag{2.}$$

wodurch wir

$$F_1(z, u, v) = 0 \tag{3.}$$

erhalten mögen, wo F_1 eine ganze rationale Function von u und v bedeutet mit von z abhängigen Coefficienten. Alsdann kann man nach No. 1 ein [703 Gebiet B für z und ein Gebiet K für u abgrenzen der Art, dass innerhalb des Gebietes B η und ζ eindeutig und stetig verlaufen, und dass jede Wurzel v der Gleichung (3.) für diese Werthe von z und u in der Form

$$v = g_0 u^{\frac{k}{\alpha}} + g_1 u^{\frac{k+1}{\alpha}} + g_2 u^{\frac{k+2}{\alpha}} + \cdots \tag{4.}$$

dargestellt wird, wo k eine positive oder negative ganze Zahl oder Null, α eine positive ganze Zahl bedeutet, und $g_0, g_1, g_2, \dots$ innerhalb eines um einen willkürlichen Punkt $z = z_0$ des Gebietes B beschriebenen ganz in dieses Gebiet hineinfallenden Kreises $\mathfrak{K}$ nach positiven ganzen Potenzen von $z - z_0$ entwickelbare Functionen von z sind.

Setzen wir

$$u = t^{\alpha}, \tag{5.}$$

so erhalten wir unter Berücksichtigung von (2.) aus Gleichung (4.)

$$\alpha t^{\alpha-1}\frac{dt}{dz} = \zeta - \frac{d\eta}{dz} + g_0 t^k + g_1 t^{k+1} + \cdots. \tag{6.}$$

In Folge der Voraussetzung, dass F irreductibel sei, ist die Möglichkeit ausgeschlossen, dass $F_1(z, u, v)$ für beliebige z und u durch eine Potenz von v theilbar ist, es können deshalb in (4.) nicht alle Grössen g für jedes z verschwinden, und wenn, wie wir voraussetzen, die k^{te} Potenz von $u^{\frac{1}{\alpha}}$ die niedrigste ist, so ist g_0 nicht identisch Null. Es sei demnach der willkürliche Punkt z_0 in B so gewählt, dass g_0 für $z = z_0$ von Null verschieden ist.

Es sei nun

1. $k < 0$,

so folgt aus Gleichung (6.), dass $\frac{dz}{dt}$ darstellbar ist in der Form

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon_0 t^{\alpha-1-k} + \varepsilon_1 t^{\alpha-k} + \varepsilon_2 t^{\alpha-k+1} + \cdots, \tag{7.}$$

wo $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ nach positiven ganzen Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende Reihen bedeuten, die innerhalb eines gewissen z_0 umgebenden Kreises convergiren, und wovon überdies ε_0 für $z = z_0$ nicht verschwindet. Da $\alpha - 1 - k > 0$, so ergiebt sich hieraus auf bekannte Weise

$$z - z_0 = c_0 t^{\alpha-k} + c_1 t^{\alpha-k+1} + \cdots, \tag{8.}$$

wo $c_0, c_1, \ldots$ Constanten bedeuten. Da $\alpha - k > 1$, so ergiebt Gleichung (8.) durch Umkehrung, dass t, folglich auch u und demnach das Integral y sich in $z = z_0$ verzweigt.

704] I. Soll also der willkürliche Punkt $z = z_0$ nicht Verzweigungspunkt sein, so darf k nicht einen negativen Werth haben, d. h. die Gleichung (3.) darf für $u = 0$ nicht eine unendlich grosse Wurzel v besitzen.

Dagegen besitzt der Voraussetzung gemäss die Gleichung (3.) für $u = 0$ mehrere Wurzeln $v = 0$; für diese ist

2. $k > 0$.

Wenn nun nicht identisch

$$\zeta - \frac{d\eta}{dz} = 0, \tag{9.}$$

so sei der willkürliche Punkt z_0 so beschaffen, dass $\zeta - \frac{d\eta}{dz}$ für $z = z_0$ von Null

verschieden. Alsdann ergiebt sich aus (6.), dass $\frac{dz}{dt}$ sich in der Form

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon_0 t^{\alpha-1} + \varepsilon_1 t^{\alpha} + \varepsilon_2 t^{\alpha+1} + \cdots \tag{10.}$$

darstellen lässt, wo $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ nach positiven ganzen Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende, innerhalb eines gewissen z_0 umgebenden Kreises convergirende Reihen sind, wovon ε_0 für $z = z_0$ nicht verschwindet. Aus (10.) ergiebt sich wieder auf bekannte Weise

$$z - z_0 = c_0 t^{\alpha} + c_1 t^{\alpha+1} + \cdots, \tag{11.}$$

wo $c_0, c_1, \ldots$ Constanten sind.

Ist nun $\alpha \geqq 2$, so ergäbe sich hieraus, dass t, folglich auch u und y sich in $z = z_0$ verzweigen würden. Wenn dieses also nicht statthaft sein soll, so muss zunächst Gleichung (9.) identisch erfüllt sein.

II. Ist also η eine Wurzel der Gleichung (C.) und so beschaffen, dass sich die algebraische Function y' von y für willkürliche z in $y = \eta$, $y' = \zeta$ verzweigt, so muss ζ mit der Ableitung von η übereinstimmen, d. h. η muss ein Integral der Gleichung (A.) sein.

Ist die Gleichung (9.) identisch erfüllt, so ergiebt sich für den Fall $\alpha - 1 - k > 0$ eine wie Gleichung (7.) beschaffene Gleichung, und daraus die Folgerung, dass y sich in $z = z_0$ verzweigen würde. Es muss also auch

$$k \geqq \alpha - 1 \tag{D.}$$

sein, in welchem Falle t entweder identisch Null oder in der Umgebung von z_0 eindeutig wird, d. h.

III. Wenn für die algebraische Function y' von y, für will- [705
kürliche z, $y = \eta$, $y' = \zeta$ eine $(\alpha-1)$-fache Verzweigungsstelle ist, so muss die Gleichung

$$F(z, y, \zeta) = 0 \tag{E.}$$

mit der Unbekannten y die Grösse η mindestens als $(\alpha-1)$-fache Wurzel besitzen.

Wenn die Gleichung (3.) ausser $v = 0$ für $u = 0$ noch nicht verschwindende Wurzeln v besitzt, so ist für diese der Fall

3. $k = 0$ zu betrachten.

Da Gleichung (9.) identisch erfüllt ist, so ergiebt sich aus (6.) eine Gleichung, welche (7.) analog ist, wenn in dieser $k = 0$ gesetzt wird, und es würde sich aus dieser ein in z_0 sich verzweigendes Integral y ergeben, wenn $\alpha \geqq 2$ wäre, d. h.

IV. Ist $y' = \zeta_1$ eine von $y' = \zeta$ verschiedene Wurzel der Gleichung

$$F(z, \eta, y') = 0, \tag{12.}$$

so verzweigt sich die algebraische Function y' von y nicht in $y = \eta$, $y' = \zeta_1$.

4.

Die Gleichung (A.) sei nach Potenzen von y' entwickelt

$$F(z, y, y') = a_0 y'^m + a_1 y'^{m-1} + \cdots + a_m = 0, \tag{1.}$$

wo $a_0, a_1, \ldots, a_m$ ganze rationale Functionen von y mit von z abhängigen Coefficienten sind. Man kann voraussetzen, dass $a_0, a_1, \ldots, a_m$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Es sei nunmehr η ein Werth von y, für welchen a_0 verschwindet, ohne dass zugleich Gleichung (C.) durch $y = \eta$ befriedigt wird. Setzen wir

$$y = \eta + u, \tag{2.}$$

so verwandelt sich (1.) in

$$a'_0 y'^m + a'_1 y'^{m-1} + \cdots + a'_m = 0, \tag{3.}$$

worin $a'_0, a'_1, \ldots, a'_m$ ganze rationale Functionen von u mit von z abhängigen Coefficienten sind. Man kann alsdann ein Gebiet B für die Variable z derart abgrenzen, dass für alle Werthe z dieses Gebietes η eindeutig und stetig, und dass eine Wurzel y' der Gleichung (3.) für $u = 0$ unendlich wird und diese Wurzel derselben innerhalb eines gewissen $u = 0$ umgebenden Kreises in der Form

706]
$$y' = g_0 u^{-k} + g_1 u^{-k+1} + g_2 u^{-k+2} + \cdots \tag{4.}$$

dargestellt wird, wo k eine positive ganze Zahl, und wo $g_0, g_1, g_2, \ldots$ nach positiven ganzen Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende Reihen sind, convergent innerhalb eines ganz in B liegenden Kreises mit dem willkürlichen Punkte z_0 als Mittelpunkt. Da g_0 als Coefficient der niedrigsten Potenz von u nicht identisch Null ist, so können wir z_0 so wählen, dass g_0 von Null verschieden

ist für $z = z_0$, und da

$$\frac{dy}{dz} = \frac{d\eta}{dz} + \frac{du}{dz},$$

so folgt aus (4.) eine Gleichung der Form

$$\frac{du}{dz} = \gamma_0 u^{-k} + \gamma_1 u^{-k+1} + \cdots, \tag{5.}$$

wo $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ nach ganzen positiven Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende Reihen sind, von welchen γ_0 für $z = z_0$ nicht verschwindet. Hieraus ergiebt sich auf bekannte Weise für u eine nach positiven ganzen Potenzen von $(z-z_0)^{\frac{1}{k+1}}$ fortschreitende Reihe. Es wäre demnach z_0 für u, folglich auch für y ein Verzweigungspunkt. Hieraus und aus Satz I. voriger Nummer ergiebt sich demnach:

I. Der Coefficient a_0 in Gleichung (1.) ist von y unabhängig oder, was dasselbe ist, die durch die Gleichung (A.) definirte algebraische Function y' von y wird, für willkürliche Werthe von z, für keinen endlichen Werth von y unendlich.

Ist

$$w = \Phi(z, y) \tag{6.}$$

eine rationale Function von y mit von z abhängigen Coefficienten und y Integral der Gleichung (A.), so genügt w einer Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integrale ebenfalls mit den Anfangswerthen nicht verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen, wenn die Integrale von (A.) diese Eigenschaft haben.

Es sei insbesondere

$$w = \frac{1}{y}, \tag{7.}$$

also

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{w^2}\frac{dw}{dz}. \tag{8.}$$

Substituirt man (7.) und (8.) in (1.), so folgt

$$a_0\left(\frac{dw}{dz}\right)^m - a_1 w^2 \left(\frac{dw}{dz}\right)^{m-1} + a_2 w^4 \left(\frac{dw}{dz}\right)^{m-2} - \cdots \pm a_m w^{2m} = 0. \tag{9.}$$

Da nach Satz I. $\frac{dw}{dz}$, für willkürliche Werthe von z, für keinen endlichen Werth von w unendlich sein darf, so ergiebt sich hieraus: [707

II. Der Coefficient a_k in Gleichung (1.) ist in Bezug auf y höchstens vom Grade $2k$.

5.

Fassen wir die Resultate der beiden vorigen Nummern zusammen, so erhalten wir folgenden Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Integrale der Gleichung (A.) feste, sich nicht mit den Änderungen der Anfangswerthe stetig verschiebende Verzweigungspunkte besitzen, sind die folgenden:

1. Die Gleichung (A.) hat die Form:

$$y'^m + \psi_1 y'^{m-1} + \psi_2 y'^{m-2} + \cdots + \psi_m = 0, \tag{F.}$$

worin $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ ganze rationale Functionen von y mit von z abhängigen Coefficienten von der Beschaffenheit bedeuten, dass ψ_k höchstens vom Grade $2k$ in Bezug auf y ist.

2. Ist $y = \eta$ eine Wurzel der Discriminantengleichung (C.), für welche die durch (F.) definirte algebraische Function y' von y sich verzweigt, so ist η ein Integral der Gleichung (F.). In der y' als algebraische Function von y darstellenden Riemannschen Fläche hat y' in sämmtlichen über $y = \eta$ liegenden Verzweigungsstellen den Werth $y' = \zeta = \frac{d\eta}{dz}$.

3. Je α Blättern, welche sich in $y = \eta$, $y' = \zeta = \frac{d\eta}{dz}$ verzweigen, entsprechen mindestens $\alpha - 1$ mit $y = \eta$ zusammenfallende Wurzeln der Gleichung

$$F(z, y, \zeta) = 0 \tag{E.}$$

mit der Unbekannten y.

6.

Indem ich mir vorbehalte, in eine Auseinanderlegung der verschiedenen Typen, welche die Differentialgleichung (A.) darbietet, wenn sie den Bedingungen der vorigen Nummer genügt, in dem allgemeinen Falle, bei
708] späterer Gelegenheit einzugehen, will ich mich gegenwärtig damit begnügen, noch einen interessanten speciellen Fall hervorzuheben, den Fall

nämlich, dass die algebraische Function y' von y, welche durch die Gleichung (F.) definirt worden, nach der Bezeichnung von Riemann zur Klasse $p = 0$ oder $p = 1$ gehört.

Es sei

I. $p = 0$.

Alsdann ist bekanntlich

$$y = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_0(t)}, \tag{1.}$$

$$y' = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_0(t)}, \tag{2.}$$

wo $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ ganze rationale Functionen von t, in unserem Falle mit von z abhängigen Coefficienten. Bezeichnen wir zur Abkürzung $\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}$ mit $\bar{\varphi}_i$ und $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$ mit φ_i', so folgt durch Differentiation von (1.) und durch Vergleichung mit (2.)

$$\frac{dt}{dz} = \frac{\varphi_0\varphi_2 - \bar{\varphi}_1\varphi_0 + \varphi_1\bar{\varphi}_0}{\varphi_1'\varphi_0 - \varphi_1\varphi_0'}. \tag{3.}$$

Wenn die Verzweigungspunkte der Integrale von (F.) nicht mit den Anfangswerthen sich stetig ändern, so hat das Integral t der Gleichung (3.) die gleiche Eigenschaft. Nach voriger Nummer Bedingung 1. muss daher

$$\frac{dt}{dz} = \frac{\varphi_0\varphi_2 - \bar{\varphi}_1\varphi_0 + \varphi_1\bar{\varphi}_0}{\varphi_1'\varphi_0 - \varphi_1\varphi_0'} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 \tag{4.}$$

sein, wo A_0, A_1, A_2 von z allein abhängen.

Sind die Functionen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ vom m^{ten} Grade in Bezug auf t, so ist $\varphi_1'\varphi_0 - \varphi_1\varphi_0'$ vom $2m-2^{\text{ten}}$ Grade, und die Gleichung (4.) liefert daher $2m-2$ Bedingungsgleichungen zwischen den $3m+2$ Coefficienten von $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ und den Ableitungen der ersten Ordnung der Coefficienten von φ_0 und φ_1 nach z.

Es sei

II. $p = 1$.

Alsdann ist, wie bekannt*),

$$y = \frac{\varphi_1 + \psi_1\sqrt{R(t)}}{\varphi_0 + \psi_0\sqrt{R(t)}}, \tag{5.}$$

$$y' = \frac{\varphi_2 + \psi_2\sqrt{R(t)}}{\varphi_0 + \psi_0\sqrt{R(t)}}, \tag{6.}$$

*) Vergl. Clebsch, Borchardts Journal, Bd. 64, S. 222.

709] wo $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ ganze rationale Functionen von t vom Grade $k \leqq \frac{1}{2}m$, ψ_0, ψ_1, ψ_2 ganze rationale Functionen von t vom Grade $h \leqq \frac{1}{2}m$, derart, dass $h+k = m-2$, und R eine ganze rationale Function von t vom 4^{ten} Grade, in unserem Falle diese sämmtlichen Functionen mit von z abhängigen Coefficienten behaftet.

Differentiirt man Gleichung (5.) und vergleicht das Resultat mit (6.), so erhält man für $\frac{dt}{dz}$ eine Differentialgleichung (ε.), welche die Eigenschaft haben muss, dass die Verzweigungspunkte ihrer Integrale t sich nicht mit den Anfangswerthen verschieben, wenn Gleichung (F.) diese Eigenschaft besitzt. Die Differentialgleichung (ε.) wird aber in Bezug auf $\frac{dt}{dz}$ vom 2^{ten} Grade. Nach No. 5 Bedingung 1. muss daher $\frac{dt}{dz}$ die Form haben

$$\frac{dt}{dz} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \lambda \sqrt{R(t)}, \tag{7.}$$

wo A_0, A_1, A_2, λ von z allein abhängen. Vergleicht man hiermit die Gleichung (ε.), so erhält man $2m+3$ Bedingungsgleichungen zwischen den im Allgemeinen in der Zahl $3m+4$ vorhandenen Coefficienten der $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2, R$ und den ersten Ableitungen nach z derer von $\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1, R$.

Nach der Bedingung 2. in No. 5 muss ferner sein:

$$\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t}(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = (B_0 + B_1 t) R(t), \tag{8.}$$

wo B_0, B_1 von z allein abhängen. Hieraus folgen noch vier Gleichungen zwischen den genannten Coefficienten und Ableitungen. Die Gesammtzahl der Bedingungen ist also im Allgemeinen $2m+7$.

7.

Ein Beispiel zu der in voriger Nummer bezeichneten speciellen Klasse von Differentialgleichungen bietet der Fall, wo der Factor der Discriminante $D(z, y)$ der Gleichung (F.), welcher gleich Null gesetzt die Verzweigungswerthe $y = \eta$ von y' liefert, von z unabhängig ist.

Denn es sei

$$D(z, y) = f(y) D'(z, y), \tag{1.}$$

wo $f(y)$ eine ganze rationale Function von y mit von z unabhängigen Coefficienten bedeutet, und der Art, dass

$$f(y) = 0 \tag{2.}$$ [710

allein die Verzweigungsstellen $y = \eta$ der algebraischen Function y' von y liefert, während

$$D'(y, z) = 0 \tag{3.}$$

nur zu sich aufhebenden Verzweigungspunkten führt.

Da wenn $y = \eta$ eine Wurzel der Gleichung (2.) ist, für welche sich y' verzweigt, $\zeta = \frac{d\eta}{dz} = 0$ ist, so verzweigt sich nach der Bedingung 2. in No. 5 y' nur für Wurzeln y der Gleichung

$$\psi_m = 0 \quad \text{(s. Gleichung (F.))} \tag{4.}$$

und zwar, wenn für $y' = 0$, $y = \eta$ k Verzweigungen von je $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ Blättern stattfinden, so ist der Factor $y - \eta$ nach der Bedingung 3. in No. 5 mindestens

$$\alpha_1 - 1 + \alpha_2 - 1 + \cdots + \alpha_k - 1$$

mal in ψ_m enthalten.

Hieraus ergiebt sich, wenn mit w die Gesammtanzahl der einfachen Verzweigungen der die Function y' von y darstellenden RIEMANNschen Fläche bezeichnet wird, dass w eine Zahl ist, welche den Grad von ψ_m nicht übersteigt, d. h. nach Bedingung 1. in No. 5

$$w \leqq 2m. \tag{5.}$$

Nach der Gleichung

$$w - 2m = 2(p-1)^{*)} \tag{6.}$$

folgt daher $p = 0$ oder $p = 1$.

Der einfachste Fall in diesem Beispiel ereignet sich, wenn die Coefficienten $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ in Gleichung (F.) selber von z unabhängig sind, in welchem Falle Gleichung (F.) mit derjenigen Gleichung zusammenfällt, welche BRIOT und BOUQUET**) aufgestellt haben, und von welcher sie nachgewiesen haben, dass ihre Integrale eindeutige, und zwar entweder rationale oder einfach oder doppeltperiodische Functionen der Variabeln z sind; Resultate, die sich übrigens auch aus unseren obigen Deductionen unmittelbar ergeben.

*) Vergl RIEMANN, ABELsche Functionen, BORCHARDTs Journal, Bd. 54[1]), No. 7.
**) Journal de l'École Polytechnique, cah. 36, p. 212, théorème 22.

[1]) Riemanns Werke (1892), Abh. VI, S. 100 ff. Sch.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**
Es wurde gesetzt:
S. 357, Zeile 15 eine gewisse statt einer gewissen,
„ 358, „ 9 v. u. abhängigen statt unabhängigen.

2) Man vergl. die auf die vorstehende Abhandlung Bezug nehmenden Bemerkungen in der Einleitung zu der Abhandlung LIII.

SCH.

XLIV.

ANTRITTSREDE
GEHALTEN AM 3. JULI 1884 IN DER ÖFFENTLICHEN SITZUNG ZUR FEIER DES LEIBNIZ-TAGES DER KÖNIGL. PREUSS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN.

(Sitzungsberichte, 1884, XXXIII, S. 744—747; ausgegeben am 10. Juli 1884.)

Der heutige Tag, an welchem ich zum ersten Male als ordent- [744
liches Mitglied an einer öffentlichen Sitzung der Königlichen Akademie der Wissenschaften Theil nehme, giebt mir die willkommene Gelegenheit, der Akademie für die hohe Auszeichnung zu danken, welche mir durch die Aufnahme in diesen Kreis der hervorragendsten Vertreter aller Zweige wissenschaftlicher Forschung zu Theil geworden. Ich schätze mich glücklich, in Vereinigung mit Männern, welche ich schon seit meinen ersten Schritten in den mathematischen Wissenschaften als Vorbilder und zum Theil als unmittelbare Lehrer verehrte, mich den Aufgaben dieser Akademie widmen zu können. Möge es mir vergönnt sein, durch die That das Vertrauen, welches die Akademie in mich gesetzt, zu rechtfertigen, insbesondere dadurch, dass ich auf den Wegen, welche ich eingeschlagen, Einiges für die Wissenschaft Erspriessliches erziele.

Meine ersten selbstständigen mathematischen Versuche bewegten sich auf den Gebieten der Zahlentheorie und desjenigen Theiles der Geometrie, welcher mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zusammenhängt. Der grossen Mannigfaltigkeit ihrer Methoden verdankt die Zahlen- [745 theorie die Eigenthümlichkeit, jedem, der sich ihr widmet, ein schätzenswerthes Geschenk mit auf den Weg geben zu können, auch wenn dieser Weg scheinbar weitab von den eigentlichen Zielen dieser Wissenschaft führt. So fand auch ich mich durch die Beschäftigung mit derselben gefördert, als ich durch die genannten geometrischen Studien zur Analysis übergeführt worden war, wo ich bald insbesondere der Theorie der Differentialgleichungen und der sich daraus ergebenden Functionen mein Interesse zuwandte.

In älteren auf Differentialgleichungen bezüglichen Forschungen betrachtete man zumeist die Integration solcher Gleichungen als vollendet, wenn es gelungen war, sie so umzugestalten, dass man auf dieselben sogenannte Quadraturen ausüben konnte. Wenn nun auch nicht geläugnet werden soll, dass die dahin zielenden Untersuchungen zu vielen bedeutsamen Resultaten geführt haben, so darf man jedoch nicht übersehen, dass einerseits die Zurückführung auf Quadaturen nur in den seltensten Fällen möglich ist, und dass diese andererseits in den Fällen, wo sie gelingt, über die Natur der Integrale der Differentialgleichungen nicht genügenden Aufschluss giebt. Die letztere Behauptung wird schon durch das einfache Beispiel der Differentialgleichungen, welchen die elliptischen Functionen genügen, bekräftigt, da hier die Quadratur unmittelbar gegeben, und doch erst die grosse von ABEL und JACOBI ausgebildete Theorie der elliptischen Functionen erforderlich ist, um die Eigenschaften der Functionen zu ergründen, welche jene Differentialgleichungen befriedigen. — Wir fassen vielmehr die Aufgabe der Integration der Differentialgleichungen dahin auf, die Natur der Functionen zu kennzeichnen, welche denselben als Integrale genügen.

Tritt man nun an diese Aufgabe heran, so erkennt man sofort, dass hier, wie oft in der Wissenschaft, ein Erfolg nur durch Beschränkung zu erzielen möglich ist. Denn der weiteren Verfolgung der Eigenschaften, welche den Integralen aller Differentialgleichungen zukommen, wird bald dadurch eine Grenze gesetzt, dass es solcher Eigenschaften nur wenige giebt. In Wahrheit sind es eben die Singularitäten, die einer einzelnen Gleichung zukommen, welche die wesentliche Natur neuer Functionsklassen begründen. Es ist vielmehr die zunächst zu verfolgende Aufgabe, die Differentialgleichungen nach gemeinschaftlichen Merkmalen ihrer Integrale in Klassen zu gruppiren und jede einzelne Klasse einem gesonderten Studium zu unterziehen. — Bei

der Aufsuchung gemeinsamer Merkmale, wonach eine solche Klasse zu bilden ist, muss man natürlich bekannte Functionenkreise zu Hülfe rufen. So ist es eine Eigenthümlichkeit einer algebraischen Function, dass alle Wege der unabhängigen Variabeln für dieselbe nur eine beschränkte Anzahl von Werthen [746 hervorbringen. Eine Klasse von Differentialgleichungen wird den algebraischen Gleichungen zwischen zwei Variabeln am nächsten stehen, wenn die durch alle Wege der unabhängigen Variabeln erzielten Integralwerthe durch eine beschränkte Anzahl von Elementen am einfachsten ausdrückbar sind. Diese Klasse ist die der linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten, deren Integration im oben bezeichneten Sinne von mir unternommen wurde. Nachdem ich die Grundlagen der Theorie dieser Differentialgleichungen entwickelt, zeigte sich alsbald, dass dieselbe nicht nur auf bereits erforschte Gebiete der Analysis neues Licht werfe, sondern dass dieselbe auch zu neuen Problemen und Zielen hinzuführen geeignet sei. In der That hatte ich die Genugthuung, dass sich seit dem Erscheinen meiner ersten auf lineare Differentialgleichungen bezüglichen Abhandlungen eine grosse Anzahl von Mathematikern mit mir in dem Streben vereinigte, theils die Theorie der linearen Differentialgleichungen selbst fortzubilden, theils die mannigfachen durch diese Theorie hervorgerufenen functionentheoretischen Fragen zu erforschen.

Ein tieferes Eingehen auf die Natur der Functionen, welche den eben bezeichneten Differentialgleichungen genügen, veranlasste mich auch eine Klasse von Functionen mehrerer Variabeln einzuführen, wovon die ABELschen Functionen einen besonderen Fall bilden. Hier handelte es sich zunächst um die Frage, welcher Art diejenigen Functionen sind, welche in dem JACOBIschen Umkehrungssatze die Stelle der algebraischen Functionen einnehmen dürfen, wenn die Umkehrbarkeit erhalten werden soll. Nachdem mir die Lösung dieser Frage und die Auffindung einer Eigenschaft der ersteren Functionen gelungen, welche für die neue Functionengattung eine ähnliche Grundlage bildet, wie das ABELsche Theorem für die algebraischen Functionen, bleibt nun vor allem noch das Problem zu lösen, die eingeführten Functionen mehrerer Variabeln analytisch darzustellen, für diese Functionen also dasselbe anzustreben, was für die ABELschen Functionen von Herrn WEIERSTRASS und von RIEMANN geleistet worden ist. — Zu einem weiteren Forschen werde ich

auch auf diesem Gebiete durch den glücklichen Umstand ermuthigt, dass meine Untersuchungen zu fruchtbaren Arbeiten anderer Mathematiker Anlass gegeben. So ist, angeregt durch das Studium meiner ersten Arbeiten auf diesem Gebiete, und ausgehend von der durch Umkehrung des Quotienten zweier Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung entstehenden Function, welche ich in diesen Arbeiten im allgemeinen Sinne einführte nachdem ich besondere Fälle derselben in meinen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen schon früher behandelt hatte, Herr Poincaré
747] dahin gelangt, die Integrale der linearen Differentialgleichungen auf ähnliche Weise darzustellen, wie man die Integrale algebraischer Functionen mit Hülfe der Abel'schen Functionen ausdrückt.

XLV.

ÜBER EINE FORM, IN WELCHE SICH DAS ALLGEMEINE INTEGRAL EINER DIFFERENTIALGLEICHUNG ERSTER ORDNUNG BRINGEN LÄSST, WENN DASSELBE ALGEBRAISCH IST.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1884, LI, S. 1171—1177; vorgetragen am 11. December; ausgegeben am 18. December 1884.)

1.

Es sei [1171

(A.) $$f\left(\frac{dy}{dz}, y, z, A, B, \dots\right) = 0$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung von der Art, dass f eine ganze rationale Function von $\frac{dy}{dz}$, y, z und einer endlichen Anzahl gegebener Functionen $A, B, \dots$ von z, deren Ableitungen ebenfalls rationale Functionen von $z, A, B, \dots$ sind und welche überdiess nicht mit z und unter einander durch eine algebraische Gleichung verbunden sind. Der Grad von f sei der m^{te} in Bezug auf $\frac{dy}{dz}$, und es werde vorausgesetzt, dass f in dem Sinne irreductibel ist, dass dasselbe nicht in Factoren von gleicher Beschaffenheit wie f und von niedrigerem Grade in Bezug auf $\frac{dy}{dz}$ zerlegbar sei.

Es möge das allgemeine Integral der Gleichung (A.) einer Gleichung

(1.) $$F(y, z) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

genügen, deren Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \dots$ ganze rationale Functionen von $z, A, B, \dots$ sind.

Es sei

$$a_i = \sum P^{(i)}_{\kappa\lambda\mu\ldots} z^\kappa A^\lambda B^\mu \ldots, \tag{2.}$$

wo die Grössen P Constanten bedeuten. Man bestimmt diese Constanten dadurch, dass man zwischen den Gleichungen (1.), (A.) und

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dz} = 0 \tag{3.}$$

1172] $\frac{dy}{dz}$ und y eliminirt. Da die resultirende Gleichung in Bezug auf $z, A, B, \ldots$ identisch erfüllt sein muss, so ergiebt sich aus derselben eine gewisse Anzahl algebraischer Gleichungen zwischen den Coefficienten P, welche alle diese Grössen durch eine derselben, die wir mit c bezeichnen wollen, bestimmen. Eliminirt man mit Hülfe dieser Gleichungen aus Gleichung (1.) die sämmtlichen Grössen P bis auf die eine c, so erhält man eine Gleichung

$$\varphi(c, y, z) = 0 \tag{4.}$$

von der Beschaffenheit, dass φ eine ganze rationale Function von $c, y, z, A, B, \ldots$ wird. Dieses liefert also den Satz:

Wenn das allgemeine Integral y der Gleichung (A.) eine algebraische Function von $z, A, B, \ldots$ sein soll, so genügt y einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von $z, A, B, \ldots$ und einer willkürlichen Constanten c sind.

Wir setzen voraus, dass die Gleichung (4.) von allen fremden Factoren befreit sei, d. h. dass sie die Eigenschaft habe, dass nach Substitution eines beliebigen constanten Werthes für c sämmtliche Wurzeln y derselben Integrale der Gleichung (A.) werden. Dieses vorausgesetzt, sei $G(c, y, z)$ ein irreductibler Factor von φ, d. h. eine ganze rationale Function von $c, y, z, A, B, \ldots$, welche nicht in gleichgeartete Factoren niedrigeren Grades in Bezug auf c zerlegbar ist. Wir wollen im Folgenden die Gleichung

$$G(c, y, z) = 0 \tag{B.}$$

einer näheren Untersuchung unterziehen.

2.

Wir betrachten die Function c der beiden unabhängigen Variabeln y, z, welche durch die Gleichung (B.) definirt wird. Diese hat die Eigenschaft,

für Werthenpaare y, z, welche einem und demselben Integrale der Gleichung (A.) angehören, einen constanten Werth anzunehmen.

Die Function Δ der beiden unabhängigen Variabeln y, z, welche durch die Gleichung

$$\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta = 0 \tag{C.}$$

definirt wird, ist eine rationale Function von $c, y, z, A, B, \ldots$, während dieselbe als Function von $y, z, A, B, \ldots$ einer algebraischen Gleichung

$$h(\Delta, y, z) = 0 \tag{1.}$$

genügt, welche sich als Resultat der Elimination von c zwischen den [1173 Gleichungen (B.) und (C.) ergiebt.

Setzen wir in Gleichung (1.) $\frac{dy}{dz}$ statt Δ, und bezeichnen mit η irgend ein Integral der Gleichung

$$h\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right) = 0, \tag{2.}$$

so liefern $y = \eta$, $\Delta = \frac{d\eta}{dz}$ gemeinsame Lösungen c der beiden Gleichungen (B.) und (C.). Es sei eine derselben $c = \gamma$, so ist also gleichzeitig

$$G(\gamma, \eta, z) = 0 \tag{3.}$$

und

$$\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dz} = 0. \tag{4.}$$

Durch Differentiation der Gleichung (3.) nach z folgt aber

$$\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dz} + \frac{\partial G}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dz} = 0. \tag{5.}$$

Aus (4.) und (5.) ergiebt sich demnach

$$\frac{\partial G}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dz} = 0. \tag{6.}$$

Man kann die Anfangswerthe y_0, z_0 des Integrals η so wählen, dass die Discriminante der durch die Gleichung (B.) definirten Function c von y, z nicht durch $y = y_0$, $z = z_0$ befriedigt wird. Dann ist aber $\frac{\partial G}{\partial \gamma}$ nicht Null, folglich

$$\frac{d\gamma}{dz} = 0 \tag{7.}$$

d. h. γ eine Constante, was soviel besagt als:

Jedes Integral der Gleichung (2.) stellt ein Integral der Gleichung (A.) dar.

Man kann aber y_0, z_0 willkürlich wählen, also muss für willkürliche Werthenpaare y, z die Wurzel $\frac{dy}{dz}$ der Gleichung (2.) der Gleichung (A.) genügen. Nun aber ist unserer Voraussetzung nach für von einander unabhängige Werthe der Variabeln y, z $f\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right)$ nicht in gleichgeartete Factoren niedrigeren Grades in Bezug auf $\frac{dy}{dz}$ zerlegbar. Hieraus folgt:

1174] Die Function $h(\Delta, y, z)$ ist bis auf einen von Δ unabhängigen Factor identisch eine Potenz der Function $f(\Delta, y, z)$.

3.

Es seien c_1, c_2 zwei verschiedene Zweige der durch die Gleichung (B.) definirten Function c der unabhängigen Variabeln y, z, für welche die durch die Gleichung (C.) definirte Function Δ von $c, y, z, A, B, \ldots$ ein und denselben Werth annimmt.

Aus den Gleichungen

$$G(c_1, y, z) \equiv G(c_1) = 0, \tag{1.}$$

$$G(c_2, y, z) \equiv G(c_2) = 0 \tag{2.}$$

folgt

$$\frac{\partial G(c_1)}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial G(c_1)}{\partial y} dy + \frac{\partial G(c_1)}{\partial z} dz = 0, \tag{3.}$$

$$\frac{\partial G(c_2)}{\partial c_2} dc_2 + \frac{\partial G(c_2)}{\partial y} dy + \frac{\partial G(c_2)}{\partial z} dz = 0. \tag{4.}$$

Da der Voraussetzung nach

$$\frac{\partial G(c_1)}{\partial z} : \frac{\partial G(c_1)}{\partial y} = \frac{\partial G(c_2)}{\partial z} : \frac{\partial G(c_2)}{\partial y},$$

so folgt aus (3.) und (4.)

$$\frac{\partial G(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial G(c_2)}{\partial y} dc_1 - \frac{\partial G(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial G(c_1)}{\partial y} dc_2 = 0. \tag{5.}$$

Ist demnach c_1 constant, so ist auch c_2 constant, und umgekehrt, oder mit anderen Worten:

I. Zwischen je zwei Zweigen c_1, c_2, für welche Δ den nämlichen Werth erhält, findet eine von y, z unabhängige Relation statt.

Eliminirt man y zwischen den Gleichungen (1.) und (2.), so enthält die Resultante einen von z unabhängigen Factor $H(c_1, c_2)$ von der Beschaffenheit, dass die in Bezug auf c_1, c_2 symmetrische algebraische Gleichung

$$H(c_1, c_2) = 0 \tag{D.}$$

durch alle Zweigenpaare c_1, c_2 der Function c befriedigt wird, für welche Δ jedesmal einen und denselben Werth annimmt.

Ist $c_1 = \gamma$ ein willkürlicher Werth, $c_2 = \gamma'$ eine beliebige Wurzel der Gleichung

$$H(\gamma, c_2) = 0,$$

so haben die Gleichungen

$$G(\gamma, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad G(\gamma', y, z) = 0$$

gemeinschaftliche Lösungen y für einen beliebigen Werth von z, ebenso [1175
gemeinschaftliche Lösungen z für einen beliebigen Werth von y.

II. Ist demnach c_1 irgend ein Zweig der Function c, so ist jede Wurzel c_2 der Gleichung (D.) ebenfalls ein Zweig der Function c, und zwar ein solcher, welcher Δ denselben Werth verschafft wie c_1.

Ist $c_1 = \zeta$ irgend ein Zweig der Function c, und sind $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots, \zeta^{(l)}$ die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung

$$H(\zeta, c_2) = 0 \tag{6.}$$

mit der Unbekannten c_2, so sind hiernach diese Wurzeln die einzigen Zweige der Function c, welche Δ denselben Werth verleihen wie ζ. Hieraus folgt, dass die l Wurzeln der Gleichung

$$H(\zeta^{(i)}, c_2) = 0 \tag{7.}$$

mit der Unbekannten c_2 durch die Reihe $\zeta, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots, \zeta^{(i-1)}, \zeta^{(i+1)}, \ldots, \zeta^{(l)}$ dargestellt werden, da die Wurzeln der Gleichung (7.) alle diejenigen Zweige der Function c liefern, welche Δ denselben Werth ertheilen wie $\zeta^{(\lambda)}$, also auch wie ζ.

Es ist demnach

$$\Gamma = (\alpha-\zeta)(\alpha-\zeta^{(1)})(\alpha-\zeta^{(2)})\dots(\alpha-\zeta^{(\lambda)}), \tag{8.}$$

wo α eine beliebige aber bestimmte Grösse bedeutet, eine rationale Function von ζ mit constanten Coefficienten, welche ungeändert bleibt für alle Zweige ζ der Function c, für welche Δ denselben Werth erhält, dagegen aber für zwei Zweige, für welche Δ verschiedene Werthe annimmt, auch verschiedene Werthe hat. Nach einem bekannten Satze der Algebra sind daher Γ und Δ rationale Functionen von einander mit Coefficienten, welche rational von $y, z, A, B, \dots$ abhangen. Insbesondere sei

$$\Gamma = \mathfrak{R}(\Delta, y, z, A, B, \dots), \tag{E.}$$

wo $\mathfrak{R}$ eine rationale Function der Argumente darstellt.

Nach No. 2 ist Δ eine algebraische Function der Variabeln y, z, welche der irreductiblen Gleichung

$$f(\Delta, y, z, A, B, \dots) = 0 \tag{F.}$$

genügt.

Ist y gleich einer Function η von z von der Beschaffenheit, dass $y = \eta$ in (F.) und (E.) substituirt Γ einen von z unabhängigen Werth verleiht, so ist für $y = \eta$ auch ein Zweig ζ der Function c von z unabhängig, also ist $y = \eta$ ein Integral der Gleichung (A.). Ist umgekehrt $y = \eta$ ein Integral der Gleichung (A.), so geht für $y = \eta$ ein Zweig ζ der Function c in einen 1176] von z unabhängigen Werth über, also wird für $y = \eta$ auch ein zugehöriger Werth von Γ constant. Wir erhalten also den Satz:

III. **Wenn das allgemeine Integral der Gleichung (A.) eine algebraische Function von $z, A, B, \dots$ ist, so lässt sich dasselbe stets in die Form der Gleichung (E.) bringen, worin Γ eine willkürliche Constante, $\mathfrak{R}$ eine bestimmte rationale Function von $y, z, A, B, \dots$ und einer Grösse Δ bedeutet, welche durch die Gleichung (F.) definirt wird.**

4.

Die Gleichungen (E.) und (F.) liefern ein einfaches Mittel, zu gleicher Zeit zu prüfen, ob das allgemeine Integral der Gleichung (A.) algebraisch ist, und dasselbe darzustellen, wenn es vorhanden ist.

Da nämlich die Gleichung (A.) in Bezug auf $\frac{dy}{dz}$ vom m^{ten} Grade ist, so ist auch der Grad von Δ in Gleichung (F.) der m^{te}. Es ist also nach Gleichung (E.)

$$\Gamma = \psi_0 + \psi_1\Delta + \psi_2\Delta^2 + \dots + \psi_{m-1}\Delta^{m-1}, \tag{1.}$$

wo $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}$ rationale Functionen von $y, z, A, B, \dots$ bedeuten. Nimmt man in dieser Gleichung für Γ einen constanten Werth, so ergiebt sich aus derselben Gleichung nach Satz III. voriger Nummer y als Integral der Gleichung (A.). Es ist dann

$$\frac{dy}{dz} = \Delta. \tag{2.}$$

Aus Gl. (F.) ergiebt sich ferner

$$\frac{d\Delta}{dz} = \chi_0 + \chi_1\Delta + \chi_2\Delta^2 + \dots + \chi_{m-1}\Delta^{m-1}, \tag{3.}$$

wo $\chi_0, \chi_1, \dots$ rationale Functionen von $y, z, A, B, \dots$ bedeuten.

Differentiirt man daher die Gleichung (1.) unter der Voraussetzung, dass Γ constant, so ergiebt sich nach Substitution von (2.) und (3.) eine Gleichung der Form

$$P_0 + P_1\Delta + P_2\Delta^2 + \dots + P_{m-1}\Delta^{m-1} = 0, \tag{4.}$$

worin $P_0, P_1, \dots$ rationale Functionen von $y, z, A, B, \dots$ sind.

Wegen der Irreductibilität der Gleichung (F.) ist dann identisch für jedes Werthsystem $y, z, A, B, \dots$

$$P_0 = 0, \quad P_1 = 0, \quad \dots, \quad P_{m-1} = 0. \tag{G.}$$

Indem man also nach Aufstellung dieser Gleichungen in jeder der- [1177 selben die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von y gleich Null setzt, erhält man eine Anzahl von Differentialgleichungen für die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von y in den zu bestimmenden Functionen $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}$, und für die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von y

in den in der Gleichung

$$f\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right) = q_0\left(\frac{dy}{dz}\right)^m + q_1\left(\frac{dy}{dz}\right)^{m-1} + \cdots + q_m = 0 \tag{5.}$$

auftretenden Grössen $q_0, q_1, \ldots, q_m$. Diese Differentialgleichungen müssen durch rationale Functionen von $z, A, B, \ldots$ befriedigt werden können, wenn das allgemeine Integral der Gleichung (A.) algebraisch sein soll.

XLVI.

ÜBER DEN CHARACTER DER INTEGRALE VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWISCHEN COMPLEXEN VARIABELN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1885, II, S. 5—12; vorgetragen am 15. Januar; ausgegeben am 22. Januar 1885.)

Als Jacobi die für ein elliptisches Integral erster Gattung gelungene [5 Umkehrung auf die hyperelliptischen Integrale auszudehnen suchte, erkannte er, dass dieses Problem nicht ausführbar sei, indem er nachwies*), dass die obere Grenze eines hyperelliptischen Integrals erster Gattung insofern nicht als analytische Function des Integralwerthes aufgefasst werden kann, als jedem Werthe der letzteren Grösse jeder Werth der ersteren entspricht, und umgekehrt. — Erst durch Einführung mehrerer Systeme von Integralen erster Gattung, mit von einander unabhängigen oberen Grenzen, gelangte er zu einer Gattung von Functionen mehrerer Variabeln**), welche eine vollständige Analogie mit den elliptischen Functionen darbieten.

Ist $R(x)$ eine ganze rationale Function höheren als vierten Grades, so lässt sich das Jacobische Resultat auch dahin aussprechen, dass die Integrale x der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)} \tag{α.}$$

nicht als analytische Functionen von u aufgefasst werden können.

---

*) Crelles Journal, Bd. 13, S. 55 ff.[1]).

**) Crelles Journal, Bd. 9, S. 394 ff.[2]).

---

[1]) Jacobis Werke, Bd. II (1882), S. 23 ff. Sch.

[2]) Ebenda S. 5 ff. Sch.

Es ist selbstverständlich, dass alle Differentialgleichungen, welche aus (α.) durch analytische Transformationen hervorgehen, die gleiche Eigenschaft besitzen.

Es ist aber ein für die Grundlagen der Theorie der Differentialgleichungen wesentlicher Umstand, dass es auch unter den Differentialgleichungen jeder Ordnung und jeden Grades, welche nicht nur Transformationen von (α.) sind, Klassen solcher Art giebt, welche zwischen der unabhängigen und abhängigen Veränderlichen keine functionale Beziehung im gewöhnlichen Sinne des Wortes festsetzen, so lange jene Veränderlichen complexe Werthe annehmen dürfen.
6] Wir erlauben uns im Folgenden (No. 1 und 2) den Nachweis hierfür an dem Beispiele zweier Klassen von Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung zu führen. Dasselbe Beispiel zeigt zu gleicher Zeit den Weg, auf welchem man zu anderen Differentialgleichungen von höherem Grade und höherer Ordnungszahl von gleicher Eigenschaft gelangen kann.

Wenn wir unsere Betrachtungen auf algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(\beta.) \qquad f\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right) = 0$$

beschränken und die Annahme machen, dass die Integrale derselben nicht mit den Anfangswerthen stetig verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen*), sei es, dass y als Function von z, sei es, dass z als Function von y aufgefasst wird, so ist durch (β.) stets y als analytische Function von z definirt (No. 3).

Wenn dagegen die Integrale der Gleichung (β.), entweder wenn man y als Function von z oder wenn man z als Function von y betrachtet, mit den Anfangswerthen verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen, so kann es eintreten, dass die Gleichung (β.) durch keine analytische Function y von z befriedigt wird.

1.

Es sei eine Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + p\frac{dy}{dz} + qy = 0$$

*) S. meine Arbeit, Sitzungsberichte, 26. Juni 1884, S. 699 [1]).

[1]) Abh. XLIII, S. 355 dieses Bandes. Sch.

gegeben, von der Beschaffenheit, dass

$$(2.) \qquad \begin{cases} p = \dfrac{1}{z-a_1} + \dfrac{1}{z-a_2} + \dfrac{1}{z-a_3} + P, \\[2ex] q = \dfrac{\beta_1}{z-a_1} + \dfrac{\beta_2}{z-a_2} + \dfrac{\beta_3}{z-a_3} + Q, \end{cases}$$

wo $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ constante Grössen, P, Q rationale Functionen von z sind, welche für keinen der Werthe a_1, a_2, a_3 von z unendlich werden.

Ist a_i einer der singulären Punkte a_1, a_2, a_3, so gehört*) zu a_i ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1.) der Form

$$\varphi_i, \quad \psi_i + \varphi_i \log(z-a_i),$$

wo φ_i, ψ_i in der Umgebung von a_i eindeutige, endliche und stetige Functionen bezeichnen.

Es lässt sich nun zeigen, dass a_1, a_2, a_3 so gewählt werden können, dass [7
die Gleichung (1.) ein Integral φ besitzt, welches in der Umgebung jedes dieser Punkte eindeutig, endlich und stetig ist. Man hat alsdann

$$(3.) \qquad \varphi_i = \gamma_i \varphi, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

wo γ_i eine constante Grösse.

Es sei nunmehr

$$(4.) \qquad y = A_1\gamma_1\varphi + B_1(\psi_1 + \gamma_1\varphi \log(z-a_1))$$

ein beliebiges Integral der Gleichung (1.), also A_1, B_1 beliebig vorgeschriebene constante Grössen. Nach einem k-maligen Umlaufe von z um a_1 gehe y über in y_k, so ist

$$(5.) \qquad y_k = y + 2\pi k i B_1 \gamma_1 \varphi.$$

Es sei ferner dasselbe Integral y aus Gleichung (4.) dargestellt durch das zu a_2 gehörige Fundamentalsystem

$$(6.) \qquad y = A_2\gamma_2\varphi + B_2(\psi_2 + \gamma_2\varphi \log(z-a_2)),$$

so wird y_k nach einem l-maligen Umlauf von z um a_2 in

$$(7.) \qquad y_{kl} = y + (2\pi k i B_1\gamma_1 + 2\pi l i B_2\gamma_2)\varphi$$

übergehen.

*) S. meine Arbeit in Borchardts Journal, Bd. 66, S. 121 ff. [1]).

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 159 ff. Sch.

Ist endlich dasselbe Integral y ausgedrückt durch das zu a_3 gehörige Fundamentalsystem

$$y = A_3\gamma_3\varphi + B_3(\psi_3 + \gamma_3\varphi\log(z-a_3)), \tag{8.}$$

so geht y_{kl} nach einem m-maligen Umlauf von z um a_3 über in

$$y_{klm} = y + (2\pi k i B_1\gamma_1 + 2\pi l i B_2\gamma_2 + 2\pi m i B_3\gamma_3)\varphi. \tag{9.}$$

Setzt man

$$B_k\gamma_k = b_k + c_k\sqrt{-1},$$

so findet im Allgemeinen zwischen den Grössen

$$b_2c_3 - b_3c_2,\ b_3c_1 - b_1c_3,\ b_1c_2 - b_2c_1$$

nicht eine lineare homogene Gleichung mit realen und ganzzahligen Coefficienten statt. Es wird daher nach den von JACOBI*) entwickelten Principien durch geeignete Wahl von k, l, m

$$kB_1\gamma_1 + lB_2\gamma_2 + mB_3\gamma_3 = G \tag{10.}$$

werden, wo G eine beliebig vorgeschriebene Grösse bedeutet**).

Unter den gemachten Voraussetzungen wird demnach das allgemeine Integral y der Gleichung (1.) für jeden Werth von z jeden beliebigen Werth annehmen können.

8]

2.

Es sei y ein bestimmter Zweig eines Integrals der Gleichung (1.) voriger Nummer, und es werde

$$u = \frac{d\log y}{dz} \tag{1.}$$

gesetzt, so folgt aus Gleichung (1.) voriger Nummer

$$\frac{du}{dz} + u^2 + pu + q = 0. \tag{2.}$$

*) CRELLES Journal, Bd. 13, S. 55 ff.[1]).

**) Vergl. KRONECKER, Sitzungsberichte, 1884, S. 1182, § 2.

[1]) Jacobis Werke, Band II, S. 23 ff. Sch.

Ist y durch Gleichung (4.) voriger Nummer definirt, so wird u in

$$u_{klm} = \frac{\frac{dy}{dz} + 2\pi i(kB_1\gamma_1 + lB_2\gamma_2 + mB_3\gamma_3)\frac{d\varphi}{dz}}{y + 2\pi i(kB_1\gamma_1 + lB_2\gamma_2 + mB_3\gamma_3)\varphi} \tag{3.}$$

übergehen, wenn z successive k Umläufe um a_1, l Umläufe um a_2 und m Umläufe um a_3 gemacht hat. Ist daher H eine beliebig vorgeschriebene Grösse, so können k, l, m so gewählt werden, dass für jeden bestimmten Werth von z

$$u_{klm} = H \tag{4.}$$

werde. Man hat zu dem Zwecke die Grösse G in voriger Nummer nur nach der Gleichung

$$G = \frac{Hy - \frac{dy}{dz}}{2\pi i\left(\frac{d\varphi}{dz} - H\varphi\right)} \tag{5.}$$

zu wählen.

Betrachtet man in der Differentialgleichung (2.) z als die unabhängige Veränderliche, so hat das Integral u derselben die Eigenschaft, dass seine Verzweigungspunkte nicht mit den Anfangswerthen stetig verschiebbar sind*).

Betrachtet man dagegen in derselben Gleichung u als unabhängige Veränderliche, so haben die Integrale z derselben mit den Anfangswerthen stetig verschiebbare Verzweigungspunkte, da $\frac{dz}{du}$ für willkürliche Werthe von u und dazu gehörige nach der Gleichung

$$u^2 + pu + q = 0 \tag{6.}$$

zu bestimmende Werthe von z unendlich wird**).

Die Gleichung (2.) liefert demnach ein Beispiel zu der im Eingange [9 erwähnten Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, welchen keine analytische Beziehung zwischen u und z zugehört.

*) S. meine Arbeit, Sitzungsberichte, 1884, S. 708[1]).

**) Ebendaselbst S. 704[2]).

[1]) Abh. XLIII, S. 365 dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 360 dieses Bandes. Sch.

3.

Es sei

$$f\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right) = 0, \tag{1.}$$

wo f eine rationale Function der Argumente bedeutet. Setzen wir voraus, dass die Integrale derselben nicht mit den Anfangswerthen stetig verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen, sei es, dass man z, sei es, dass man y als unabhängige Variable betrachtet, so hat Gleichung (1.) zunächst die Form

$$\varphi_{2m}(z)\left(\frac{dy}{dz}\right)^m + P_1\left(\frac{dy}{dz}\right)^{m-1} + \cdots + P_{m-1}\frac{dy}{dz} + \psi_{2m}(y) = 0^{*}), \tag{2.}$$

worin $\varphi_{2m}(z)$ eine ganze rationale Function von z von höchstens dem $2m^{\text{ten}}$ Grade mit von y unabhängigen Coefficienten, $\psi_{2m}(y)$ eine ganze rationale Function von y von höchstens dem $2m^{\text{ten}}$ Grade mit von z unabhängigen Coefficienten bedeutet.

Es sei nach den Bezeichnungen meiner Arbeit**)

$$D(z, y) = 0 \tag{3.}$$

die Discriminantengleichung der algebraischen Function $\frac{dy}{dz}$ von z und y, welche durch Gleichung (2.) definirt wird. Für einen Zweig der durch (3.) definirten algebraischen Function, welcher nicht von z unabhängige Werthe von y, oder von y unabhängige Werthe von z liefert, ergiebt sich nach den über die Gleichung (2.) gemachten Voraussetzungen aus meiner citirten Arbeit***), dass die daselbst auftretenden Grössen k und α resp. die Werthe Null und Eins annehmen, oder was dasselbe ist:

Die durch die Gleichung (2.) definirte algebraische Function $\frac{dy}{dz}$ von y, z verzweigt sich nach den über diese Gleichung gemachten Voraussetzungen, als Function von y aufgefasst, nur für

*) Sitzungsberichte, 1884, S. 707 [1]).
**) Ebendaselbst S. 702 [2]).
***) Ebendaselbst S. 702–705 [3]).

1) S. 364 dieses Bandes. Sch.
2) S. 359 dieses Bandes. Sch.
3) S. 358–362 dieses Bandes. Sch.

von z unabhängige Werthe $y = \eta$, und, als Function von z aufgefasst, nur für von y unabhängige Werthe $z = \xi$. [10

Nach Satz II. No. 3 meiner citirten Arbeit*) sind η und ξ Integrale der Gleichung (2.), wenn man resp. y als Function von z und z als Function von y betrachtet. Da aber η von z und ξ von y unabhängig ist, so folgt

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\eta}{dz} &= 0, \\ \frac{d\xi}{dy} &= 0, \end{aligned}\right. \tag{4.}$$

d. h. die Werthe $y = \eta$ und die Werthe $z = \xi$, für welche $\frac{dy}{dz}$ sich bezüglich verzweigt, je nachdem dasselbe als Function von y oder als Function von z aufgefasst wird, sind resp. Wurzeln der Gleichung

$$\psi_{2m}(y) = 0, \tag{5.}$$

$$\varphi_{2m}(z) = 0. \tag{6.}$$

Findet für $y = \eta$ eine $(\alpha-1)$-fache Verzweigung von $\frac{dy}{dz}$ als Function von y statt, so muss nach Satz III. No. 3 meiner oben citirten Arbeit (da in der Gleichung (E.) daselbst $\zeta = 0$ zu setzen ist und dieselbe demzufolge in unsere Gleichung (5.) übergeht) $y = \eta$ mindestens eine $(\alpha-1)$-fache Wurzel der Gleichung (5.) sein. Findet ebenso für $z = \xi$ eine $(\beta-1)$-fache Verzweigung für $\frac{dz}{dy}$ als Function von z statt, so ist aus demselben Grunde ξ mindestens eine $(\beta-1)$-fache Wurzel der Gleichung (6.). Es folgt hieraus, dass die Anzahl der Verzweigungen von $\frac{dy}{dz}$, sowohl wenn dasselbe als Function von y, als auch wenn es als Function von z aufgefasst wird, nicht grösser als $2m$ ist. Nach einer von Riemann**) herrührenden Relation zwischen der Anzahl der Verzweigungen einer algebraischen Function, dem Grade der Gleichung, welcher sie genügt, und ihrem Range, ergiebt sich demnach, dass $\frac{dy}{dz}$ vom Range Null oder Eins ist, ebensowohl wenn dasselbe als Function von y, als

*) Sitzungsberichte, 1884, S. 704 [1]).
**) Borchardts Journal, Bd. 54, S. 129 [2]).

1) Abh. XLIII, S. 361 dieses Bandes. Sch.
2) Riemanns Werke (1892), S. 114. Sch.

auch wenn es als Function von z aufgefasst wird. Die vorhergehende Untersuchung führt also zu dem Resultat:

11] Wenn die Differentialgleichung (1.) in Bezug auf ihre Argumente algebraisch ist und die Eigenschaft besitzt, dass die Verzweigungspunkte der Integrale derselben sich nicht mit den Anfangswerthen stetig verschieben, sei es, dass man y als Function von z, sei es, dass man z als Function von y betrachtet, so ist die algebraische Function $\frac{dy}{dz}$ von y ebenso wie die algebraische Function $\frac{dz}{dy}$ von z vom Range Null oder Eins.

Man kann nun nach den Principien meiner oben citirten Arbeit No. 6 bis 7 zeigen, dass alsdann das Integral y der Gleichung (2.) eine analytische Function von z darstellt.

4.

Von den Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integrale mit den Anfangswerthen stetig verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen, hat man nun zunächst diejenigen auszuscheiden, welche durch eine algebraische Transformation in eine Differentialgleichung übergeführt werden können, deren Integrale nur feste Verzweigungspunkte haben. Denn so wie es einleuchtend ist, dass man Differentialgleichungen der letzteren Art durch eine willkürliche algebraische Transformation in solche der ersteren Art umwandeln kann, so ergiebt sich auch, dass, wenn eine Differentialgleichung der ersteren Art in eine solche der letzteren Art algebraisch umgeformt werden kann, dieselbe nicht zu wesentlich anderen Transcendenten führt, wie die Differentialgleichungen mit festen Verzweigungspunkten.

Für die Differentialgleichungen dagegen, für welche der Rang der durch dieselben definirten Function $\frac{dy}{dz}$ entweder als Function von y oder als Function von z die Einheit übersteigt, und welche nicht algebraisch transformirbar sind in andere Differentialgleichungen, deren Integrale sich nur in festen Punkten verzweigen, ist zu untersuchen, ob diejenigen Werthe von y, welche ein und demselben willkürlichen Werthe von z entsprechen, resp. diejenigen Werthe von z, welche ein und demselben willkürlichen Werthe von y entsprechen, wie in dem in No. 2 gegebenen Beispiele, eine oder mehrere

Flächen stetig bedecken, oder in endlicher oder unendlicher Anzahl sich in discreten Punkten über die Ebene vertheilen.

Im ersteren Falle wird durch die Differentialgleichung y ebenso wenig als analytische Function von z bestimmt, wie die obere Grenze eines einzigen Abel'schen Integrals erster Gattung als analytische Function des Integralwerthes aufzufassen ist. [12

ANMERKUNGEN.

1) **Änderung gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 383, Zeile 15 wo statt und,

" 386, " 9, 8 v. u. durch (3.) definirten algebraischen Function statt algebraischen Function (3.).

2) Der Begriff »analytische Function« ist in der vorstehenden Abhandlung (wie auch in den Abhandlungen XXX ff. vergl. die Anmerkung zur Abh. XXXI, S. 212 dieses Bandes) in dem Jacobi eigenthümlichen Sinne zu nehmen. Auch im übrigen lehnt sich die von Fuchs hier angewandte Terminologie an die von Jacobi im 13. Bande des Journals f. d. r. u. a. Mathematik benutzte an, tritt aber in manchen Wendungen aus dem wohl umgrenzten Rahmen der Jacobischen hinaus und kann durch eben diese Wendungen leicht zu Missverständnissen Veranlassung geben. Während der Ausdrucksweise S. 381, Zeile 5–7 des Textes »als jedem Werthe der letzteren Grösse jeder Werth der ersteren entspricht, und umgekehrt« nach Jacobi (a. a. O., Werke, Bd. II, S. 43) die Bedeutung beigelegt werden muss, dass für jeden Werth der einen Grösse die andere jedem Werthe beliebig nahe kommen kann, entspricht die Anwendung des Gleichheitszeichens in den Gleichungen (10.) No. 1 und (4.) No. 2 keineswegs der üblichen Bedeutung dieses Zeichens, indem jene Gleichungen durch ganzzahlige Werthe der k, l, m nicht exact, sondern nur mit beliebiger Annäherung befriedigt werden können. Die Worte S. 382, Zeile 8 »keine functionale Beziehung im gewöhnlichen Sinne des Wortes« und S. 385, vorletzte und letzte Zeile »keine analytische Beziehung« sind so zu verstehen, dass die Beziehung keine derartige ist, dass die eine Grösse als analytische Function der andern im Sinne Jacobis erscheint. Endlich müssten im Sinne der modernen Terminologie S. 389, Zeile 1, 2 die Worte »stetig« durch »überall dicht« und »discreten« durch »isolirten« ersetzt werden. —

Vergl. den Aufsatz von Casorati, Acta Mathematica, Band 8, 1886, S. 345 ff. Sch.

XLVII.

ÜBER DIE WERTHE, WELCHE DIE INTEGRALE EINER DIFFERENTIALGLEICHUNG ERSTER ORDNUNG IN SINGULÄREN PUNKTEN ANNEHMEN KÖNNEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1886, XIV, S. 279–300; vorgetragen am 11. März, ausgegeben am 18. März 1886.)

In ihrer berühmten Abhandlung*) haben Briot und Bouquet, nach- [279
dem sie nach dem Vorgange von Cauchy die Integrale einer Differentialgleichung

$$(\alpha.)\qquad \frac{dy}{dz} = f(z, y)$$

definirt, das Verhalten derselben in der Umgebung einer Stelle (z_0, y_0), in welcher $f(z, y)$ entweder unendlich oder mehrdeutig oder endlich unbestimmt wird, einer eingehenden Untersuchung unterworfen.

Ein sorgfältiges Studium dieser Abhandlung, welcher ich schon vor langer Zeit die Anregung zur Beschäftigung mit der Theorie der Differentialgleichungen zu verdanken hatte, hat mich erkennen lassen, dass in den Entwickelungen von Briot und Bouquet manche Lücke auszufüllen sei, und dass manche Resultate einer Ergänzung bedürfen.

In dem Folgenden erlaube ich mir, einen Auszug aus den Erwägungen zu geben, zu welchen mich meine Studien über diesen Gegenstand geführt haben.

*) Journal de l'École Polytechnique, cah. 36, p. 133.

Schon bei der Definition der Integrale begegnet man einer Lücke. Sind nämlich die Anfangswerthe (z_0, y_0) so beschaffen, dass $f(z,y)$ und alle partiellen Ableitungen dieser Functionen nach z für $z = z_0$, $y = y_0$ verschwinden, dass mit anderen Worten $(\alpha.)$ die Form

$$(\beta.) \qquad \frac{dy}{dz} = (y-y_0)^m f_1(z,y)$$

erhält, so ist der Nachweis der Existenz eines Integrals nicht erbracht.

Diese Frage ist offenbar mit der anderen identisch: wie verhalten sich die Integrale einer Differentialgleichung

$$(\gamma.) \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{z^k} F(z,y)$$

in der Umgebung von $z = 0$?

280] Auch diese Frage ist unerledigt geblieben. Mit ihrer Lösung würden aber zu gleicher Zeit die Principien gewonnen sein, um die Schwierigkeiten zu heben, welche in der Behandlung derjenigen singulären Stellen, für welche $f(z,y)$ unbestimmt wird, auftreten.

Für diese singulären Stellen führen Briot und Bouquet durch eine Transformation die Gleichung $(\alpha.)$ auf einen der drei Typen

$$(\delta.) \qquad t\frac{d\zeta}{dt} = a\zeta + bt + \mathfrak{P}(t,\zeta),$$

$$(\varepsilon.) \qquad t\frac{d\zeta}{dt} = a\zeta^m + bt + \mathfrak{P}(t,\zeta),$$

$$(\zeta.) \qquad t^m\frac{d\zeta}{dt} = a\zeta + bt + \mathfrak{P}(t,\zeta)$$

zurück, worin $\mathfrak{P}(t,\zeta)$ eine nach positiven ganzen Potenzen der Variabelen t, ζ fortschreitende Reihe bedeutet, in welcher die Glieder niedrigster Dimension die der zweiten sind.

Allein diese Zurückführung setzt stillschweigend voraus, dass, wenn z einen Werth a und gleichzeitig y einen Werth b erreicht, von der Beschaffenheit, dass $f(a,b)$ unbestimmt wird, der Punkt $z = a$ nicht ein solcher ist, für welchen y als Function von z überhaupt unbestimmt wird. Man würde, wenn dieses einträte, die Reihenentwickelungen, welche zu den drei genannten Typen führen, nicht machen dürfen, man würde vielmehr stets zuerst eine Gleichung der Form $(\gamma.)$ erhalten, und nur in denjenigen Fällen, wo die Integrale der letzteren in $z = 0$ nicht unbestimmt werden, wird der Übergang zu den genannten Typen statthaft sein.

Dass übrigens die Untersuchung der Singularität $z = 0$ in einer Gleichung von der Form $(\gamma.)$ nicht eine in dem Gebiete der analytischen Functionen abseits gelegene Frage betrifft, ergiebt sich eben aus der Identität dieser Untersuchung mit derjenigen der Gleichung $(\beta.)$. Man erkennt aber schon an einfachen Beispielen, wie z. B. an dem Falle $f_1(z,y) = \frac{1}{z}$, dass man einer Definition der Integrale der Gleichungen der Form $(\beta.)$ nicht entrathen kann.

Aber noch nach einer anderen Seite hin tritt die Bedeutung der Untersuchung der Gleichungen der Formen $(\beta.)$, $(\gamma.)$ heraus. Wenn nämlich ein Integral der Gleichung $(\alpha.)$ durch gewisse Anfangswerthe (z_0, y_0) definirt worden ist, so ist es von Wichtigkeit festzustellen, ob dasselbe das einzige ist, welches diesen Anfangsbedingungen genügt, oder nicht. Um nachzuweisen, dass es nur ein solches Integral gebe, bedürfen Briot und Bouquet des Schlusses*), dass ein Integral einer Gleichung der Form $(\beta.)$, welches für $z = z_0$ den Werth [281
$y = y_0$ annimmt, identisch gleich dem constanten Werthe y_0 sei. Da aber, wie gezeigt werden soll, es im Allgemeinen ausser $y = y_0$ noch andere Integrale der Gleichung $(\beta.)$ giebt, so giebt es im Allgemeinen auch mehr als ein Integral der Gleichung $(\alpha.)$, welches gegebenen Anfangsbedingungen entspricht.

Im Folgenden werde ich mich darauf beschränken, die Singularitäten $z = 0$ in Gleichungen der Form $(\gamma.)$ einer näheren Untersuchung zu unterziehen und damit die Discussion der zuletzt erwähnten Frage über die Bestimmung eines Integrals durch vorgeschriebene Anfangswerthe zu verbinden.

1.

Wir wollen zuerst einige Benennungen hervorheben, deren wir für die Folge bedürfen. Die Bezeichnungen der singulären Punkte als wesentliche und ausserwesentliche, welche Herr Weierstrass für die eindeutigen Functionen einer complexen Variabelen eingeführt hat, sind für die mehrdeutigen Functionen nicht ausreichend, weil selbst diejenigen Stellen einer Function, für welche dieselbe zwar bestimmte, von den letzten Wegelementen, auf welchen man in dieselben gelangt, unabhängige Werthe erhält, deren Umkreisung aber

*) A. a. O. p. 145.

zu anderen Functionswerthen führt, nicht auf dieselbe Weise aufhebbar sind, wie die ausserwesentlich singulären Punkte einer eindeutigen Function.

Wir wollen daher eine Stelle, in welcher eine Function eine von den letzten Wegelementen abhängige Werthenreihe annehmen kann, eine Stelle oder einen Punkt der **Unbestimmtheit** nennen. Diese Benennung drückt eben die Natur der Stelle, dass die Function in ihr nicht einen bestimmten Werth erhalte, aus.

Ein Punkt der Unbestimmtheit kann zu gleicher Zeit ein Verzweigungspunkt sein oder auch nicht. Aber die Verzweigung in einem solchen Punkte kann von zweierlei Art sein.

Ist nämlich a ein Punkt der Unbestimmtheit, so kann es möglich sein, dass man a durch eine geschlossene Curve von hinlänglich kleinen aber endlichen Dimensionen von der Art abgrenzen kann, dass innerhalb derselben ausser dem Punkte a selbst kein Verzweigungspunkt enthalten ist. Wir wollen alsdann die Verzweigung eine **bestimmte** nennen. So ist in der Function $(z-a)^{\lambda}\varphi(z)$, in welcher $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z=a$ eindeutig aber in $z=a$ unbestimmt ist, und wo λ eine beliebige reale Grösse bedeutet, a ein Punkt der Unbestimmtheit, aber mit bestimmter Verzweigung.

282] Es kann aber zweitens möglich sein, dass, wie klein auch die Curve, durch welche a abgegrenzt wird, sein mag, immer in der Fläche derselben unzählig viele Stellen ausser a vorhanden sind, in welchen Verzweigung stattfindet. Alsdann wollen wir die Verzweigung eine **unbestimmte** nennen. In der Function

$$\sqrt[m]{e^{\frac{1}{z-a}}-b}$$

z. B., wo b eine von Null verschiedene Constante und m eine positive ganze Zahl bedeutet, ist $z=a$ ein Punkt der Unbestimmtheit, in welchem zugleich eine unbestimmte Verzweigung statt hat.

Es sei nämlich $e^{\frac{1}{\zeta-a}}=b$; alsdann liefert die Gleichung

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{\zeta-a}+2k\pi i$$

für die unendliche Reihe der realen ganzen Zahlen k eine unendliche Reihe

von Stellen z, welche sämmtlich so beschaffen sind, dass $e^{\frac{1}{z-a}}=b$, und wovon eine unendlich grosse Anzahl von a verschiedener, innerhalb eines noch so kleinen diesen Punkt umschliessenden Bereiches sich befinden. In jedem dieser Punkte findet aber Verzweigung statt.

Es ist im Allgemeinen nicht möglich, eine Function durch eine in der ganzen Umgebung eines Punktes a der Unbestimmtheit mit unbestimmter Verzweigung gültige nach irgend welchen Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihe darzustellen.

Dieser Umstand tritt jedoch schon für Stellen der Unbestimmtheit ein, in deren Umgebung keine Verzweigung statt hat. — So würde z. B. die Function

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{z-a}}-b}$$

zwar innerhalb eines von zwei Kreisen mit dem Mittelpunkte a gebildeten Ringes, innerhalb dessen nicht eine Wurzel der Gleichung

$$e^{\frac{1}{z-a}}-b=0$$

gelegen ist, mit Hülfe des Laurentschen Satzes nach positiven und negativen Potenzen von $z-a$ entwickelbar sein. Aber diese Entwickelung gilt nicht bis zu beliebiger Annäherung an den Punkt a.

An das Vorhergehende knüpft sich eine für die Theorie der Differentialgleichungen folgenreiche Erwägung. — Da nämlich für nicht lineare Differentialgleichungen die sämmtlichen hier näher bezeichneten Singularitäten [283 auftreten, so wird man in der Regel darauf verzichten müssen, von dem gewöhnlichen Hülfsmittel Gebrauch zu machen, wonach die Natur der Singularität durch eine in der Umgebung der singulären Stelle gültige Reihenentwickelung erforscht wird. — Man wird vielmehr zu anderen Hülfsmitteln seine Zuflucht nehmen müssen, um den ganzen Werthvorrath, dessen die Function in der Umgebung einer singulären Stelle fähig ist, zu ergründen.

2.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\text{(A.)} \qquad \frac{dy}{dz}=\frac{1}{z^{\lambda}}F(z,y),$$

worin $F(z, y)$ eine in dem ganzen Verlaufe der unabhängigen Variabelen z, y definirte Function und k eine ganze, positive Zahl bedeutet.

Wir haben zunächst zu untersuchen, ob $z = 0$ für die Integrale y der Gleichung (A.) ein Punkt der Unbestimmtheit ist. — Wenn dieses stattfindet, so kann für $z = 0$ y Werthe erlangen, für welche $F(z, y)$ als Function von z und y keine Singularität darbietet. Ist p ein solcher Werth, und ist in der Umgebung von $z = 0$, $y = p$

$$\frac{1}{F(z, y)} = \alpha_0 + \alpha_1 (y-p) + \beta_1 z + \cdots,$$

so ist es nicht zulässig, aus der Gleichung

$$(\alpha.) \qquad \frac{dz}{dy} = z^k \{\alpha_0 + \alpha_1 (y-p) + \beta_1 z + \cdots\},$$

wie es Briot und Bouquet*) thun, zu schliessen, dass z als Function von y für $y = p$ den Werth $z = 0$ nicht erreichen könne. In der That würde ein solcher Schluss die Voraussetzung enthalten, dass y längs eines Weges von endlicher Länge von einem Werthe y_0 zu dem Werth p gelangen müsste, wenn gleichzeitig z von einem der Null naheliegenden Werthe $z = z_0$ in $z = 0$ einrückt. — Ist aber $z = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit, so sind diese Voraussetzungen nicht erfüllt. Es kann alsdann vielmehr y von einem Werthe y_0 zu einem beliebig weit davon entfernten Werthe p übergehen, während z in beliebiger Nähe von $z = 0$ verbleibt. — Man darf aber dann nicht zur
284] Feststellung des Zusammenhanges zwischen z und y, $F(z, y)$ in der Umgebung von $z = 0$ und in der Umgebung eines **bestimmten** Werthes $y = p$ entwickeln, wie es die Herstellung der Gleichung (α.) voraussetzt.

Zur Entscheidung der Frage, ob $z = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale der Gleichung (A.) sei, könnte man eine Function t von z, welche in $z = 0$ einen Punkt der Unbestimmtheit besitzt, einführen und alsdann die Integrale y als Functionen von t untersuchen. So würde, was das Nächstliegende ist, in dem Falle, dass $k > 1$, die Function

$$(\text{B.}) \qquad t = e^{\frac{1}{1-k}\frac{1}{z^{k-1}}}$$

*) A. a. O. p. 145 bei einer ähnlichen Gleichung, deren sie sich zum Nachweis der eindeutigen Bestimmung eines Integrals bedienen, worauf wir später noch zurückkommen werden.

$z = 0$ als Punkt der Unbestimmtheit besitzen, und wenn man in Gleichung (A.) t als unabhängige Variabele einführt, dieselbe in

$$(\text{C.}) \qquad \frac{dy}{dt}\, t = F(z, y)$$

übergehen, in welcher z mit t durch die Gleichung (B.) verbunden gedacht wird.

Es lässt sich nun zeigen, dass im Allgemeinen den verschiedenen Werthen von t in der Umgebung von $z = 0$ auch theilweise oder durchweg verschiedene Werthe von y entsprechen können. — Ich behalte mir die Ausführung dieses Nachweises für eine andere Gelegenheit vor und will mich an dieser Stelle damit begnügen, nur einen Weg, auf welchem man zu demselben gelangen kann, hier anzudeuten, da derselbe auch in anderer Hinsicht für das Studium der Integrale einer Differentialgleichung beachtenswerth erscheint.

Es sei M ein Multiplicator der Gleichung

$$(1.) \qquad P dy + Q dz = 0,$$

wo P, Q wohldefinirte Functionen der beiden Variabelen y, z sind. Man hat alsdann für die Function M der beiden unabhängigen Variabelen y, z die Gleichung

$$(2.) \qquad Q \frac{\partial \log M}{\partial y} - P \frac{\partial \log M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Sind M_1, M_2 zwei Lösungen dieser Gleichung, so folgt, wenn man

$$(3.) \qquad \log \frac{M_1}{M_2} = u$$

setzt,

$$(4.) \qquad Q \frac{\partial u}{\partial y} - P \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Ist $u = \Phi(z, y)$ eine Lösung dieser Gleichung, so liefert bekanntlich [285
die durch die Gleichung

$$(5.) \qquad \Phi(z, y) = \mu,$$

wo μ eine beliebige Constante, definirte Function y von z ein Integral der Gleichung (1.). Es ist auch bekannt, wie umgekehrt die Integration der Gleichung (4.) auf die Lösung der Gleichung (1.) zurückgeführt wird.

Auf unsere Gleichung (A.) angewendet geht die Gleichung (4.) über in:

$$(6.)\qquad z^k \frac{\partial u}{\partial z} + F(z, y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Statt dieser Gleichung betrachten wir die folgende:

$$(\mathrm{D.})\qquad t\frac{\partial v}{\partial t} + z^k \frac{\partial v}{\partial z} + F(z, y)\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Ist $\Psi(t, z, y)$ eine Function der drei unabhängigen Variabelen, welche der Gleichung (D.) genügt, so erhält bekanntlich Ψ einen constanten Werth, wenn t mit z durch die Gleichung

$$(7.)\qquad \frac{dt}{dz} = \frac{z^k}{t},$$

welche mit (B.) identisch ist, und y mit z durch die Gleichung (A.) verbunden ist.

Wenn aber y unbeschränkt veränderlich belassen wird, dagegen t mit z durch die Gleichung (7.) oder (B.) verbunden ist, so wird Ψ ein Integral der Gleichung (6.).

Es sei demgemäss $\Psi(t, z, y)$ eine wohldefinirte Function der drei unabhängigen Variabelen t, z, y, welche der Gleichung (D.) genügt, so werde die Gleichung

$$(\mathrm{E.})\qquad \Psi(t, z, y) = \mu,$$

wo μ eine Constante, der Untersuchung zu Grunde gelegt. Wird in derselben t als mit z nach Gleichung (B.) sich verändernd aufgefasst, so ist die durch dieselbe gelieferte Function y von z ein Integral der Gleichung (A.).

Es ergiebt sich, dass im Allgemeinen, wenn z gegen Null convergirt und gleichzeitig t die entsprechende, durch die Gleichung (B.) gelieferte Werthenreihe durchläuft, sich aus Gleichung (E.) für y unendlich viele von der Art, wie z sich der Null annähert, abhängige Werthe ergeben.

Die Untersuchung lässt sich durchführen, indem man für unbeschränkt
286] veränderliche Werthe der Variabelen t, z, y die Function Ψ auf geeignete Weise, z. B. als Potenzreihe oder als Quotienten zweier Potenzreihen, in der Umgebung von $z = 0$ und passender besonderer Werthe von t und y darstellt. Lässt man alsdann z gegen Null convergiren und mit ihm t eine Werthenreihe durchlaufen, welche sich aus Gleichung (B.) ergiebt und dem Darstellungsgebiete angehört, so wird zu entscheiden sein, ob es ebenfalls dem Darstellungsgebiete angehörige Werthe von y giebt, welche mit t und z zusammen der Gleichung (E.) genügen.

Während demnach für das allgemeine Integral $z = 0$ in der Regel ein Punkt der Unbestimmtheit ist, kann es wohl eintreten, dass für ein besonderes Integral oder, was dasselbe ist, für bestimmte Werthe von μ in Gleichung (E.), $z = 0$ aufhört, ein Punkt der Unbestimmtheit zu sein.

Es ist selbstverständlich, dass die Gleichung (A.) auch die besondere Beschaffenheit besitzen kann, dass ihre sämmtlichen Integrale in $z = 0$ nicht unbestimmt werden.

3.

Häufig ist es zweckmässiger, an die Stelle der Hülfsfunction t eine andere η zu setzen, welche mit z durch die Gleichung

$$(\mathrm{B'.})\qquad \frac{d\eta}{dz} = \frac{1}{z^k}F(0, \eta)$$

verbunden ist.

Es habe zum Beispiel $F(z, y)$ die Form

$$(1.)\qquad F(z, y) = \frac{G(y) + zH(z, y)}{G_1(y) + zH_1(z, y)},$$

wo $G(y)$, $G_1(y)$ ganze rationale Functionen von y, H und H_1 wohldefinirte Functionen von z und y von der Beschaffenheit, dass $H(0, y)$, $H_1(0, y)$ nicht für beliebige Werthe von y unendlich werden.

Alsdann wird die Gleichung (B'.):

$$(2.)\qquad \frac{d\eta}{dz} = \frac{1}{z^k}\frac{G(\eta)}{G_1(\eta)},$$

deren Integration entweder

$$(3.)\qquad \frac{1}{1-k}\frac{1}{z^{k-1}} = \int \frac{G_1(\eta)}{G(\eta)}d\eta$$

oder

$$(3\mathrm{a.})\qquad \log z = \int \frac{G_1(\eta)}{G(\eta)}d\eta$$

liefert, je nachdem $k \gtreqqless 1$.

287] Die Gleichung (A.) geht durch Einführung der unabhängigen Variabelen η über in

$$\text{(C'.)} \qquad \frac{dy}{d\eta} F(0, \eta) = F(z, y),$$

in welcher z durch die Gleichung (B'.) mit η verbunden gedacht wird.

Es lässt sich nun wiederum zeigen, dass, wenn für einen beliebigen Werth von η die durch die Gleichung (B'.) damit verbundene Grösse z sich der Null nähern kann, im Allgemeinen $z = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit der Integrale der Gleichung (A.) sein muss.

Für die besondere Form (1.) ergiebt die Gleichung (3.) allemal $z = 0$ als zu einem beliebigen Werthe η gehörig, wenn

$$\int \frac{G_1(\eta)}{G(\eta)} d\eta$$

mit Logarithmen behaftet ist. Tritt z. B. das Glied

$$A \log (\eta - a)$$

auf, so wird die rechte Seite der Gleichung (3.) für einen beliebigen Werth von η unendlich gross, wenn η unzählig viele Umläufe um a vollzieht.

Wenn

$$\int \frac{G_1(\eta)}{G(\eta)} d\eta$$

mit Logarithmen behaftet ist, so folgt aus (3a.)

$$\text{(4.)} \qquad z = \gamma (\eta - a)^A (\eta - b)^B \dots e^{R(\eta)},$$

wo γ eine willkürliche Constante, $A, B, \dots$ die Residuen von $\frac{G_1(\eta)}{G(\eta)}$ in Bezug auf die Werthe η, für welche $G(\eta) = 0$, und endlich $R(\eta)$ eine rationale Function von η bedeutet. Nach einem Umlaufe um $\eta = a$ geht z in jz über, wo $j = e^{2\pi i A}$. Wenn demnach der Coefficient von i in der Grösse A nicht verschwindet, so werden unzählig viele Umdrehungen um $\eta = a$, nach dem einen oder nach dem entgegengesetzten Sinne ausgeführt, zu dem willkürlichen, in der Umgebung von $\eta = a$ gelegenen Werthe η als zugehörigen Werth $z = 0$ liefern.

Wie in voriger Nummer kann die Untersuchung der Gleichung (C'.) vermittelst der partiellen Differentialgleichung

$$\text{(D'.)} \qquad F(0, \eta) \frac{\partial v}{\partial \eta} + z^k \frac{\partial v}{\partial z} + F(z, y) \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

erfolgen, deren Lösungen $\Psi(\eta, z, y)$ die Eigenschaft besitzen, einen constanten Werth zu erhalten, wenn z sich mit η nach Gleichung (C'.) und y mit z [288 nach Gleichung (A.) ändert. Man muss wie dort die Gleichung

$$\text{(E'.)} \qquad \Psi(\eta, z, y) = \mu,$$

wo μ eine Constante bedeutet, zu Grunde legen.

Dass auch hier der Fall eintreten kann, dass, während das allgemeine Integral von (A.) in $z = 0$ unbestimmt wird, sobald $z = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit der durch Gleichung (B'.) definirten Function η von z ist, besondere Integrale in $z = 0$ nicht mehr unbestimmt werden, ist selbstverständlich.

Aber was wesentlich zu beachten ist, das ist der Umstand, dass auch in dem Falle, dass $z = 0$ für die durch Gleichung (B'.) definirte Function η von z nicht ein Punkt der Unbestimmtheit ist, dennoch für die Integrale der Gleichung (A.) $z = 0$ ein solcher Punkt sein kann, wie dieses ja aus der vorigen Nummer für $k > 1$ erhellt.

4.

Wir wollen das Vorhergehende an einigen Beispielen erläutern. Betrachten wir die Differentialgleichung

$$\text{(1.)} \qquad z^k \frac{dy}{dz} = p_0 + p_1 y + p_2 y^2,$$

worin p_0, p_1, p_2 in der Umgebung von $z = 0$ eindeutige und continuirliche Functionen bedeuten.

Setzen wir

$$\text{(2.)} \qquad y = -\frac{z^k}{p_2} \frac{d \log w}{dz},$$

so genügt w der Differentialgleichung

$$\text{(3.)} \qquad \frac{d^2 w}{dz^2} - \left[\frac{p_1}{z^k} - \frac{k}{z} + \frac{d \log p_2}{dz}\right] \frac{dw}{dz} + \frac{p_0 p_2}{z^{2k}} w = 0.$$

Es sei

(I.) $$k > 1,$$

alsdann ist*) der Punkt $z = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit für das allgemeine Integral der Gleichung (3.).

Ist w_1, w_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (3.), c_1, c_2 willkürliche Constanten, so hat nach Gleichung (2.) das allgemeine Integral der Gleichung (1.) die Form

(4.) $$y = -\frac{z^k}{p_2}\left(c_1 \frac{dw_1}{dz} + c_2 \frac{dw_2}{dz}\right) \frac{1}{c_1 w_1 + c_2 w_2}.$$

289] Daher ist auch im Allgemeinen $z = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit für jedes Integral der Gleichung (1.).

Es kann aber eintreten, dass ein besonderes Integral w so beschaffen ist, dass seine logarithmische Ableitung in $z = 0$ nicht unbestimmt wird. Diesem entspricht alsdann nach Gleichung (2.) ein besonderes Integral y der Gleichung (1.), für welches $z = 0$ nicht Punkt der Unbestimmtheit ist.

Soll aber das allgemeine Integral der Gleichung (1.) in $z = 0$ nicht unbestimmt sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass

$$w_1 = e^{\int \varphi_1 dz}, \quad w_2 = e^{\int \varphi_2 dz},$$

wo φ_1, φ_2 in $z = 0$ nicht unbestimmt werden, und dass zu gleicher Zeit für $\frac{w_2}{w_1}$ $z = 0$ nicht Punkt der Unbestimmtheit ist.

Da**)

$$\frac{w_2}{w_1} = C \int e^{\int \left(\frac{p_1}{z^k} - \frac{k}{z} + \frac{d \log p_2}{dz}\right) dz} \frac{dz}{w_1^2},$$

so sind diese Bedingungen auch gleichbedeutend mit den beiden folgenden:

$$\varphi_1 \text{ und } e^{\int \left(\frac{p_1}{z^k} - 2\varphi_1\right) dz}$$

dürfen für $z = 0$ nicht unbestimmt werden.

*) Nach meiner Arbeit in Borchardts Journal, Bd. 66, S. 146[1]).
**) Siehe meine Arbeit in Borchardts Journal, Bd. 66, S. 128–130[2]).

1) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 186. Sch.
2) Ebenda S. 166–169. Sch.

Man kann immer*) das Fundamentalsystem von Integralen w_1, w_2 der Gleichung (3.) so einrichten, dass in der Umgebung von $z = 0$ entweder

(5.) $$w_1 = z^{r_1} \psi_1, \quad w_2 = z^{r_2} \psi_2$$

oder

(5a.) $$w_1 = z^{r_2} \psi, \quad w_2 = z^{r_2 - g}(\chi + z^g \psi \log z),$$

wo r_1, r_2 bestimmte reale oder complexe Grössen, g eine ganze positive Zahl, ψ_1, ψ_2, respective ψ und χ Reihen bedeuten, welche im Allgemeinen eine unendliche Anzahl negativer und positiver ganzzahliger Potenzen von z enthalten.

Da $z = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit für das allgemeine Integral der Gleichung (3.) ist, so muss im Falle (5.) wenigstens eine der Reihen ψ_1, ψ_2 und im Falle (5a.) wenigstens eine der Reihen ψ, χ eine unendliche Anzahl negativer Potenzen von z enthalten.

Soll das allgemeine Integral der Gleichung (1.) in $z = 0$ nicht unbestimmt werden, so muss den oben gefundenen Bedingungen zufolge, unter Berück- [290 sichtigung der Gleichungen (5.) und (5a.), entweder die logarithmische Ableitung von ψ_1 oder von ψ eine Function φ von der Beschaffenheit sein, dass 2φ in der Umgebung von $z = 0$ sich durch eine nach steigenden ganzen Potenzen von z fortschreitende Reihe darstellen lässt, welche nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen hat, und dass zu gleicher Zeit die Coefficienten der Potenzen, deren Exponenten kleiner als die negative Einheit, mit den Coefficienten der entsprechenden Potenzen von $\frac{p_1}{z^k}$ übereinstimmen.

Wir können voraussetzen, dass p_0, p_1, p_2 für $z = 0$ nicht verschwinden. Denn wenn eine oder zwei dieser Grössen für $z = 0$ verschwinden sollten, so würde die Substitution

$$y = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ willkürliche Grössen, in Gleichung (1.) für u eine Differentialgleichung liefern, in welcher die p_0, p_1, p_2 entsprechenden Grössen für $z = 0$ nicht verschwinden. Aber u hat mit y für $z = 0$ dieselbe Verzweigung, und es ist $z = 0$ gleichzeitig für u und y ein Punkt der Unbestimmtheit.

*) Nach meiner Arbeit in Borchardts Journal, Bd. 66, S. 131–139[1]).

1) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 170–178. Sch.

Sei unter dieser Voraussetzung

$$(6.)\qquad \begin{cases} \dfrac{p_0}{z^k} = \dfrac{A_0}{z^k} + \dfrac{A_1}{z^{k-1}} + \cdots, \\[2mm] \dfrac{p_1}{z^k} = \dfrac{B_0}{z^k} + \dfrac{B_1}{z^{k-1}} + \cdots, \\[2mm] \dfrac{p_2}{z^k} = \dfrac{C_0}{z^k} + \dfrac{C_1}{z^{k-1}} + \cdots, \end{cases}$$

so sind A_0, B_0, C_0 von Null verschieden.

Es sei

$$(7.)\qquad y = -\frac{z^k}{p_2} v,$$

so genügt v der Gleichung

$$(8.)\qquad \frac{dv}{dz} = -\frac{p_0 p_2}{z^k} + \left[-\frac{k}{z} + \frac{p_1}{z^k} + \frac{d \log p_2}{dz}\right] v - v^2.$$

Sollte $z = 0$ für die Integrale der Gleichung (1.) nicht ein Punkt der Unbestimmtheit sein, so müsste nach dem Obigen die Gleichung (8.) ein Integral besitzen, welches in der Umgebung von $z = 0$ die Form hätte:

$$(9.)\qquad v = \frac{1}{2}\frac{B_0}{z^k} + \frac{1}{2}\frac{B_1}{z^{k-1}} + \cdots.$$

291] Substituirt man diesen Ausdruck in (8.), so folgt durch Vergleichung der Coefficienten von z^{-2k} auf beiden Seiten

$$(10.)\qquad -A_0 C_0 + \tfrac{1}{4} B_0^2 = 0.$$

Sollen demnach die sämmtlichen Integrale der Gleichung (1.) in $z = 0$ nicht unbestimmt werden, so muss

$$A_0 + B_0 y + C_0 y^2$$

ein vollständiges Quadrat sein.

Dieses Resultat findet seine Aufklärung durch die Untersuchungen in No. 3. In der That ist in unserem Falle

$$(11.)\qquad G(y) = A_0 + B_0 y + C_0 y^2,$$

und aus der Gleichung

$$(12.)\qquad \frac{d\eta}{dz} = \frac{G(\eta)}{z^k}$$

ergiebt sich, wenn die Wurzeln a_1, a_2 der Gleichung $G(\eta) = 0$ von einander verschieden sind,

$$(13.)\qquad \frac{1}{1-k}\frac{1}{z^{k-1}} = \frac{1}{C_0(a_1 - a_2)} \log\left(\frac{\eta - a_1}{\eta - a_2}\right) + \text{const.}$$

Es wird daher für einen beliebigen Werth von η, nach unzählig vielen Umläufen dieser Variabelen um den Punkt a_1 oder a_2, z gegen Null convergiren und gleichzeitig das Integral y der Gleichung

$$(14.)\qquad \frac{dy}{d\eta} G(\eta) = p_0 + p_1 y + p_2 y^2,$$

in welche (1.) übergeht, wenn man an die Stelle von z η als unabhängige Variabele einführt, für die verschiedenen Werthe von η, welche zu $z = 0$ gehören, im Allgemeinen verschiedene Werthe annehmen, oder mit anderen Worten, es wird das Integral y der Gleichung (1.) jeden möglichen Werth annehmen, wenn z auf geeigneten Wegen in $z = 0$ einrückt, d. h. $z = 0$ ist ein Punkt der Unbestimmtheit für das allgemeine Integral von (1.).

Sind dagegen die Wurzeln a_1, a_2 der Gleichung $G(y) = 0$ einander gleich, so liefert die Integration der Gleichung (12.)

$$(15.)\qquad \frac{1}{1-k}\frac{1}{z^{k-1}} = -\frac{1}{C_0}\frac{1}{\eta - a_1} + \text{const.}$$

Dieser Gleichung gemäss wird z nur für $\eta = a_1$ Null; demnach ist es alsdann auch nicht erforderlich, dass $z = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale der Gleichung (1.) werde.

Es ist aber selbstverständlich, dass die in Gleichung (10.) enthaltene Bedingung nicht die hinreichende dafür ist, dass alle Integrale der Glei- [292 chung (1.) in $z = 0$ bestimmt werden. In der That ist jene Bedingung nur eine derjenigen, welche erfüllt sein müssen, damit die Gleichung (8.) ein Integral der Form (9.) habe.

Es kann also $A_0 + B_0 y + C_0 y^2$ ein vollständiges Quadrat sein, ohne dass $z = 0$ aufhört ein Punkt der Unbestimmtheit für das allgemeine Integral der Gleichung (1.) zu sein.

Betrachten wir z. B. die Differentialgleichung

$$(16.)\qquad z^k \frac{dy}{dz} = \alpha y^2 + \beta z,$$

wo α, β Constanten bedeuten, so wird für diese die Gleichung (3.) in

$$(17.)\qquad \frac{d^2w}{dz^2}+\frac{k-1}{z}\frac{dw}{dz}+\frac{\alpha\beta}{z^{2k-1}}w = 0$$

übergehen. Nach den oben gefundenen Bedingungen müsste diese, damit kein Integral der Gleichung (16.) $z=0$ als Punkt der Unbestimmtheit besitze, durch ein Integral

$$w_1 = e^{\int\varphi\, dz}$$

befriedigt werden, für welches φz für $z=0$ endlich und bestimmt, also w_1 selber in $z=0$ bestimmt wäre. Da aber auch $\frac{w_2}{w_1}$ die gleiche Eigenschaft besitzen muss, so wäre auch w_2 für $z=0$ bestimmt. Demnach dürfte $z=0$ für die Integrale der Gleichung (17.) nicht ein Punkt der Unbestimmtheit sein, was aber der Voraussetzung widerspricht, wonach $k>1$*).

Setzt man für w_1, w_2 die Werthe aus (5.) bez. (5a.) in Gleichung (4.) ein, so erhält man für y einen Ausdruck der Form

$$(18.)\qquad y = \frac{P+Qz^{r_2-r_1}}{R+Sz^{r_2-r_1}}$$

bez. von der Form

$$(18a.)\qquad y = \frac{P+Qz\log z}{R+Sz\log z},$$

worin P, Q, R, S in der Umgebung von $z=0$ eindeutig, aber im Allgemeinen in $z=0$ unbestimmt sind. Hieraus geht hervor, dass das allgemeine Integral der Gleichung (1.) in $z=0$ eine **bestimmte** Verzweigung erleidet.

Betrachten wir nunmehr den Fall

$$(II.)\qquad k = 1.$$

293] In diesem Falle erhält die Gleichung (1.) die Form

$$(19.)\qquad z\frac{dy}{dz} = p_0+p_1y+p_2y^2$$

*) Siehe meine Arbeit in Borchardts Journal, Bd. 66, S. 146[1]).

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 196. Sch.

und die Gleichung (3.) die Form

$$(20.)\qquad \frac{d^2w}{dz^2}-\left[\frac{p_1}{z}-\frac{1}{z}+\frac{d\log p_2}{dz}\right]\frac{dw}{dz}+\frac{p_0p_2}{z^2}w = 0,$$

und es ist*) $z=0$ nicht ein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale der Gleichung (20.), folglich auch nicht für diejenigen der Gleichung (19.).

Behält man die Bezeichnungen des Falles (I.) bei, so bedeuten hier r_1, r_2 die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$(21.)\qquad r^2-B_0r+A_0C_0 = 0^{**}),$$

für den Fall, dass die Wurzeln dieser Gleichung nicht bloss um ganze Zahlen von einander verschieden sind; dagegen sind r_2 und r_2-g die Wurzeln derselben Gleichung, wenn sie nur um ganze Zahlen von einander verschieden sind. Wir wollen überdies im ersten Falle festsetzen, dass der reale Theil von r_2 nicht kleiner als der von r_1 sei.

Die Reihen ψ_1, ψ_2 bez. ψ und χ enthalten jetzt nur ganze positive Potenzen, und es sind $\psi_1(0), \psi_2(0), \psi(0), \chi(0)$ von Null verschieden.

In dem Falle, dass die Differenz r_2-r_1 keine ganze Zahl, ist noch ein Unterschied zu machen, je nachdem

a) der reale Theil von r_2-r_1 positiv oder

b) der reale Theil von r_2-r_1 Null.

In dem Falle a) folgt aus (18.), dass das allgemeine Integral der Gleichung (19.) in der Umgebung von $z=0$ die Form hat

$$(22.)\qquad y = \mathfrak{P}(z, z^{r_2-r_1}),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine nach ganzen positiven Potenzen von $z, z^{r_2-r_1}$ fortschreitende Reihe bedeutet.

Für $z=0$ ergiebt sich aus (18.)

$$y = -\frac{r_1}{C_0}.$$

Setzt man in (21.)

$$r = -C_0 s,$$

*) Siehe meine Arbeit in Borchardts Journal, Bd. 66, S. 146.

**) Ebenda S. 147 und Borchardts Journal, Bd. 68, S. 361[1]).

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 188 und Abh. VII, ebenda S. 213. Sch.

so erhält man die Gleichung

$$C_0 s^2 + B_0 s + A_0 = 0. \tag{21a.}$$

294] Man hat daher

$$A_0 + B_0 y + C_0 y^2 = C_0\left(y + \frac{r_1}{C_0}\right)\left(y + \frac{r_2}{C_0}\right). \tag{23.}$$

Für $y = -\frac{r_1}{C_0}$ erhält die rechte Seite der Gleichung (19.) die Form

$$\lambda\left(y + \frac{r_1}{C_0}\right) + \mathfrak{P}\left(y + \frac{r_1}{C_0}, z\right),$$

wo

$$\lambda = r_2 - r_1 \tag{24.}$$

und $\mathfrak{P}$ eine nach positiven ganzen Potenzen von z und $y + \frac{r_1}{C_0}$ fortschreitende Reihe bedeutet.

In dem Falle b) ist für das allgemeine Integral der Gleichung (19.) der durch die Gleichung (18.) gegebene Ausdruck beizubehalten, in welchem jedoch jetzt P, Q, R, S nach positiven ganzen Potenzen von z fortschreitende Reihen bedeuten.

Es sei nunmehr die Differenz der Wurzeln der Gleichung (21.) eine ganze Zahl, diese Wurzeln also in der obigen Bezeichnung durch $r_2, r_2 - g$ dargestellt.

Es kann dann*) noch immer ein Fundamentalsystem w_1, w_2 von Integralen der Gleichung (20.) existiren, welches in der Umgebung von $z = 0$ die Form

$$w_1 = z^{r_2}\psi_1, \quad w_2 = z^{r_2 - g}\psi_2 \tag{25.}$$

hat, wo ψ_1, ψ_2 nach positiven ganzen Potenzen von z fortschreitende Reihen bedeuten.

In diesem Falle ist λ in Gleichung (24.) eine ganze positive Zahl, und in diesem Falle ist das allgemeine Integral der Gleichung (19.) der Form

$$y = \mathfrak{P}(z), \tag{26.}$$

wo $\mathfrak{P}(z)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von z fortschreitende Reihe bedeutet.

*) Siehe meine Arbeiten, Borchardts Journal, Bd. 66, S. 157 und Bd. 68, S. 376 ff. [1]).

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 198 und Abh. VII, ebenda S. 229 ff. Sch.

Wenn aber in der Umgebung von $z = 0$ die Darstellung (5a.) gilt, so folgt aus Gleichung (18a.), dass das allgemeine Integral y in der Umgebung von $z = 0$ die Form hat

$$y = \mathfrak{P}(z, z\log z), \tag{27.}$$

wo $\mathfrak{P}$ eine nach ganzen positiven Potenzen von z, $z\log z$ fortschreitende Reihe bedeutet.

Die Formeln (22.) und (27.) sind in Übereinstimmung mit den Re- [295
sultaten der Herren Picard und Poincaré*), welche dieselben bei der Untersuchung der Gleichung

$$z\frac{du}{dz} = az + bu + \cdots$$

aus anderen Gesichtspunkten hergeleitet haben.

Wir wollen hier nur noch bemerken, dass, wenn der Coefficient von i in einer Grösse a nicht verschwindet, der Punkt $z = 0$ genau genommen als ein Punkt der Unbestimmtheit der Function z^a aufgefasst werden müsste. In der That sei

$$a = \alpha + \beta i,$$

β von Null verschieden, und sei

$$z = \varrho e^{(\varphi + 2m\pi)i},$$

so kann

$$\alpha\log\varrho - \beta(\varphi + 2m\pi),$$

wenn m als positive oder negative Zahl wächst und gleichzeitig ϱ auf geeignete Weise abnimmt, jeden beliebigen Werth erhalten. Demnach kann der Modul von z^a, wenn z gleichzeitig Umdrehungen um $z = 0$ macht und sich der Null annähert, jeden beliebigen Werth annehmen.

5.

Als ein ferneres Beispiel werde die Differentialgleichung

$$z^k\frac{dy}{dz} = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3 \tag{1.}$$

*) Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1878, und Journal de l'École Polytechnique, cah. 45, p. 21 und 26.

betrachtet, in welcher p_0, p_1, p_2, p_3 in der Umgebung von $z = 0$ eindeutige und continuirliche Functionen sind, zwischen denen die Gleichung

$$\frac{4}{3}\left(p_3 \frac{dp_2}{dz} - p_2 \frac{dp_3}{dz}\right) z^k - \frac{4}{3} p_1 p_2 p_3 + \frac{8}{27} p_2^3 + 4 p_0 p_3^2 = 0 \tag{2.}$$

besteht. Setzt man

$$-\frac{4}{3} \frac{p_2}{z^k} y - \frac{2p_3}{z^k} y^2 = \frac{1}{w} \frac{dw}{dz}, \tag{3.}$$

so folgt

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - \lambda \frac{dw}{dz} - \mu w = 0, \tag{4.}$$

wo

296]

$$\left\{\begin{aligned} \mu &= -\frac{4}{3} \frac{p_0 p_2}{z^{2k}}, \\ \lambda &= -\frac{k}{z} - \frac{d \log p_3}{dz} + \frac{3 p_0 p_3}{p_2 z^k} + \frac{p_1}{z^k}. \end{aligned}\right. \tag{5.}$$

Ist $k > 1$, so ist wiederum $z = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale der Gleichung (4.) und demnach im Allgemeinen auch für die der Gleichung (1.).

Ausserdem ergiebt die Gleichung (3.), dass die Integrale y im Allgemeinen in der Umgebung von $z = 0$ eine unbestimmte Verzweigung erfahren.

6.

Mit den vorhergehenden Untersuchungen hängt auf das Engste die Frage zusammen: wie viele Integrale einer Differentialgleichung vermögen vorgeschriebenen Anfangsbedingungen Genüge zu leisten?

Wir beschränken uns hierbei auf Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dy}{dz} = \Phi(z, y), \tag{F.}$$

wo $\Phi(z, y)$ eine wohldefinirte Function der beiden Variabelen bedeutet, und auch nur auf den Fall, dass die Anfangswerthe (z_0, y_0) keine Singularität der Function $\Phi(z, y)$ darbieten. In diesem Falle giebt es bekanntlich eine Lösung der Gleichung (F.) $y = u$ von der Beschaffenheit, dass für $z = z_0$, $u = y_0$

und dass sie innerhalb eines gewissen $z = z_0$ umgebenden Gebietes eindeutig und stetig ist*).

Setzen wir

$$y = u + v, \tag{1.}$$

so erhalten wir für v die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dz} = \Phi(z, u + v) - \Phi(z, u). \tag{2.}$$

Es sei

$$\Phi(z, u + v) - \Phi(z, u) = v^m \Psi(z, u, v), \tag{3.}$$

so ist, wenn man von einzelnen singulären Werthen von z abstrahirt, $\Psi(z, u, v)$ nach ganzen positiven Potenzen von v entwickelbar.

Wir haben schon oben in No. 2 bemerkt, dass wir im Allgemeinen **nicht** mit Briot und Bouquet**) aus (2.) und (3.) den Schluss ziehen können, [297 dass es ausser $y = u$ kein anderes Integral der Gleichung (F.) geben könne, welches für $z = z_0$ den Werth $y = y_0$ annähme.

In der That, betrachten wir in der mit (2.) identischen Gleichung

$$\frac{dz}{dv} = \frac{1}{v^m \Psi(z, u, v)} \tag{G.}$$

z als Function von v, so hat (G.) die Beschaffenheit der Gleichung (A.), wenn in der letzteren y mit z und z mit v vertauscht und $k = m$ gesetzt wird. Denn da die Function u von z als in ihrem ganzen Verlaufe bekannt vorausgesetzt werden muss, so ist damit $\Psi(z, u, v)$ eine wohldefinirte Function von z und v.

Nun haben wir in den vorhergehenden Nummern erkannt, dass $v = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit der Integrale der Gleichung (G.) sein kann, was auf dasselbe hinauskommt, dass es unzählig viele Functionen z von v geben kann, welche für $v = 0$ jeden beliebigen Werth, also auch den Werth $z = z_0$ annehmen und der Differentialgleichung (G.) Genüge leisten. Dann aber giebt es auch unzählig viele Functionen v von z, welche für $z = z_0$ verschwinden und der Differentialgleichung (2.) genügen, d. h. unzählig viele

*) Siehe Briot et Bouquet, a. a. O., S. 136–144.

**) A. a. O., S. 145.

Functionen $y = u + v$, welche für $z = z_0$ den Werth y_0 annehmen und der Gleichung (F.) genügen.

Der Fall, wo $m > 1$, setzt voraus, dass $y = u$ die Gleichung

$$(4.)\qquad \frac{\partial \Phi(z, y)}{\partial y} = 0$$

befriedigt, derselbe tritt also nur für besondere Integrale der Gleichung (F.) auf.

Aber wir haben in No. 3 erkannt, dass auch für $m = 1$ der Punkt $v = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale der Gleichung (G.) werden kann.

Der Satz, dass es nur ein Integral u der Gleichung (F.) gebe, welches vorgeschriebene Anfangsbedingungen (z_0, y_0) befriedigt, ist also nur dann richtig, wenn für diese Function u die Integrale der Gleichung (G.) nicht den Punkt der Unbestimmtheit $v = 0$ besitzen.

7.

Zur Erläuterung des Vorhergehenden wollen wir zuerst ein Beispiel betrachten, in welchem $m > 1$. Es sei

$$(1.)\qquad \frac{dy}{dz} = \Phi(z, y) = \frac{a(\alpha z + \beta y)^2 - \alpha(az + by)}{\beta(az + by) - b(\alpha z + \beta y)^2},$$

298] wo $a\beta - b\alpha$ von Null verschieden. Wählen wir die Anfangswerthe $\left(z_0, -\frac{\alpha}{\beta} z_0\right)$, so ist

$$\Phi(z_0, y_0) = -\frac{\alpha}{\beta}$$

ein bestimmter Werth, und $\Phi(z, y)$ hat in der Umgebung von $\left(z_0, -\frac{\alpha}{\beta} z_0\right)$ die in voriger Nummer verlangte Eigenschaft. Das Integral u ist

$$(2.)\qquad u = -\frac{\alpha}{\beta} z.$$

Setzen wir in (1.)

$$(3.)\qquad y = u + v,$$

so folgt die der Gleichung (G.) entsprechende Gleichung

$$(4.)\qquad \frac{dz}{dv} = \frac{1}{\beta(a\beta - \alpha b)} \frac{(a\beta - \alpha b)z + b\beta v - b\beta^2 v^2}{v^2}.$$

In der That wird diese Gleichung befriedigt durch

$$(5.)\qquad (\alpha b - \beta a)z = b\beta v - \beta C e^{-\frac{1}{\beta v}},$$

wo C eine willkürliche Constante.

Demnach giebt es unzählig viele Integrale der Gleichung (1.)

$$(6.)\qquad y = -\frac{\alpha}{\beta} z + v,$$

wo v eine Lösung der Gleichung (5.), welche sämmtlich für $z = z_0$ den Werth $y_0 = -\frac{\alpha}{\beta} z_0$ erhalten. Man hat dazu nur in Gleichung (5.) v so gegen Null convergiren zu lassen, dass z den Werth z_0 annimmt.

8.

Ein weiteres Beispiel betreffe den Fall $m = 1$. Es sei die (F.) entsprechende Gleichung

$$(1.)\qquad \frac{dy}{dz} = -\frac{1}{4} \frac{1}{z(z-1)} - \frac{2z-1}{z(z-1)} y - y^2.$$

Haben η_1, η_2 dieselbe Bedeutung wie in meiner Arbeit*), und vertauscht man daselbst u mit z, so hat das allgemeine Integral von (1.) den Werth

$$(2.)\qquad y = \frac{c_1 \frac{d\eta_1}{dz} + c_2 \frac{d\eta_2}{dz}}{c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2}, \qquad [299$$

wo c_1, c_2 willkürliche Constanten bedeuten.

Man hat daher

$$(3.)\qquad y - \frac{d \log \eta_1}{dz} = c_2 \frac{\eta_1 \frac{d\eta_2}{dz} - \eta_2 \frac{d\eta_1}{dz}}{\eta_1(c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2)} = \frac{c_2 C}{z(z-1)\eta_1(c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2)},$$

wo C eine Constante bezeichnet**). Nach unzählig vielen Umläufen um $z = 1$ bleibt η_2 ungeändert, während η_1 in

*) Borchardts Journal, Bd. 83, S. 15 ff.[1]).

**) Ebenda, S. 19[2]).

[1]) Abh. XXIV dieses Bandes, S. 87 ff. Sch.

[2]) Ebenda, S. 92. Sch.

$$\lim(\eta_{11}-2ni\eta_{12}) \text{ für } n=\infty$$

übergeht*), also im Allgemeinen unendlich wird.

Für einen beliebigen von $z=0,1,\infty$ verschiedenen, aber willkürlichen Werth von z wird daher nach Gleichung (3.)

$$\lim y = \lim \frac{d\log\eta_{11}}{dz} = \frac{d\log\eta_{12}}{dz}. \tag{4.}$$

Man kann also hieraus ersehen, dass im Allgemeinen in einem beliebigen Punkt $z=z_0$ unzählig viele Integrale gegen denselben Werth convergiren, wenn z auf geeigneten Wegen nach z_0 geführt wird.

Die der Gleichung (G.) entsprechende Gleichung wird in unserem Falle

$$\frac{dz}{dv} = \frac{1}{v}\,\frac{z(z-1)}{-2z+1-2uz(z-1)-vz(z-1)} = \frac{1}{v}F(v,z), \tag{5.}$$

wo wir das Integral u der Gleichung (1.)

$$u = \frac{d\log\eta_{12}}{dz} \tag{6.}$$

wählen.

Wenn wir auf diese Gleichung das Verfahren der No. 3 anwenden, nachdem wir daselbst z mit v und y mit z vertauscht, so erhalten wir

$$F(0,z) = \frac{z(z-1)}{-2z+1-2uz(z-1)}. \tag{7.}$$

Wenn wir daher entsprechend der Gleichung (B'.) ζ aus der Gleichung

$$\frac{d\zeta}{dv} = \frac{1}{v}F(0,\zeta) \tag{8.}$$

300] bestimmen, so folgt aus derselben durch Integration

$$\log c - \log\zeta(\zeta-1) - 2\log\eta_{12} = \log v,$$

wo η_{12} das Argument ζ beigelegt wird und wo c eine Constante bedeutet; demnach ist

$$v = \frac{c}{\eta_{12}^2\zeta(\zeta-1)}. \tag{9.}$$

*) Borchardts Journal, Bd. 83, S. 22[1]).

[1]) Abh. XXIV dieses Bandes, S. 95. Sch.

Macht ζ unendlich viele Umläufe um $\zeta=0$, so wird

$$\lim \eta_{12} = \infty$$

für willkürliche von $0, 1, \infty$ verschiedene Werthe von ζ. Demnach entspricht dem $v=0$ ein willkürlicher Werth von ζ.

Führen wir die Variabele ζ an die Stelle von v in Gleichung (5.) ein, d. h. bilden wir die der Gleichung (C'.) entsprechende Gleichung, so folgt aus No. 3, dass, je nach den verschiedenen Wegen, auf welchen v in Null einrückt und alle möglichen Werthe von ζ hervorbringt, auch alle möglichen Werthe z, also auch $z=z_0$, erzielt werden können. Wir haben am Anfang dieser Nummer auf anderem Wege gezeigt, dass in der That diese Werthe auch erzielt werden.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde

S. 394, Zeile 7 v. u. zwischen $e^{\frac{1}{z-a}}$ und b das Minuszeichen eingefügt,

" 405, " 9 Variabele statt Variabelen,

" 407, Fussnote **) 361 statt 367,

" 411, Gl. (G.) $\frac{1}{v^m\Psi(z,u,v)}$ statt $\frac{1}{v^m}\Psi(z,u,v)$ und

" 414, " (5.) $\frac{1}{v}F(v,z)$ statt $\frac{1F}{v}(v,z)$ gesetzt.

2) In dem am Schlusse der No. 4 (S. 409) angeführten Beispiel (wo übrigens Zeile 6 und 4 v. u. statt »jeden beliebigen Werth erhalten« zu setzen wäre »jedem beliebigen Werthe beliebig nahe kommen«) trifft für den Punkt $z=0$ die in der No. 1 gegebene Definition eines **Punktes der Unbestimmtheit** nicht zu, da für einen Weg, der sich dem Punkte $z=0$ spiralförmig annähert, von »letzten Wegelementen« nicht die Rede sein kann. In der That sagt Fuchs selbst in der No. 4, und ebenso auch in

späteren Abhandlungen, von einer Singularität, wie sie für die Integrale einer linearen Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse auftritt, dass die Integrale daselbst nicht unbestimmt werden, er wollte also den Punkt $z = 0$ für eine Function, die in der Umgebung dieses Punktes in der Form

$$z^a \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k c_k z^k$$

darstellbar ist, nur dann als einen Punkt der Unbestimmtheit angesehen wissen, wenn die Anzahl der nicht verschwindenden Coefficienten c_k mit negativen Indices keine endliche ist. Man könnte die in der No. 1 gegebene Definition eines Punktes der Unbestimmtheit in folgender Weise fassen[1]). Es soll von einer Function $f(z)$ gesagt werden, dass sie an der Stelle $z = a$ **nicht unbestimmt wird** (bestimmt ist) wenn 1) alle Stellen in einer gewissen Umgebung von a reguläre Stellen der Function sind und wenn 2) für jede gegen die Null convergirende Werthenfolge $\delta_1, \delta_2, \ldots, (\lim\limits_n \delta_n = 0)$, die so beschaffen ist, dass sich $f(z)$ an den Stellen $a + \delta_n$ regulär verhält, die Folge

$$f(a+\delta_1),\ f(a+\delta_2),\ \ldots$$

einem bestimmten, von der besonderen Wahl der Folge $\delta_1, \delta_2, \ldots$ unabhängigen, endlichen oder unendlich grossen Grenzwerthe

$$\lim_n f(a+\delta_n) = \lim_{z=a} f(z)$$

gleichmässig zustrebt, vorausgesetzt, dass für die Berechnung der Functionswerthe $f(a+\delta_n)$ ein beliebig gewählter, aber dann eindeutig festzuhaltender Zweig der Function $f(z)$ benutzt wird. — Eine Stelle a in deren jeder Nähe Stellen sich befinden, an welchen die Function $f(z)$ nicht unbestimmt ist, die aber selbst nicht zu diesen Stellen gehört, soll eine **Stelle** oder ein **Punkt der Unbestimmtheit** genannt werden. —

Das am Schlusse der No. 6 (S. 412) ausgesprochene Resultat hat in der Literatur vielfachen Widerspruch gefunden; es sei darum zur Klärung des Sachverhaltes das Folgende bemerkt.

Der von Briot und Bouquet gegebene Unitätsbeweis für das durch die Anfangswerthe (z_0, y_0) bestimmte holomorphe Integral der Differentialgleichung (F.), S. 410, besagt, wie Fuchs in der No. 2, S. 396, bemerkt, dass ausser dem holomorphen Integrale kein anderes Integral existirt, welches den Werth y_0 annimmt, wenn z auf einem **Wege von endlicher Länge** in den Punkt z_0 einrückt. Allgemeiner hat Herr Picard (Traité d'Analyse, t. II, 1893, S. 314 ff., zweite Aufl. 1905, S. 357 ff.) gezeigt, dass das holomorphe Integral u das einzige ist, welches die folgende Eigenschaft besitzt: Beschreibt man um z_0, y_0 Kreise L_0, K_0 mit hinreichend kleinen Radien, so liegen die Werthe von u, die Werthen von z innerhalb L_0 entsprechen, im Inneren von K_0, und wenn z längs einer bestimmten ganz im Inneren von L_0 verlaufenden Curve C in den Punkt z_0 einrückt, so rückt u längs eines innerhalb K_0 verlaufenden Weges in y_0 ein. Dagegen zeigt Fuchs, dass es unter gewissen Umständen ausser dem holomorphen Integrale u Integrale y geben kann, die in den Werth y_0 einrücken, wenn z **auf geeignetem Wege** in den Punkt z_0 geführt wird.

Sch.

[1]) Vergl. Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. I (1895), S. 16, 17.

XLVIII.

ÜBER DIEJENIGEN ALGEBRAISCHEN GEBILDE, WELCHE EINE INVOLUTION ZULASSEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1886, XXXIX, S. 797—804; vorgetragen am 22. Juli; ausgegeben am 19. August 1886.)

In einer Untersuchung, deren Resultate an anderer Stelle veröffent- [797
licht werden sollen, bin ich zur Betrachtung solcher algebraischer Gebilde geführt worden, welche eine algebraische eindeutig umkehrbare Transformation in sich selbst von folgender Art zulassen. Ist P ein Punkt der das Gebilde darstellenden Riemannschen Fläche, P' ein durch die Transformation dem P zugeordneter Punkt derselben Fläche, so ist der nach derselben Transformation dem P' zugeordnete Punkt derselben Riemannschen Fläche mit P übereinstimmend. Ich will im Anschluss an die in der Geometrie gebräuchliche Sprechweise von zwei einander so zugeordneten Stellen der Riemannschen Fläche sagen, sie seien **involutorisch gepaart**, indem ich dabei stillschweigend voraussetze, dass die Zuordnung auf algebraischem Wege erfolge. In der folgenden Notiz erlaube ich mir die Ergebnisse mitzutheilen, zu welchen mich das Studium der genannten Gebilde geführt, und deren hauptsächlichstes darin besteht, dass die auf eine zweiblättrige Riemannsche Fläche durch eine rationale eindeutig umkehrbare Substitution abbildbaren Riemannschen Flächen die einzigen sind, welche eine solche involutorische Paarung zulassen. Da andererseits für die letztgenannte Art von Flächen auch stets

eine solche involutorische Paarung vorhanden ist, so ergiebt sich, dass diese Klasse von algebraischen Gebilden, welche man auch als die hyperelliptische Klasse bezeichnen könnte, durch die Eigenschaft eine involutorische Paarung zuzulassen vollständig und eindeutig characterisirt werden kann.

1.

Es sei

(A.) $$F(s, z) = 0$$

eine irreductible algebraische Gleichung zwischen den beiden Veränderlichen s und z. Es werde vorausgesetzt, dass es zwei rationale Functionen von s und z gebe

798] (B.) $$\begin{cases} \zeta = \varphi(s, z), \\ \sigma = \psi(s, z) \end{cases}$$

von der Beschaffenheit, dass

(C.) $$\begin{cases} z = \varphi(\sigma, \zeta), \\ s = \psi(\sigma, \zeta) \end{cases}$$

und

(D.) $$F(\sigma, \zeta) = 0.$$

Wir wollen mit p das Geschlecht der Gleichung (A.) [den Rang nach der Bezeichnungsweise des Herrn Weierstrass] und mit

$$f_1(s, z),\ f_2(s, z),\ \ldots,\ f_p(s, z)$$

die Differentialquotienten von p linear unabhängigen Integralen erster Gattung bezeichnen.

Wird in einem Integrale erster Gattung als Function des Ortes in der Riemannschen Fläche (s, z) die Substitution (C.) angewendet, so erhält man ein Integral erster Gattung als Function des Ortes in der Riemannschen Fläche (σ, ζ). Da andererseits die beiden Riemannschen Flächen (s, z), (σ, ζ) in dem Sinne identische Gebilde sind, dass wenn $z = \zeta$ auch alle über z in der einen gelegenen Werthe mit den über ζ in der anderen gelegenen Werthen der Reihe nach übereinstimmen, so ist auch p der Rang des algebraischen Gebildes (D.), und es sind $f_1(\sigma, \zeta), f_2(\sigma, \zeta), \ldots, f_p(\sigma, \zeta)$ Differentialquotienten von zu demselben gehörigen p linear unabhängigen Integralen erster Gattung.

Es ist daher

(E.) $$f_k(s, z)\,dz = [c_{k1} f_1(\sigma, \zeta) + c_{k2} f_2(\sigma, \zeta) + \cdots + c_{kp} f_p(\sigma, \zeta)]\,d\zeta, \quad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

$c_{k1}, c_{k2}, \ldots, c_{kp}$ bestimmte Constanten.

Durch Anwendung der Substitution (B.) auf die Integrale erster Gattung als Functionen des Ortes in der Riemannschen Fläche (σ, ζ) ergiebt sich ebenso

(F.) $$f_k(\sigma, \zeta)\,d\zeta = [c_{k1} f_1(s, z) + c_{k2} f_2(s, z) + \cdots + c_{kp} f_p(s, z)]\,dz, \quad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

wo die Grössen c_{kl} in (F.) mit denen in (E.) übereinstimmen.

2.

Es sei

(1.) $$b_1 f_1(s, z) + b_2 f_2(s, z) + \cdots + b_p f_p(s, z) = G(s, z),$$

wo $b_1, b_2, \ldots, b_p$ Constanten bedeuten. Wir wollen dieselben so bestimmen, dass

(2.) $$G(s, z)\,dz = wG(\sigma, \zeta)\,d\zeta,$$ [799

also auch

(2'.) $$G(\sigma, \zeta)\,d\zeta = wG(s, z)\,dz$$

werde und w eine Constante sei.

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (E.) geht Gleichung (2.) über in

(3.) $$P_1 f_1(\sigma, \zeta) + P_2 f_2(\sigma, \zeta) + \cdots + P_p f_p(\sigma, \zeta) = 0,$$

wo

(4.) $$P_k = b_1 c_{1k} + b_2 c_{2k} + \cdots + b_p c_{pk} - w b_k.$$

Da $f_1, f_2, \ldots, f_p$ linear unabhängig sind, so ist

(5.) $$P_k = 0. \quad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

Hieraus folgt, dass w sich durch die Gleichung

(G.) $$\begin{vmatrix} c_{11} - w & c_{21} & \ldots & c_{p1} \\ c_{12} & c_{22} - w & \ldots & c_{p2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1p} & c_{2p} & \ldots & c_{pp} - w \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt.

In Übereinstimmung mit einem Verfahren, welches ich bei der Fixirung der Fundamentalsysteme der Integrale linearer homogener Differentialgleichungen angewendet habe*), und unter Berücksichtigung der von Herrn HAMBURGER**) gemachten weiteren Ausführungen desselben, kann man, wenn w_1 eine λ-fache Wurzel der Gleichung (G.) ist, für die Constanten $b_1, b_2, \dots, b_p$ solche λ Bestimmungen treffen, dass die zugehörigen Functionen $G(s,z)$ in Gruppen zerfallen, von der Art, dass eine m-gliedrige Gruppe linear unabhängiger Functionen $G^{(1)}(s,z), G^{(2)}(s,z), \dots, G^{(m)}(s,z)$ die Eigenschaft hat

$$(4.)\qquad \begin{cases} G^{(1)}(s,z)\,dz = w_1 G^{(1)}(\sigma,\zeta)\,d\zeta, \\ G^{(2)}(s,z)\,dz = [w_1 G^{(2)}(\sigma,\zeta) + G^{(1)}(\sigma,\zeta)]\,d\zeta, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ G^{(m)}(s,z)\,dz = [w_1 G^{(m)}(\sigma,\zeta) + G^{(m-1)}(\sigma,\zeta)]\,d\zeta. \end{cases}$$

Wegen der Gleichungen (B.) bestehen aber mit diesen Gleichungen zugleich die folgenden

$$(5.)\qquad \begin{cases} G^{(1)}(\sigma,\zeta)\,d\zeta = w_1 G^{(1)}(s,z)\,dz, \\ G^{(2)}(\sigma,\zeta)\,d\zeta = [w_1 G^{(2)}(s,z) + G^{(1)}(s,z)]\,dz, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ G^{(m)}(\sigma,\zeta)\,d\zeta = [w_1 G^{(m)}(s,z) + G^{(m-1)}(s,z)]\,dz. \end{cases}$$

800] Substituirt man aus (5.) die Werthe von $G^{(k)}(\sigma,\zeta)\,d\zeta$ in (4.), so erhält man

$$(6.)\qquad \begin{cases} G^{(1)}(s,z) = w_1^2 G^{(1)}(s,z), \\ G^{(2)}(s,z) = w_1^2 G^{(2)}(s,z) + 2w_1 G^{(1)}(s,z), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ G^{(m)}(s,z) = w_1^2 G^{(m)}(s,z) + 2w_1 G^{(m-1)}(s,z) + G^{(m-2)}(s,z). \end{cases}$$

Da nun w_1 von Null verschieden, so würde hieraus sich ein Widerspruch mit der Voraussetzung ergeben, wonach die Functionen $G^{(k)}(s,z)$ linear unabhängig sind. Dieser Widerspruch wird dadurch aufgehoben, *dass in jeder der genannten Gruppen nur ein Element vorhanden ist.*

*) Siehe meine Arbeit in BORCHARDTS Journal, Bd. 66, S. 134–136[1]).
**) BORCHARDTS Journal, Bd. 76, S. 121.

1) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 173–176. Sch.

Hieraus ergiebt sich, dass wenn $w_1, w_2, \dots, w_p$ die Wurzeln der Gleichung (G.) bedeuten, *mögen diese theilweise gleich oder sämmtlich von einander verschieden sein*, es stets p linear unabhängige Differentialquotienten von Integralen erster Gattung $G_1(s,z), G_2(s,z), \dots, G_p(s,z)$ giebt, für welche bez. die Gleichungen

$$(\text{H.})\qquad \begin{cases} G_k(s,z)\,dz = w_k G_k(\sigma,\zeta)\,d\zeta, \\ G_k(\sigma,\zeta)\,d\zeta = w_k G_k(s,z)\,dz, \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \dots, p)$$

stattfinden.

Wählt man nun von vornherein $f_k(s,z) = G_k(s,z)$, so treten diese Gleichungen (H.) an die Stelle der Gleichungen (E.) und (F.).

Aus den beiden Gleichungen (H.) folgt

$$(\text{J.})\qquad w_k^2 = 1.$$

Die Wurzeln der Gleichung (G.) sind demnach sämmtlich gleich der positiven oder der negativen Einheit.

Es folgt daher aus den Gleichungen (H.)

$$(\text{K.})\qquad G_k(s,z)\,dz = \pm G_k(\sigma,\zeta)\,d\zeta. \qquad (k = 1, 2, \dots, p)$$

3.

Es möge in den Gleichungen (K.) für $k = 1, 2, \dots, \lambda$ das obere, dagegen für $k = \lambda+1, \lambda+2, \dots, \lambda+\mu$ das untere Vorzeichen gelten, wenn

$$(1.)\qquad p = \lambda + \mu$$

gesetzt wird.

Es sei

$$(2.)\qquad \Phi(s,z) = c_1 G_1(s,z) + c_2 G_2(s,z) + \cdots + c_\lambda G_\lambda(s,z)$$

und

$$(3.)\qquad \Psi(s,z) = e_1 G_{\lambda+1}(s,z) + e_2 G_{\lambda+2}(s,z) + \cdots + e_\mu G_{\lambda+\mu}(s,z),$$

wo c_k, e_k Constanten bedeuten. Ist alsdann $(s,z) \equiv (s',z')$ eine Lösung [801 der Gleichung

$$(4.)\qquad \Phi(s,z) = 0$$

und $(\sigma,\zeta) \equiv (\sigma',\zeta')$ das nach den Gleichungen (B.) dem $(s,z) \equiv (s',z')$ entsprechende Werthsystem, so ist zufolge der Gleichungen (K.) $(s, z) \equiv (\sigma', \zeta')$ ebenfalls eine Lösung der Gleichung (4.).

Dieselbe Eigenschaft hat auch die Gleichung

$$\Psi(s, z) = 0. \tag{5.}$$

I. Die Constanten c_k, e_k lassen sich so bestimmen, dass die Gleichungen (4.) und (5.) $2p-4$ gemeinschaftliche Lösungen haben, wovon immer je zwei nach den Gleichungen (B.) oder (C.) involutorisch gepaart sind.

Eliminirt man nämlich (s, z) zwischen der Gleichung (A.) und den Gleichungen (4.) und (5.), so erhält man als Resultante eine Gleichung

$$f(c_1, c_2, \ldots, c_\lambda, e_1, e_2, \ldots, e_\mu) = 0. \tag{6.}$$

Nach den bekannten Methoden zur Bestimmung der gemeinschaftlichen Lösungen eines Systems von Gleichungen ergiebt sich, dass die Grössen

$$\frac{c_2}{c_1}, \frac{c_3}{c_1}, \ldots, \frac{c_\lambda}{c_1}, \quad \frac{e_2}{e_1}, \frac{e_3}{e_1}, \ldots, \frac{e_\mu}{e_1}$$

im Ganzen $\lambda+\mu-2$ Bedingungsgleichungen zu befriedigen haben, wenn die Gleichungen (A.), (4.), (5.), $\lambda+\mu-2$ gemeinschaftliche Lösungen besitzen sollen. Und man kann zeigen, dass diese Bedingungsgleichungen, deren Anzahl mit derjenigen der zu bestimmenden Grössen $\frac{c_k}{c_1}$, $\frac{e_k}{e_1}$ übereinstimmt, immer befriedigt werden können. Die Gleichungen (A.), (4.), (5.) werden aber alsdann in Folge der oben angegebenen Eigenschaft der Gleichungen (4.) und (5.) auch durch diejenigen Grössensysteme (s, z) befriedigt, welche den bereits erreichten $\lambda+\mu-2$ gemeinschaftlichen Lösungen nach den Gleichungen (B.) oder (C.) zugeordnet sind.

Den Nachweis dafür, dass unter den Bestimmungsweisen der Verhältnisse der Grössen c_k und e_k immer solche vorhanden sind, dass zu den ihnen entsprechenden $\lambda+\mu-2$ gemeinschaftlichen Lösungen der Gleichungen (A.), (4.), (5.) noch die zu diesen Lösungen involutorisch zugeordneten Grössensysteme (s, z) als $\lambda+\mu-2$ neue Lösungen hinzutreten, erfordert einigermaassen verwickelte Erörterungen, und wir wollen uns hier darauf beschränken, dieselben an dem Beispiele $p = 4$, $\lambda = 2$ zu erläutern.

Jede der Gleichungen [802

$$c_1 G_1(s, z) + c_2 G_2(s, z) = 0, \tag{4a.}$$

$$e_1 G_3(s, z) + e_2 G_4(s, z) = 0 \tag{5a.}$$

wird in diesem Falle durch sechs Werthsysteme befriedigt, wovon je zwei durch die Gleichungen (B.) einander zugeordnet sind. Soll denselben durch gemeinschaftliche Werthsysteme (s, z) genügt werden, so hat man zwischen den Gleichungen (4a.), (5a.) und (A.) s und z zu eliminiren. Das Eliminationsresultat

$$f\left(\frac{c_2}{c_1}, \frac{e_2}{e_1}\right) = 0 \tag{6a.}$$

ist sowohl in Bezug auf $\frac{c_2}{c_1}$, als auch in Bezug auf $\frac{e_2}{e_1}$ vom dritten Grade, weil die drei Paare involutorisch einander zugeordneter Werthsysteme (s, z), welche einem bestimmten Werthe von $\frac{c_2}{c_1}$ entsprechen, für

$$\frac{e_2}{e_1} = -\frac{G_3(s, z)}{G_4(s, z)}$$

nur drei verschiedene Werthe hervorbringen, und umgekehrt. Für einen Werth $\frac{c_2}{c_1} = a$, für welchen die Gleichung (6a.) zwei gleiche Wurzeln $\frac{e_2}{e_1} = \alpha$ hat, geben zwei der drei Paare involutorisch conjugirter Werthsysteme (s, z), welche $-\frac{G_1(s,z)}{G_2(s,z)}$ den Werth a verschaffen, der Function $-\frac{G_3(s,z)}{G_4(s,z)}$ den Werth α. Demnach haben die Gleichungen

$$G_1(s, z) + aG_2(s, z) = 0 \tag{4b.}$$

und

$$G_3(s, z) + \alpha G_4(s, z) = 0 \tag{5b.}$$

zwei Paare involutorisch conjugirter Werthsysteme (s, z) als gemeinschaftliche Lösungen.

Aus dem Satze I. ergiebt sich unmittelbar:

II. Man kann $c_1, c_2, \ldots, c_\lambda, e_1, e_2, \ldots, e_\mu$ stets so bestimmen, dass

$$R(s, z) = \frac{c_1 G_1(s, z) + c_2 G_2(s, z) + \cdots + c_\lambda G_\lambda(s, z)}{e_1 G_{\lambda+1}(s, z) + e_2 G_{\lambda+2}(s, z) + \cdots + e_\mu G_{\lambda+\mu}(s, z)} \tag{L.}$$

nur in zwei Stellen der Riemannschen Fläche unendlich erster Ordnung wird.

803] Ist $\mu = 0$ oder $\lambda = 0$, d. h. gilt in den Gleichungen (K.) für $k = 1, 2, \ldots, p$ überall das obere oder überall das untere Vorzeichen, so kann man in

$$\text{(L'.)} \qquad R(s,z) = \frac{c_2 G_2(s,z) + c_3 G_3(s,z) + \cdots + c_p G_p(s,z)}{G_1(s,z)}$$

$c_2, c_3, \ldots, c_p$ so bestimmen, dass der Zähler für $p-2$ beliebige Stellen, in welchen $G_1(s,z)$ Null erster Ordnung wird, gleichfalls von der ersten Ordnung verschwindet, und es wird alsdann der Zähler ausserdem Null erster Ordnung in denjenigen Stellen, welche zu jenen involutorisch gepaart sind, und da diese zu gleicher Zeit die Gleichung $G_1(s,z) = 0$ befriedigen, so ergiebt sich wiederum, dass $R(s,z)$ nur in zwei Stellen unendlich erster Ordnung wird. Setzen wir

$$\text{(M.)} \qquad R(s,z) = u,$$

so folgt aus II.:

III. Es lassen sich s und z als rationale Functionen von u und $\sqrt{S(u)}$ darstellen, wo $S(u)$ eine ganze rationale Function von u, und es sind umgekehrt u und $\sqrt{S(u)}$ rationale Functionen von s und z.

4.

Es sei jetzt umgekehrt vorausgesetzt, dass die Riemannsche Fläche (A.) durch eine rationale und eindeutig umkehrbare Substitution auf eine zweiblättrige Riemannsche Fläche abgebildet werden könne. Alsdann giebt es bekanntlich eine rationale Function $R(s,z)$, welche nur in zwei Punkten der Riemannschen Fläche (A.) unendlich gross erster Ordnung wird.

Setzen wir alsdann

$$\text{(S.)} \qquad R(s,z) = u,$$

so sind z und s als rationale Functionen von u und $\sqrt{S(u)}$ darstellbar, wo $S(u)$ eine ganze rationale Function von u, und es sind umgekehrt u und $\sqrt{S(u)}$ rationale Functionen von s und z. Ist daher (σ, ζ) ein Punkt der Riemannschen Fläche (A.), für welchen u den nämlichen Werth wie in (s,z) annimmt, so sind σ und ζ eindeutige und demnach rationale Functionen von s und z,

$$\zeta = \varphi(s,z), \quad \sigma = \psi(s,z)$$

von der Beschaffenheit, dass

$$z = \varphi(\sigma,\zeta), \quad s = \psi(\sigma,\zeta),$$

d. h. zwei Stellen der Riemannschen Fläche, für welche u den nämlichen [804 Werth annimmt, bilden eine Involution.

Wenn wir diese Bemerkung mit dem Satze III. der vorigen Nummer zusammenhalten, so gelangen wir zu dem folgenden Resultate:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine algebraische Riemannsche Fläche eine algebraische Involution je zweier ihrer Punkte zulässt, ist die, dass diese Riemannsche Fläche und eine zweiblättrige Riemannsche Fläche gegenseitig rational auf einander abgebildet werden können.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 419, Zeile 3 $c_{k1}, c_{k2}, \dots, c_{kp}$ statt $c_{k1}, c_{k2}, c_{kp}, \dots$,

„ „ , Gl. (F.) c_{k1} statt c_{h1},

„ „ , Zeile 21 ist statt muss,

„ 421, zweite der Gln. (H.) $d\zeta$ statt dz,

„ „ , Zeile 15 den Gleichungen statt Gleichung.

2) Die in dieser Abhandlung enthaltenen Erörterungen erfordern eine Ergänzung, die in der Abh. LI gegeben ist. Die in den ersten Worten der Einleitung erwähnte Untersuchung ist in der folgenden Abhandlung XLIX enthalten. SCH.

XLIX.

ÜBER EINE KLASSE LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 100, 1887, S. 189—200.)

In meiner Arbeit (Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der [189 Wissenschaften, 8. Jan. 1881[1]) habe ich die Bedingungen gegeben, welche zu erfüllen sind, damit die symmetrischen Functionen der Variabeln z_1, z_2, welche durch die Gleichungen

$$(\alpha.)\qquad \begin{cases} f(z_1)\,dz_1 + f(z_2)\,dz_2 = du_1, \\ \varphi(z_1)\,dz_1 + \varphi(z_2)\,dz_2 = du_2 \end{cases}$$

als Functionen der Veränderlichen u_1, u_2 definirt sind, in der Umgebung eines solchen Werthsystemes $u_1 = \alpha_1$, $u_2 = \alpha_2$ sich eindeutig verhalten, für welches

$$(\beta.)\qquad f(z_1)\varphi(z_2) - f(z_2)\varphi(z_1) = 0.$$

Es ergab sich, dass, wenn u_1, u_2 mit von einander unabhängiger Veränderlichkeit in die Werthe $u_1 = \alpha_1$, $u_2 = \alpha_2$ einrücken, z_1, z_2 nicht Werthe erreichen können, welche die Gleichung $(\beta.)$ befriedigen, wenn alle Lösungen der letzteren Gleichung zu gleicher Zeit den beiden Gleichungen

$$(\gamma.)\qquad \begin{cases} f(z_1)\,dz_1 + f(z_2)\,dz_2 = 0, \\ \varphi(z_1)\,dz_1 + \varphi(z_2)\,dz_2 = 0 \end{cases}$$

Genüge leisten.

[1]) Abh. XXXV, S. 239 ff. dieses Bandes. Sch.

Als eine Folgerung dieses Theorems wurde dort nachgewiesen, dass $z, f(z)^2, \varphi(z)^2$ zweiwerthige Functionen von

$$\zeta = \frac{\varphi(z)}{f(z)}$$

seien von der Beschaffenheit, dass

$$f(z)^2\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)^2, \quad \varphi(z)^2\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)^2$$

einwerthige Functionen derselben Variablen darstellen.

In einer Arbeit, enthalten in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie 5. April 1883[1]), habe ich die Verallgemeinerung desselben Theorems für die Lösungen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ der Differentialgleichungen

190] $(\delta.)$ $$\sum_1^n {}_i f_k(z_i)\,dz_i = du_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

unter Voraussetzung einer beliebigen Zahl n entwickelt.

Im Anschluss an den speciellen Fall $n = 2$ erlaube ich mir im Folgenden die Resultate einer Untersuchung mitzutheilen, welche sich auf lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung bezieht, deren Coefficienten rationale Functionen des Ortes in einer algebraischen Riemannschen Fläche sind. Indem nämlich in $(\alpha.)$ für $f(z), \varphi(z)$ ein Fundamentalsystem von Integralen einer solchen Differentialgleichung gesetzt wird, werden die Bedingungen dafür entwickelt, unter welchen Umständen alle Stellenpaare der Riemannschen Fläche, welche die Gleichung $(\beta.)$ befriedigen, auch Lösungen der beiden Gleichungen $(\gamma.)$, oder vielmehr der Gleichungen

$$(\gamma'.) \qquad \begin{cases} f(z_1)\,dz_1 \pm f(z_2)\,dz_2 = 0, \\ \varphi(z_1)\,dz_1 \pm \varphi(z_2)\,dz_2 = 0 \end{cases}$$

mit correspondirenden Vorzeichen werden.

Diese Resultate habe ich der Hauptsache nach bereits in der Sitzung der Berliner Akademie vom 30. Juli 1885 vorgetragen. Es ist mir aber später durch Anwendung eines Theorems, welches ich in einer der Akademie am 22. Juli 1886 vorgelegten und seitdem veröffentlichten Notiz[2]) entwickelt habe, gelungen, dieselben wesentlich zu vereinfachen und auszuführen.

1) Abh. XLI, S. 341 ff. dieses Bandes. Sch.

2) Abh. XLVIII, S. 417 ff. dieses Bandes. Sch.

1.

Es seien die Coefficienten der Gleichung

$$(\text{A.}) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + G(s, z)\frac{dy}{dz} + H(s, z)\,y = 0$$

rationale Functionen der Grössen s und z, zwischen welchen eine irreductible algebraische Gleichung

$$(\text{B.}) \qquad F(s, z) = 0$$

besteht. Werden an irgend einem Punkte (s_0, z_0) der die algebraische Function (B.) darstellenden Riemannschen Fläche die Werthe $y = y_0$, $\frac{dy}{dz} = y'_0$ fixirt, so ist dadurch der Verlauf eines Integrals der Gleichung (A.) in der ganzen Riemannschen Fläche festgesetzt. Wie für den Fall, dass die Coefficienten der Differentialgleichung rationale Functionen von z, kann man auch hier [191
auf unendlich viele verschiedene Weisen ein Fundamentalsystem von Integralen $f(s, z), \varphi(s, z)$ als Functionen des Ortes in der Riemannschen Fläche herstellen, durch welche sich jedes andere Integral an derselben Stelle (s, z) linear, homogen und mit constanten Coefficienten darstellen lässt.

Es soll nunmehr untersucht werden, unter welchen Umständen die beiden Gleichungen

$$(\text{C.}) \qquad \begin{cases} f(s_1, z_1)\,dz_1 \pm f(s_2, z_2)\,dz_2 = 0, \\ \varphi(s_1, z_1)\,dz_1 \pm \varphi(s_2, z_2)\,dz_2 = 0, \end{cases}$$

in welchen sich die Vorzeichen entsprechen, gleichzeitig durch jedes Punktepaar $(s_1, z_1), (s_2, z_2)$ befriedigt werden, welches durch die Gleichung

$$(\text{D.}) \qquad \begin{vmatrix} f(s_1, z_1) & f(s_2, z_2) \\ \varphi(s_1, z_1) & \varphi(s_2, z_2) \end{vmatrix} = 0$$

zusammenhängt.

Wir bezeichnen mit y und v resp. die Integrale der Gleichungen

$$(1.) \qquad \frac{d^2y}{dz_1^2} + G(s_1, z_1)\frac{dy}{dz_1} + H(s_1, z_1)\,y = 0,$$

$$(2.) \qquad \frac{d^2v}{dz_2^2} + G(s_2, z_2)\frac{dv}{dz_2} + H(s_2, z_2)\,v = 0,$$

wo

$$(3.) \qquad F(s_1, z_1) = 0, \quad F(s_2, z_2) = 0,$$

und setzen fest, dass z_2 eine noch zu bestimmende Function von z_1 sei.

Transformiren wir die Gleichung (2.) in die unabhängige Variable z_1, indem wir

$$(4.)\qquad \frac{dz_2}{dz_1} = X$$

setzen, so geht dieselbe über in

$$(5.)\qquad X\frac{d^2v}{dz_1^2} + \left[X^2 G(s_2, z_2) - \frac{dX}{dz_1}\right]\frac{dv}{dz_1} + X^3 H(s_2, z_2)v = 0.$$

Soll z_2 mit z_1 so verbunden sein, dass $(s_1, z_1), (s_2, z_2)$ gleichzeitig den beiden Gleichungen (C.) genügen, so muss die Gleichung, welche

$$(6.)\qquad \omega = -Xv$$

befriedigt, nämlich

$$(7.)\qquad \frac{d^2\omega}{dz_1^2} + G_1\frac{d\omega}{dz_1} + H_1\omega = 0,$$

wo

$$(8.)\qquad \begin{cases} G_1 = -3\dfrac{d\log X}{dz_1} + XG(s_2, z_2), \\ H_1 = -3\left(\dfrac{d\log X}{dz_1}\right)^2 + \dfrac{1}{X}\dfrac{d^2X}{dz_1^2} + G(s_2, z_2)\dfrac{dX}{dz_1} - X^2 H(s_2, z_2), \end{cases}$$

192] mit der Gleichung (1.) sämmtliche Integrale gemeinschaftlich haben. Hieraus folgt zunächst

$$G_1 = G(s_1, z_1)$$

oder

$$(9.)\qquad -\frac{d\log X}{dz_1} + XG(s_2, z_2) = G(s_1, z_1)$$

und

$$H_1 = H(s_1, z_1),$$

oder unter Berücksichtigung von (9.),

$$(10.)\qquad P(s_2, z_2)X^2 = P(s_1, z_1),$$

wenn wir

$$(11.)\qquad P(s, z) = -3\frac{dG(s, z)}{dz} + 9H(s, z) - 2G(s, z)^2$$

setzen.

Die Gleichung (9.) besagt, dass

$$(E.)\qquad \sqrt[3]{\Delta(s_2, z_2)}\,dz_2 - \sqrt[3]{\Delta(s_1, z_1)}\,dz_1 = 0,$$

wo

$$(12.)\qquad \Delta(s, z) = f(s, z)\frac{d\varphi(s, z)}{dz} - \varphi(s, z)\frac{df(s, z)}{dz} = e^{-\int G(s, z)dz}.$$

Die Gleichung (E.) ist schon eine unmittelbare Folgerung aus dem Zusammenbestehen der beiden Gleichungen (C.) (vergleiche meine Arbeit in den Abhandlungen der Göttinger Societät[1]).

Die Gleichung (10.) ist gleichbedeutend mit der Gleichung

$$(F.)\qquad \sqrt{P(s_2, z_2)}\,dz_2 - \sqrt{P(s_1, z_1)}\,dz_1 = 0.$$

Es ist demnach erforderlich, dass alle Punktepaare $(s_1, z_1), (s_2, z_2)$, welche der Gleichung (D.) genügen, auch die beiden wohldefinirten Differentialgleichungen (E.) und (F.) befriedigen.

2.

Aus den Gleichungen (E.) und (F.) folgt

$$(G.)\qquad \frac{\sqrt{P(s_2, z_2)}}{\sqrt[3]{\Delta(s_2, z_2)}} = \frac{\sqrt{P(s_1, z_1)}}{\sqrt[3]{\Delta(s_1, z_1)}}.$$

Differentiiren wir diese Gleichung unter Berücksichtigung von (F.) und Gleichung (12.) voriger Nummer, so folgt

$$(H.)\qquad \begin{cases} \quad\dfrac{1}{2}P(s_2, z_2)^{-\frac{3}{2}}\dfrac{dP(s_2, z_2)}{dz_2} + \dfrac{1}{3}G(s_2, z_2)P(s_2, z_2)^{-\frac{1}{2}} \\ = \dfrac{1}{2}P(s_1, z_1)^{-\frac{3}{2}}\dfrac{dP(s_1, z_1)}{dz_1} + \dfrac{1}{3}G(s_1, z_1)P(s_1, z_1)^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$ [193

Es könnten nun die Coefficienten der Gleichung (A.) so beschaffen sein, dass

$$(1.)\qquad \frac{1}{2}P(s, z)^{-\frac{3}{2}}\frac{dP(s, z)}{dz} + \frac{1}{3}G(s, z)P(s, z)^{-\frac{1}{2}} = a,$$

wo a constant.

Setzen wir alsdann in (A.)

$$(2.)\qquad y = e^{-\frac{1}{3}\int G(s, z)dz}\omega,$$

so folgt

$$(3.)\qquad \frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{1}{3}G(s, z)\frac{d\omega}{dz} + \frac{1}{9}P(s, z)\omega = 0.$$

---

[1]) Abh. XXXV, S. 239 ff. dieses Bandes. Sch.

Ist $P(s, z)$ von Null verschieden, so führen wir in diese Gleichung an die Stelle der Variablen z die mit ihr durch Gleichung

$$du = P(s, z)^{\frac{1}{2}}\,dz \tag{4.}$$

verbundene Variable u ein, und erhalten

$$P(s, z)\left[\frac{d^2\omega}{du^2} + a\frac{d\omega}{du} + \frac{1}{9}\omega\right] = 0. \tag{5.}$$

Diese Gleichung zeigt, dass, wenn $P(s, z)$ nicht identisch verschwindet, das allgemeine Integral der Gleichung (A.) entweder

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int G(s,z)\,dz}\left[C_1 e^{\varepsilon_1 \int P(s,z)^{\frac{1}{2}}\,dz} + C_2 e^{\varepsilon_2 \int P(s,z)^{\frac{1}{2}}\,dz}\right], \tag{6.}$$

wo C_1, C_2 willkürliche Constanten und

$$\varepsilon_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{1}{9}}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{1}{9}},$$

wenn nämlich $\frac{a^2}{4} - \frac{1}{9}$ von Null verschieden, oder

$$y = e^{\frac{1}{2}\int[-G(s,z) \pm 2P(s,z)^{\frac{1}{2}}]\,dz}\left[C_1 + C_2\int P(s,z)^{\frac{1}{2}}\,dz\right], \tag{6a.}$$

wenn $a = \pm\frac{2}{3}$.

Ist $P(s, z)$ identisch Null, so folgt aus Gleichung (3.)

$$y = e^{-\frac{1}{2} G(s,z)\,dz}\left[C_1 + C_2\int dz\, e^{-\frac{1}{2}\int G(s,z)\,dz}\right]. \tag{7.}$$

Von dem durch die Gleichung (1.) bezeichneten Ausnahmefall abgesehen, ergiebt sich also der Satz:

Zwischen den Werthenpaaren (s_1, z_1), (s_2, z_2), welche gleichzeitig den Gleichungen (E.) und (F.) genügen, findet die algebraische Gleichung (H.) statt.

194] 3.

Setzen wir

$$\frac{\varphi(s, z)}{f(s, z)} = \zeta, \tag{I.}$$

so folgt aus der Voraussetzung, dass die Werthenpaare (s_1, z_1), (s_2, z_2), welche die Gleichung (D.) befriedigen, auch gleichzeitig den beiden Gleichungen

$$\begin{cases} f(s_1, z_1)\,dz_1 + f(s_2, z_2)\,dz_2 = 0, \\ \varphi(s_1, z_1)\,dz_1 + \varphi(s_2, z_2)\,dz_2 = 0 \end{cases} \tag{C'.}$$

genügen, dass zu jedem ζ nicht mehr als zwei Stellen der Riemannschen Fläche gehören (s. meine Arbeit in den Abhandlungen der Göttinger Societät[1]).

Ist demnach (s_1, z_1) eine beliebige Stelle der Riemannschen Fläche, ζ ein nach Gleichung (I.) zugehöriger Werth, so giebt es höchstens eine zweite Stelle (s_2, z_2), für welche ζ denselben Werth erhält. Ist aber (s_1, z_1) gegeben, so ist der allgemeine Werth von ζ

$$\zeta' = \frac{\alpha\varphi(s_1, z_1) + \beta f(s_1, z_1)}{\gamma\varphi(s_1, z_1) + \delta f(s_1, z_1)}, \tag{1.}$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Constanten sind, deren Werthe den verschiedenen Umläufen von (s, z) um die singulären Punkte der Gleichung (A.) entsprechen.

Ist σ ein in der Riemannschen Fläche von (s_1, z_1) nach (s_2, z_2) führender Weg, auf welchem

$$\frac{\varphi(s_2, z_2)}{f(s_2, z_2)} = \frac{\varphi(s_1, z_1)}{f(s_1, z_1)}$$

wird, und macht man von (s_2, z_2) aus denselben Weg rückwärts nach (s_1, z_1), vollzieht alsdann diejenigen Umläufe um die singulären Punkte von (A.), welche (1.) hervorgebracht, und kehrt alsdann auf σ nach (s_2, z_2) zurück, so hat man mit (s_2, z_2) einen Umlauf vollzogen, für welchen die Gleichung

$$\frac{\alpha\varphi(s_2, z_2) + \beta f(s_2, z_2)}{\gamma\varphi(s_2, z_2) + \delta f(s_2, z_2)} = \zeta' \tag{2.}$$

stattfindet.

Da die Gleichung

$$\frac{\alpha\varphi(s, z) + \beta f(s, z)}{\gamma\varphi(s, z) + \delta f(s, z)} = \zeta' \tag{3.}$$

nur zwei Lösungen (s, z) zulässt, so folgt, dass es ausser (s_1, z_1), (s_2, z_2) keine Stelle mehr giebt, welche dieselbe befriedigte. D. h.

Zu jedem Punkte (s_1, z_1) giebt es nur einen Punkt (s_2, z_2), welcher mit demselben die Gleichung (D.) befriedigt.

Nach dem Satze am Schlusse der No. 1 und nach dem Satze am Schlusse der vorigen Nummer ergiebt sich demnach:

1) Abh. XXXV, S. 239 ff. dieses Bandes. Sch.

195] Die Werthenpaare (s_1, z_1), (s_2, z_2), welche der Gleichung (D.) genügen, müssen so beschaffen sein, dass

$$\text{(K.)}\qquad \begin{cases} z_2 = \varrho(s_1, z_1), & s_2 = \sigma(s_1, z_1), \\ z_1 = \varrho(s_2, z_2), & s_1 = \sigma(s_2, z_2), \end{cases}$$

wo ϱ, σ rationale Functionen ihrer Argumente bedeuten, und dass sie zugleich die Gleichung (H.) befriedigen.

4.

Nach einem Satze, welchen ich in einer in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie (22. Juli 1886) enthaltenen Notiz[1]) veröffentlicht habe, ergiebt sich aus dem Bestehen der Gleichungen (K.) für den Fall, dass der Rang p der die Gleichung (B.) darstellenden Riemannschen Fläche grösser ist als Null, dass dieselbe durch eine rationale eindeutig umkehrbare Substitution auf eine zweiblättrige Riemannsche Fläche abgebildet werden kann.

Es ist also

$$\text{(L.)}\qquad \begin{cases} z = \psi_1(u, \sqrt{S(u)}), & s = \psi_2(u, \sqrt{S(u)}), \\ u = \tilde{\omega}_1(s, z), & \sqrt{S(u)} = \tilde{\omega}_2(s, z), \end{cases}$$

wo $S(u)$ eine ganze rationale Function von u mit lauter ungleichen Linearfactoren, ψ_1, ψ_2, $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ rationale Functionen ihrer Argumente bedeuten.

Aus den Entwicklungen, welche ich in der erwähnten Notiz (Sitzungsber. der Berliner Akad. der Wissensch. 22. Juli 1886[1])) gegeben habe, geht gleichzeitig hervor, dass die rationale Function $\tilde{\omega}_1(s, z)$ so gewählt werden kann, dass u für zwei durch die Gleichung (K.) involutorisch gepaarte Stellen der Riemannschen Fläche (B.) denselben oder den entgegengesetzten Werth annimmt.

Es sei demnach

$$\text{(1.)}\qquad u_1 = \tilde{\omega}_1(s_1, z_1),$$

so ist

$$\text{(2.)}\qquad u_2 = \pm u_1 = \tilde{\omega}_1(s_2, z_2).$$

Gilt in dieser Gleichung das obere Vorzeichen, so folgt

$$\text{(3.)}\qquad \sqrt{S(u_2)} = -\sqrt{S(u_1)}.$$

---

1) Abh. XLVIII, S. 417 ff. dieses Bandes. Sch.

Gilt in Gleichung (2.) das untere Vorzeichen, so ergiebt sich zunächst, dass $S(u)$ nur gerade Potenzen von u enthalten darf, und es ist

$$\text{(3a.)}\qquad \sqrt{S(u_2)} = \pm\sqrt{S(u_1)}.$$

Demnach sind die beiden involutorisch gepaarten Stellen in der zwei- [196
blättrigen Riemannschen Fläche, welche den durch die Gleichung (K.) einander zugeordneten Stellen der Riemannschen Fläche (B.) entsprechen, entweder

$$\text{(M.)}\qquad \begin{cases} u_2 = u_1, \\ \sqrt{S(u_2)} = -\sqrt{S(u_1)} \end{cases}$$

oder

$$\text{(M}'\text{.)}\qquad \begin{cases} u_2 = -u_1, \\ \sqrt{S(u_2)} = \pm\sqrt{S(u_1)}. \end{cases}$$

Im letzteren Falle enthält $S(u)$ nur gerade Potenzen von u.

Die Gleichungen (E.) und (F.) verwandeln sich im Falle (M.) in

$$\text{(E}'\text{.)}\qquad 2D\sqrt{S(u)} = \frac{d\log}{du}\left(\frac{A - B\sqrt{S(u)}}{A + B\sqrt{S(u)}}\right),$$

$$\text{(F}'\text{.)}\qquad \frac{K + L\sqrt{S(u)}}{K - L\sqrt{S(u)}} = \left(\frac{A - B\sqrt{S(u)}}{A + B\sqrt{S(u)}}\right)^2,$$

wenn durch die Substitution (L.)

$$\text{(4.)}\qquad -\tfrac{1}{3}G(s, z)\,dz = [C + D\sqrt{S(u)}]\,du,$$

$$\text{(5.)}\qquad P(s, z) = K + L\sqrt{S(u)}$$

wird.

Im Falle (M′.) verwandeln sich (E.) und (F.) in

$$\text{(E}''\text{.)}\qquad C + C_1 + (D \pm D_1)\sqrt{S} = \frac{d\log}{du}\left[\frac{A_1 \pm B_1\sqrt{S(u)}}{A + B\sqrt{S(u)}}\right],$$

$$\text{(F}''\text{.)}\qquad \frac{K + L\sqrt{S(u)}}{K_1 \pm L_1\sqrt{S(u)}} = \left(\frac{A_1 \pm B_1\sqrt{S(u)}}{A + B\sqrt{S(u)}}\right)^2,$$

wenn wir noch mit dem unteren Index Eins andeuten, dass u durch $-u$ ersetzt ist.

5.

Ist der Rang p der Gleichung (B.) gleich Null, so giebt es bekanntlich eine rationale Function

$$u = R(s, z)$$

von s und z von der Beschaffenheit, dass

$$(\mathrm{L}_1.) \qquad z = \psi_1(u), \quad s = \psi_2(u),$$

wo ψ_1, ψ_2 rationale Functionen von u bedeuten.

197] Die beiden Werthenpaare u_1, u_2, welche den durch die Gleichungen (K.) involutorisch conjugirten Werthenpaaren (s_1, z_1), (s_2, z_2) entsprechen, müssen alsdann offenbar gegenseitig lineare Functionen von einander sein, und zwar so, dass die Gleichung zwischen u_1 und u_2

$$(\mathrm{M}_1.) \qquad A u_1 u_2 + B(u_1 + u_2) + C = 0,$$

wo A, B, C bestimmte Constanten, in Bezug auf u_1 und u_2 symmetrisch ist.

Es sei

$$(1.) \qquad u = \frac{\lambda v + \mu}{\nu v + \varrho},$$

wo $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ Constanten, die der Beschränkung unterliegen

$$(2.) \qquad A\lambda^2 + 2B\lambda\nu + C\nu^2 = 0.$$

Sind alsdann v_1, v_2 die u_1, u_2 resp. entsprechenden Werthe von v, so geht die Gleichung (M.) in eine von der folgenden Form über

$$(3.) \qquad v_1 + v_2 + D = 0,$$

wo D eine Constante bedeutet.

Es sei endlich

$$(4.) \qquad v + \frac{D}{2} = t,$$

so verwandelt sich Gleichung (3.) in

$$(\mathrm{M}_2.) \qquad t_2 = -t_1,$$

wenn t_1, t_2 die v_1, v_2 entsprechenden Werthe von t bedeuten.

Die Gleichung ($\mathrm{L}_1.$) geht in

$$(\mathrm{L}_2.) \qquad z = \varepsilon_1(t), \quad s = \varepsilon_2(t)$$

über, während die Gleichungen (E.) und (F.) sich in

$$(\mathrm{E}_1.) \qquad \Omega(t) + \Omega(-t) = \frac{d \log}{dt}\left(\frac{\varepsilon_1'(-t)}{\varepsilon_1'(t)}\right)$$

und

$$(\mathrm{F}_1.) \qquad \frac{\Pi(-t)}{\Pi(t)} = \left(\frac{\varepsilon_1'(t)}{\varepsilon_1'(-t)}\right)^2$$

verwandeln, wenn durch die Substitution ($\mathrm{L}_2.$)

$$(5.) \qquad -\frac{1}{3} G(s, z) \frac{dz}{dt} = \Omega(t),$$

$$(6.) \qquad P(s, z) = \Pi(t)$$

wird, und wenn wir

$$(7.) \qquad \frac{dz_1(t)}{dt} = \varepsilon_1'(t)$$

setzen.

6. [198

Es seien jetzt umgekehrt (s_1, z_1), (s_2, z_2) zwei Stellen der Riemannschen Fläche (B.), welche gleichzeitig die beiden Gleichungen (E.) und (F.) befriedigen.

Ist alsdann

$$(1.) \qquad y = f(s_1, z_1)$$

ein Integral der Gleichung

$$(2.) \qquad \frac{d^2 y}{dz_1^2} + G(s_1, z_1)\frac{dy}{dz_1} + H(s_1, z_1) y = 0,$$

und fassen wir dasselbe als Function der durch die Gleichungen (E.) und (F.) mit z_1 verbundenen Variablen z_2 auf, indem wir setzen

$$(3.) \qquad \frac{dz_2}{dz_1} = X,$$

$$(4.) \qquad y = X\omega,$$

so ergiebt sich

$$(5.) \qquad X^3 \frac{d^2\omega}{dz_2^2} + \left[3X\frac{dX}{dz_1} + G(s_1, z_1) X^2\right]\frac{d\omega}{dz_2} + \left[\frac{d^2 X}{dz_1^2} + G(s_1, z_1)\frac{dX}{dz_1} + H(s_1, z_1) X\right]\omega = 0.$$

Gemäss der ersten der beiden Gleichungen (8.) in No. 1 ist

$$(6.)\qquad 3X\frac{dX}{dz_1}+G(s_1,z_1)X^3 = G(s_2,z_2)X^3$$

und

$$(7.)\qquad \frac{d^2X}{dz_1^2}+G(s_1,z_1)\frac{dX}{dz_1}+H(s_1,z_1)X = H(s_2,z_2)X^3.$$

Demnach verwandelt sich Gleichung (5.) in

$$(8.)\qquad X^3\left[\frac{d^2\omega}{dz_2^2}+G(s_2,z_2)\frac{d\omega}{dz_2}+H(s_2,z_2)\omega\right] = 0.$$

Wir erhalten also die Beziehung

$$(9.)\qquad f(s_1,z_1)\frac{dz_1}{dz_2} = Af(s_2,z_2)+B\varphi(s_2,z_2),$$

wo A, B Constanten bedeuten.

Auf dieselbe Weise ergiebt sich

$$(10.)\qquad \varphi(s_1,z_1)\frac{dz_1}{dz_2} = A'f(s_2,z_2)+B'\varphi(s_2,z_2),$$

wo A', B' Constanten sind.

199] Differentiirt man die Gleichungen (9.) und (10.) nach z_2, eliminirt $\frac{dz_1^2}{dz_2^2}$, multiplicirt alsdann mit $\frac{dz_1}{dz_2}$ und wendet abermals die Gleichungen (9.) und (10.) an, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung (E.)

$$(11.)\qquad AB'-A'B = 1.$$

Setzen wir jetzt voraus, dass

$$(12.)\qquad \frac{\varphi(s_2,z_2)}{f(s_2,z_2)} = \frac{\varphi(s_1,z_1)}{f(s_1,z_1)},$$

so folgt, dass

$$(13.)\qquad B = 0,\quad A' = 0,$$

demnach

$$(14.)\qquad A = B' = \pm 1,$$

d. h.

Solche Werthenpaare (s_1,z_1), (s_2,z_2), für welche die Gleichungen (D.), (E.), (F.) gleichzeitig erfüllt werden, befriedigen auch gleichzeitig die beiden Gleichungen (C.).

7.

Aus den vorhergehenden Entwickelungen ergiebt sich das Resultat:

Die nothwendigen Bedingungen dafür, dass alle Werthenpaare (s_1,z_1), (s_2,z_2), welche der Gleichung (D.) Genüge leisten, auch gleichzeitig die beiden Gleichungen (C'.) befriedigen, und die hinreichenden dafür, dass sie gleichzeitig die beiden Gleichungen (C.) befriedigen, sind, von dem Ausnahmefalle Gleichung (1.) No. 2 abgesehen, die folgenden:

I. Für $p > 0$.

Es muss die die Gleichung (B.) darstellende Riemannsche Fläche sich durch eine rationale eindeutig umkehrbare Substitution (L.) auf eine zweiblättrige Riemannsche Fläche $(u, \sqrt{S(u)})$ abbilden lassen, und zwar derart, dass die Gleichung

$$(A'.)\qquad \frac{d^2y}{du^2}+G'(u,\sqrt{S(u)})\frac{dy}{du}+H'(u,\sqrt{S(u)})y = 0,$$

mit in u, $\sqrt{S(u)}$ rationalen Coefficienten, welche durch die Substitution (L.) aus (A.) hervorgeht, die Eigenschaft hat, dass u^2 eine eindeutige Function des Quotienten ζ eines Fundamentalsystems von Integralen derselben werde.

Es müssen ferner die Gleichungen (E'.) und (F'.), resp. ($E^{(2)}$.) und ($F^{(2)}$.) identisch erfüllt werden, je nachdem u eine einwerthige oder eine zweiwerthige Function von ζ ist.

II. Für $p = 0$. [200

Die Gleichung

$$(A_1.)\qquad \frac{d^2y}{dt^2}+G^{(2)}(t)\frac{dy}{dt}+H^{(2)}(t)y = 0$$

mit in t rationalen Coefficienten, welche aus (A.) durch die Substitution (L_2.) hervorgeht, muss die Eigenschaft haben, dass t^2 eine einwerthige Function des Quotienten ζ eines Fundamentalsystems von Integralen derselben sei, und die Gleichungen (E_1.) und (F_1.) müssen identisch erfüllt werden.

Berlin, Juli 1886.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**
Es wurde gesetzt:
S. 429, Zeile 6 v. u. Wir bezeichnen statt Bezeichnen wir,
„ 432, Gl. (6.) $e^{t_2 \int P(s,z)^{\frac{1}{2}} dz}$ statt $e^{t_2 \int P(s,z)\, dz}$,
„ 436, Zeile 5 z statt s_1,

2) **Zu S. 428, Zeile 5, 4 v. u.** Der Sitzungsbericht der K. preuss. Akademie der Wissenschaften vom 30. Juli 1885 (XXXVIII, S. 759) enthält die folgende Angabe: »Herr FUCHS las **über eine Klasse linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung.** Die Mittheilung wird in einem der folgenden Berichte erscheinen«.
Zu den Nummern 4–7 vergl. die Abhandlung LI.

SCH.

L.

ÜBER DIE UMKEHRUNG VON FUNCTIONEN ZWEIER VERÄNDERLICHEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1887, VIII, S. 99—108; vorgetragen am 10. Februar; ausgegeben am 17. Februar 1887.)

In einer in den Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*) veröffentlichten Arbeit habe ich Differentialgleichungen der Form [99

$$(\alpha.)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dz_1}{y_1} + \frac{dz_2}{y_2} &= du_1, \\ \frac{dz_1}{w_1} + \frac{dz_2}{w_2} &= du_2 \end{aligned}\right.$$

betrachtet, und, unter der Voraussetzung, dass y_1, w_1 gegebene Functionen der Variablen z_1, und y_2, w_2 die Werthe derselben Functionen für eine Variable z_2 sind, die Bedingungen zu ermitteln gesucht, unter welchen $z_1 + z_2$ und $z_1 z_2$ eindeutige Functionen von u_1, u_2 werden.

Im Folgenden beschäftige ich mich mit denselben Gleichungen $(\alpha.)$ unter einem von dem früheren verschiedenen Gesichtspunkte. Ich setze nämlich voraus, dass z_1, z_2 gegebene Functionen von u_1, u_2 sind, und behandele zunächst die Frage, wie dieselben zu wählen sind, damit y_1, w_1 blosse Functionen der Variablen z_1, y_2, w_2 aber blosse Functionen von z_2 werden. Es ergiebt sich

*) 8. Januar 1881[1]).

[1]) Abh. XXXV, S. 239 ff. dieses Bandes. Sch.

als die allgemeinste Lösung dieses Problems, dass z_1, z_2 willkürliche Functionen sein müssen, die erstere einer Variablen ζ_1, die andere einer Variablen ζ_2, und dass ζ_1, ζ_2 den Differentialgleichungen

$$(\beta.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \zeta_1}{\partial u_1} + \zeta_2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial u_2} = 0, \\ &\frac{\partial \zeta_2}{\partial u_1} + \zeta_1 \frac{\partial \zeta_2}{\partial u_2} = 0 \end{aligned}\right.$$

zu genügen haben.

Hierauf werden die Functionen z_1, z_2 von u_1, u_2, für welche y_1, w_1 blosse Functionen von z_1 und y_2, w_2 blosse Functionen von z_2 werden, noch der
100] Bedingung unterworfen, dass $z_1 + z_2$, und $z_1 z_2$ innerhalb bestimmter Gebiete Σ_1, Σ_2 der Variablen u_1, u_2 eindeutige Functionen dieser Variablen seien. Ich werde hierdurch auf einem neuen Wege zu dem Fundamentaltheorem geführt, welches ich in meiner oben citirten Arbeit in den Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen[1]) No. 4 Gleichung (C.) gegeben, und aus welchem ich in No. 8 und No. 9 derselben Arbeit die Folgerung gezogen habe, dass z sich derart als zweiwerthige Function einer Variablen ζ darstellen lasse, dass hierdurch die Gleichungen (α) in die Form

$$(\gamma.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{\Psi(\zeta_1)}\,d\zeta_1 + \sqrt{\Psi(\zeta_2)}\,d\zeta_2 = du_1, \\ &\zeta_1\sqrt{\Psi(\zeta_1)}\,d\zeta_1 + \zeta_2\sqrt{\Psi(\zeta_2)}\,d\zeta_2 = du_2 \end{aligned}\right.$$

übergehen, wo $\Psi(\zeta)$ eine eindeutige Function der Variablen ζ bedeutet.

Ich schliesse an diese Untersuchung eine Bemerkung, welche zum Zwecke hat, das Gebiet der Variablen ζ, innerhalb dessen die Functionen z und $\Psi(\zeta)$ dieser Veränderlichen bez. zwei- und einwerthig sein müssen, näher zu bestimmen.

1.

Es mögen zwischen den veränderlichen Grössen z_1, z_2, u_1, u_2 die Gleichungen

$$(\mathrm{A.})\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dz_1}{y_1} + \frac{dz_2}{y_2} = du_1, \\ &\frac{dz_1}{w_1} + \frac{dz_2}{w_2} = du_2 \end{aligned}\right.$$

bestehen.

---

1) Abh. XXXV, S. 239 ff. dieses Bandes. Sch.

Aus denselben ergeben sich die identischen Gleichungen

$$(\mathrm{B.})\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{y_1} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial z_2}{\partial u_2}, \quad \frac{1}{y_2} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial z_1}{\partial u_2}, \\ &\frac{1}{w_1} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial z_2}{\partial u_1}, \quad \frac{1}{w_2} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial z_1}{\partial u_1}, \end{aligned}\right.$$

wenn wir

$$(1.)\qquad \lambda = \frac{\partial z_1}{\partial u_1}\frac{\partial z_2}{\partial u_2} - \frac{\partial z_1}{\partial u_2}\frac{\partial z_2}{\partial u_1}$$

setzen.

Sind z_1, z_2 bestimmte Functionen von u_1, u_2, so werden durch die Gleichungen (B.) y_1, y_2, w_1, w_2 ebenfalls als bestimmte Functionen von u_1, u_2 definirt. Demgemäss sind y_1, w_1, y_2, w_2 auch bestimmte Functionen der Variablen z_1, z_2.

Wir wollen nunmehr z_1, z_2 so als Functionen von u_1, u_2 bestimmen, [101
dass durch die Gleichungen (B.) y_1 und w_1 als blosse Functionen der Variablen z_1, dagegen y_2 und w_2 als blosse Functionen der Variablen z_2 definirt werden.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass y_1 und w_1 blosse Functionen von z_1 werden, ist das Bestehen der Gleichungen

$$(2.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial z_1}{\partial u_2} - \frac{\partial y_1}{\partial u_2}\frac{\partial z_1}{\partial u_1} = 0, \\ &\frac{\partial w_1}{\partial u_1}\frac{\partial z_1}{\partial u_2} - \frac{\partial w_1}{\partial u_2}\frac{\partial z_1}{\partial u_1} = 0 \end{aligned}\right.$$

oder, wenn wir setzen

$$(3.)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{\partial^2 z_2}{\partial u_1\,\partial u_2}\frac{\partial z_1}{\partial u_1} - \frac{\partial^2 z_2}{\partial u_1^2}\frac{\partial z_1}{\partial u_2}, \\ Q &= \frac{\partial^2 z_1}{\partial u_1^2}\frac{\partial z_2}{\partial u_2} - \frac{\partial^2 z_1}{\partial u_1\,\partial u_2}\frac{\partial z_2}{\partial u_1}, \\ R &= \frac{\partial^2 z_1}{\partial u_1\,\partial u_2}\frac{\partial z_2}{\partial u_2} - \frac{\partial^2 z_1}{\partial u_2^2}\frac{\partial z_2}{\partial u_1}, \\ S &= \frac{\partial^2 z_2}{\partial u_2^2}\frac{\partial z_1}{\partial u_1} - \frac{\partial^2 z_2}{\partial u_1\,\partial u_2}\frac{\partial z_1}{\partial u_2}. \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{C.})\qquad \left\{\begin{aligned} &(P+Q)\frac{\partial z_1}{\partial u_2}\frac{\partial z_2}{\partial u_2} - R\frac{\partial z_1}{\partial u_1}\frac{\partial z_2}{\partial u_2} - S\frac{\partial z_1}{\partial u_2}\frac{\partial z_2}{\partial u_1} = 0, \\ &(R+S)\frac{\partial z_1}{\partial u_1}\frac{\partial z_2}{\partial u_1} - P\frac{\partial z_1}{\partial u_1}\frac{\partial z_2}{\partial u_2} - Q\frac{\partial z_1}{\partial u_2}\frac{\partial z_2}{\partial u_1} = 0. \end{aligned}\right.$$

Das Grössenpaar P, Q einerseits und das Grössenpaar R, S andererseits haben die Eigenschaft, dass sie sich mit den entgegengesetzten Zeichen gegenseitig vertauschen, wenn z_1 mit z_2 vertauscht wird. Hieraus ergiebt sich, dass das Bestehen der Gleichungen (2.) oder (C.) zu gleicher Zeit die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür enthält, dass y_2 und w_2 blosse Functionen der Variablen z_2 sind.

Sind demnach die Gleichungen (C.) erfüllt, so ist

$$\text{(D.)}\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{y_1} = f_1(z_1), & \dfrac{1}{y_2} = f_2(z_2), \\[2mm] \dfrac{1}{w_1} = \varphi_1(z_1), & \dfrac{1}{w_2} = \varphi_2(z_2), \end{cases}$$

wo $f_1(z_1)$ und $\varphi_1(z_1)$ blosse Functionen von z_1, $f_2(z_2)$ und $\varphi_2(z_2)$ blosse Functionen von z_2 bedeuten.

Und wenn umgekehrt die Gleichungen (D.) bestehen, so genügen z_1, z_2 den Gleichungen (C.).

102] 2.

Es werde jetzt vorausgesetzt, dass z_1, z_2 den Gleichungen (C.) genügen, und es werde

$$\text{(E.)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\varphi_1(z_1)}{f_1(z_1)} = \dfrac{y_1}{w_1} = \zeta_1, \\[2mm] \dfrac{\varphi_2(z_2)}{f_2(z_2)} = \dfrac{y_2}{w_2} = \zeta_2 \end{cases}$$

gesetzt, nachdem y_1, y_2, w_1, w_2 durch die Gleichungen (B.) bestimmt worden.

Die Gleichungen (E.) definiren zwei Functionen ζ_1, ζ_2 bez. von z_1, z_2, welche als Functionen von u_1, u_2, den Gleichungen (B.) zufolge, die Gleichungen

$$\text{(F.)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u_1} + \zeta_2 \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u_2} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial \zeta_2}{\partial u_1} + \zeta_1 \dfrac{\partial \zeta_2}{\partial u_2} = 0 \end{cases}$$

befriedigen.

Aus den Gleichungen (E.) ergiebt sich

$$\text{(G.)}\qquad z_1 = \psi_1(\zeta_1), \quad z_2 = \psi_2(\zeta_2),$$

wo ψ_1, ψ_2 bestimmte Functionen bez. von ζ_1, ζ_2 bedeuten.

Es seien umgekehrt die beiden Functionen

$$z_1 = \psi_1(\zeta_1), \quad z_2 = \psi_2(\zeta_2)$$

bez. der Variablen ζ_1, ζ_2 vorgeschrieben und ζ_1, ζ_2 als Functionen von u_1, u_2 den Gleichungen (F.) gemäss bestimmt, so werden hierdurch auch z_1, z_2 als Functionen von u_1, u_2 definirt. Für diese Functionen z_1, z_2 werden y_1 und w_1 blosse Functionen von z_1, y_2 und w_2 blosse Functionen von z_2.

Sind nämlich $\Phi_1(z_1), \Phi_2(z_2)$ zwei beliebige Functionen von z_1, bez. z_2, so sind dieselben auch Functionen von ζ_1, bez. ζ_2, und es ergiebt sich für $\Phi_1(z_1), \Phi_2(z_2)$ als Functionen von u_1, u_2 nach den Gleichungen (F.)

$$\text{(H.)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} + \zeta_2 \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u_2} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} + \zeta_1 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u_2} = 0. \end{cases}$$

Ist insbesondere

$$\Phi_1(z_1) = z_1, \quad \Phi_2(z_2) = z_2,$$

so ergeben die Gleichungen (H.)

$$\text{(J.)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z_1}{\partial u_1} = -\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}\zeta_2, \\[2mm] \dfrac{\partial z_2}{\partial u_1} = -\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2}\zeta_1, \end{cases}$$

also [103

$$\text{(B}'\text{.)}\qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2}(\zeta_1 - \zeta_2), \\[2mm] y_1 = \dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}(\zeta_1 - \zeta_2), \qquad y_2 = -\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2}(\zeta_1 - \zeta_2), \\[2mm] w_1 = \dfrac{y_1}{\zeta_1}, \qquad w_2 = \dfrac{y_2}{\zeta_2}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (F.) ergiebt sich ferner

$$\text{(F}'\text{.)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \zeta_1}{\partial u_1 \partial u_2} = -\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial \zeta_2}{\partial u_2} - \zeta_2 \dfrac{\partial^2 \zeta_1}{\partial u_2^2}, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 \zeta_1}{\partial u_1^2} = (\zeta_1 + \zeta_2)\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial \zeta_2}{\partial u_2} + \zeta_2^2 \dfrac{\partial^2 \zeta_1}{\partial u_2^2}, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 \zeta_2}{\partial u_1 \partial u_2} = -\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial \zeta_2}{\partial u_2} - \zeta_1 \dfrac{\partial^2 \zeta_2}{\partial u_2^2}, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 \zeta_2}{\partial u_1^2} = (\zeta_1 + \zeta_2)\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial \zeta_2}{\partial u_2} + \zeta_1^2 \dfrac{\partial^2 \zeta_2}{\partial u_2^2}. \end{cases}$$

Bilden wir hiernach aus (B'.) $\frac{\partial y_1}{\partial u_1}, \frac{\partial y_1}{\partial u_2}$ und substituiren die Werthe derselben, so wie die Werthe von $\frac{\partial z_1}{\partial u_1}, \frac{\partial z_1}{\partial u_2}$ mit Berücksichtigung von (J.) in die Gleichungen (2.) No. 1, so werden dieselben identisch befriedigt, woraus hervorgeht, dass y_1 eine blosse Function von z_1 wird. Da aber

$$w_1 = \frac{y_1}{\zeta_1},$$

und da ζ_1 eine blosse Function von z_1, so folgt, dass auch w_1 eine blosse Function von z_1 darstellt. Nach No. 1 ergiebt sich alsdann, dass auch y_2 und w_2 blosse Functionen von z_2 werden. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Sind $\psi_1(\zeta_1), \psi_2(\zeta_2)$ willkürliche Functionen von ζ_1 bez. ζ_2, und ζ_1, ζ_2 Functionen von u_1, u_2, welche den Gleichungen (F.) Genüge leisten, so enthalten die Gleichungen

$$\text{(G.)} \qquad z_1 = \psi_1(\zeta_1), \quad z_2 = \psi_2(\zeta_2)$$

die sämmtlichen Functionenpaare z_1, z_2 der Variablen u_1, u_2, für welche in den Gleichungen (A.) y_1 und w_1 blosse Functionen der Variablen z_1, dagegen y_2 und w_2 blosse Functionen der Variablen z_2 darstellen.

Das Functionenpaar y_1, y_2 so wie das Functionenpaar w_1, w_2 der Variablen u_1, u_2, wie sie durch die Gleichungen (B'.) bestimmt werden, genügen den Gleichungen (H.).

104]

3.

Es sei

$$\text{(K.)} \qquad \begin{cases} z_1 = \psi + \Delta, \\ z_2 = \psi - \Delta, \\ \zeta_1 = a + D, \\ \zeta_2 = a - D, \end{cases}$$

so ergiebt sich daraus, dass in den Gleichungen (H.) z_1, z_2 an die Stelle von Φ_1, Φ_2 bez. gesetzt werden kann,

$$\text{(1.)} \qquad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} + \frac{\partial \Delta}{\partial u_1} + \zeta_2\left(\frac{\partial \psi}{\partial u_2} + \frac{\partial \Delta}{\partial u_2}\right) = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial u_1} - \frac{\partial \Delta}{\partial u_1} + \zeta_1\left(\frac{\partial \psi}{\partial u_2} - \frac{\partial \Delta}{\partial u_2}\right) = 0. \end{cases}$$

Durch Addition und Subtraction folgt aus diesen Gleichungen

$$\text{(2.)} \qquad \begin{cases} -a\frac{\partial \psi}{\partial u_2} + D\frac{\partial \Delta}{\partial u_2} = \frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \\ -a\frac{\partial \Delta}{\partial u_2} + D\frac{\partial \psi}{\partial u_2} = \frac{\partial \Delta}{\partial u_1}. \end{cases}$$

Demnach ist

$$\text{(L.)} \qquad \mu D = \varepsilon, \quad \mu a = \varepsilon',$$

wo

$$\mu = \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial u_2}\right)^2,$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \Delta}{\partial u_1}\frac{\partial \psi}{\partial u_2} - \frac{\partial \Delta}{\partial u_2}\frac{\partial \psi}{\partial u_1},$$

$$\varepsilon' = \frac{\partial \Delta}{\partial u_1}\frac{\partial \Delta}{\partial u_2} - \frac{\partial \psi}{\partial u_1}\frac{\partial \psi}{\partial u_2}.$$

Aus den Gleichungen (F.) ergiebt sich ferner

$$\text{(F}^{(2)}\text{.)} \qquad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial u_1} + a\frac{\partial a}{\partial u_2} - D\frac{\partial D}{\partial u_1} = 0, \\ \frac{\partial D}{\partial u_1} + a\frac{\partial D}{\partial u_2} - D\frac{\partial a}{\partial u_2} = 0. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (D.) und (B'.) ergiebt sich

$$\text{(B}^{(2)}\text{.)} \qquad \begin{cases} f_1(z_1) = \dfrac{1}{\frac{\partial z_1}{\partial u_2}(\zeta_1 - \zeta_2)}, \qquad f_2(z_2) = -\dfrac{1}{\frac{\partial z_2}{\partial u_2}(\zeta_1 - \zeta_2)}, \\ \varphi_1(z_1) = \zeta_1 f_1(z_1), \qquad \varphi_2(z_2) = \zeta_2 f_2(z_2). \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit $f'_k(z_k)$ und $\varphi'_k(z_k)$ bez. die Ableitungen von $f_k(z_k)$ und $\varphi_k(z_k)$ nach z_k, so folgt durch die Differentiation der Gleichungen (B$^{(2)}$.)

$$\text{(3.)} \qquad \begin{cases} f'_1(z_1) = \dfrac{1}{\frac{\partial z_1}{\partial u_1}}\dfrac{\partial}{\partial u_1}\left[\dfrac{1}{\frac{\partial z_1}{\partial u_2}(\zeta_1 - \zeta_2)}\right] = \dfrac{1}{\frac{\partial z_1}{\partial u_2}}\dfrac{\partial}{\partial u_2}\left[\dfrac{1}{\frac{\partial z_1}{\partial u_2}(\zeta_1 - \zeta_2)}\right], \\ \varphi'_1(z_1) = \dfrac{1}{\frac{\partial z_1}{\partial u_1}}\dfrac{\partial}{\partial u_1}\left[\dfrac{\zeta_1}{\frac{\partial z_1}{\partial u_2}(\zeta_1 - \zeta_2)}\right] = \dfrac{1}{\frac{\partial z_1}{\partial u_2}}\dfrac{\partial}{\partial u_2}\left[\dfrac{\zeta_1}{\frac{\partial z_1}{\partial u_2}(\zeta_1 - \zeta_2)}\right], \end{cases}$$ [105

also, wenn wir

$$\text{(M.)} \qquad \varphi_1'(z_1)f_1(z_1) - \varphi_1(z_1)f_1'(z_1) = F_1(z_1)$$

setzen,

$$\text{(4.)} \qquad F_1(z_1) = \frac{1}{y_1^2}\frac{\dfrac{\partial\zeta_1}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial z_1}{\partial u_1}} = \frac{1}{y_1^2}\frac{\dfrac{\partial\zeta_1}{\partial u_2}}{\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}}.$$

Ebenso ergiebt sich, wenn wir

$$\text{(M'.)} \qquad \varphi_2'(z_2)f_2(z_2) - f_2'(z_2)\varphi_2(z_2) = F_2(z_2)$$

setzen,

$$\text{(5.)} \qquad F_2(z_2) = \frac{1}{y_2^2}\frac{\dfrac{\partial\zeta_2}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial z_2}{\partial u_1}} = \frac{1}{y_2^2}\frac{\dfrac{\partial\zeta_2}{\partial u_2}}{\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2}}.$$

Aus (4.) und (5.) folgt alsdann

$$\text{(N.)} \qquad F_1(z_1)f_2(z_2)^3 + F_2(z_2)f_1(z_1)^3 = \frac{(\zeta_1-\zeta_2)}{y_1^2 y_2^2}\frac{\partial}{\partial u_2}(\zeta_1-\zeta_2).$$

4.

Es seien Σ_1, Σ_2 zwei wohlbestimmte Gebiete der Veränderlichen u_1, u_2 bez., innerhalb deren eine Lösung z_1, z_2 der Gleichungen (C.) existire von der Beschaffenheit, dass innerhalb derselben Gebiete ψ und Δ^2 eindeutige Functionen von u_1, u_2 darstellen. Aus den Gleichungen (L.) ergiebt sich, dass alsdann innerhalb derselben Gebiete die beiden Functionen ζ_1, ζ_2 der Variablen u_1, u_2 existiren, und dass a und D^2 ebenfalls einwerthige Functionen dieser Variablen darstellen.

Den Gebieten Σ_1, Σ_2 der Variablen u_1, u_2 mögen die Gebiete S_1, S_2 der Variablen ζ_1, ζ_2 bez. und die Gebiete T_1, T_2 der Variablen z_1, z_2 bez. entsprechen.

Es sei

$$\text{(1.)} \qquad \Delta = \sqrt{R}, \quad D = \sqrt{S},$$

so folgt aus der ersteren der Gleichungen (L.)

$$\text{(2.)} \qquad \begin{cases} \sqrt{S} = \frac{1}{2}\sqrt{R}\,T \\ \text{oder} \\ S = \frac{1}{4}RT^2, \end{cases}$$

wo [106

$$\text{(3.)} \qquad \begin{cases} T = \dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}, \\ \varepsilon_1 = \dfrac{\partial R}{\partial u_1}\dfrac{\partial\psi}{\partial u_2} - \dfrac{\partial R}{\partial u_2}\dfrac{\partial\psi}{\partial u_1}, \\ \mu_1 = R\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial u_2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial R}{\partial u_2}\right)^2. \end{cases}$$

Die Function T von u_1, u_2 ist innerhalb der Gebiete Σ_1, Σ_2 dieser Veränderlichen eindeutig. Den Gleichungen (B'.) zu Folge ist

$$\text{(4.)} \qquad \begin{cases} y_1 = 2\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}D, \\ y_2 = -2\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2}D. \end{cases}$$

Daher ist, wenn man für z_1, z_2 ihre Werthe aus (K.) substituirt

$$y_1 y_2 = -\frac{4\mu_1}{R}D^2,$$

also nach Gleichung (2.)

$$\text{(5.)} \qquad y_1 y_2 = -\mu_1 T^2.$$

Setzen wir diesen Werth in Gleichung (N.) ein, so erhalten wir

$$\text{(O.)} \quad F_1(z_1)f_2(z_2)^3 + F_2(z_2)f_1(z_1)^3 = \frac{1}{2y_1^3 y_2^3}\frac{\partial}{\partial u_2}[RT^2] = -\frac{1}{2\mu_1^3 T^6}\frac{\partial}{\partial u_2}[RT^2].$$

Die Werthsysteme u_1, u_2, für welche die Gleichung

$$\text{(P.)} \qquad \zeta_1 = \zeta_2$$

erfüllt wird, werden durch die Gleichung

$$\text{(6.)} \qquad D = 0$$

geliefert, also nach Gleichung (2.) entweder durch

$$\text{(7.)} \qquad R = 0$$

oder durch

$$\text{(7a.)} \qquad T = 0.$$

In dem Falle, für welchen Gleichung (7.) stattfindet, ergiebt sich aus (K.)

$$\text{(8.)} \qquad z_1 = z_2$$

und aus den Gleichungen (4.)

$$y_1 = y_2, \quad w_1 = w_2 \tag{8a.}$$

wenigstens für endliche Werthe von z_1, z_2.

In dem Falle, dass R von Null verschieden, dass aber die Gleichung (7a.) erfüllt ist, ergiebt sich zunächst, dass für die durch diese Gleichung verbundenen Werthsysteme von u_1, u_2 entweder z_1, z_2 vereinzelte Werthe erhalten oder die Functionen $\frac{\partial z_1}{\partial u_2}, \frac{\partial z_2}{\partial u_2}$ unendlich
107] werden, ohne dass z_1, z_2 einen unendlich grossen constanten Werth annehmen, und zwar sind alsdann $\frac{\partial z_1}{\partial u_2} T, \frac{\partial z_2}{\partial u_2} T$ von Null verschieden.

Wenn nämlich $\frac{\partial z_1}{\partial u_2}, \frac{\partial z_2}{\partial u_2}$ für die genannten Werthsysteme von u_1, u_2 endlich wären, so würde nach Gleichung (4.) auch $y_1 = 0$, $y_2 = 0$; es würden also, wenn nicht für dieselben Werthsysteme von u_1, u_2 die Grössen z_1, z_2 vereinzelt sind, die Function y_1 von z_1 und die Function y_2 von z_2 innerhalb gewisser Theile der Gebiete T_1, T_2 bez. der Variablen z_1, z_2 den constanten Werth Null annehmen.

So lange demnach u_1, u_2 sich unabhängig von einander ändern, wird die Gleichung (P.) nur befriedigt, entweder für solche vereinzelte Werthsysteme z_1, z_2, für welche

$$f_1(z_1) = \infty, \quad f_2(z_2) = \infty, \quad \varphi(z_1) = \infty, \quad \varphi(z_2) = \infty,$$

oder für solche Werthsysteme, welche die Gleichungen (8.) und (8a.) zur Folge haben.

Wenn aber die Änderungen der Variablen u_1, u_2 durch die Gleichung (7a.) von einander abhängig werden, ohne für z_1, z_2 vereinzelte Werthsysteme zu liefern, so müssen die diese Gleichung befriedigenden Werthsysteme u_1, u_2 sich so ändern, dass die Functionen $\frac{\partial z_1}{\partial u_2}, \frac{\partial z_2}{\partial u_2}$ unendlich, y_1, y_2 aber von Null verschieden werden.

Dann verschwindet aber die rechte Seite der Gleichung (N.) für dieselben Werthsysteme, und wir erhalten den folgenden Satz:

Es seien innerhalb bestimmter Gebiete Σ_1, Σ_2 der Variablen u_1, u_2 durch die Gleichungen (C.) $z_1 + z_2$ und $z_1 z_2$ als eindeutige Functionen derselben definirt, und es mögen mit T_1, T_2 die den Gebieten Σ_1, Σ_2 entsprechenden Gebiete von z_1, z_2 bez. bezeichnet

werden. Sind z_1, z_2 so beschaffen, dass die von ihnen abhängigen Functionen y_1, y_2 nicht in gewissen Theilen der Gebiete T_1, T_2 verschwinden können, so wird durch alle Werthsysteme z_1, z_2, für welche die Gleichung (P.) oder die mit ihr gleichbedeutende

$$\begin{vmatrix} f_1(z_1) & f_2(z_2) \\ \varphi_1(z_1) & \varphi_2(z_2) \end{vmatrix} = 0 \tag{P'.}$$

befriedigt wird, — ausgenommen die Werthe, für welche

$$z_1 = z_2, \quad y_1 = y_2,$$

oder die vereinzelten Werthsysteme von z_1, z_2, für welche y_1, w_1, y_2, w_2 verschwinden, — gleichzeitig die Gleichung

$$F_1(z_1) f_2(z_2)^2 + F_2(z_2) f_1(z_1)^2 = 0 \tag{Q.}$$

erfüllt. Diese Werthsysteme werden von den Functionen z_1, z_2 der Variablen u_1, u_2 nicht erreicht, so lange u_1, u_2 sich unabhängig von einander ändern.

5. [108

Der eben ausgesprochene Satz ist in Übereinstimmung mit den beiden Theoremen, welche ich in der No. 4 Theorem I. und II. der oben citirten Arbeit in den Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen[1]) gegeben habe.

Aus diesem Satze habe ich daselbst (No. 8 und No. 9) gefolgert, dass aus der Gleichung

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \zeta \tag{E.}$$

z sich als zweiwerthige Function von ζ ergiebt, sowie dass

$$\left(f(z)\frac{dz}{d\zeta}\right)^2 = \Psi(\zeta) \quad \text{und} \quad \left(\varphi(z)\frac{dz}{d\zeta}\right)^2 = \zeta^2 \Psi(\zeta)$$

einwerthige Functionen derselben Variablen sind.

Es ist nicht überflüssig, hieran eine Bemerkung zu knüpfen, um den Sinn dieser Folgerungen näher zu präcisiren.

---

[1]) Abh. XXXV, S. 239 ff. dieses Bandes. Sch.

Wenn $f(z)$, $\varphi(z)$ gegebene Functionen von z und z_1, z_2 unbeschränkt veränderliche Grössen sind, so erfüllen die Variablen u_1, u_2, welche mit diesen Veränderlichen durch die Gleichungen

$$(1.)\qquad \begin{cases} f(z_1)\,dz_1 + f(z_2)\,dz_2 = du_1 \\ \varphi(z_1)\,dz_1 + \varphi(z_2)\,dz_2 = du_2 \end{cases}$$

verbunden sind, gewisse wohldefinirte Gebiete Σ_1, Σ_2. Diesen Gebieten entsprechen Werthgebiete der Variablen ζ_1, ζ_2, die wir oben mit S_1, S_2 bezeichnet haben.

Sei S das Gebiet einer Variablen ζ, welches sich aus den Werthbereichen S_1, S_2 zusammensetzt, so ist der Sinn der erwähnten Folgerung der, dass, wenn z_1+z_2 und $z_1 z_2$ innerhalb der Gebiete Σ_1, Σ_2 der Variablen u_1, u_2 eindeutige Functionen derselben sein sollen, innerhalb des Gebietes S der Variablen ζ die Grösse z eine zweiwerthige und $\Psi(\zeta)$ eine einwerthige Function dieser Variablen sein muss.

Ausserhalb des Gebietes S existiren diese Functionen von ζ entweder gar nicht, oder wenn sie existiren, so ist es nicht erforderlich, dass sie daselbst nur zwei bez. einen Werth für jeden Werth der Variablen ζ annehmen.

Das Gleiche bleibt selbstverständlich bestehen, wenn auch die Bereiche der Veränderlichkeit für z_1, z_2 beschränkte sind.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original.

Es wurde eingefügt:

S. 445, Zeile 9 »den«,

„ 452, „ 11 »der Gebiete«.

SCH.

LI.

ÜBER EINEN SATZ AUS DER THEORIE DER ALGEBRAISCHEN FUNCTIONEN, UND ÜBER EINE ANWENDUNG DESSELBEN AUF DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1887, XI, S. 159—166; vorgetragen am 24. Februar; ausgegeben am 3. März 1887.)

In den Sitzungsberichten*) habe ich den Satz bewiesen, dass eine [159
algebraische RIEMANNsche Fläche, welche eine algebraische Involution zulässt, durch eine rationale eindeutig umkehrbare Substitution in eine zweiblättrige RIEMANNsche Fläche verwandelt werden könne. Es ist nicht überflüssig hervorzuheben, dass ich daselbst stillschweigend von der Voraussetzung ausgegangen bin, dass zwischen den Perioden πi und $a_{\mu\nu}$ der von RIEMANN in seiner Theorie der ABELschen Functionen**) eingeführten Normalintegrale erster Gattung keine Relation mit ganzzahligen Coefficienten stattfindet. Im Folgenden soll diese Voraussetzung näher erörtert werden, indem ich zeige, dass das Vorhandensein einer Involution (s, z), (σ, ζ) in einer RIEMANNschen Fläche (s, z) im Allgemeinen zur Folge hat, dass diese Fläche durch eine eindeutig umkehrbare rationale Substitution — wenn nicht in eine zweiblättrige — in eine solche RIEMANNsche Fläche (t, u) transformirbar ist, für

*) 22. Juli 1886, S. 797 [1]).

**) BORCHARDTs Journal, Bd. 54, No. 18 [2]).

[1]) Abh. XLVIII, S. 417 ff. dieses Bandes. Sch.

[2]) Riemanns Werke (1892), S. 129. Sch.

welche die Stellen (t, u) und $(-t, -u)$ der Involution (s, z), (σ, ζ) der ursprünglichen Fläche entsprechen.

Von den Resultaten der oben erwähnten Notiz*) habe ich**) eine Anwendung auf die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gemacht, indem ich die Bedingungen dafür entwickelte, dass die Werthenpaare (s_1, z_1), (s_2, z_2), welche der Gleichung

$$f(s_1, z_1)\varphi(s_2, z_2) - f(s_2, z_2)\varphi(s_1, z_1) = 0$$

genügen, zu gleicher Zeit die Differentialgleichungen

160]
$$f(s_1, z_1)\,dz_1 \pm f(s_2, z_2)\,dz_2 = 0,$$
$$\varphi(s_1, z_1)\,dz_1 \pm \varphi(s_2, z_2)\,dz_2 = 0$$

befriedigen, wenn unter $f(s, z)$, $\varphi(s, z)$ ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung verstanden wird, deren Coefficienten rationale Functionen des Ortes (s, z) einer algebraischen Riemannschen Fläche sind.

Das Wesentliche des daselbst***) gefundenen Resultats besteht in Folgendem.

Erstlich die Riemannsche Fläche (s, z), in welcher die Coefficienten der Differentialgleichung rational bestimmt sind, lässt sich durch eine rationale eindeutig umkehrbare Substitution in eine andere (t, u) von der Beschaffenheit transformiren, dass t^2, u^2 eindeutige Functionen des Quotienten ζ eines Fundamentalsystems von Integralen werden.

Zweitens sind zwei wohl definirte algebraische Gleichungen (E'.), (F'.) oder (E$^{(2)}$.), (F$^{(2)}$.) daselbst identisch zu befriedigen.

Ich benutze diese Gelegenheit zu zeigen, dass dieses Resultat vollständig erhalten bleibt, wenn auch die Voraussetzung, dass zwischen den Perioden πi und a_{kl} nicht Relationen mit ganzzahligen Coefficienten stattfinden, fallen gelassen wird.

*) Sitzungsberichte, 1886, S. 797 [1]).
**) Kroneckers Journal, Bd. 100, S. 189 [2]).
***) S. 199–200 und S. 196 Gleichungen (M.) und (M'.) [3]).

[1]) Abh. XLVIII, S. 417 ff. dieses Bandes. Sch.
[2]) Abh. XLIX, S. 427 ff. dieses Bandes. Sch.
[3]) S. 439 und S. 435 dieses Bandes. Sch.

1.

Unter der Voraussetzung, dass die durch die algebraische Gleichung

(A.) $$F(s, z) = 0$$

definirte Riemannsche Fläche eine Involution zulässt, ist in meiner oben erwähnten Notiz*) gezeigt, dass ein System linear unabhängiger Integrale erster Gattung bestimmt werden kann, deren Differentialquotienten

$$G_1(s, z),\ G_2(s, z),\ \ldots,\ G_p(s, z)$$

die Gleichung

(K.) $$G_k(s, z)\,dz = \pm G_k(\sigma, \zeta)\,d\zeta \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

befriedigen, wenn (s, z), (σ, ζ) die eine Involution bildenden Stellen bezeichnen.

Es seien

$$u_1(s, z),\ u_2(s, z),\ \ldots,\ u_p(s, z)$$

die Normalintegrale erster Gattung, wie sie von Riemann**) eingeführt worden, und

$$G_1(s, z),\ G_2(s, z),\ \ldots,\ G_\lambda(s, z)$$

diejenigen Functionen $G_k(s, z)$, für welche in den Gleichungen (K.) das obere Vorzeichen,

$$G_{\lambda+1}(s, z),\ G_{\lambda+2}(s, z),\ \ldots,\ G_p(s, z)$$

diejenigen, für welche das untere Vorzeichen gilt, so ist, wenn wir mit A_{kl} Constanten bezeichnen und

$$V_l(s, z) = \int [A_{l1} G_1(s, z) + A_{l2} G_2(s, z) + \cdots + A_{l\lambda} G_\lambda(s, z)]\,dz,$$ [161
$$W_l(s, z) = \int [A_{l,\lambda+1} G_{\lambda+1}(s, z) + A_{l,\lambda+2} G_{\lambda+2}(s, z) + \cdots + A_{lp} G_p(s, z)]\,dz$$

setzen,

(1.) $$\begin{cases} u_l(s, z) = V_l(s, z) + W_l(s, z) + \text{const.}, \\ u_l(\sigma, \zeta) = V_l(s, z) - W_l(s, z) + \text{const.} \end{cases} \qquad (l = 1, 2, \ldots, p)$$

*) Sitzungsberichte, 22. Juli 1886, S. 797 [1]).
**) Theorie der Abelschen Functionen, No. 18 in Borchardts Journal, Bd. 54 [2]).

[1]) Abh. XLVIII, S. 417 dieses Bandes. Sch.
[2]) Riemanns Werke (1892), S. 129. Sch.

Bilden wir längs der Begrenzung der einfach zusammenhangenden RIEMANNschen Fläche (s, z) das Integral

$$\int u_l(s, z)\, du_m(\sigma, \zeta),$$

so erhalten wir die Gleichung

$$\overset{ml}{B}(\pi i)^2 + \sum_1^p{}_k \overset{l}{B}_k a_{mk} \pi i - \sum_1^p{}_r a_{lr}\left[\overset{mr}{A}\pi i + \sum_1^p{}_k \overset{r}{A}_k a_{mk}\right] = 0, \tag{2.}$$

wenn wir den Zuwachs, welchen $u_m(\sigma, \zeta)$ als Function von (s, z) beim Uberschreiten der Querschnitte a_r und b_r erleidet, mit

$$\overset{mr}{A}\pi i + \sum_1^p{}_k \overset{r}{A}_k a_{mk}$$

bez.

$$\overset{mr}{B}\pi i + \sum_1^p{}_k \overset{r}{B}_k a_{mk}$$

bezeichnen, wo $\overset{mr}{A}, \overset{mr}{B}, \overset{r}{A}_k, \overset{r}{B}_k$ ganze Zahlen bedeuten.

Sollen nun zwischen πi und a_{kl} nicht Relationen mit ganzzahligen Coefficienten erfüllt werden, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$\begin{cases} \overset{r}{A}_k = 0, & \overset{mr}{B} = 0, \\ \overset{mr}{A} = 0 \text{ für } r \gtrless m, & \overset{l}{B}_k = 0 \text{ für } k \gtrless l, \quad \overset{mm}{A} = B_l, \end{cases} \tag{3.}$$

woraus sich ergiebt, dass $\overset{mm}{A}$ einen von m unabhängigen Werth erhält, den wir mit α bezeichnen wollen.

Demnach wird $u_l(\sigma, \zeta)$ als Function von (s, z) beim Überschreiten des Querschnittes a_r, dessen Index von l verschieden, sich nicht ändern, und beim Überschreiten des Querschnittes a_l den Zuwachs $\alpha\pi i$ erfahren. Es ist daher nach einem bekannten Satze

$$u_l(\sigma, \zeta) - \alpha u_l(s, z)$$

eine Constante. Da aber die Functionen $G_k(s, z)$ linearunabhängig sind, so folgt aus Gleichung (1.), dass entweder

$$\alpha = 1, \quad W_l = 0 \tag{4.}$$

oder

$$\alpha = -1, \quad V_l = 0 \tag{4a.}$$

für jeden Werth des Index l, d. h. dass für sämmtliche Gleichungen [162
(K.) gleichzeitig entweder das obere oder das untere Vorzeichen gilt.

2.

Nachdem nunmehr gezeigt ist, dass in den Gleichungen (K.) überall das nämliche Vorzeichen gilt, lässt sich der Beweis des in No. 3*) der obenerwähnten Notiz ausgesprochenen Satzes, dass man eine rationale Function von s, z bestimmen könne, welche nur in zwei Punkten der RIEMANNschen Fläche unendlich erster Ordnung wird, wesentlich vereinfachen. In der That ergiebt sich, dass alle adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Curve n^{ter} Ordnung $F(s, z) = 0$ in einem Punkte (s, z) schneiden, auch durch den Punkt (σ, ζ) derselben Curve hindurchgehen. Dann aber folgt aus einem Theoreme des Herrn NÖTHER**), dass $F(s, z) = 0$ eine hyperelliptische Curve ist.

Derselbe Satz ist in Übereinstimmung mit einem von Herrn HURWITZ***) gegebenen Theorem. Es ist nämlich unsere Involution, unter der Voraussetzung, dass in den Gleichungen (K.) überall dasselbe Vorzeichen gilt, in der Bezeichnungsweise des Herrn HURWITZ eine Werthigkeitscorrespondenz, deren Werthigkeit gleich der positiven oder der negativen Einheit ist.

3.

Ich habe schon oben hervorgehoben, dass ich in meiner oben erwähnten Notiz den daselbst†) enthaltenen Satz nur unter der Voraussetzung, dass zwischen den Periodicitätsmoduln πi und a_{kl} keine Relationen mit ganzzahligen Coefficienten bestehen, aufgestellt habe.

In dem Falle jedoch, dass solche Relationen zugelassen werden, können in den Gleichungen (K.) verschiedene Vorzeichen auftreten. Es möge unter dieser Voraussetzung und unter Anwendung der Bezeichnungsweise von No. 1

*) S. 803 [1]).

**) Mathem. Annalen, Bd. 7, S. 286.

***) Im § 14 einer in den Berichten der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, 11. Januar 1886, enthaltenen Arbeit, auf welche vor Kurzem der Herr Verfasser mich aufmerksam zu machen die Güte gehabt.

†) S. 803 [1]).

1) S. 424 dieses Bandes. Sch.

163]

$$(1.)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\sum_1^{\lambda} {}_k c_k G_k(s,z)}{\sum_{\lambda+1}^{p} {}_k e_k G_k(s,z)} &= u, \\ \frac{\sum_1^{\lambda} {}_k c'_k G_k(s,z)}{\sum_{\lambda+1}^{p} {}_k e'_k G_k(s,z)} &= t \end{aligned}\right.$$

gesetzt werden, wo c_k, c'_k, e_k, e'_k willkürliche Constanten bedeuten.

Alsdann findet zwischen t und u eine algebraische Gleichung statt

$$(2.)\qquad \Phi(t,u) = 0,$$

welche eine Curve $(2p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung repräsentirt.

Da t und u gleichzeitig für die Stelle (σ, ζ) der Riemannschen Fläche den entgegengesetzten von demjenigen Werthe besitzt, welcher in (s, z) erhalten wird, so ergiebt sich, dass die Gleichung (2.) ungeändert bleibt, wenn gleichzeitig $-t$ für t und $-u$ für u gesetzt wird.

Ist die Fläche $F(s,z) = 0$ nicht so beschaffen, dass eine rationale Function von s, z existirt, die nur in zwei Punkten der Fläche unendlich erster Ordnung wird, so sind auch umgekehrt s und z rationale Functionen von t und u*).

4.

Es seien die Functionen $f(s,z)$, $\varphi(s,z)$ des Ortes der Riemannschen Fläche

$$(1.)\qquad F(s,z) = 0$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung

$$(2.)\qquad \frac{d^2y}{dz^2} + G(s,z)\frac{dy}{dz} + H(s,z)y = 0,$$

wo $G(s,z)$, $H(s,z)$ rationale Functionen von s, z bedeuten.

Es wird verlangt, dass die Stellen $(s_1, z_1), (s_2, z_2)$, für welche

$$(3.)\qquad f(s_1,z_1)\varphi(s_2,z_2) - f(s_2,z_2)\varphi(s_1,z_1) = 0,$$

zu gleicher Zeit die beiden Gleichungen

$$(4.)\qquad \left\{\begin{aligned} f(s_1,z_1)dz_1 \pm f(s_2,z_2)dz_2 &= 0, \\ \varphi(s_1,z_1)dz_1 \pm \varphi(s_2,z_2)dz_2 &= 0 \end{aligned}\right.$$

befriedigen.

*) Vergl. Nöther, Math. Annalen, Bd. 17, S. 265.

Im Bande 100 des Journals für Mathematik*) habe ich gezeigt, dass [164 die Grössenpaare (s_1, z_1), (s_2, z_2), welche die Gleichung (3.) befriedigen, alsdann eine Involution der Riemannschen Fläche (1.) bilden und ausserdem einer gewissen daselbst mit (H.) bezeichneten wohl bestimmten algebraischen Gleichung genügen müssen**).

Für den Fall, dass zwischen den Periodicitätsmoduln πi und $a_{\mu\nu}$, welche zu der Riemannschen Fläche (1.) gehören, nicht Relationen mit ganzzahligen Coefficienten stattfinden, sind daselbst die Folgerungen hieraus gezogen worden.

Dasselbe soll hier noch für den Fall geschehen, dass derartige Relationen zugelassen werden.

Es werde unter der in den vorhergehenden Nummern vorausgesetzten Involution diejenige verstanden, welche die Lösungen der Gleichung (3.) bilden, so giebt es nach voriger Nummer die eindeutig umkehrbare rationale Substitution

$$(5.)\qquad \left\{\begin{aligned} z &= R(t,u), \\ s &= S(t,u) \end{aligned}\right.$$

von der Beschaffenheit, dass wenn

$$(6.)\qquad z_1 = R(t,u),\quad s_1 = S(t,u),$$

alsdann

$$(6a.)\qquad z_2 = R(-t,-u),\quad s_2 = S(-t,-u).$$

Wenden wir die Substitution (5.) auf die Gleichung (2.) an, so erhalten wir

$$(2a.)\qquad \frac{d^2y}{du^2} + G_1(t,u)\frac{dy}{du} + H_1(t,u)y = 0,$$

wo G_1, H_1 rationale Functionen der Variablen t, u bedeuten, welche eine Stelle in der Riemannschen Fläche

$$(1a.)\qquad \Phi(t,u) = 0$$

bezeichnen.

*) S. 189 [1]).
**) Ebenda S. 195 [2]).

[1]) Abh. XLIX, S. 427 ff. dieses Bandes. Sch.
[2]) S. 434 dieses Bandes. Sch.

Setzen wir

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{dz}{du} f(s,z) = f_1(t,u), \\ \dfrac{dz}{du} \varphi(s,z) = \varphi_1(t,u), \end{cases}$$

so bilden $f_1(t,u)$, $\varphi_1(t,u)$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung

165] $$(2b.)\quad \frac{d^2w}{du^2} + G_2(t,u)\frac{dw}{du} + H_2(t,u)w = 0,$$

welche aus (2a.) durch die Substitution

$$(8.)\quad w = y\frac{dz}{du}$$

hervorgeht, wobei $\frac{dz}{du}$ die sich aus den Gleichungen (5.) ergebende rationale Function von t, u bedeutet.

Die Gleichungen (3.) und (4.) nehmen die Gestalt an

$$(3a.)\quad f_1(t_1,u_1)\varphi_1(t_2,u_2) - f_1(t_2,u_2)\varphi_1(t_1,u_1) = 0,$$

$$(4a.)\quad \begin{cases} f_1(t_1,u_1)du_1 \pm f_1(t_2,u_2)du_2 = 0, \\ \varphi_1(t_1,u_1)du_1 \pm \varphi_1(t_2,u_2)du_2 = 0. \end{cases}$$

Es soll der Voraussetzung gemäss für die Lösungen von (3a.) sein

$$(9.)\quad t_2 = -t_1,\quad u_2 = -u_1,$$

und es sollen dadurch gleichzeitig die Gleichungen (4a.) erfüllt werden.

Die erste Forderung enthält den Satz:

I. Wenn die Lösungen der Gleichungen (3.) zu gleicher Zeit die Gleichungen (4.) befriedigen sollen, so muss es eine rationale eindeutig umkehrbare Substitution (5.) geben von der Beschaffenheit, dass t^2, u^2 eindeutige Functionen des Quotienten ζ eines Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung (2b.) oder (2.) werden.

Wir setzen nunmehr voraus, dass die erste Forderung erfüllt sei, alsdann ergiebt sich aus meiner oben erwähnten Arbeit*), wenn wir setzen

*) Bd. 100 des Math. Journals, S. 192 [1]).

[1]) S. 431 dieses Bandes. Sch.

$$(10.)\quad \begin{cases} P(t,u) = -\dfrac{3dG_2(t,u)}{du} + 9H_2(t,u) - 2G_2(t,u)^2, \\ \Delta(t,u) = e^{-\int G_2(t,u)\,du}, \end{cases}$$

als eine Consequenz der zweiten Forderung, dass die Werthenpaare $(t_1,u_1), (t_2,u_2)$, welche der Gleichung (3a.) genügen, auch die Gleichungen

$$(11.)\quad \begin{cases} \sqrt[3]{\Delta(t_2,u_2)}\,du_2 - \sqrt[3]{\Delta(t_1,u_1)}\,du_1 = 0, \\ \sqrt{P(t_2,u_2)}\,du_2 - \sqrt{P(t_1,u_1)}\,du_1 = 0 \end{cases}$$

befriedigen.

Aus meiner Arbeit*) folgt, dass das Statthaben der Gleichungen (11.) auch die genügende Bedingung dafür ist, dass die Werthenpaare, welche [166 die Gleichung (3.) befriedigen, auch die Gleichungen (4.) erfüllen.

Aus (9.) und (11.) ergeben sich aber die Gleichungen

$$(11a.)\quad \begin{cases} \sqrt[3]{\Delta(-t_1,-u_1)} + \sqrt[3]{\Delta(t_1,u_1)} = 0 \\ \sqrt{P(-t_1,-u_1)} + \sqrt{P(t_1,u_1)} = 0. \end{cases}$$

Wir erhalten also folgendes Resultat:

II. Wenn es eine Substitution von der in Satz I. angegebenen Beschaffenheit giebt, und wenn zu gleicher Zeit die Gleichungen (11a.) erfüllt sind, so werden die Werthenpaare (s_1,z_1), (s_2,z_2), welche die Gleichung (3.) erfüllen, auch stets die Gleichungen (4.) befriedigen.

Die Sätze I. und II. bestätigen, dass in dem allgemeinen Falle dasselbe Resultat gilt, welches ich in der oben erwähnten Arbeit**) für den Fall gegeben habe, dass die Riemannsche Fläche in eine zweiblättrige transformirbar ist. Es ist nämlich daselbst der Umstand, dass die transformirte Fläche eine zweiblättrige ist, unwesentlich. Das Wesentliche aber besteht darin, dass, wenn daselbst $\sqrt{S(u)} = t$ gesetzt wird, nach den Gleichungen (M.) und (M'.)***) t^2 und u^2 eindeutige Functionen von ζ werden,

*) Bd. 100 des Math. Journals, S. 198–199 [1]).
**) Ebenda S. 199–200 [2]).
***) Ebenda S. 196 [3]).

[1]) S. 437, 438 dieses Bandes. Sch.
[2]) S. 439 dieses Bandes. Sch.
[3]) S. 435 dieses Bandes. Sch.

und dass die Gleichungen (E'.), (F'.) oder (E^{∞}.), (F^{∞}.)*) befriedigt werden, welche Gleichungen mit den Gleichungen (11a.) übereinstimmen.

*) Bd. 100 des Math. Journals, S. 196[1]).

[1]) S. 435 dieses Bandes. Sch.

ANMERKUNG.

Änderung gegen das Original.
S. 461, Zeile 2 v. u. wurde t eingefügt. Sch.

LII.

BEMERKUNGEN ZU EINER NOTE DES HERRN HURWITZ, ENTHALTEN IN No. 6 JAHRG. 1887, S. 104 sqq. DER NACHRICHTEN.

(Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, No. 11, 1887, S. 345—347, Sitzung am 21. Mai.)

Herr F. Klein hat der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eine [345 Arbeit des Herrn Hurwitz über algebraische Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen, überreicht, welche in No. 6 der Nachrichten (20. April 1887, p. 85 sqq.) abgedruckt worden ist. Dieser Arbeit ist ein Nachtrag angefügt, mit welchem ein Angriff auf mich beabsichtigt ist. Indem Herr Hurwitz einen an mich adressirten Brief zum Abdruck bringt, fordert er das Urtheil des Lesers heraus, ob ich Herrn Hurwitzs Verdienste durch mein Citat in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie, 24. Februar 1887, p. 162[1]) genügend gewürdigt habe.

Wäre Herr Hurwitz hierbei stehen geblieben, so hätte ich um so weniger Veranlassung, von meiner Gewohnheit, derartige Angriffe mit Stillschweigen zu übergehen, abzuweichen, als ich ganz und gar mit Herrn Hurwitz einverstanden bin, das Urtheil über diese Frage dem Forum der vorurtheilslosen Sachverständigen zu überlassen.

Aber Herr Hurwitz hat ein Weiteres gethan, das nicht mit Stillschweigen übergangen werden darf. Er hat einige Worte aus einem auf den genannten Brief von meiner Seite erfolgten Antwortschreiben herausgegriffen und die-

[1]) S. 457 dieses Bandes. Sch.

selben an der oben genannten Stelle abdrucken lassen. Wenn es nun die gute Sitte verbietet, den Brief eines Anderen ohne Erlaubniss des Briefschreibers zu veröffentlichen, so gestattet es die gute Sitte noch weniger, 346] einige Worte eines solchen Briefes — wie man sie gerade brauchen zu können glaubt — ohne Erlaubniss der Öffentlichkeit zu übergeben.

Ich bin daher genöthigt, mein erwähntes an Herrn Hurwitz gerichtetes Antwortschreiben hier vollständig zum Abdruck zu bringen. Dasselbe lautet wie folgt:

Berlin, 26. Januar 1887.

»Ihr geschätztes Schreiben fand ich am Anfange dieses Monats vor, als ich von einer in Familienangelegenheiten unternommenen Reise zurückkehrte. Eine grosse Last von Geschäften und andere Umstände trauriger Natur haben mich indessen bis jetzt verhindert mich mit dem Gegenstande zu befassen. Entschuldigen Sie daher, dass ich mich heute damit begnüge, Ihnen meinen Dank für Ihre freundliche Mittheilung auszusprechen. Demselben füge ich aber noch eine Bitte hinzu. Ich kenne bis jetzt die von Ihnen in Ihrem Briefe angeführten Untersuchungen aus den Sitzungsberichten der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften nicht, habe auch einen Abzug derselben von Ihnen nicht erhalten. Meine Bitte geht nun dahin, Sie möchten, falls Sie noch Abzüge besitzen, mir einen derselben gütigst zusenden. Mit freundlichem Gruss

Ihr ergebener etc.«

Hieran gestatte ich mir noch eine Bemerkung zu knüpfen. Das Zartgefühl des Herrn Hurwitz in Hinsicht der Würdigung seiner Verdienste liesse erwarten, dass derselbe auf das Citiren anderer Autoren die peinlichste Sorgfalt verwendete. Es würde mich zu weit führen hier in eine Untersuchung der Frage einzutreten, in wie fern Herr Hurwitz dieser Erwartung bisher gerecht geworden ist. Es genüge daher, dass ich ein Citat desselben beleuchte, welches sich in eben derselben Arbeit des Herrn Hurwitz vom 20. April 1887, p. 92 der Nachrichten befindet.

In einer Note vom 22. Juli 1886 in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie p. 797[1]) wende ich auf die Transformation der Abelschen Integrale erster Gattung ein Verfahren an, welches ich bei einem analogen Probleme der Theorie der linearen Differentialgleichungen gegeben hatte (vergl. z. B. Borchardts Journal, Bd. 66, p. 131—138[1])). Dieses Verfahren hat durch eine Arbeit des Herrn Hamburger (Borchardts Journal, Bd. 76, p. 121), wie ich auch in meiner erwähnten Note vom 22. Juli 1886, Sitzungsberichte, p. 799[2]) citirt, eine elegante Vereinfachung erfahren. Herr Hurwitz bedient sich nun p. 92 l. c. ebenfalls für die Transformation der Abelschen Integrale meines Verfahrens, citirt aber nur die Abhandlung des Herrn Hamburger.

Aus welchem Grunde? Nun wohl aus demselben Grunde, aus welchem [347 er in seiner in Leipzig im Jahre 1881 verfassten Inauguraldissertation »Grundlagen der Theorie der elliptischen Modulfunctionen« es zu erwähnen unterlassen hat, dass ich in meiner Arbeit über die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale (Borchardts Journal, Bd. 71, p. 91[3]), 12 August 1869) und später ausführlicher in einem Briefe an Herrn Hermite (gedruckt in Borchardts Journal, Bd. 83, p. 13, Jahrg. 1876[4])) einen Beitrag zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen geliefert hatte.

1) Abh. XLVIII, S. 417 ff. dieses Bandes. Sch.

1) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 170—178. Sch.
2) S. 420 dieses Bandes. Sch.
3) Abh. VIII, Band I dieser Ausgabe, S. 241 ff. Sch.
4) Abh. XXIV, S. 85 ff. dieses Bandes. Sch.

LIII.

ÜBER RELATIONEN ZWISCHEN DEN INTEGRALEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1887, LII, S. 1077—1094; vorgelegt am 15. December; ausgegeben am 22. December 1887.)

In der Absicht, im Folgenden einige Bemerkungen mitzutheilen, [1077
welche auf Relationen zwischen den Integralen einer Differentialgleichung oder eines Systems von Differentialgleichungen sich beziehen, will ich das Integral auf eine Weise definiren, welche von der gewöhnlichen abweicht. Ist eine Differentialgleichung zwischen $z, y, \frac{dy}{dz}$ gegeben, so bezeichne ich das System zusammengehöriger veränderlicher Werthe $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$, welches der Differentialgleichung genügt, als ein Integral derselben. Dieses Integral ist in seinem Verlaufe vollständig bestimmt, wenn für einen bestimmten Werth

$$z = \alpha, \quad y = \beta, \quad \frac{dy}{dz} = \gamma$$

festgesetzt werden, oder, wie wir kurz sagen wollen, wenn seine Anfangswerthe (α, β, γ) gegeben werden.

In gleicher Weise wollen wir, wenn ein System von Differentialgleichungen

$$\frac{dy_k}{dz} = f_k(z, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben ist, das System der zusammengehörigen veränderlichen Werthe

$$\left(z, y_1, y_2, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dz}, \frac{dy_2}{dz}, \ldots, \frac{dz_n}{dz}\right),$$

welches den Differentialgleichungen genügt, ein **Integral** derselben nennen. Dasselbe ist durch ein vorgeschriebenes System $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ von Werthen

$$z = \alpha, \quad y_k = \beta_k, \quad \frac{dy_k}{dz} = \gamma_k,$$

oder kurz ausgedrückt, durch seinen **Anfangswerth** in seinem Verlaufe bestimmt.

Die Zweckmässigkeit dieser Definition wird durch den Gebrauch, welchen wir von derselben im Folgenden machen, hervortreten. Es ist jedoch schon ohne Weiteres ersichtlich, dass diese Definition deswegen der gewöhnlichen
1078] vorzuziehen ist, weil sie die Veränderlichen, welche durch die Differentialgleichung mit einander in Verbindung gesetzt werden, nicht vor einander bevorzugt. In der That kann man auch aus einem allgemeinen Satze des Herrn Poincaré*) die Folgerung ziehen, dass die abhängigen Veränderlichen und die unabhängige Veränderliche als eindeutige Functionen einer Hülfsveränderlichen darstellbar sind.

Dieses zeigt aber wieder die Nothwendigkeit, den Veränderlichen, abhängigen wie unabhängigen, in der Definition des Integrals eine gleichwerthige Stelle anzuweisen.

Die folgenden Bemerkungen haben besonders den Zweck, die in meiner Notiz**) eingeleiteten Untersuchungen über die Frage, wie die Anfangswerthe eines Integrals nichtlinearer Differentialgleichungen auf die Werthbestimmung desselben an jeder beliebigen Stelle influiren, fortzusetzen; und zwar dadurch, dass Beziehungen aufgesucht werden zwischen einem oder mehreren festen Integralen und einem oder mehreren mit willkürlichen Anfangswerthen behafteten. Die Art, wie in diese Beziehungen die Anfangswerthe eintreten, ist für die Beschaffenheit des gesuchten Einflusses entscheidend. Im Folgenden hoffen wir, zu der eben bezeichneten Frage einen kleinen Beitrag zu liefern, indem wir uns vorbehalten, an anderer Stelle in eine eingehendere Untersuchung des Problems einzutreten.

---

*) Bulletin de la Société mathématique de France, t. XI, 1883, pg. 112.

**) Sitzungsberichte d. Berl. Akad., 1884, S. 699 [1]).

---

[1]) Abh. XLIII, S. 355 ff. dieses Bandes. Sch.

Es sei mir gestattet, an meine oben erwähnte Notiz*) eine Bemerkung anzuschliessen. Diese Notiz, welche vorwiegend die Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, behandelt, hat Herrn Poincaré zu einer schönen Untersuchung über die Differentialgleichungen der genannten Art Veranlassung gegeben, welche ausführlich in den **Acta Mathematica****) veröffentlicht worden ist. Wir wollen nun bemerken, dass die Untersuchung der Differentialgleichungen **höherer** als der ersten Ordnung oder eines **Systems** von Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integrale nur feste Verzweigungspunkte besitzen, noch vollständig unberührt geblieben ist. Denn um nur einen Punkt hervorzuheben, so ist die Schlussweise, welche Herr Poincaré***) für Differentialgleichungen **erster** Ordnung anwendet, nicht ohne Weiteres auf Differentialgleichungen derselben Art und **höherer** Ordnung anwendbar.

Betrachten wir z. B. die Differentialgleichung [1079

$$(\alpha.) \qquad y\frac{d^2y}{dz^2} - \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 0.$$

Dieselbe wird befriedigt durch

$$(\beta.) \qquad y = y_0 e^{\frac{y_0'}{y_0}(z-z_0)},$$

wenn y_0, y_0' die Werthe von y, $\frac{dy}{dz} = y'$ in z_0 bezeichnen. Für $z = z_1$ ist

$$(\gamma.) \qquad y_1 = y_0 e^{\frac{y_0'}{y_0}(z_1-z_0)}, \quad y_1' = y_0' e^{\frac{y_0'}{y_0}(z_1-z_0)},$$

und umgekehrt,

$$(\delta.) \qquad y_0 = y_1 e^{\frac{y_1'}{y_1}(z_0-z_1)}, \quad y_0' = y_1' e^{\frac{y_1'}{y_1}(z_0-z_1)}.$$

Der Grund hiervon ist der, dass Mannigfaltigkeiten complexer Variablen höherer als erster Ordnung gegenseitig eindeutig auf einander bezogen sein

---

*) Sitzungsberichte d. Berl. Akad., 1884, S. 699 [1]).

**) T. VII, S. 1.

***) A. a. O., S. 12.

---

[1]) Abh. XLIII, S. 355 ff. dieses Bandes. Sch.

können, ohne gegenseitig rational ausdrückbar zu sein, wie auch schon Herr Picard*) bemerkt hat.

Besondere Schwierigkeiten verursachen auch bei den Differentialgleichungen höherer Ordnung diejenigen mit den Anfangswerthen stetig verschiebbaren singulären Punkte, in welchen die Integrale sich zwar nicht verzweigen, aber unbestimmt werden. Allein solche singuläre Punkte dürfen nicht ausgeschlossen werden, wenn nur die Verzweigungspunkte fest sein sollen.

Dass es übrigens Differentialgleichungen höherer Ordnung giebt, deren Integrale nur feste Verzweigungspunkte besitzen, und deren Integration höhere Transcendenten liefert, folgt schon aus dem Umstande, dass diejenigen Differentialgleichungen, welche durch eindeutige Functionen vollständig integrirbar sind, zu der Klasse derer gehören, deren Integrale mit den Anfangswerthen nicht verschiebbare Verzweigungspunkte haben. Dass es aber Differentialgleichungen höherer Ordnung giebt, welche durch eindeutige Functionen höherer Natur vollständig integrirbar sind, dafür hat schon Herr Picard**) das Beispiel der Differentialgleichung dritter Ordnung angeführt:

$$C^2[CC^{(3)}+3C'C^{(2)}] = (C^{(2)})^2[16C^3C^{(2)}+1], \tag{ε.}$$

1080] deren vollständiges Integral Jacobi***) vermittelst der von der unabhängigen Veränderlichen $\log q$ eindeutig abhängenden Grösse $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ gegeben hat.

1.

Wir nehmen zu unserem Ausgangspunkte eine Differentialgleichung der Form

$$F(z)\,dz + F(y)\,dy = 0, \tag{A.}$$

wo $F(z)$ eine algebraische Function von z bezeichnet.

In dem Fall, dass

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{R(z)}},$$

*) Comptes rendus de l'Acad. de Paris, Janvier 1887, p. 42.

**) A. a. O.

***) Crelles Journal, Bd. 36, S. 102–103 [1]).

[1]) Jacobis Werke, Bd. II (1882), S. 190. Sch.

$R(z)$ eine ganze rationale Function vom vierten Grade, hat bekanntlich Euler nachgewiesen, dass die Differentialgleichung algebraisch integrirbar ist, ein Satz, welcher das Additionstheorem der elliptischen Functionen lieferte.

Wir fragen nunmehr: welches wird der dem Eulerschen analoge Satz sein, wenn $F(z)$ der Differentialquotient eines Abelschen Integrals erster Gattung vom Range $p = 2$ ist.

Bezeichnen wir mit $F_1(z)$ den Differentialquotienten eines anderen zu derselben Riemannschen Fläche gehörigen Integrals erster Gattung, welches von $F(z)$ linearunabhängig ist, so ergiebt das Abelsche Theorem, dass die beiden Gleichungen

$$\int_\alpha^z F(z)\,dz + \int_{\alpha_1}^y F(y)\,dy = \int_\gamma^{z_1} F(z_1)\,dz_1 + \int_{\gamma_1}^{y_1} F(y_1)\,dy_1, \tag{1.}$$

$$\int_\alpha^z F_1(z)\,dz + \int_{\alpha_1}^y F_1(y)\,dy = \int_\gamma^{z_1} F_1(z_1)\,dz_1 + \int_{\gamma_1}^{y_1} F_1(y_1)\,dy_1, \tag{2.}$$

wo $\alpha, \alpha_1, \gamma, \gamma_1$, willkürliche, von z, y, z_1, y_1 unabhängige Grössen bedeuten, durch zwei algebraische Functionen z_1, y_1 der Veränderlichen z, y befriedigt werden. Legen wir den Constanten α, α_1 feste, bestimmte Werthe bei, so können wir die algebraischen Beziehungen zwischen z, y, z_1, y_1 in die Form setzen:

$$\gamma = G(z, y, z_1, y_1), \tag{3.}$$

$$\gamma_1 = H(z, y, z_1, y_1), \tag{4.}$$

wo G, H algebraische Functionen bedeuten.

Aus diesem Resultate können wir folgende Schlussfolgerung ziehen. [1081 Bezeichnen wir einen bestimmten der Werthe von $\frac{F(\alpha)}{F(\alpha_1)}$ mit $-\delta$ und fixiren ein Integral der Gleichung (A.) $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ durch die Anfangswerthe $(\alpha, \alpha_1, \delta)$, so ergiebt sich aus Gleichung (1.), dass jedes Werthepaar (z_1, y_1), welches aus den Gleichungen (3.) und (4.) bestimmt wird, zusammen mit dem durch Differentiation der letzteren Gleichungen — unter Voraussetzung constanter Werthe von γ, γ_1 — erhaltenen zugehörigen Werthe von $\frac{dy_1}{dz_1}$ ein neues Integral $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$ der Gleichung (A.) liefert, welches die Anfangswerthe $(\gamma, \gamma_1, \delta_1)$ besitzt. Hierbei bedeutet δ_1 den Werth von $\frac{dy_1}{dz_1}$ für

$$z = \alpha, \quad y = \alpha_1, \quad \frac{dy}{dz} = \delta, \quad z_1 = \gamma, \quad y_1 = \gamma_1.$$

Ist andererseits $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ ein Integral der Differentialgleichung

$$F_1(z)\,dz + F_1(y)\,dy = 0, \tag{A'.}$$

mit denselben Anfangswerthen wie das vorige, so ergiebt jedes Werthepaar (z_1, y_1), welches aus den Gleichungen (3.) und (4.) bestimmt wird, zusammen mit dem wie oben erhaltenen Werthe von $\frac{dy_1}{dz_1}$ ein neues Integral der Gleichung (A'.), welchem gleichfalls dieselben Anfangswerthe, wie im vorigen Falle, zukommen.

Wir können diese Schlussfolgerung kurz in dem Satze zusammenfassen:

Ist $F(z)$ der Differentialquotient eines ABELschen Integrals erster Gattung vom Range $p = 2$, so sind die Elemente eines mit beliebig vorgeschriebenen Anfangswerthen behafteten Integrals $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$ der Differentialgleichung (A.) algebraische Functionen der Elemente eines einzelnen durch seine Anfangswerthe bestimmten Integrals derselben Differentialgleichung.

Dieselben algebraischen Functionen bestimmen die Elemente eines beliebigen Integrals $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$ der Gleichung (A'.) durch diejenigen eines bestimmten Integrals $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ derselben Gleichung, wenn $F_1(z)$ ein zu derselben RIEMANNschen Fläche gehöriger von $F(z)$ linearunabhängiger Differentialquotient eines Integrals erster Gattung ist.

1082] Dieser Satz erscheint als die natürliche Ausdehnung desjenigen, welchen EULER für den Fall, dass $F(z)$ den reciproken Werth der Quadratwurzel einer ganzen rationalen Function vierten Grades darstellt, ausgesprochen hat. Und dieser Umstand rechtfertigt schon die von uns oben gegebene Definition des Integrals einer Differentialgleichung.

2.

Wir wollen nunmehr ein analoges Theorem für einen Fall entwickeln, für welchen die Differentialgleichung der allgemeineren Form

$$f\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right) = 0, \tag{B.}$$

wo f eine rationale Function der Argumente bedeutet, angehört.

Es seien ξ_1, ξ_2, ξ_3 drei eindeutige vierfach periodische Functionen der unabhängigen Variablen u_1, u_2, welche für endliche Werthe dieser Variablen den Charakter rationaler Functionen besitzen, und welche so beschaffen sind, dass unter den Periodensystemen je einer derselben sich alle Periodensysteme der beiden anderen befinden, so folgt aus einem von Herrn WEIERSTRASS*) gegebenen Satze, dass ξ_1, ξ_2, ξ_3 durch eine irreductible algebraische Gleichung mit einander verbunden sind.

Da die Ableitungen der Functionen ξ wie diese beschaffene Functionen sind und dieselben Perioden besitzen, so folgt, dass zwischen jeder Ableitung einer der Functionen ξ und zweien dieser Functionen selbst je eine irreductible algebraische Gleichung besteht. Demnach hat man

$$\left\{\begin{aligned} d\xi_1 &= A_{11}\,du_1 + A_{12}\,du_2, \\ d\xi_2 &= A_{21}\,du_1 + A_{22}\,du_2, \end{aligned}\right. \tag{1.}$$

wo A_{ik} algebraische Functionen von ξ_1, ξ_2 bedeuten. Durch Auflösung der Gleichungen (1.) möge sich

$$\left\{\begin{aligned} du_1 &= B_{11}\,d\xi_1 + B_{12}\,d\xi_2, \\ du_2 &= B_{21}\,d\xi_1 + B_{22}\,d\xi_2 \end{aligned}\right. \tag{2.}$$

ergeben. In diesen Gleichungen sind demnach B_{ik} algebraische Functionen von ξ_1, ξ_2.

Bedeuten c_1, c_2 willkürliche, von u_1, u_2 unabhängige Grössen, und setzen wir

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= \varphi_1(u_1, u_2), & \xi_2 &= \varphi_2(u_1, u_2), \\ \xi_1' &= \varphi_1(u_1 + c_1, u_2 + c_2), & \xi_2' &= \varphi_2(u_1 + c_1, u_2 + c_2), \end{aligned}\right. \tag{3.}$$

so erhält man die partiellen Ableitungen von ξ_1', ξ_2' nach den Variablen [1083
u_1, u_2, wenn man in die algebraischen Functionen von ξ_1, ξ_2, welche die entsprechenden partiellen Ableitungen von ξ_1, ξ_2 bestimmen, ξ_1', ξ_2' an die Stelle von ξ_1, ξ_2 setzt. Nach dieser Substitution möge B_{ki} mit B_{ki}' bezeichnet werden; dann ist

$$\left\{\begin{aligned} du_1 &= B_{11}'\,d\xi_1' + B_{12}'\,d\xi_2', \\ du_2 &= B_{21}'\,d\xi_1' + B_{22}'\,d\xi_2'. \end{aligned}\right. \tag{2a.}$$

*) BORCHARDTS Journal, Bd. 89, S. 7 [1]).

[1]) Weierstrass' Werke, Bd. II (1895), S. 132. Sch.

Aus den Gleichungen (2.) und (2a.) folgt

$$(4.)\qquad \begin{cases} B'_{11}\,d\xi'_1 + B'_{12}\,d\xi'_2 = B_{11}\,d\xi_1 + B_{12}\,d\xi_2, \\ B'_{21}\,d\xi'_1 + B'_{22}\,d\xi'_2 = B_{21}\,d\xi_1 + B_{22}\,d\xi_2. \end{cases}$$

Andererseits ergiebt sich aus demselben oben erwähnten Theoreme des Herrn Weierstrass, dass ξ'_1, ξ'_2 algebraisch mit ξ_1, ξ_2 verbunden sind.

Wir wollen nunmehr die Bezeichnungen dahin abändern, dass wir

$$(5.)\qquad \begin{cases} \xi_1 = z, \quad \xi_2 = y, \\ \xi'_1 = z_1, \quad \xi'_2 = y_1 \end{cases}$$

und gleichzeitig

$$(6.)\qquad \begin{cases} B_{11} = F_{11}(z, y), \quad B_{12} = F_{12}(z, y), \\ B_{21} = F_{21}(z, y), \quad B_{22} = F_{22}(z, y) \end{cases}$$

setzen. Die Gleichungen (4.) erhalten alsdann die folgende Form:

$$(7.)\qquad \begin{cases} F_{11}(z_1, y_1)\,dz_1 + F_{12}(z_1, y_1)\,dy_1 = F_{11}(z, y)\,dz + F_{12}(z, y)\,dy, \\ F_{21}(z_1, y_1)\,dz_1 + F_{22}(z_1, y_1)\,dy_1 = F_{21}(z, y)\,dz + F_{22}(z, y)\,dy. \end{cases}$$

Zwischen z, y, z_1, y_1 finden zwei algebraische Gleichungen statt. In den Coefficienten derselben treten die Werthe $\varphi_1(c_1, c_2), \varphi_2(c_1, c_2)$ algebraisch auf. Setzen wir also

$$(8.)\qquad \gamma = \varphi_1(c_1, c_2), \quad \gamma_1 = \varphi_2(c_1, c_2),$$

so können wir die obenerwähnten algebraischen Gleichungen in die Form setzen:

$$(9.)\qquad \begin{cases} \gamma = G(z, y, z_1, y_1), \\ \gamma_1 = H(z, y, z_1, y_1). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (7.) und (9.) können wir eine Schlussfolgerung ziehen, welche der in der vorigen Nummer an den Gleichungen (A.) und (A'.) und an den Gleichungen (3.) und (4.) daselbst gemachten analog ist, und wir erhalten dadurch folgenden Satz:

Ist $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ ein durch seine Anfangswerthe $(\alpha_0, \beta_0, \delta_0)$ ein für alle Mal bestimmtes Integral der Gleichung

$$(\text{B}'.)\qquad F_{11}(z, y)\,dz + F_{12}(z, y)\,dy = 0,$$

so liefern die Gleichungen (9.) unter Fixirung der Grössen [1084
γ, γ_1 die Elemente eines beliebigen andern Integrals $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$ derselben Gleichung als algebraische Functionen der Elemente $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$.

Sind (α, β, δ) die Anfangswerthe des zu bestimmenden Integrals, so sind γ, γ_1 aus den Gleichungen

$$(10.)\qquad \begin{cases} \gamma = G(\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta), \\ \gamma_1 = H(\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta) \end{cases}$$

mit der Maassgabe zu folgern, dass der durch Differentiation aus (9.) sich ergebende Werth von $\frac{dy_1}{dz_1}$ für

$$z = \alpha_0, \quad y = \beta_0, \quad \frac{dy}{dz} = \delta_0, \quad z_1 = \alpha, \quad y_1 = \beta$$

mit δ coincidirt.

Bedeutet andererseits $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ ein durch seine Anfangswerthe $(\alpha_0, \beta_0, \delta_0)$ ein für alle Mal bestimmtes Integral der Gleichung

$$(\text{B}''.)\qquad F_{21}(z, y)\,dz + F_{22}(z, y)\,dy = 0,$$

so liefern in analoger Weise die Gleichungen (9.) die Elemente eines beliebigen anderen mit vorgeschriebenen Anfangswerthen (α, β, δ) behafteten Integrals $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$ als algebraische Functionen der Elemente von $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$.

3.

Wir wollen die Gleichung (B.) in die Form setzen

$$(\text{C.})\qquad \frac{dy}{dz} = \mu = \varphi(z, y),$$

wo $\varphi(z, y)$ eine algebraische Function von z, y bedeuten soll.

Es seien

$$(\text{D.})\qquad \begin{cases} \gamma = G(z, y, z_1, y_1), \\ \gamma_1 = H(z, y, z_1, y_1) \end{cases}$$

analytische Functionen der vier Variablen z, y, z_1, y_1. Wir wollen diese Functionen folgendermaassen bestimmen. Wenn $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ irgend ein Integral der Gleichung (C.) darstellt, und wir bestimmen aus den Gleichungen (D.) [1085 unter der Voraussetzung, dass γ, γ_1 willkürliche, aber unveränderliche Werthe annehmen, $z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}$, so sollen diese Grössen ebenfalls die Elemente eines Integrals $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$ der Gleichung (C.) liefern.

Differentiiren wir die Gleichungen (D.) unter der Voraussetzung, dass γ, γ_1 feste Werthe annehmen, so folgt

$$(1.)\qquad \begin{cases} \Delta dz_1 = -C dz - D dy, \\ \Delta dy_1 = A dz + B dy, \end{cases}$$

wo

$$(2.)\qquad \begin{cases} A = \frac{\partial \gamma}{\partial z}\frac{\partial \gamma_1}{\partial z_1} - \frac{\partial \gamma}{\partial z_1}\frac{\partial \gamma_1}{\partial z}, \qquad B = \frac{\partial \gamma}{\partial y}\frac{\partial \gamma_1}{\partial z_1} - \frac{\partial \gamma}{\partial z_1}\frac{\partial \gamma_1}{\partial y}, \\ C = \frac{\partial \gamma}{\partial z}\frac{\partial \gamma_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \gamma}{\partial y_1}\frac{\partial \gamma_1}{\partial z}, \qquad D = \frac{\partial \gamma}{\partial y}\frac{\partial \gamma_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \gamma}{\partial y_1}\frac{\partial \gamma_1}{\partial y}, \\ \Delta = \frac{\partial \gamma}{\partial z_1}\frac{\partial \gamma_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \gamma}{\partial y_1}\frac{\partial \gamma_1}{\partial z_1}. \end{cases}$$

Dividiren wir die Gleichungen (1.) durch einander und setzen aus Gleichung (C.)

$$\frac{dy}{dz} = \mu = \varphi(z, y),$$

so soll unserer Forderung gemäss

$$(3.)\qquad \frac{dy_1}{dz_1} = \mu_1 = \varphi(z_1, y_1)$$

werden. Wir erhalten demnach

$$(\text{E.})\qquad A + B\mu + C\mu_1 + D\mu\mu_1 = 0.$$

Ist $\mu = \varphi(z, y)$ eine bekannte Function von z, y, also auch $\mu_1 = \varphi(z_1, y_1)$ eine bekannte Function von z_1, y_1, so ist die Gleichung (E.) in Bezug auf die Veränderlichen z, y, z_1, y_1 identisch erfüllt; sie stellt daher eine partielle Differentialgleichung dar, welcher γ, γ_1 als Functionen der unabhängigen Veränderlichen z, y, z_1, y_1 genügen müssen.

Wenn aber γ, γ_1 dieser partiellen Differentialgleichung genügen, so folgt aus den Gleichungen (1.):

$$(\text{F.})\qquad \Delta(C + D\mu)(dy_1 - \mu_1 dz_1) + (AD - BC)(dy - \mu dz) = 0.$$

Aus der Gleichung (F.) ergiebt sich:

Ist $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ ein Integral der Gleichung (C.), so ist $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$ ein Integral derselben Gleichung, wenn z_1, y_1 mit z, y durch die Gleichungen (D.) verbunden sind. [1086

4.

Aus der Gleichung (E.) ergiebt sich:

$$(1.)\qquad \mu_1 = -\frac{A + B\mu}{C + D\mu}.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung von z, y unabhängig ist, so muss dieses auch für die rechte Seite gelten. Hieraus folgt, wenn wir

$$(2.)\qquad AD - BC = \mathrm{E},$$

$$(3.)\qquad \begin{cases} \mathrm{E}\alpha_0 = C\frac{\partial A}{\partial z} - A\frac{\partial C}{\partial z}, \\ \mathrm{E}\alpha_1 = C\frac{\partial B}{\partial z} - B\frac{\partial C}{\partial z} + D\frac{\partial A}{\partial z} - A\frac{\partial D}{\partial z}, \\ \mathrm{E}\alpha_2 = D\frac{\partial B}{\partial z} - B\frac{\partial D}{\partial z} \end{cases}$$

setzen,

$$(\text{G.})\qquad \frac{\partial \mu}{\partial z} = \alpha_0 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2.$$

Bedeuten $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ diejenigen Grössen, welche aus $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ bez. hervorgehen, wenn in denselben die Differentiationen von A, B, C, D nach z durch solche nach y ersetzt werden, so ergiebt sich ebenso

$$(\text{G}_1.)\qquad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \beta_0 + \beta_1\mu + \beta_2\mu^2.$$

Differentiiren wir die Gleichung (G.) nach y und die Gleichung (G_1.) nach z, so erhalten wir durch Vergleichung der beiden Werthe von $\frac{\partial^2 \mu}{\partial z \partial y}$:

$$(\text{H.})\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \alpha_0}{\partial y} - \frac{\partial \beta_0}{\partial z} + \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 + \left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} - \frac{\partial \beta_1}{\partial z} + 2(\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2)\right]\mu \\ &\qquad + \left[\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} - \frac{\partial \beta_2}{\partial z} + (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)\right]\mu^2 = 0. \end{aligned}$$

Wenn γ, γ_1 der Gleichung (E.) Genüge leisten, so können zwei Fälle eintreten. [1087

Entweder ist nur *eine* Wurzel der Gleichung (H.) von z_1, y_1 unabhängig. Dann ist für diese Wurzel μ die Gleichung (F.) erfüllt.

Oder es sind *beide* Wurzeln der Gleichung (H.) von z_1, y_1 unabhängig. Wir bezeichnen alsdann die zweite Wurzel mit ν, und mit ν_1 diejenige Grösse, welche aus ν hervorgeht, wenn z, y bez. mit z_1, y_1 vertauscht wird. Wenn γ und γ_1 alsdann auch die Gleichung

$$(\mathrm{E}_1.) \qquad A + B\nu + C\nu_1 + D\nu\nu_1 = 0$$

erfüllen, so findet ausser der Gleichung (F.) noch die Gleichung

$$(\mathrm{F}_1.) \qquad \Delta(C+D\nu)(dy_1 - \nu_1 dz_1) + \mathrm{E}(dy - \nu dz) = 0$$

statt.

Sei im zweiten Falle $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ ein Integral der Gleichung

$$(\mathrm{C}_1.) \qquad \frac{dy}{dz} = \nu = \varphi_1(z, y),$$

so folgt aus der Gleichung $(\mathrm{F}_1.)$, dass $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$ ebenfalls ein Integral der Gleichung $(\mathrm{C}_1.)$ ist, wenn z_1, y_1 mit z, y durch die Gleichungen (D.) verbunden sind.

Einer Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dz} = \psi(z, y),$$

in welcher ψ von φ und φ_1 verschieden ist, kann dieselbe Eigenschaft nicht zukommen.

Der zweite Fall ist erfüllt in den in No. 1 und 2 gegebenen Beispielen. In No. 1 sind die Gleichungen (3.) und (4.) an Stelle der Gleichungen (D.), und die Gleichungen (A.), (A'.) bez. an die Stelle von (C.) und $(\mathrm{C}_1.)$ zu setzen; in No. 2 treten die Gleichungen (9.) an Stelle von (D.), die Gleichungen (7.) an Stelle von (F.), $(\mathrm{F}_1.)$; endlich die Gleichungen (B'.), (B''.) an Stelle von (C.) und $(\mathrm{C}_1.)$.

Die Gleichungen (D.) stellen in diesen Beispielen *algebraische* Relationen zwischen z, y, z_1, y_1 dar.

5.

Ist $z_1 = a_1$, $y_1 = b_1$ ein Werthepaar, welches den Gleichungen (D.) gemäss bei festen Werthen γ, γ_1 einem Werthepaare $z = a$, $y = b$ entspricht, und bezeichnet $\mu = \varepsilon$ einen bestimmten Werth der algebraischen Function μ [1088
von z, y für $z = a$, $y = b$, so liefert die Gleichung (E.) für die algebraische Function μ_1 von z_1, y_1 einen bestimmten Werth $\mu_1 = \varepsilon_1$.

Wenn z, y, von a, b bez. ausgehend, auf irgend welchen Wegen wieder nach a, b zurückkehren, und zu gleicher Zeit der Werth $\mu = \varepsilon$ in einen Werth $\mu = \varepsilon'$ der algebraischen Function μ von z, y für $z = a$, $y = b$ übergeführt wird, *so wird im Allgmeinen auch das Werthsystem (z_1, y_1), wie es sich aus den Gleichungen (D.) ergiebt, von den Ausgangswerthen $z_1 = a_1$, $y_1 = b_1$ verschiedene Werthe $z_1 = a_1'$, $y_1 = b_1'$ annehmen. Der nach Gleichung (E.) zugehörige Werth $\mu_1 = \varepsilon_1'$ wird im Allgemeinen von dem Ausgangswerthe $\mu_1 = \varepsilon_1$ verschieden sein, kann aber auch mit demselben übereinstimmen.*

Diese Thatsache lässt sich an dem Beispiele in No. 1 verificiren. Sei daselbst z. B.

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{R(z)}},$$

wo $R(z)$ eine ganze rationale Function sechsten Grades bedeutet, so ist

$$\mu = \frac{\sqrt{R(y)}}{\sqrt{R(z)}}$$

von den Vorzeichen von $\sqrt{R(z)}$ und $\sqrt{R(y)}$ abhängig. Die Gleichungen (3.) und (4.) daselbst, welche unsere Gleichungen (D.) vertreten, lassen sich mit Hülfe des Abelschen Theorems herleiten. Aus ihnen folgt, dass z_1, y_1 gleichermaassen von den Vorzeichen von $\sqrt{R(z)}$, $\sqrt{R(y)}$ abhängen.

Wenn es jedoch Wege V der Veränderlichen z, y giebt, welche alle die verschiedenen Werthe, deren die algebraische Function μ fähig ist, hervorbringen, und gleichzeitig die aus (D.) hervorgehenden Werthsysteme (z_1, y_1) in sich selbst zurückführen, *so können immer noch γ, γ_1 auf diesen verschiedenen Wegen verschiedene Werthe erhalten.*

Man könnte nun aber an die Functionen γ, γ_1 die specielle Forderung stellen, dass es nicht nur Wege V der eben genannten Art gebe, sondern dass auf diesen Wegen auch γ, γ_1 ihre Werthe reproduciren. Ohne hier in die Untersuchung der Möglichkeit einer solchen Bestimmung einzutreten, wollen wir nur eine Consequenz für die algebraische Function μ von z, y hervorheben, welche jene Forderung nach sich zöge.

Bringen wir die algebraische Gleichung (C.), welcher μ Genüge leistet, in die Form

$$(\alpha.) \qquad \psi_0 \mu^n + \psi_1 \mu^{n-1} + \cdots + \psi_n = 0,$$

1089] wo die ψ ganze rationale Functionen von z und y bedeuten. Sei

$$\mu = \frac{\xi}{\eta},$$

so verwandelt sich die linke Seite derselben nach Multiplication mit η^n in eine binäre Form $f(\xi, \eta)$ n^{ten} Grades. Die Function μ_1 von z_1, y_1 genügt der Gleichung

$$(\beta.) \qquad \psi_0(z_1, y_1)\mu_1^n + \psi_1(z_1, y_1)\mu_1^{n-1} + \cdots + \psi_n(z_1, y_1) = 0.$$

Setzen wir

$$\mu_1 = \frac{\xi_1}{\eta_1},$$

so wird die linke Seite dieser Gleichung nach Multiplication mit η_1^n eine binäre Form $f_1(\xi_1, \eta_1)$. Bei der speciellen Forderung, die wir bezeichnet haben, muss nach Gleichung (E.) die Substitution

$$(\gamma.) \qquad \begin{cases} \xi_1 = -\lambda(A\eta + B\xi), \\ \eta_1 = \lambda(C\eta + D\xi) \end{cases}$$

ergeben:

$$(\delta.) \qquad f_1(\xi_1, \eta_1) = \Omega f(\xi, \eta),$$

wo Ω von ξ, η, ξ_1, η_1 unabhängig ist. Da nun nach der Voraussetzung zwischen z, y, z_1, y_1 nicht Relationen stattfinden sollen, welche von den willkürlichen Constanten γ, γ_1 frei sind, so ergäbe sich aus den Gleichungen $(\gamma.)$, $(\delta.)$, dass, um der oben angegebenen speciellen Forderung zu genügen, die absoluten Invarianten der Form $f(\xi, \eta)$ von z, y unabhängig sein müssten.

6.

Es seien jetzt γ, γ_1 analytische Functionen der sechs Variablen z, y, z_1, y_1, z_2, y_2:

$$(\text{J.}) \qquad \begin{cases} \gamma = G(z, y, z_1, y_1, z_2, y_2), \\ \gamma_1 = H(z, y, z_1, y_1, z_2, y_2). \end{cases}$$

Differentiiren wir diese Gleichungen unter der Voraussetzung, dass γ, γ_1 feste Werthe haben, so folgt

$$(1.) \qquad \begin{cases} \Delta_1 dz_2 = -C_1 dz - D_1 dy - C_2 dz_1 - D_2 dy_1, \\ \Delta_1 dy_2 = A_1 dz + B_1 dy + A_2 dz_1 + B_2 dy_1, \end{cases}$$

wo

$$(2.) \qquad \begin{cases} A_1 = \dfrac{\partial\gamma}{\partial z}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial z_2} - \dfrac{\partial\gamma}{\partial z_2}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial z}, \qquad B_1 = \dfrac{\partial\gamma}{\partial y}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial z_2} - \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial y}\dfrac{\partial\gamma}{\partial z_2}, \\ C_1 = \dfrac{\partial\gamma}{\partial z}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial y_2} - \dfrac{\partial\gamma}{\partial y_2}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial z}, \qquad D_1 = \dfrac{\partial\gamma}{\partial y}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial y_2} - \dfrac{\partial\gamma}{\partial y_2}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial y}, \\ \Delta_1 = \dfrac{\partial\gamma}{\partial z_2}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial y_2} - \dfrac{\partial\gamma}{\partial y_2}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial z_2} \end{cases}$$ [1090

und A_2, B_2, C_2, D_2 aus diesen erhalten werden, wenn die Differentiationen nach z, y durch solche nach z_1, y_1 ersetzt werden.

Dividiren wir die Gleichungen (1.) durch einander und setzen, wie in No. 3,

$$(3.) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dz} = \mu = \varphi(z, y), \\ \dfrac{dy_1}{dz_1} = \mu_1 = \varphi(z_1, y_1), \\ \dfrac{dy_2}{dz_2} = \mu_2 = \varphi(z_2, y_2), \end{cases}$$

so folgt

$$\mu_2 = -\frac{(A_1 + B_1\mu)dz + (A_2 + B_2\mu_1)dz_1}{(C_1 + D_1\mu)dz + (C_2 + D_2\mu_1)dz_1}.$$

Es mögen nun γ, γ_1 als Functionen der unabhängigen Veränderlichen z, y, z_1, y_1, z_2, y_2 den beiden partiellen Differentialgleichungen

$$(\text{K.}) \qquad \begin{cases} A_1 + B_1\mu + C_1\mu_2 + D_1\mu\mu_2 = 0, \\ A_2 + B_2\mu_1 + C_2\mu_2 + D_2\mu_1\mu_2 = 0 \end{cases}$$

Genüge leisten.

Aus den Gleichungen (1.) und (K.) ergiebt sich dann die Identität

$$\text{(L.)}\quad \Delta_1(dy_2-\mu_2 dz_2)-(B_1+D_1\mu_2)(dy-\mu dz)-(B_2+D_2\mu_2)(dy_1-\mu_1 dz_1) = 0.$$

Sind demnach $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$, $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$ Integrale der Gleichung (C.), so ist auch $\left(z_2, y_2, \frac{dy_2}{dz_2}\right)$ ein Integral der Gleichung (C.), wenn $z_2, y_2, \frac{dy_2}{dz_2}$ mit den Elementen der beiden ersten Integrale durch die Gleichungen (J.) verbunden sind, in welchen γ, γ_1 feste Werthe erhalten.

1091]

7.

Zu einer anderen Kategorie von Relationen gelangen wir, wenn wir vier analytische Functionen $\gamma. \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ der Veränderlichen z, y, z_1, y_1, z_2, y_2:

$$\text{(M.)}\qquad \gamma_k = G_k(z, y, z_1, y_1, z_2, y_2) \qquad (k=0,1,2,3)$$

betrachten.

Differentiiren wir diese Gleichungen unter der Voraussetzung, dass die Grössen γ_k feste Werthe haben, so ergiebt sich

$$\text{(1.)}\qquad \begin{cases} Zdz_1 = E_1 dz + F_1 dy, \quad Zdz_2 = E_2 dz + F_2 dy, \\ Zdy_1 = G_1 dz + H_1 dy, \quad Zdy_2 = G_2 dz + H_2 dy, \end{cases}$$

wo Z, E_1, F_1 u. s. w., sich aus den ersten partiellen Ableitungen der Functionen G_k zusammensetzen.

Bestimmen wir die Functionen γ_k der unabhängigen Veränderlichen z, y, z_1, y_1, z_2, y_2 so, dass sie den partiellen Differentialgleichungen

$$\text{(N.)}\qquad \begin{cases} G_1 + H_1\mu - E_1\mu_1 - F_1\mu\mu_1 = 0, \\ G_2 + H_2\mu - E_2\mu_2 - F_2\mu\mu_2 = 0 \end{cases}$$

Genüge leisten, so ergiebt sich aus (1.)

$$\text{(O.)}\qquad \begin{cases} Z(dy_1-\mu_1 dz_1) = (H_1-\mu_1 F_1)(dy-\mu dz), \\ Z(dy_2-\mu_2 dz_2) = (H_2-\mu_2 F_2)(dy-\mu dz). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

Ist $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ ein Integral der Gleichung (C.) und sind

$$z_1,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dz_1},\quad z_2,\ y_2,\ \frac{dy_2}{dz_2}$$

mit den Elementen desselben durch die Gleichungen (M.) verbunden, so sind $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$, $\left(z_2, y_2, \frac{dy_2}{dz_2}\right)$ ebenfalls Integrale der Gleichung (C.), wenn die Functionen γ_k den partiellen Differentialgleichungen (N.) Genüge leisten.

Man erkennt, wie die Untersuchung fortzusetzen ist, um Relationen zwischen einer beliebigen Anzahl von Integralen der Differentialgleichung (C.) zu erlangen.

8.

Wir wollen zum Beschluss noch zeigen, wie die vorhergehenden Betrachtungen auf ein System von Differentialgleichungen auszudehnen sind, indem wir uns auf ein System von zwei Differentialgleichungen

$$\text{(P.)}\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dz} = \mu = \varphi(z, y, v), \\[2mm] \dfrac{dv}{dz} = \nu = \psi(z, y, v) \end{cases}$$ [1092

beschränken.

Es seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ drei analytische Functionen der Veränderlichen z, y, v, z_1, y_1, v_1:

$$\text{(Q.)}\qquad \gamma_k = G_k(z, y, v, z_1, y_1, v_1), \qquad (k=1,2,3)$$

so ergiebt sich aus diesen Gleichungen, wenn sie unter Fixirung von $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ differentiirt werden,

$$\text{(1.)}\qquad \begin{cases} Hdz_1 = P_1 dz + P_2 dy + P_3 dv, \\ Hdy_1 = Q_1 dz + Q_2 dy + Q_3 dv, \\ Hdv_1 = R_1 dz + R_2 dy + R_3 dv, \end{cases}$$

wo H, P_k, Q_k, R_k sich aus den ersten partiellen Ableitungen der Functionen G_k zusammensetzen.

Wir bestimmen die Functionen G_k der unabhängigen Veränderlichen z, y, v, z_1, y_1, v_1 so, dass sie den partiellen Differentialgleichungen

$$\text{(R.)}\qquad \begin{cases} Q_1 + Q_2\mu + Q_3\nu - \mu_1(P_1 + P_2\mu + P_3\nu) = 0, \\ R_1 + R_2\mu + R_3\nu - \nu_1(P_1 + P_2\mu + P_3\nu) = 0 \end{cases}$$

Genüge leisten, wenn wir

$$\text{(2.)}\qquad \begin{cases} \mu_1 = \varphi(z_1, y_1, v_1), \\ \nu_1 = \psi(z_1, y_1, v_1) \end{cases}$$

setzen. Aus den Gleichungen (1.) und (R.) ergeben sich die Identitäten:

$$(S.)\quad \begin{cases} (P_1+P_2\mu+P_3\nu)\,H(dy_1-\mu_1 dz_1) = (\alpha_2-\nu\alpha_1)(dy-\mu dz)+(-\alpha_3+\mu\alpha_1)(dv-\nu dz), \\ (P_1+P_2\mu+P_3\nu)\,H(dv_1-\mu_1 dz_1) = (\beta_2-\nu\beta_1)(dy-\mu dz)+(-\beta_3+\mu\beta_1)(dv-\nu dz), \end{cases}$$

wo

$$\alpha_1 = P_2Q_3-P_3Q_2,\quad \alpha_2 = P_3Q_1-P_1Q_3,\quad \alpha_3 = P_1Q_2-P_2Q_1,$$

und wo $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ bez. aus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ hervorgehen, wenn Q_1, Q_2, Q_3 bez. durch R_1, R_2, R_3 ersetzt werden. Aus den Gleichungen (S.) ergiebt sich:

Ist $\left(z, y, v, \frac{dy}{dz}, \frac{dv}{dz}\right)$ ein Integral der Gleichungen (P.), so ist auch
1093] $\left(z_1, y_1, v_1, \frac{dy_1}{dz_1}, \frac{dv_1}{dz_1}\right)$ ein Intgral derselben Gleichungen, wenn z_1, y_1, v_1, z, y, v durch die Gleichungen (Q.) verbunden sind, worin $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ feste Werthe erhalten; vorausgesetzt, dass G_1, G_2, G_3 den partiellen Differentialgleichungen (R.) Genüge leisten.

9.

Zu den Relationen voriger Nummer liefern die Differentialgleichungen

$$(P'.)\qquad \begin{cases} \psi_1(z,\sigma)\,dz+\psi_1(y,\tau)\,dy+\psi_1(v,\chi)\,dv = 0, \\ \psi_2(z,\sigma)\,dz+\psi_2(y,\tau)\,dy+\psi_2(v,\chi)\,dv = 0 \end{cases}$$

ein einfaches Beispiel, wenn

$$(1.)\qquad F(\xi,\eta) = 0$$

eine algebraische Gleichung vom Range $p = 3$, und $\psi_1(\xi,\eta)$, $\psi_2(\xi,\eta)$ zwei linearunabhängige Differentialquotienten von den zugehörigen Integralen erster Gattung bedeuten.

Ist nämlich $\psi_3(\xi,\eta)$ ein dritter, von ψ_1, ψ_2 linearunabhängiger Differentialquotient eines Integrals erster Gattung, und bezeichnen wir mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ drei bestimmte, mit $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ drei willkürlich wählbare Stellen in der zu Gleichung (1.) gehörigen Riemannschen Fläche, so wird nach dem Abelschen Theorem das System der Gleichungen

$$(2.)\quad \begin{cases} \int_{\varepsilon_1}^{(z,\sigma)}\psi_k(z,\sigma)\,dz+\int_{\varepsilon_2}^{(y,\sigma)}\psi_k(y,\tau)\,dy+\int_{\varepsilon_3}^{(v,\chi)}\psi_k(v,\chi)\,dv \\ = \int_{\gamma_1}^{(z_1,\sigma_1)}\psi_k(z_1,\sigma_1)\,dz_1+\int_{\gamma_2}^{(y_1,\tau_1)}\psi_k(y_1,\tau_1)\,dy_1+\int_{\gamma_3}^{(v_1,\chi_1)}\psi_k(v_1,\chi_1)\,dv_1 \quad (k=1,2,3) \end{cases}$$

durch drei algebraische Functionen z_1, y_1, v_1 von $z, y, v, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ befriedigt.

Bringen wir diese auf die Form:

$$(Q'.)\qquad \gamma_k = G_k(z, y, v, z_1, y_1, v_1), \qquad (k=1,2,3)$$

so ist für constante Werthe von $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ identisch

$$(S'.)\qquad \begin{aligned} &\psi_k(z_1,\sigma_1)\,dz_1+\psi_k(y_1,\tau_1)\,dy_1+\psi_k(v_1,\chi_1)\,dv_1 \\ &\quad = \psi_k(z,\sigma)\,dz+\psi_k(y,\tau)\,dy+\psi_k(v,\chi)\,dv. \qquad (k=1,2) \end{aligned}$$

Ist also $\left(z, y, v, \frac{dy}{dz}, \frac{dv}{dz}\right)$ ein Integral des Systems (P'.), so ist auch [1094
$\left(z_1, y_1, v_1, \frac{dy_1}{dz_1}, \frac{dv_1}{dz_1}\right)$ ein Integral derselben Gleichungen, zu welchem $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ als Anfangswerthe gehören.

Selbstverständlich bestehen dieselben Relationen (Q'.) auch für zusammengehörige Integrale derjenigen Differentialgleichungen, welche aus (P'.) hervorgehen, wenn ψ_1, ψ_2 durch die Differentialquotienten eines anderen Paares von Integralen erster Gattung ersetzt werden.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 468, Zeile 14 unabhängige Veränderliche statt unabhängigen Veränderlichen,
„ „, „ 4 v. u. Beschaffenheit statt Beantwortung,
„ 472, „ 11 v. u. ist statt bedeutet,
„ 478, „ 4 die statt diese,
„ 482, Gl. (O.) $H_1-\mu_1F_1$ statt $H_2-\mu_1F_1$ und $H_2-\mu_2F_2$ statt $H_2-\mu_2F_1$.

2) Die Bemerkung S. 470, Zeile 3—7 implicirt den Satz, dass für eine Differentialgleichung erster Ordnung keine mit den Anfangswerthen verschiebbaren singulären Stellen der Integrale auftreten können, in denen die Integrale unbestimmt werden. Für diesen Satz hat Herr Painlevé einen Beweis geliefert. (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1888, vergl. auch Picard, Traité d'Analyse, t. II, 1893, S. 328 (2. Aufl. 1905, S. 371), t. III, 1896, S. 43 und Painlevé, Leçons sur la théorie des équations différentielles, professées à Stockholm, Paris 1897, S. 23, 56 ff.) Sch.

BERICHTIGUNGEN.

S. 29, Gl. (2.) ist $A_{n-1,1}y_1+A_{n-1,2}y_2$ statt $A_{n1}y_1+A_{n2}y_2$ zu setzen (Druckfehler des Originals),
„ „, letzte Zeile ist zu lesen $\eta=A_{01}y_1+A_{02}y_2$,
„ 150, Zeile 17 ist vor »présentent« einzuschalten »se«,
„ 337, „ 5 ist »in« statt »ist« zu setzen.

Sch.

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kästner).