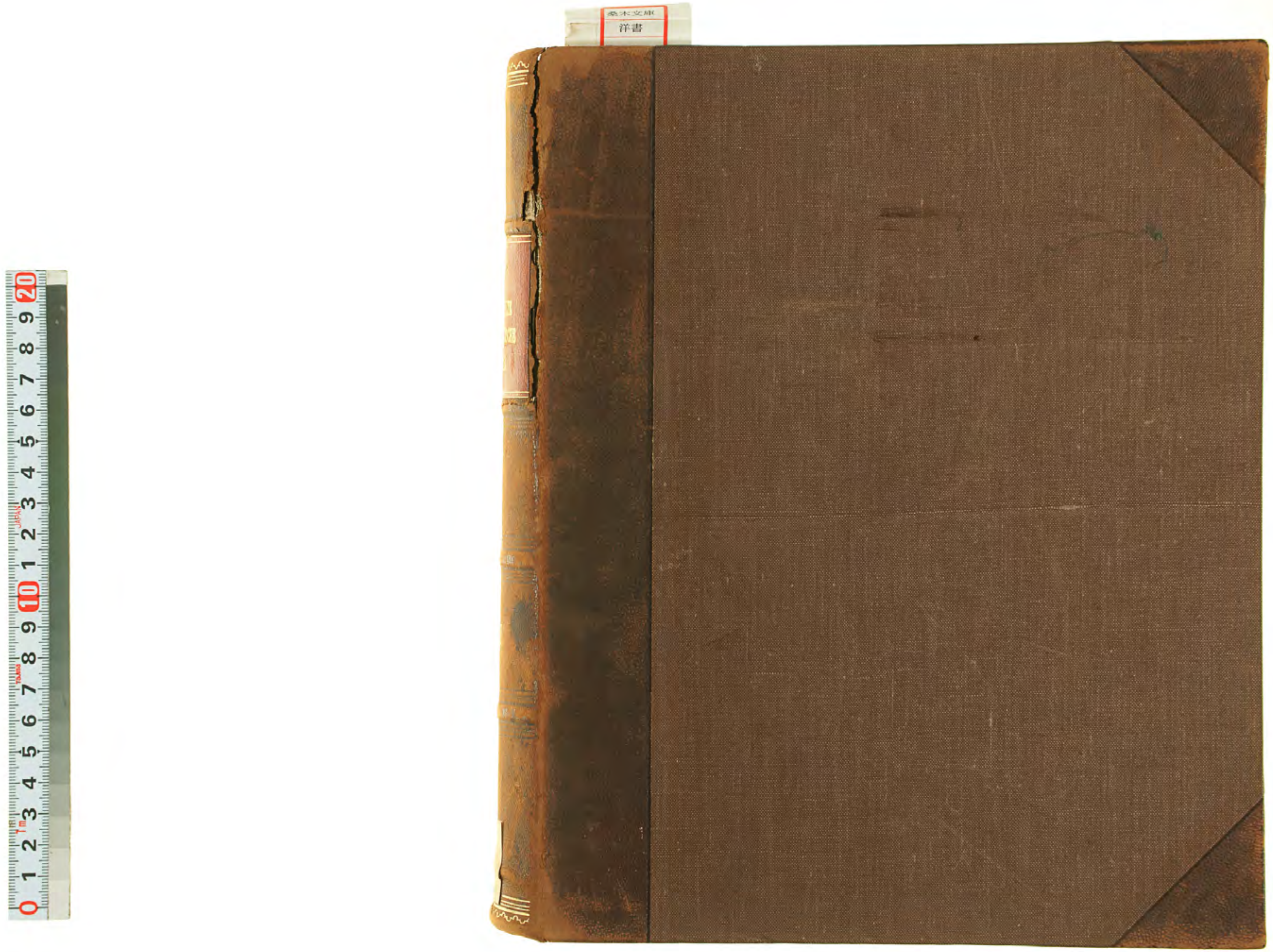
桑木文庫
洋書

物理
08
F
62

九州帝國大學理學部
8281
物理學教室

九州帝國大學工學部
809539
1930年9月23日
數學物理學教室

桑木文庫
洋書
0350

理学部 洋 遡及
022232002005092
九州大学蔵書

物理
08
F
62

貴重書

GESAMMELTE MATHEMATISCHE WERKE

VON

L. FUCHS.

物理
08
F
63

GESAMMELTE
MATHEMATISCHE WERKE

VON

L. FUCHS.

HERAUSGEGEBEN

VON

RICHARD FUCHS UND LUDWIG SCHLESINGER
IN BERLIN. IN KLAUSENBURG.

ZWEITER BAND:

ABHANDLUNGEN (1875—1887)

REDIGIRT

VON

L. SCHLESINGER.

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1906.

物理
08
F
6-2

九州帝國大學圖書之印

Alle Rechte vorbehalten, einschliesslich des Übersetzungsrechtes.

九州帝國大學
昭19. 4. 25
130621
圖書

九州帝國大學圖書

VORWORT.

Der vorliegende zweite Band der mathematischen Werke von L. Fuchs enthält die fünfunddreissig in der Zeit von Ostern 1875 bis Ende des Jahres 1887 veröffentlichten Abhandlungen. Die redactionelle Arbeit wurde in derselben Weise wie beim ersten Bande ausgeführt.

Bei der sachlichen Revision der einzelnen Abhandlungen sowie bei der Correctur des ganzen Bandes hat mich mein Freund L. Heffter in gleich wirkungsvoller Weise wie beim ersten Bande unterstützt. Ferner hat Herr M. Krause die grosse Güte gehabt, eine Correctur der Abhandlungen XXVI, XXVII, XXVIII zu lesen und meine diesen Abhandlungen hinzugefügten Anmerkungen einer Prüfung zu unterziehen. Die in diesem Bande besonders zahlreichen in französischer Sprache geschriebenen Arbeiten (XXI, XXII, XXIV, XXVI, XXVIII, XXXII, XXXIVa, XXXVI, XXXVII, XLII) hat mein Freund H. Vogt hauptsächlich in sprachlicher Hinsicht revidirt. Der andere Herausgeber Herr Richard Fuchs und Herr H. Lemke haben je eine Correctur der Druckbogen gelesen. Allen genannten Herren sei auch an dieser Stelle für ihre werthvolle Mitarbeit der herzlichste Dank der Herausgeber ausgesprochen.

Ein Wiederabdruck der im Bulletin des Sciences mathématiques erschienenen von Herrn C. Stéphanos herrührenden französischen Übersetzungen der Abhandlungen XXXI und XXXV wurde unterlassen, dagegen schien es geboten, die von Fuchs selbst verfasste französische Redaction der beiden Ab-

物理
08
F
62

handlungen XXXIII und XXXIV unverkürzt wiederzugeben (Abh. XXXIVa). Aus den mir von Frau Geheimräthin FUCHS anvertrauten, an FUCHS gerichteten Briefen von CH. HERMITE konnte ich in den Anmerkungen zu den Abhandlungen XXIV und XXVI einige für die Entstehungsgeschichte dieser Arbeiten wichtige Auszüge mittheilen.

Klausenburg, 5. Mai 1906.

L. SCHLESINGER.

INHALTS-VERZEICHNISS.

物理
08
F
6?

物理
08
F
62

XIX.

ÜBER DIE LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG, WELCHE ALGEBRAISCHE INTEGRALE BESITZEN, UND EINE NEUE ANWENDUNG DER INVARIANTENTHEORIE.

(Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.-A.-Universität, Göttingen 1875, No. 21, 1. September 1875, Sitzung am 7. August, S. 568—581 und No. 23, 17. November 1875, Sitzung am 6. November, S. 612—613.)

Der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften beehre ich mich im [568 Folgenden von den Resultaten einer Arbeit Mittheilung zu machen, welche nächstens in Borchardts Journal für reine und angewandte Mathematik erscheinen wird.

1.

Besitzt eine irreductible Gleichung

$$A_m u^m + A_{m-1} u^{m-1} + \cdots + A_0 = 0, \tag{1.}$$

wo $A_0, A_1, \ldots, A_m$ rationale Functionen von z sind, zwei Wurzeln, deren Quotient j eine rationale Function von z ist, so ist j eine ganzzahlige Wurzel der Einheit.

Ist j eine primitive λ^{te} Wurzel der Einheit, so ist λ ein Divisor von m, und es ist

$$A_{m-i} = 0$$

wenn nicht $i \equiv 0$, mod. λ.

Es werde vorausgesetzt, dass die Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p_1 \frac{du}{dz} + p_0 u = 0, \tag{A.}$$ [569

物理
08
F
69

wo p_1, p_0 rationale Functionen von z sind, ein algebraisches Integral u besitzt, und es sei (1.) die irreductible Gleichung, welcher u genügt, alsdann sind die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (1.) Integrale der Differentialgleichung (A.).

Wenn unter der Voraussetzung des vorigen Satzes die Gleichung (1.) zwei Wurzeln besitzt, deren Quotient nicht für jeden Werth von z constant ist, so hat die Differentialgleichung (A.) nur algebraische Integrale.

Ist aber der Quotient je zweier Wurzeln der Gleichung (1.) constant, so ist ein Integral der Differentialgleichung (A.) eine Wurzel einer rationalen Function.

Die Beurtheilung, ob eine lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten durch eine Wurzel einer rationalen Function befriedigt werden kann, wird in jedem Falle auf die Frage zurückgeführt, unter welchen Umständen ein gegebenes System linearer Gleichungen endliche Lösungen besitzt.

Die weitere Untersuchung beschäftigt sich mit der Frage, unter welchen Umständen die lineare Differentialgleichung (A.) algebraische Integrale besitzt, welche nicht Wurzeln einer rationalen Function sind.

Sind die Integrale der Differentialgleichung (A.) sämmtlich algebraisch, so gehört sie zu der Klasse der Differentialgleichungen (12.) No. 4 meiner Arbeit in BORCHARDT's Journal Band 66[1]), und es ist

570] (2.) $$p_1 = \sum_1^{\varrho}{}_a \frac{\alpha_a}{z-a_a}, \qquad p_0 = \sum_1^{\varrho}{}_a \left\{ \frac{\beta_a}{(z-a_a)^2} + \frac{\gamma_a}{z-a_a} \right\},$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ die singulären Punkte bedeuten, und

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\varrho = 0.$$

Wir substituiren:

(3.) $$u = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}\alpha_1}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}\alpha_2} \ldots (z-a_\varrho)^{-\frac{1}{2}\alpha_\varrho} y,$$

und erhalten für y die Differentialgleichung:

(B.) $$\frac{d^2 y}{dz^2} = Py,$$

wo

$$P = \frac{1}{4} p_1^2 + \frac{1}{2} \frac{dp_1}{dz} - p_0.$$

1) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 159 ff. Sch.

Die beiden Wurzeln der zu irgend einem singulären Punkte a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.) ergänzen sich zur positiven Einheit, während die beiden Wurzeln der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung zusammen die negative Einheit ergeben.

Sind die Wurzeln der zu irgend einem singulären Punkte a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (A.) ratio- [571
nale Zahlen, so sind α_i und β_i ebenfalls rationale Zahlen.

Sind die Integrale der Differentialgleichung (A.) sämmtlich algebraisch, so sind auch die Integrale der Differentialgleichung (B.) sämmtlich algebraisch.

Sind umgekehrt die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch, und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ rationale Zahlen, so sind auch die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (A.) algebraisch.

2.

Durch einen beliebigen Umlauf von z gehen die Glieder eines Fundamentalsystems von Integralen y_1, y_2 der Differentialgleichung (B.) resp. über in:

(1.) $$\begin{cases} y_1' = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2, \\ y_2' = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2. \end{cases}$$

Die Determinante Δ der Substitution

(2.) $$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

ist gleich der positiven Einheit.

Bildet man eine Form $f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$ d. h. eine ganze homogene Function der beiden Grössen y_1, y_2 mit den constanten Coefficienten $a, b, c, \ldots$, und ist $\varphi(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$ eine Covariante dieser Form, so folgt, dass [572
dieselbe durch die Substitution (2.), durch welche die Form

$$f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$$

in

$$f(y_1, y_2, A, B, C, \ldots)$$

übergehe, sich genau in $\varphi(y_1, y_2, A, B, C, \ldots)$ verwandelt.

Wenn $f(y_1, y_2)$ durch irgend einen Umlauf von z in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten übergeht, so wird sich nach demselben Umlauf

物理 08 F

jede Covariante dieser Form ebenfalls in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten verwandeln.

Ist $f(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function von z, so ist jede Covariante derselben ebenfalls Wurzel einer rationalen Function von z.

Wenn die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch sind, so ist jedes Integral derselben eine rationale Function von z und einem beliebigen anderen Integrale derselben Differentialgleichung.

Ist y ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B.), welches nach einem gewissen Umlaufe von z in yj übergeht, wo j eine primitive l^{te} Wurzel der Einheit sei, und setzt man

$$\psi(y^l) = c_0 + c_l y^l + c_{2l} y^{2l} + \cdots + c_{\left(\frac{m}{l}-1\right)l}\, y^{\left(\frac{m}{l}-1\right)l},$$

wo $c_0, c_l, c_{2l}, \ldots$ rationale Functionen von z sind, so hat jedes Integral die Form

$$(3.)\qquad (\alpha + \beta c_1) y + \beta y^{l-1} \psi(y^l),$$

573] wo α, β Constanten und c_1 ebenfalls constant, wenn $l > 2$.

Ist $F(y)$ ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B.) von der Beschaffenheit

$$(4.)\qquad F(yj^k) = \varepsilon F(y),$$

wo ε eine Constante ist, so ist

$$\varepsilon = j^{-k},$$

und wenn k nicht $\equiv 0$, mod. l sein soll, entweder

$$F(y) = \beta' y^{l-1} \psi(y^l)$$

oder l gerade und $k \equiv \frac{l}{2}$, mod. l.

Ist

$$(5.)\qquad F(y) = \beta' y^{l-1} \psi(y^l),$$

so sind die Glieder der Reihe

$$(6.)\qquad F(y),\ F(yj),\ \ldots,\ F(yj^{l-1})$$

nur um constante Factoren von einander verschieden.

Ist $F(y)$ ein beliebiges Integral, welches nicht die Form (5.) hat, l eine ungerade Zahl, so ist kein Glied der Reihe (6.) gleich einem anderen mit einem constanten Factor multiplicirt.

Ist aber l eine gerade Zahl, so ist kein Glied der Reihe [574

$$(7.)\qquad F(y),\ F(yj),\ \ldots,\ F\left(yj^{\frac{l}{2}-1}\right)$$

gleich einem anderen mit einem constanten Factor multiplicirt. Dagegen ist:

$$(8.)\qquad F\left(yj^{\frac{l}{2}+i}\right) = -F(yj^i).$$

Der Grad der irreductiblen Gleichung, welcher ein Integral der Differentialgleichung (B.) genügt, ist für alle Integrale unverändert derselbe. Dieser Grad kann also als der zur Differentialgleichung (B.) gehörige bezeichnet werden.

Den Complex der Wurzeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der irreductiblen Gleichung m^{ten} Grades, welcher y_1 genügt, die so beschaffen sind, dass nicht der Quotient zweier derselben gleich einer Einheitswurzel ist, nennen wir das **reducirte Wurzelsystem** der Gleichung.

Ist $n < m$, so sind die übrigen Wurzeln gleich einer des reducirten Wurzelsystems mit einer Einheitswurzel multiplicirt. Sind diese Factoren

$$j, j_1, j_2, \ldots \quad \text{resp.} \quad l^{\text{te}}, l_1^{\text{te}}, l_2^{\text{te}}, \ldots$$

primitive Wurzeln der Einheit und l die grösste unter den Zahlen $l, l_1, l_2, \ldots$, so liefert das System:

$$(9.)\qquad y_i,\ y_i j,\ y_i j^2,\ \ldots,\ y_i j^{l-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

die sämmtlichen Wurzeln der irreductiblen Gleichung.

Diese Zahl l nennen wir den **Index** des reducirten Wurzelsystems [575 oder der irreductiblen Gleichung, und man hat

$$(10.)\qquad m = nl.$$

Wenn durch irgend einen Umlauf von z zwei Glieder y_i, y_k desselben reducirten Wurzelsystems resp. in $y_{i'} j^{\alpha}, y_{k'} j^{\beta}$ übergehen, wo $y_{i'}, y_{k'}$ Glieder desselben reducirten Wurzelsystems sind, und sind i und k verschieden, so sind auch i' und k' verschieden.

3.

Es sei η ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B.), $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ das reducirte Wurzelsystem der irreductiblen Gleichung m^{ten} Grades, welcher

物理 08 F 62

η genügt, und es sei

$$\eta_i = A_{i1} y_1 + A_{i2} y_2, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{1.}$$

wo y_1, y_2 ein beliebiges Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.) darstellt, und bildet man die Form:

$$f(y_1, y_2) = \prod_0^{n-1}{}_i (A_{i1} y_1 + A_{i2} y_2), \tag{2.}$$

so ist diese Form Wurzel einer rationalen Function von z, deren Exponent höchstens gleich l, dem Index des reducirten Wurzelsystems $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$.
576] Ist umgekehrt eine Form $F(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function von z, und η ein Linearfactor derselben, so enthält dieselbe Form auch die übrigen Glieder des reducirten Wurzelsystems, zu welchem η gehört, als Linearfactoren.

Eine Form, welche nur solche Linearfactoren enthält, die zusammen die Glieder des reducirten Wurzelsystems einer irreductiblen Gleichung bilden, welcher ein bestimmtes Integral der Differentialgleichung (B.) genügt, und jeden nur in der ersten Potenz, nennen wir Primform.

Jede Primform ist Wurzel einer rationalen Function.

Haben zwei Primformen einen gemeinschaftlichen Linearfactor, so sind sie bis auf einen constanten Factor gleich.

Jede Form, welche gleich ist der Wurzel einer rationalen Function, lässt sich in ein Product von Primformen zerlegen.

Ist eine Form Wurzel einer rationalen Function, so enthält sie alle solche Linearfactoren, welche zusammen das reducirte Wurzelsystem der Gleichung bilden, welcher sie genügen, und zwar jeden gleich oft.

4.

Ist N der geringste Werth, welchen die Anzahl der Glieder des reducirten Wurzelsystems der irreductiblen Gleichung, welcher irgend ein Integral der Differentialgleichung (B.) genügt, annehmen kann, so ist auch N der niedrigste Grad einer Form, welche Wurzel einer rationalen Function ist.
577] Wir bezeichnen den Index einer irreductiblen Gleichung, deren reducirtes Wurzelsystem aus N Gliedern besteht, mit L, so dass $m = NL$.

Eine Form, welche Wurzel einer rationalen Function ist und den niedrigsten Grad N hat, ist eine Primform.

Die Hessesche Covariante einer Primform niedrigsten Grades ist ebenfalls eine Primform.

Der Index der irreductiblen Gleichung, deren reducirtes Wurzelsystem aus den Factoren der Hesseschen Covariante besteht, sei L', so ist

$$(2N-4)L' = NL.$$

Die Hessesche Covariante einer Form $f(y_1, y_2)$ kann nicht verschwinden, wenn $N > 1$.

Ist $N = 2$, so wird die Hessesche Covariante einer Primform niedrigsten Grades ihre Invariante. Das Quadrat einer Primform zweiten Grades ist eine rationale Function von z.

Ist η ein Integral, welches zu einem reducirten Wurzelsysteme gehört, dessen Gliederzahl N, L der Index dieses Systems, und ist ein Factor ζ der Hesseschen Covariante der Primform, welche η als Factor enthält, der Form

$$\beta' \eta^{L-1} \psi(\eta^L), \tag{1.}$$

so ergiebt sich $N = 4$.

Ist $N > 2$ und hat die Hessesche Covariante $\psi(y_1, y_2)$ kein Integral der Form (1.) als Factor, und ist $\lambda = L$ oder $\frac{L}{2}$, je nachdem L ungerade oder gerade, so zerfällt die Hessesche Covariante in ein Product von Factoren der Gestalt:

$$P_i = F_i(\eta) F_i(\eta J) \ldots F_i(\eta J^{\lambda-1}),$$ [578

wo J eine primitive L^{te} Wurzel der Einheit bedeutet.

Es ist

$$2N - 4 \equiv 0, \quad \text{mod. } \lambda.$$

Setzt man

$$\frac{2N-4}{\lambda} = \lambda'$$

so ist

$$\psi(y_1, y_2) = P_1 P_2 \ldots P_{\lambda'}. \tag{2.}$$

Ist $L = 2$, so ist $L' = 2$, $N = 4$ oder $L' = 3$, $N = 3$.

Ist $L > 2$ und

$$\eta = y_1, \quad \eta^{L-1} \psi(\eta^L) = y_2,$$

so enthält $\psi(y_1, y_2)$ nur solche Potenzen von y_1 und y_2, deren Exponenten durch λ theilbar sind.

Die Hessesche Covariante $\psi_1(y_1, y_2)$ der Hesseschen Covariante $\psi(y_1, y_2)$ hat die Form

$$\psi_1(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{\lambda-2} \psi_1'(y_1^\lambda, y_2^\lambda).$$

Es ist $\lambda < 6$.

Hieraus ergiebt sich eine Tabelle der möglichen Combinationen von L, N für $N > 2$.

Der niedrigste Grad N einer Form $f(y_1, y_2)$, welche gleich einer Wurzel 579] einer rationalen Function ist, kann die Zahl zwölf nicht übersteigen.

Mit Hülfe der Invariantentheorie wird eine Tabelle der möglichen Gestalten für die Formen niedrigsten Grades N und der zugehörigen Werthe L aufgestellt.

Aus dieser Tabelle folgt, dass N eine der Zahlen 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12 ist.

Für $N > 2$ ist L eine der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10.

Ist umgekehrt eine aus einem beliebigen Fundamentalsystem y_1, y_2 gebildete Form höheren als zweiten Grades und nicht Potenz einer Form zweiten Grades Wurzel einer rationalen Function, so hat die Differentialgleichung (B.) ein algebraisches Integral.

Ist dabei $N > 2$, so hat sie nur algebraische Integrale.

Eine Form μ^{ten} Grades $f(y_1, y_2)$ genügt einer linearen Differentialgleichung $\mu+1^{\text{ter}}$ Ordnung (C.) mit rationalen Coefficienten. Diese Differentialgleichung ist übereinstimmend mit der linearen Differentialgleichung $\mu+1^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher y^μ genügt.

Die Differentialgleichung (C.) ist ein für allemal für die Zahlen

$$\mu = 2, 4, 6, 8, 10, 12$$

zu bilden, sie hat die Form

$$\text{(C.)} \qquad \frac{d^{\mu+1} v}{dz^{\mu+1}} + P_{\mu-1} \frac{d^{\mu-1} v}{dz^{\mu-1}} + \cdots + P_0 v = 0$$

und ist für $\mu = 1$ mit der Differentialgleichung (B.) identisch.

613] Die nothwendige Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung (B.) algebraische Integrale besitzt, ist, dass die Differentialgleichung (C.) für eine der Zahlen

$$\mu = 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12$$

durch eine Wurzel einer rationalen Function befriedigt werde. Erfolgt dieses für $\mu = 1$ oder erst für einen der angegebenen Zahlenwerthe von μ, der grösser ist als 2, so hat auch umgekehrt die Differentialgleichung (B.) algebraische

Integrale. Erfolgt dieses aber zuerst für $\mu = 2$, und ist $\varphi(z)$ ein Integral der Differentialgleichung (C.) für $\mu = 2$, welches gleich der Wurzel einer rationalen Function, so ist $\varphi(z)^2$ eine rationale Function, und

$$\varphi(z)^2 \left[\left(\frac{d \log \varphi(z)}{dz} \right)^2 + 2 \frac{d^2 \log \varphi(z)}{dz^2} - 4P \right]$$

eine constante Grösse λ. Ist nun $\lambda \int \frac{dz}{\varphi(z)}$ gleich dem Logarithmus einer algebraischen Function, so sind die Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch.

Es wird gezeigt, dass die Ausrechnung der Differentialgleichung (C.) [580 überflüssig ist, da schon ein gewisses System von Differentialgleichungen für die Entscheidung hinreicht.

Sind die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch, aber weder ein Integral derselben noch ein Integral der Differentialgleichung (C.) für $\mu = 2$ Wurzel einer rationalen Function, so sind die Nenner der rationalen Zahlen, welche die Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten und zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung (B.) liefern, nicht grösser als zehn.

Sind die sämmtlichen Nenner grösser als 2, aber von 4 verschieden, und wird die Differentialgleichung (C.) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt, so genügt der Differentialgleichung (B.) die Wurzel einer rationalen Function oder kein algebraisches Integral.

Sind die sämmtlichen Nenner gleich 2 und die Integrale in der Umgebung der einzelnen singulären Punkte von Logarithmen frei, so wird die Differentialgleichung (B.) durch die Quadratwurzel einer rationalen Function befriedigt.

Schliesslich wird noch gezeigt, dass die Betrachtung der Differentialgleichung (C.) durch eine directe Untersuchung der Formen selber ersetzt werden kann, wenn man die in meiner Abhandlung (Borchardts Journal für r. u. a. Math. Bd. 75, S. 208 sqq.[1]) gegebenen Coefficienten der [581 linearen homogenen Relationen, die zwischen den zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsystemen bestehen, herbeizieht.

Die in der gegenwärtigen Abhandlung befolgte Methode ist einer Ausdehnung auf Differentialgleichungen höherer Ordnung fähig, die ich mir für eine andere Gelegenheit vorbehalte.

Heidelberg im Juli 1875.

[1]) Abh. XIV, Band I dieser Ausgabe, S. 394 ff. Sch.

物理
08
F
62

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

S. 6, Zeile 12 wurde »bilden« eingeschoben;

„ 6, „ 8, 7. v. u. lauten im Original: Ist N die geringste Anzahl der Glieder, welche das reducirte Wurzelsystem der u. s. w.;

Nach den vom Verfasser in der zweiten Note (Gött. Nachrichten, 1875, S. 612—613*)) gemachten Angaben wurden

S. 8, Zeile 14, 15 die Worte: »höheren als zweiten Grades und nicht Potenz einer Form zweiten Grades« eingeschaltet,

„ 8, Zeile 17 $N > 2$ statt $N > 1$ gesetzt,

der Satz S. 579, Zeile 1 v. u. bis S. 580, Zeile 5 des Originales durch den im Texte S. 8, Zeile 7 v. u. bis S. 9, Zeile 6 nach S. 613 der zweiten Note wiedergegebenen ersetzt,

S. 9, Zeile 14 v. u. die Worte »oder kein algebraisches Integral« hinzugefügt.

2) Die in dem einleitenden Satze (S. 1) erwähnte Arbeit, von welcher die vorstehende Note einen Auszug giebt, ist die folgende Abh. XX; auch die Abhandlungen XXI—XXIII, XXV beziehen sich auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit algebraischen Integralen. Sch.

---

*) Diese Note beginnt mit den Worten: In der mit dem obigen Titel versehenen in den »Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften« 1875 No. 21 p. 568 sqq. abgedruckten Notiz haben sich einige Redactionsversehen eingeschlichen, welche ich mir hier zu berichtigen erlaube.

XX.

ÜBER DIE LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG, WELCHE ALGEBRAISCHE INTEGRALE BESITZEN, UND EINE NEUE ANWENDUNG DER INVARIANTENTHEORIE.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 81, 1876, S. 97—142.)

Wird eine lineare Differentialgleichung durch eine Wurzel einer ratio- [97 nalen Function befriedigt, so ist eine lineare homogene Function der Glieder eines Fundamentalsystems von Integralen derselben mit constanten Coefficienten Wurzel einer rationalen Function. Sind die sämmtlichen Integrale algebraische Functionen, und bildet man alle diejenigen Werthe, welche ein Integral durch die verschiedenen Umläufe der unabhängigen Variablen annimmt, so ist jede symmetrische Function dieser Werthe eine rationale Function. Da aber jeder dieser Werthe als lineare homogene Function mit constanten Coefficienten der Glieder eines Fundamentalsystems dargestellt werden kann, so bin ich auf den Gedanken geführt worden, die mit den Gliedern eines Fundamentalsystems gebildeten Formen näher zu untersuchen. Es ergab sich, dass stets solche Formen angegeben werden können, welche gleich einer Wurzel einer rationalen Function sind, und dass der niedrigste Grad, welcher den Formen der letzteren Art zukommt, eine für alle Fundamentalsysteme sich gleichbleibende Zahl N ist. Wir haben eine Form, welche gleich einer Wurzel einer rationalen Function ist und welche sich nicht in Formen niedrigeren Grades derselben Art zerlegen lässt, eine Primform genannt. Es liess sich nun erwarten, dass die Primformen vom Grade N bei der Untersuchung der algebraischen Glei-

物理
08
F
6 2

chungen, welchen die Integrale der Differentialgleichung genügen, eine fundamentale Bedeutung haben würden. In der That zeigte sich, dass durch die Betrachtung derselben die wichtigsten Eigenschaften, wodurch diejenigen algebraischen Functionen, welche einer Differentialgleichung von gegebener Ordnung genügen, verknüpft sind, sich aufdecken, und namentlich die Frage sich beantworten liess, unter welchen Umständen eine lineare Differentialgleichung algebraische Integrale besitzt.

98] Da die Glieder eines Fundamentalsystems von Integralen sich durch die verschiedenen Umläufe der unabhängigen Variablen in lineare homogene Functionen mit constanten Coefficienten derselben Glieder verwandeln, so werden sich die verschiedenen Werthe, welche eine aus denselben Gliedern gebildete Form durch dieselben Umläufe erhält, durch die Ausführung linearer Substitutionen der Formenargumente erzielen lassen. Dieser Umstand veranlasste mich, die Covarianten dieser Formen in die Untersuchung hereinzuziehen, da die Veränderungen der Covarianten durch lineare Substitutionen mit denen der Form im einfachsten Zusammenhange stehen. Es ergab sich nun hierbei, dass die Covarianten von Formen, welche gleich einer Wurzel einer rationalen Function sind, ebenfalls Wurzeln rationaler Functionen darstellen, und dass daher die Covarianten der Primformen vom Grade N, welche selber von niedrigerem als dem N^{ten} Grade sind, identisch verschwinden müssen. Der weitere Fortgang meiner Untersuchung würde nun eine wesentliche Erleichterung gefunden haben, wenn in der Invariantenlehre das Problem, die Formen n^{ten} Grades zu bestimmen, deren Covarianten von niedrigerem als dem n^{ten} Grade identisch verschwinden, schon gelöst wäre. Da aber dieses nicht der Fall ist, so musste dieses Problem umgangen werden. Es ist mir in der That auch gelungen, durch die Betrachtung der Hesseschen Covariante die Lösung dieses Problems für die vorliegende Untersuchung entbehrlich zu machen.

Ich habe im Folgenden die Untersuchung für die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, bei welchen die zu betrachtenden Formen binäre sind, durchgeführt, und behalte mir die Ausdehnung auf die Differentialgleichungen höherer Ordnung für eine andere Gelegenheit vor. Ich hoffe, dass die neue Anwendung, welche wir hier von der Invariantenlehre auf algebraisch-analytische Untersuchungen gemacht, schon in diesem einfachen Falle nicht unwichtig erscheinen werde.

Von den Resultaten der vorliegenden Arbeit heben wir hier nur hervor den Nachweis, dass für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Grad N nicht höher als der zwölfte sei, und die Methode, die Beschaffenheit der Differentialgleichung anzugeben, damit sie algebraische Integrale besitze, oder, wenn die Differentialgleichung vorgelegt, zu erkennen, ob sie durch algebraische Integrale befriedigt werde.

1. [99

Wir wollen mit Herrn Liouville (Journ. de l'École Polyt. cah. 22, p. 184) eine Gleichung

$$(1.)\qquad A_m u^m + A_{m-1} u^{m-1} + \cdots + A_0 = 0,$$

in welcher die Coefficienten $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_0$ rationale Functionen von z sind irreductibel nennen, wenn sich die linke Seite derselben nicht in Factoren zerlegen lässt, die in Bezug auf u niedrigeren Grades sind und deren Coefficienten ebenfalls rationale Functionen von z sind.

Besitzt die irreductible Gleichung (1.) zwei Wurzeln u_1 und u_2, deren Quotient eine rationale Function j von z, so ist j eine ganzzahlige Wurzel der Einheit.

Denn der Voraussetzung gemäss genügen u_1 und ju_1 der Gleichung (1.). Es genügen daher wegen der vorausgesetzten Irreductibilität dieser Gleichung die sämmtlichen Wurzeln derselben der Gleichung:

$$(2.)\qquad A_m j^m u^m + A_{m-1} j^{m-1} u^{m-1} + \cdots + A_1 ju + A_0 = 0.$$

In Folge der Irreductibilität der Gleichung (1.) ist A_0, daher auch j von Null verschieden. Es verschwindet aber auch nicht A_m, da der Grad der Gleichung (1.) der m^{te} sein soll. Man hat also:

$$\frac{A_{m-i}}{A_m} = \frac{A_{m-i}}{A_m} j^{-i} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, m$$

oder

$$(3.)\qquad A_{m-i} = A_{m-i} j^{-i},$$

d. h. entweder

$$A_{m-i} = 0$$

oder

$$j^i = 1.$$

物理
08
F
62

Da aber wegen der Irreductibilität der Gleichung (1.) A_{m-i} nicht für alle angegebenen Werthe von i verschwinden kann, so ist j eine ganzzahlige Wurzel der Einheit.

Ist j eine primitive λ^{te} Wurzel der Einheit, so ist nach Gleichung (3.) $A_{m-i} = 0$ oder von Null verschieden, je nachdem

$$i \text{ nicht } \equiv 0, \text{ mod. } \lambda \quad \text{oder} \quad i \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Da A_0 von Null verschieden ist, so ergiebt sich insbesondere:

Der Exponent λ der primitiven Einheitswurzel j ist ein Divisor von m.

100] 2.

Es werde vorausgesetzt, dass die Differentialgleichung:

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^2u}{dz^2} + p_1 \frac{du}{dz} + p_0 u = 0$$

mit rationalen Coefficienten ein algebraisches Integral u besitzt, und es sei

$$\text{(1.)} \qquad A_m u^m + A_{m-1} u^{m-1} + \cdots + A_0 = 0$$

die irreductible Gleichung mit rationalen Coefficienten, welcher dasselbe genügt.

I. Alsdann sind die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (1.) Integrale derselben Differentialgleichung.

Denn aus (1.) ergeben sich $\frac{du}{dz}$ und $\frac{d^2u}{dz^2}$ als rationale Functionen von u und z. Die Substitution derselben in die Differentialgleichung (A.) liefert eine Gleichung zwischen u und z, welcher der Voraussetzung nach eine Wurzel u der Gleichung (1.), also wegen der vorausgesetzten Irreductibilität dieser Gleichung sämmtliche Wurzeln derselben genügen (vergl. Liouville l. c. und eine Abh. desselben Verfassers in Liouville Journal t. IV, p. 432).

II. Wenn die Gleichung (1.) zwei Wurzeln u_1 und u_2 besitzt, deren Quotient nicht für jeden Werth von z constant ist, so hat die Differentialgleichung (A.) nur algebraische Integrale.

Denn alsdann lässt sich (s. meine Arbeit dieses Journal Bd. 66[1]), No. 2) jedes Integral u in der Form

$$\text{(2.)} \qquad u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

mit constanten Coefficienten c_1 und c_2 darstellen. Der Ausdruck (2.) genügt

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 159 ff. Sch.

aber einer algebraischen Gleichung, welche z. B. dadurch erhalten werden kann, dass man in Gleichung (1.) nach einander u_1 und u_2 für u setzt und zwischen den zwei so gebildeten Gleichungen und Gleichung (2.) u_1 und u_2 eliminirt.

III. Ist der Quotient je zweier Wurzeln der Gleichung (1.) constant, so ist ein Integral der Differentialgleichung (A.) Wurzel einer rationalen Function.

Ist nämlich u_1 eine Wurzel der Gleichung (1.), so besitzt dieselbe die Wurzeln

$$u_1,\ u_1 j_1,\ u_1 j_2,\ \ldots,\ u_1 j_{m-1},$$

wo $j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}$ nach der vorigen Nummer ganzzahlige Wurzeln der Einheit sind. Es seien $j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}$ resp. $\lambda_1^{\text{te}}, \lambda_2^{\text{te}}, \ldots, \lambda_{m-1}^{\text{te}}$ primitive Wurzeln [101 der Einheit, λ das kleinste Vielfache dieser Zahlen, so sind $j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}$ auch λ^{te} Wurzeln der Einheit. Da nach der vorigen Nummer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ Divisoren von m sind, so ist auch λ Divisor von m. Nun aber sind wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung (1.) $j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}$ unter einander und von der Einheit verschieden. Andererseits hat aber die Gleichung

$$x^\lambda = 1$$

nicht mehr als λ verschiedene Wurzeln. Es ergiebt sich demnach $m = \lambda$.

Nach der vorigen Nummer ist $A_{m-i} = 0$, wenn nicht $i \equiv 0$ nach den Moduln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, d. h. wenn nicht i durch λ oder m theilbar ist. Demnach erhält die Gleichung (1.) die Form

$$\text{(3.)} \qquad A_m u^m + A_0 = 0.$$

Wenn die Differentialgleichung (A.) demnach ein algebraisches Integral u, welches nicht die Wurzel einer rationalen Function ist, besitzt, so sind ihre sämmtlichen Integrale algebraisch. Dieses ergiebt sich aus den Sätzen II. und III. Aus dem letzteren folgt nämlich, dass in diesem Falle die Gleichung (1.), welcher u genügt, mindestens zwei Wurzeln hat, deren Quotient nicht für jedes z constant ist. Dann aber ergiebt sich unsere Behauptung aus dem Satze II.

3.

Die Beurtheilung, ob eine lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten durch die Wurzel aus einer rationalen Function befriedigt werde, führt in jedem Falle auf die Frage zurück, ob ein gegebenes System linearer Gleichungen endliche Lösungen besitzt.

Es ist nämlich

$$y = (z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\dots(z-a_\varrho)^{\alpha_\varrho}g(z),$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$ rationale (nicht positive ganze) Zahlen, $g(z)$ eine ganze rationale Function bedeutet, der allgemeinste Ausdruck für die Wurzel einer rationalen Function. Für die singulären Punkte $a_1, a_2, \dots, a_\varrho$ wird entweder y oder die Ableitungen von y von einer gewissen Ordnung an unendlich.

Soll also eine lineare Differentialgleichung durch einen solchen Ausdruck befriedigt werden, so müssen $a_1, a_2, \dots, a_\varrho$ mit singulären Punkten der Diffe-
102] rentialgleichung zusammenfallen. Die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$ werden durch gewisse algebraische Gleichungen bestimmt (cf. LIOUVILLE, Journ. de l'École Polyt. cah. 22, p. 154 sqq.). Ergeben sich für diese Grössen rationale Werthe, und substituirt man alsdann den obigen Ausdruck y in die Differentialgleichung, welche von Nennern befreit gedacht wird, so erhält man nach Division mit $(z-a_1)^{\alpha_1-n}(z-a_2)^{\alpha_2-n}\dots(z-a_\varrho)^{\alpha_\varrho-n}$, wo n die Ordnung der Differentialgleichung ist, eine Gleichung, welche ausdrückt, dass eine ganze rationale Function von z identisch verschwindet. Setzt man die einzelnen Coefficienten derselben gleich Null, so erhält man ein System linearer Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten von $g(z)$. Je nachdem letztere Gleichungen Lösungen haben oder nicht, hat die gegebene Differentialgleichung die Wurzel einer rationalen Function zum Integral oder nicht.

Es ist selbstverständlich, dass in jedem gegebenen Falle durch besondere Methoden das Verfahren vereinfacht werden kann.

Weit schwieriger ist die Frage, ob eine lineare Differentialgleichung algebraische Integrale besitzt, welche nicht gleich Wurzeln aus rationalen Functionen sind. Wir wollen uns von jetzt ab mit der letzteren Frage für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschäftigen.

4.

Sind die Integrale der Differentialgleichung (A.) sämmtlich algebraisch, so gehört dieselbe zu der Klasse der Differentialgleichungen (12.) No. 4 meiner

Arbeit dieses Journal Bd. 66 [1]). Sind daher die singulären Punkte $a_1, a_2, \dots, a_\varrho$, so ist

$$(1.)\quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{\alpha_1}{z-a_1} + \dfrac{\alpha_2}{z-a_2} + \dots + \dfrac{\alpha_\varrho}{z-a_\varrho}, \\[2mm] p_0 = \dfrac{\beta_1}{(z-a_1)^2} + \dfrac{\beta_2}{(z-a_2)^2} + \dots + \dfrac{\beta_\varrho}{(z-a_\varrho)^2} + \dfrac{\gamma_1}{z-a_1} + \dfrac{\gamma_2}{z-a_2} + \dots + \dfrac{\gamma_\varrho}{z-a_\varrho}, \end{cases}$$

wo die Grössen α, β, γ Constanten bedeuten und $\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_\varrho = 0$ ist.

Wir nehmen nunmehr an, dass in der Gleichung (A.) p_1 und p_0 diese Form haben, und substituiren in der Gleichung (A.)

$$(2.)\qquad u = \mu y,$$

wo

$$(3.)\qquad \mu = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz} = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}\alpha_1}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}\alpha_2}\dots(z-a_\varrho)^{-\frac{1}{2}\alpha_\varrho},$$

und erhalten für y die Differentialgleichung

$$(\text{B.})\qquad \frac{d^2y}{dz^2} = Py,$$

wo [103

$$(4.)\qquad P = \frac{1}{4}p_1^2 + \frac{1}{2}\frac{dp_1}{dz} - p_0.$$

Da P eine rationale Function ist, welche nur für $a_1, a_2, \dots, a_\varrho$ unendlich wird, so sind auch für die Differentialgleichung (B.) diese Grössen ausschliesslich die singulären Punkte.

Die zum singulären Punkt a_i gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (A.) ist

$$(5.)\qquad r(r-1)+\alpha_i r+\beta_i = 0.$$

Die zu demselben singulären Punkte gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.) ist

$$(6.)\qquad r(r-1) = \tfrac{1}{4}\alpha_i^2 - \tfrac{1}{2}\alpha_i - \beta_i.$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung (6.) ergänzen sich zur Einheit.

Setzt man in der Differentialgleichung (B.)

$$z = \frac{1}{t},$$

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 166. Sch.

so hat P die Form

$$P = t^2 P_1(t), \tag{7.}$$

wo $P_1(0)$ nicht unendlich ist. Die Differentialgleichung (B.) verwandelt sich in

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2t \frac{dy}{dt} = P_1(t) y. \tag{B'.}$$

Demnach ist die zu $z = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.)

$$r(r-1) + 2r = P_1(0),$$

oder

$$r^2 + r = P_1(0). \tag{8.}$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung (8.) ergänzen sich zur negativen Einheit.

Sind die Wurzeln der Gleichung (5.) rationale Zahlen, so sind α_i und β_i ebenfalls rationale Zahlen.

Denn es sind $1 - \alpha_i$ und β_i resp. die Summe und das Product der beiden Wurzeln der Gleichung (5.).

Sind die Integrale der Differentialgleichung (A.) sämmtlich algebraisch, so sind die Wurzeln der zu jedem der singulären Punkte gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen rationale Zahlen (s. meine Arbeit dieses
104] Journal Bd. 66 No. 6, II.[1]), also die sämmtlichen Grössen α_i und β_i ebenfalls rationale Zahlen. Es ergiebt sich also aus der Form von μ, Gleichung (3.):

Sind die Integrale der Differentialgleichung (A.) sämmtlich algebraisch, so sind auch die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch.

Sind umgekehrt die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ rationale Zahlen, so sind auch die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (A.) algebraisch.

5.

Es sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung:

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 198 f. Sch.

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = P.y, \tag{1.}$$

wo P eine beliebige rationale Function von z bedeutet, so ist bekanntlich (vergl. Liouville in dessen Journal t. IV, p. 428 und meine Arbeit dieses Journal Bd. 66 No. 2[1]))

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dz} & y_1 \\ \frac{dy_2}{dz} & y_2 \end{vmatrix} = C, \tag{2.}$$

wo C eine von Null verschiedene Constante bedeutet. Nach irgend einem Umlaufe von z mögen nun y_1 und y_2 übergehen in y'_1, y'_2, so ist bekanntlich (s. meine Arbeit Bd. 66 No. 2[1]))

$$\begin{cases} y'_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2, \\ y'_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2, \end{cases} \tag{3.}$$

wo $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}$ Constanten sind.

Aus Gleichung (2.) ergiebt sich aber

$$\begin{vmatrix} \frac{dy'_1}{dz} & y'_1 \\ \frac{dy'_2}{dz} & y'_2 \end{vmatrix} = C,$$

d. h.

$$\Delta \begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dz} & y_1 \\ \frac{dy_2}{dz} & y_2 \end{vmatrix} = C, \tag{4.}$$

wo die Substitutionsdeterminante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$ [105

mit Δ bezeichnet worden ist. Aus den Gleichungen (2.) und (4.) folgt:

I. Die Substitutionsdeterminante Δ ist für jeden Umlauf von z der Einheit gleich.

Es sei $f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$ eine mit y_1, y_2 gebildete Form, d. h. eine ganze homogene Function von y_1, y_2 mit constanten Coefficienten $a, b, c, \ldots$, $\varphi(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$ eine Covariante der Form $f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$.

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 164 ff. Sch.

物理 08 F

Wenn durch eine Substitution

$$(5.)\qquad \begin{cases} y_1 = k_{11} Y_1 + k_{12} Y_2, \\ y_2 = k_{21} Y_1 + k_{22} Y_2 \end{cases}$$

$f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$ in $f(Y_1, Y_2, A, B, C, \ldots)$ übergeht, so ist den Eigenschaften der Covarianten gemäss:

$$(6.)\quad \varphi(k_{11}Y_1+k_{12}Y_2,\, k_{21}Y_1+k_{22}Y_2,\, a, b, c, \ldots) = (k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21})^{\lambda}\, \varphi(Y_1, Y_2, A, B, C, \ldots),$$

wo λ eine positive ganze Zahl bedeutet.

Wenn Y_1, Y_2 resp. mit y_1, y_2 zusammenfallen, also

$$f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots) \text{ in } f(y_1, y_2, A, B, C, \ldots)$$

übergeht, so ist auch

$$(6a.)\quad \varphi(k_{11}y_1+k_{12}y_2,\, k_{21}y_1+k_{22}y_2,\, a, b, c, \ldots) = (k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21})^{\lambda}\, \varphi(y_1, y_2, A, B, C, \ldots).$$

Ist die Substitution (5.) mit der Substitution (3.) identisch, so ergiebt sich nach Satz I.:

$$(7.)\qquad \varphi(\alpha_{11}y_1+\alpha_{12}y_2,\, \alpha_{21}y_1+\alpha_{22}y_2,\, a, b, c, \ldots) = \varphi(y_1, y_2, A, B, C, \ldots).$$

Diese Gleichung ist eine in Bezug auf y_1, y_2 identische, da sich sonst aus derselben für $\frac{y_2}{y_1}$ ein constanter Werth ergeben würde, was der Voraussetzung widerstritte, da y_1, y_2 ein Fundamentalsystem bilden. Es sei nunmehr insbesondere

$$(8.)\qquad f(y_1, y_2, A, B, C, \ldots) = \gamma f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots),$$

wo γ eine Constante bedeutet, so ist auch diese Gleichung in Bezug auf y_1, y_2 identisch, so dass

$$A = \gamma a, \quad B = \gamma b, \quad C = \gamma c, \quad \ldots;$$

106] also auch, da die Covariante in Bezug auf die Coefficienten der Form homogen ist:

$$(9.)\qquad \varphi(y_1, y_2, A, B, C, \ldots) = \gamma^{k} \varphi(y_1, y_2, a, b, c, \ldots),$$

wo k eine positive ganze Zahl bedeutet. Es ergiebt sich alsdann aus Gleichung (7.)

$$(10.)\quad \varphi(\alpha_{11}y_1+\alpha_{12}y_2,\, \alpha_{21}y_1+\alpha_{22}y_2,\, a, b, c, \ldots) = \gamma^{k} \varphi(y_1, y_2, a, b, c, \ldots),$$

d. h.

II. Wenn nach irgend einem Umlauf der Variablen z die Form $f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$ in sich selbst mit einer Constanten multiplicirt übergeht, so wird sich nach demselben Umlauf jede Covariante dieser Form ebenfalls in sich selbst mit einer Potenz derselben Constanten multiplicirt verwandeln.

Da eine Form $f(y_1, y_2)$, welche Wurzel einer rationalen Function ist, durch einen beliebigen Umlauf von z in sich selbst mit einer Einheitswurzel multiplicirt übergeht, so folgt aus Satz II., dass auch die Covariante einer solchen Form durch einen beliebigen Umlauf in sich selbst mit einer Einheitswurzel multiplicirt übergeht. Sind nun y_1, y_2 Integrale der Differentialgleichung (B.), so wird die Covariante unendlich nur von einer endlichen Ordnung, da y_1 und y_2 diese Eigenschaft besitzen (s. meine Arbeit Bd. 66 No. 4 [1]). Da nun eine Function, welche durch einen beliebigen Umlauf der unabhängigen Variablen in sich selbst mit Einheitswurzeln multiplicirt übergeht und überall von endlicher Ordnung unendlich wird, eine Wurzel einer rationalen Function ist, so ergiebt sich der Satz:

III. Ist y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.), so ist die Covariante jeder Form $f(y_1, y_2)$, welche Wurzel einer rationalen Function ist, ebenfalls Wurzel einer rationalen Function.

6.

Sind wieder y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) voriger Nummer, so ergiebt sich aus der Gleichung (2.) derselben Nummer

$$(1.)\qquad \frac{y_2}{y_1} = -C\int \frac{dz}{y_1^2} \quad \text{oder} \quad \frac{y_1}{y_2} = C\int \frac{dz}{y_2^2}.$$

Es werde von jetzt ab vorausgesetzt, dass die sämmtlichen Integrale derselben Differentialgleichung algebraische Functionen von z sind, alsdann ist auch $\frac{y_2}{y_1}$ eine algebraische Function von z, demnach nach Gleichung (1.)

$$(2.)\qquad \int \frac{dz}{y_1^2}, \quad \int \frac{dz}{y_2^2}$$ [107

algebraische Functionen von z.

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 178 ff. Sch.

物理
08
F
62

Nach einem Satze von Abel (dieses Journal Bd. 4, p. 264, oder Oeuvres compl. 1. Th. p. 355[1]), vergl. auch Liouville, Journal de l'École Polyt. cah. 22 p. 147) müssen unter diesen Voraussetzungen die Integrale (2.) rationale Functionen von z und resp. der algebraischen Function $\frac{1}{y_1^2}$ oder $\frac{1}{y_2^2}$ sein. Hieraus folgt, dass y_2 eine rationale Function von z und y_1 und umgekehrt y_1 eine rationale Function von z und y_2 ist. Ist der Quotient von y_1 und y_2 für jedes z constant, so sind y_1 und y_2 ebenfalls rationale Functionen von einander. Es ergiebt sich demnach der Satz:

Sind die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraische Functionen von z, so ist jedes Integral derselben eine rationale Function von z und einem beliebigen anderen Integrale derselben Differentialgleichung.

7.

I. Ist y ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B.) und m der Grad der irreductiblen Gleichung, welcher y genügt, so lässt sich bekanntlich jede rationale Function $\varphi(y)$ von y und z stets und nur auf eine Weise in die Form

$$\varphi(y) = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots + c_{m-1} y^{m-1} \tag{1.}$$

bringen, wo $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ rationale Functionen von z sind. Demnach hat jedes andere Integral y_1 ausser y nach voriger Nummer die Gestalt:

$$y_1 = \varphi(y). \tag{2.}$$

Ist $\frac{y_1}{y}$ nicht für jedes z constant, so lässt sich bekanntlich (s. No. 2) jedes dritte Integral durch die Form

$$\alpha y + \beta \varphi(y) \tag{3.}$$

darstellen, wo α und β Constanten bedeuten.

Wir nehmen nun an, dass auf einem gewissen Wege y in yj übergeht, so genügt yj der irreductiblen Gleichung für y, und es ist deshalb nach No. 1 j eine ganzzahlige Wurzel der Einheit. Das Integral $\varphi(y)$ geht alsdann auf demselben Wege in $\varphi(yj)$ über. Da $\varphi(yj)$ ein Integral der Differentialgleichung

[1]) Nouvelle édition, t. I (1881) S. 550. Sch.

(B.) ist, so muss dasselbe die Form (3.) haben, also

$$\varphi(yj) = \alpha y + \beta \varphi(y) \tag{4.}$$

sein. Die dem angegebenen Wege entsprechende Substitution des Funda- [108
mentalsystems $y, \varphi(y)$ ist daher

$$\begin{pmatrix} j & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Die Determinante Δ dieser Substitution ist nach Satz I. No. 5 der Einheit gleich. Demnach ist

$$\beta = j^{-1}, \tag{5.}$$

und man erhält

$$\varphi(yj) = \alpha y + j^{-1} \varphi(y). \tag{6.}$$

Wegen der Irreductibilität der Gleichung, welcher y genügt, folgt hieraus:

$$c_i j^i = c_i j^{-1}, \qquad (i = 0, 2, 3, \ldots, m-1) \tag{7.}$$

$$c_1 j = \alpha + c_1 j^{-1}. \tag{7a.}$$

Ist j eine primitive l^{te} Wurzel der Einheit, so ergeben die Gleichungen (7.) und (7a.)

$$c_i = 0, \text{ wenn nicht } i = 1 \text{ oder } i \equiv -1, \text{ mod. } l. \tag{8.}$$

Es sei daher

$$\psi(y^l) = c_0 + c_l y^l + \cdots + c_{\left(\frac{m}{l}-1\right)l}\, y^{\left(\frac{m}{l}-1\right)l} \tag{9.}$$

$\left(\frac{m}{l}\right.$ ist eine ganze Zahl, da nach No. 1 l ein Divisor von m ist$\left.\right)$, so ist

$$\varphi(y) = c_1 y + y^{l-1} \psi(y^l), \tag{10.}$$

und jedes Integral hat die Form

$$(\alpha' + \beta' c_1) y + \beta' y^{l-1} \psi(y^l). \tag{11.}$$

Ist j eine höhere Einheitswurzel als die zweite, so folgt aus Gleichung (7a.), dass c_1 eine Constante

$$c_1 = \frac{\alpha}{j - j^{-1}}. \tag{12.}$$

Es ergiebt die Gleichung (10.), dass

$$y^{l-1}\psi(y^l)$$

ein Integral der Differentalgleichung (B.) ist.

Es bilden auch, wenn nicht $\psi(y^l)$ identisch Null ist, y und $y^{l-1}\psi(y^l)$ ein Fundamentalsystem, da $y^{l-2}\psi(y^l)$ nicht einer Constanten gleich ist.

Ist aber

$$j^2 = 1, \tag{13.}$$

so ist $\alpha = 0$.

109] Es ist also immer

$$\alpha = c_1(j-j^{-1}). \tag{14.}$$

Im zweiten Falle hat nach Gleichung (10.) jedes Integral die Form

$$y\psi(y^2).$$

II. Es sei $F(y)$ ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B.), welches nicht gleich y mit einer Constanten multiplicirt, und von der Beschaffenheit, dass

$$F(yj^k) = \varepsilon F(y), \tag{15.}$$

wo ε eine constante Grösse. Da ein gewisser Weg y in yj überführt, so führt auch ein Weg (welcher der $k$maligen Wiederholung des ersteren aequivalent ist) y in yj^k über. Der letztere führt aber nach der Voraussetzung $F(y)$ in $\varepsilon F(y)$ über. Es ist daher die zu diesem Wege gehörige Substitution des Fundamentalsystems y, $F(y)$

$$\begin{pmatrix} j^k & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Da nach No. 5 Satz I die Determinante dieser Substitution gleich der Einheit ist, so ergiebt sich:

$$\varepsilon = j^{-k}. \tag{16.}$$

Da aber $F(y)$ die Form (11.) hat, so ist:

$$F(y) = (\alpha'+\beta'c_1)y + \beta' y^{l-1}\psi(y^l). \tag{17.}$$

Aus dieser Gleichung und den Gleichungen (15.) und (16.) folgt:

$$(\alpha'+\beta'c_1)yj^k + \beta' y^{l-1} j^{-k}\psi(y^l) = j^{-k}(\alpha'+\beta'c_1)y + j^{-k}\beta' y^{l-1}\psi(y^l). \tag{18.}$$

Es ergiebt sich hieraus entweder

$$\alpha'+\beta'c_1 = 0 \quad (k \text{ unbestimmt}) \tag{19.}$$

oder

$$j^{2k} = 1, \text{ d. h. } 2k \equiv 0, \text{ mod. } l. \tag{19a.}$$

Im Falle (19.) ist

$$F(y) = \beta' y^{l-1}\psi(y^l). \tag{20.}$$

Im Falle (19a.) ist:

1) wenn l ungerade, $k \equiv 0$, mod. l, also $j^k = 1$, $\varepsilon = 1$, d. h. die Gleichung (15.) ist die selbstverständliche

$$F(y) = F(y);$$

2) wenn l gerade, so würde $k \equiv \frac{l}{2}$, mod. l sein können, d. h. $j^k = -1$ [110 und $\varepsilon = -1$, und die Gleichung (15.)

$$F(-y) = -F(y). \tag{15a.}$$

Fasst man dieses zusammen, so erhält man den Satz:

Die Gleichung (15.) erfordert, dass $\varepsilon = j^{-k}$, und sie besteht für ein nicht durch l theilbares k nur dann, wenn entweder $F(y)$ die Form $\beta' y^{l-1}\psi(y^l)$ hat, oder wenn l eine gerade Zahl und $k \equiv \frac{l}{2}$, mod. l, also $\varepsilon = -1$ ist.

III. Es sei $F(y)$ ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B.), welches nicht gleich y multiplicirt mit einer Constanten, und es sei

$$F(yj^p) = \varepsilon F(yj^q), \tag{21.}$$

wo p und q ganze Zahlen, ε eine Constante ist. Diese Gleichung wird von jeder Wurzel der irreductiblen Gleichung für y, also wenn yj^{-q} für y gesetzt wird, befriedigt; es ist also:

$$F(yj^{p-q}) = \varepsilon F(y). \tag{22.}$$

Es ergiebt sich daher aus dem Satze in II. dieser Nummer:

Die Gleichung (21.) erfordert, dass $\varepsilon = j^{q-p}$, und sie besteht, wofern nicht $p \equiv q$, mod. l, nur dann, wenn entweder $F(y)$ die Form $\beta' y^{l-1}\psi(y^l)$ hat, oder wenn l eine gerade Zahl ist und $p-q \equiv \frac{l}{2}$, mod. l, also $\varepsilon = -1$ ist.

IV. 1) Ist

$$F(y) = \beta' y^{l-1} \psi(y^l), \tag{23.}$$

so ist

$$F(yj^k) = j^{-k} F(y) \tag{24.}$$

für jedes ganzzahlige k, und die Glieder der Reihe

$$F(y),\ F(yj),\ \ldots,\ F(yj^{l-1}) \tag{25.}$$

sind nur um constante Factoren von einander verschieden.

2) Ist l eine ungerade Zahl, $F(y)$ ein beliebiges Integral, welches nicht gleich y multiplicirt mit einer Constanten und nicht von der Form (23.), so ist nach II. und III. kein Glied der Reihe (25.) gleich einem anderen multiplicirt mit einer Constanten.

3) Ist l eine gerade Zahl und $F(y)$ ein wie in 2) beschaffenes Integral, so sind die Glieder der Reihe

111] $$F(y),\ F(yj),\ \ldots,\ F\left(yj^{\frac{l}{2}-1}\right) \tag{25a.}$$

nicht um nur constante Factoren verschieden, dagegen ist

$$F\left(yj^{\frac{l}{2}+i}\right) = -F(yj^i). \tag{26.}$$

8.

Der Grad der irreductiblen algebraischen Gleichung, welcher ein Integral der Differentialgleichung (B.) genügt, ist für alle Integrale unverändert derselbe.

Es sei y ein algebraisches Integral, m der Grad der irreductiblen algebraischen Gleichung, welcher y genügt, y_1 irgend ein anderes Integral, so ist nach No. 6 y_1 eine rationale Function $\varphi(y)$ von y und z. Da m die Anzahl der verschiedenen Werthe ist, die y durch alle möglichen Umläufe von z erhält, so nimmt y_1 durch alle möglichen Umläufe von z eine Anzahl m' verschiedener Werthe an, die nicht grösser ist als m. Bildet man eine Gleichung m'^{ten} Grades, welcher diese m' Werthe genügen, so sind die Coefficienten derselben rationale Functionen von z. Dieselbe Gleichung befriedigen die sämmtlichen Wurzeln der irreductiblen Gleichung, welcher y_1 genügt. Es ist daher der Grad m_1 der letzteren Gleichung nicht grösser als m', also auch nicht grösser als m. Andererseits ist aber nach No. 6 auch y eine rationale Function von y_1 und z. Es ergiebt sich daher ebenso, dass m nicht grösser als m_1. Es ist demnach $m = m_1$, wie behauptet worden.

Man könnte daher mit Recht m den zur Differentialgleichung (B.) gehörigen Grad nennen.

9.

Es sei y ein Integral der Differentialgleichung (B.), und

$$A_m y^m + A_{m-1} y^{m-1} + \cdots + A_0 = 0 \tag{1.}$$

die irreductible Gleichung, welcher y genügt. Es seien $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ die $m-1$ übrigen Wurzeln der Gleichung (1.). Unter den Wurzeln derselben Gleichung seien $y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ so beschaffen, dass nicht der Quotient irgend zweier derselben für jedes z constant ist. Wir wollen $y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ das reducirte Wurzelsystem der Gleichung (1.) nennen.

Es kann eintreten, dass $n = m$.

Ist aber $n < m$, so ist nach No. 1 jede nicht zum reducirten Wurzelsystem gehörige Wurzel gleich einer des reducirten Systems mit einer [112 ganzzahligen Wurzel der Einheit multiplicirt.

I. Sind diese Multiplicatoren resp. l^{te}, l_1^{te}, l_2^{te}, etc. primitive Wurzeln der Einheit j, j_1, j_2, etc., und unter den Zahlen l, l_1, l_2, etc. l die grösste, so liefert das System:

$$y_i,\ y_i j,\ y_i j^2,\ \ldots,\ y_i j^{l-1} \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{2.}$$

die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (1.).

Ist nämlich η eine beliebige Wurzel der Gleichung (1.) und genügt derselben der Werth $\eta j_\varkappa$, so genügt ihr auch wegen ihrer Irreductibilität $\eta' j_\varkappa$, wo η' eine beliebige andere Wurzel derselben ist. Aus demselben Grunde genügt ihr auch $\eta j_\varkappa^{\mathfrak{a}}$, für ein beliebiges ganzzahliges $\mathfrak{a}$. Es ist demnach allgemein

$$y_i j^{\mathfrak{a}} j_\varkappa^{\mathfrak{b}} \tag{3.}$$

eine der Wurzeln der Gleichung (1.), wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ beliebige ganze Zahlen und i eine der Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ bedeutet.

Es sei nun das kleinste Vielfache von l und $l_\varkappa$ gleich λ, und g eine primitive λ^{te} Wurzel der Einheit, so ist

$$(4.)\qquad j = g^{r\frac{\lambda}{l}},\quad j_\varkappa = g^{r'\frac{\lambda}{l_\varkappa}},$$

wo r und r' resp. relativ prim zu l und $l_\varkappa$ sind. Man hat also

$$(5.)\qquad j^{\mathfrak{a}} j_\varkappa^{\mathfrak{b}} = g^{r\mathfrak{a}\frac{\lambda}{l} + r'\mathfrak{b}\frac{\lambda}{l_\varkappa}}.$$

Nun aber sind $\frac{\lambda}{l}$ und $\frac{\lambda}{l_\varkappa}$ relativ prim, ferner ist r zu $\frac{\lambda}{l_\varkappa}$ relativ prim, folglich ist $r\frac{\lambda}{l}$ zu $\frac{\lambda}{l_\varkappa}$ relativ prim. Der grösste gemeinschaftliche Theiler von $r\frac{\lambda}{l}$ und $r'\frac{\lambda}{l_\varkappa}$ ist also der grösste gemeinschaftliche Theiler von $r\frac{\lambda}{l}$ und r'. Nun ist r' zu $\frac{\lambda}{l}$ relativ prim, demnach ist der grösste gemeinschaftliche Theiler von $r\frac{\lambda}{l}$ und $r'\frac{\lambda}{l_\varkappa}$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von r und r', also zu l und $l_\varkappa$, und demnach auch zu λ relativ prim. Derselbe sei τ, so können bekanntlich ganze Zahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ so bestimmt werden, dass

$$(6.)\qquad r\frac{\lambda}{l}\mathfrak{a} + r'\frac{\lambda}{l_\varkappa}\mathfrak{b} = \tau$$

wird. Es ergiebt sich alsdann für diese Werthe $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aus Gleichung (5.)

113] $$(7.)\qquad j^{\mathfrak{a}} j_\varkappa^{\mathfrak{b}} = g^{\tau}.$$

Wir behaupten nun, dass $\lambda = l$ sei. Denn wenn dieses nicht stattfände, so wäre $\lambda > l$, und es ergäbe sich aus der Gleichung (7.), dass die Gleichung (1.) eine Wurzel $y_i g^{\tau}$ hätte, wo g^{τ} eine primitive λ^{te} Wurzel der Einheit, also von höherer als der l^{ten} Ordnung wäre, was der Voraussetzung widerspricht. Man schliesst hieraus:

Die Zahl l ist ein Vielfaches der Zahlen l_1, l_2, etc.

Daher sind j_1, j_2, etc. in der Reihe

$$j^0, j^1, j^2, \ldots, j^{l-1}$$

enthalten. Da aber nach No. 1 die sämmtlichen Grössen der Reihe (2.) Wurzeln der Gleichung (1.) sind, und diese Gleichung wegen ihrer Irreductibilität nur ungleiche Wurzeln hat, so ist unser Satz bewiesen.

Wir wollen l den Index der Gleichung (1.) oder des reducirten Wurzelsystems derselben nennen. Wir haben alsdann den Satz:

II. Das Product aus der Gliederzahl des reducirten Wurzelsystems der Gleichung (1.) in den Index derselben ist gleich dem Grade der Gleichung.

III. Wenn durch irgend einen Umlauf von z zwei verschiedene Glieder y_i und y_k des reducirten Wurzelsystems gleichzeitig in $y_{i'}.j^{\alpha}$ und $y_{k'}.j^{\beta}$ übergehen, wo $y_{i'}$ und $y_{k'}$ ebenfalls Glieder des reducirten Wurzelsystems sind, so sind $y_{i'}$ und $y_{k'}$ ebenfalls verschieden.

Denn durch einen dem angegebenen Umlauf entgegengesetzten Umlauf gehen gleichzeitig $y_{i'}$ in $j^{-\alpha}y_i$ und $y_{k'}$ in $j^{-\beta}y_k$ über. Wäre nun $i' = k'$, so müsste

$$j^{-\alpha}y_i = j^{-\beta}y_k$$

oder

$$y_k = j^{\beta-\alpha}y_i$$

sein, gegen die Voraussetzung.

10.

Es sei η ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B.), welches einer irreductiblen Gleichung m^{ten} Grades genügt, $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ das reducirte Wurzelsystem dieser Gleichung und l der Index derselben. Da die sämmtlichen Wurzeln Integrale der Differentialgleichung (B.) sind, so lassen sie sich als lineare homogene Functionen eines beliebigen Fundamentalsystems von Integralen y_1, y_2 mit constanten Coefficienten darstellen. Es sei also:

$$(1.)\qquad \eta_i = A_{i1}y_1 + A_{i2}y_2. \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Wir bilden die Form n^{ten} Grades: [114

$$(2.)\qquad f(y_1, y_2) = (A_{01}y_1 + A_{02}y_2)(A_{11}y_1 + A_{12}y_2)\ldots(A_{n1}y_1 + A_{n2}y_2),$$

so wird $f(y_1, y_2)$ durch einen beliebigen Umlauf von z in sich selbst, multiplicirt mit einer l^{ten} Einheitswurzel, übergehen. Da dieselbe Function überall nur von endlicher Ordnung unendlich wird, so ergiebt sich:

I. Die Form $f(y_1, y_2)$ ist Wurzel einer rationalen Function von z, deren Exponent höchstens gleich l.

II. Ist umgekehrt eine Form $F(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function von z und

$$\eta = A_0\, y + A_{02}y_2$$

ein Factor der Form, und bilden $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ ein reducirtes Wurzelsystem der irreductiblen Gleichung, welcher η genügt, so ist η_i von der Gestalt:

$$\eta_i = A_{i1} y_1 + A_{i2} y_2$$

und die Form $F(y_1, y_2)$ enthält auch die Factoren $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$.

Denn bezeichnet man den durch irgend einen Umlauf von z erhaltenen Werth von $F(y_1, y_2)$ mit $F'(y_1, y_2)$, so ist der Voraussetzung gemäss

$$F'(y_1, y_2) = \varepsilon F(y_1, y_2), \tag{3.}$$

wo ε eine ganzzahlige Einheitswurzel ist. Diese Gleichung ist eine identische, da sich sonst für $\frac{y_2}{y_1}$ ein für jedes z constanter Werth ergäbe. Es verschwinden daher beide Seiten der Gleichung für dieselben Werthe des Verhältnisses $\frac{y_2}{y_1}$. Wenn nun durch den angegebenen Umlauf η in η_i übergeführt wird, so enthält die linke Seite den Factor η_i, folglich auch die rechte. Da es aber stets Wege giebt (s. Puiseux in Liouvilles Journal t. XV), welche die Wurzel einer irreductiblen Gleichung in jede andere Wurzel derselben überführen, so ist unser Satz bewiesen.

Wir wollen eine Form, welche nur solche Factoren enthält, die zusammen das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen Gleichung bilden, welcher ein bestimmtes Integral genügt, und zwar diese Factoren alle und jeden zur ersten Potenz, eine Primform nennen.

Aus dem Satze I. ergiebt sich dann:

III. Jede Primform ist Wurzel einer rationalen Function.

Aus dem Satze II. folgt aber:

IV. Haben zwei Primformen einen gemeinschaftlichen Linearfactor, so sind sie bis auf einen constanten Factor identisch.

115] V. Ist eine Form $f(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function, so lässt sich dieselbe in ein Product von Primformen zerlegen.

Denn ist η einer der Factoren der Form, und bilden $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ zusammen mit η das reducirte Wurzelsystem der irreductiblen Gleichung, welcher η genügt, so ist nach dem Satze II. $f(y_1, y_2)$ durch die Primform

$$\varphi(y_1, y_2) = \eta \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_{n-1}$$

theilbar. Nach dem Satze III. ist aber $\varphi(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen

Function, also auch die Form

$$f'(y_1, y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{\varphi(y_1, y_2)}$$

Wurzel einer rationalen Function. Durch Fortsetzung desselben Schlusses in Bezug auf $f'(y_1, y_2)$ u. s. w. ergiebt sich unser Satz von selbst.

Man hat also, wenn $\varphi(y_1, y_2), \varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(y_1, y_2), \ldots$ Primformen sind,

$$f(y_1, y_2) = C\varphi(y_1, y_2)\varphi_1(y_1, y_2)\varphi_2(y_1, y_2)\ldots, \tag{4.}$$

wo C eine Constante bedeutet.

Als Corollar ergiebt sich der Satz:

VI. Ist eine Form $f(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function, so enthält sie alle solche Linearfactoren, welche zusammen das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen Gleichung bilden, gleich oft.

In der That, die Form enthalte den Factor η genau zur λ^{ten} Potenz, so müssen, da jede Primform in Gleichung (4.) jeden ihrer Factoren nur einfach enthält, genau λ Primformen in dem Producte auf der rechten Seite dieser Gleichung den Factor η enthalten. Diese Primformen sind aber nach Satz IV. bis auf einen constanten Factor identisch, folglich ist $f(y_1, y_2)$ genau durch die λ^{te} Potenz einer Primform, welche η enthält, theilbar, also auch genau durch die λ^{te} Potenz jedes Factors derselben.

11.

Es sei m der zur Differentialgleichung (B.) gehörige Grad.

Die Anzahl der Glieder des reducirten Wurzelsystems der irreductiblen Gleichung, welcher ein Integral y der Differentialgleichung (B.) genügt, ist im Allgemeinen für die verschiedenen Integrale verschieden. Der geringste Werth, welchen diese Anzahl annehmen kann, sei N, und der Index der irreductiblen Gleichung, welcher die Glieder eines reducirten Wurzelsystems von der Anzahl N genügen, sei L, so ist nach Satz II. No. 9

$$m = NL.$$

I. Die Zahl N ist auch der niedrigste Grad einer Form [116 $f(y_1, y_2)$, welche Wurzel einer rationalen Function ist.

物理
08
F
6

Dieser Satz ist eine Folgerung des Satzes II. voriger Nummer, aus welchem sich ergiebt, dass jede Form, welche Wurzel einer rationalen Function ist, mindestens so viel Linearfactoren enthält, als die Anzahl der Glieder eines reducirten Wurzelsystems beträgt. Die aus dem Product der Glieder eines reducirten Wurzelsystems von der Anzahl N gebildete Form ist nach Satz III. voriger Nummer eine Form N^{ten} Grades, welche gleich der Wurzel einer rationalen Function.

II. Eine Form $F(y_1, y_2)$, welche Wurzel einer rationalen Function ist und den niedrigsten Grad N hat, ist eine Primform N^{ten} Grades.

Wäre nämlich $F(y_1, y_2)$ nicht Primform, so liesse sich diese Form nach Satz V. voriger Nummer in ein Product von Primformen zerlegen. Diese Primformen müssten aber von niedrigerem Grade als dem N^{ten} sein, was dem Satz III. voriger Nummer und dem Satze I. dieser Nummer widerspäche.

12.

Die Hessesche Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ einer Primform $\Phi(y_1, y_2)$ des N^{ten} Grades ist ebenfalls eine Primform.

Nach dem Satze III. No. 10 ist $\Phi(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function, folglich nach Satz III. No. 5 auch $\Psi(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function. Diese Form ist bekanntlich vom $(2N-4)^{\text{ten}}$ Grade. Wäre sie keine Primform, so liesse sich dieselbe nach Satz V. No. 10 in ein Product von Primformen zerlegen. Von diesen müsste aber wenigstens eine von niedrigerem Grade als dem N^{ten} sein, was nicht möglich ist.

Wir können im Folgenden voraussetzen, dass die Hessesche Covariante einer Primform N^{ten} Grades nicht identisch verschwindet. Denn das identische Verschwinden der Hesseschen Covariante einer binären Form hat zur Folge, dass die Form der Potenz einer linearen homogenen Function ihrer Argumente gleich wird. Es würde demnach schon eine lineare homogene Function zweier Integrale Wurzel einer rationalen Function werden, d. h. $N = 1$ sein.

13.

Es sei eine aus dem Fundamentalsysteme y_1, y_2 gebildete quadratische Form von ungleichen Linearfactoren

$$a_0 y_1^2 + a_1 y_1 y_2 + a_2 y_2^2 = \varphi(z), \tag{1.}$$

wo $\varphi(z)$ Wurzel einer rationalen Function. Setzen wir [117

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{y_2}{y_1} = u, \\ &a_0 + a_1 u + a_2 u^2 = f(u), \end{aligned}\right. \tag{2.}$$

so folgt aus (1.)

$$f(u) = \frac{\varphi(z)}{y_1^2}. \tag{3.}$$

Bezeichnet man die logarithmischen Ableitungen von $f(u)$ nach u und von $\varphi(z)$ nach z resp. mit $f_1(u)$, $\varphi_1(z)$, so folgt durch Differentiation der Gleichung (3.) mit Rücksicht auf Gleichung (1.) No. 6:

$$-Cf_1(u) = y_1^2 \varphi_1(z) - 2 y_1 \frac{dy_1}{dz}. \tag{4.}$$

Durch Differentiation dieser Gleichung und abermalige Berücksichtigung der Gleichung (1.) No. 6, und mit Benutzung der Differentialgleichung (B.) folgt:

$$C^2 \frac{df_1(u)}{du} = 2 y_1^3 \varphi_1(z) \frac{dy_1}{dz} + y_1^4 \left[\frac{d\varphi_1(z)}{dz} - 2P\right] - 2 y_1^2 \left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2. \tag{5.}$$

Durch Elimination von $\frac{dy_1}{dz}$ aus den Gleichungen (4.) und (5.) ergiebt sich:

$$C^2 \left[2 \frac{df_1(u)}{du} + f_1(u)^2\right] = y_1^4 \left[\varphi_1(z)^2 + 2 \frac{d\varphi_1(z)}{dz} - 4P\right]. \tag{6.}$$

Substituirt man hierin den Werth y_1 aus Gleichung (3.), so folgt:

$$C^2 \left[2 f(u) \frac{d^2 f(u)}{du^2} - \left(\frac{df(u)}{du}\right)^2\right] = \varphi(z)^2 \left[\varphi_1(z)^2 + 2 \frac{d\varphi_1(z)}{dz} - 4P\right]$$

oder

$$\lambda = \varphi(z)^2 \left[\varphi_1(z)^2 + 2 \frac{d\varphi_1(z)}{dz} - 4P\right], \tag{7.}$$

wo λ den constanten Werth $C^2(4a_0 a_2 - a_1^2)$ bedeutet.

Die Constante λ ist von Null verschieden, da C nach No. 5 nicht verschwindet und die quadratische Form ungleiche Factoren enthält. Wie man unmittelbar sieht, ist diese Constante von der Wahl des Fundamentalsystems unabhängig.

Sind P und $\varphi(z)$ gegeben, so bestimmt sich λ aus Gleichung (7.) am zweckmässigsten durch Substitution eines besonderen Werthes für z.

Da der Factor von $\varphi(z)^2$ in Gleichung (7.) eine rationale Function von z ist, so ergiebt sich zunächst:

I. Das Quadrat von $\varphi(z)$ ist eine rationale Function.

Setzen wir

$$-\frac{\lambda}{4\varphi(z)^2} = \psi(z), \tag{8.}$$

118] so ergiebt sich aus Gleichung (7.)

$$P = \frac{5}{16}\left(\frac{d\log\psi(z)}{dz}\right)^2 - \frac{1}{4\psi(z)}\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + \psi(z). \tag{9.}$$

II. Die Differentialgleichung (B.) hat in diesem Falle das Fundamentalsystem von Integralen:

$$y_1 = \psi(z)^{-\frac{1}{4}} e^{\int\sqrt{\psi(z)}\,dz}, \quad y_2 = \psi(z)^{-\frac{1}{4}} e^{-\int\sqrt{\psi(z)}\,dz}. \tag{10.}$$

Diese Integrale sind dann und nur dann algebraisch, wenn $\int\sqrt{\psi(z)}\,dz$ gleich dem Logarithmus einer algebraischen Function ist.

In dem Falle, dass y_1, y_2 algebraisch sind, haben sie, wie sich aus der Abhandlung von Abel (Oeuvres compl. t. I, p. 350 sqq.[1]) ergiebt, die Form:

$$\begin{cases} y_1 = \psi(z)^{-\frac{1}{4}}[p+q\sqrt{\psi(z)}]^{\alpha}, \\ y_2 = \psi(z)^{-\frac{1}{4}}[p+q\sqrt{\psi(z)}]^{-\alpha}, \end{cases} \tag{11.}$$

wo p, q rationale Functionen von z, α eine rationale Zahl ist.

Die Entscheidung hierüber erfolgt auf bekannte Weise.

Wir haben also unsere fernere Untersuchung nur auf die Fälle $N > 2$ auszudehnen.

14.

Es sei wieder $\Psi(y_1, y_2)$ die Hessesche Covariante der Primform N^{ten} Grades $\Phi(y_1, y_2)$, und es werde $N > 2$ vorausgesetzt. Da diese Covariante eine Primform ist (s. No. 12), so bilden ihre Linearfactoren das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen Gleichung m^{ten} Grades (s. No. 10), dessen Gliederzahl $2N-4$ ist. Der Index dieser Gleichung sei L', so ist nach Satz II. No. 9 und No. 11

$$(2N-4)L' = m = LN. \tag{1.}$$

[1]) Nouvelle édition, t. I (1881) S. 545 ff Sch.

Es bedeute nun η einen Linearfactor von $\Phi(y_1, y_2)$, J eine primitive L^{te} Wurzel der Einheit, ζ einen beliebigen Linearfactor von $\Psi(y_1, y_2)$. Da η und ζ Integrale der Differentialgleichung (B.) sind, so ist ζ nach No. 6 eine rationale Function von η und z.

Es sei der Factor $\zeta = F(\eta)$ so beschaffen, dass

$$F(\eta) = \beta\eta^{L-1}\psi(\eta^L), \tag{2.}$$

wo

$$\psi(\eta^L) = c_0 + c_L\eta^L + c_{2L}\eta^{2L} + \cdots + c_{(N-1)L}\eta^{(N-1)L} \tag{3.}$$

(s. No. 7), so geht durch einen Umlauf, welcher η in ηJ überführt, $F(\eta)$ in $J^{-1}F(\eta)$ über. Es genügt daher der irreductiblen Gleichung, welche [119 ζ befriedigt, auch ζJ^{-1}. Nach Satz I. No. 9 ist demnach

$$L' \geqq L. \tag{4.}$$

Ist 1) $N \geqq 4$, so ist

$$N \leqq 2N-4.$$

Es folgt also aus (1.) und (4.), dass nur

$$L' = L \quad \text{und} \quad N = 4$$

sein kann.

Ist 2) $N = 3$, so ergiebt die Gleichung (1.)

$$3L = 2L'. \tag{5.}$$

Es ist also $L' > L$. In diesem Falle ist aber nach Satz I. No. 9 L ein Divisor von L', also $2\frac{L'}{L}$ eine gerade Zahl, daher kann die Gleichung (5.) oder

$$3 = 2\frac{L'}{L}$$

nicht bestehen.

Hat also ein Linearfactor ζ der Hesseschen Covariante die Form (2.), so ist $N = 4$.

Hierher gehört auch der Fall $L = 1$, da in diesem Falle jedes Integral die Form (2.) hat. Aus Gleichung (1.) folgt

$$L'(2N-4) = N, \tag{6.}$$

also

$$N = 2 + \frac{2}{2L'-1},$$

eine Gleichung, welche in ganzen Zahlen nur bestehen kann, wenn

$$L' = 1, \quad N = 4.$$

Ist endlich ein Factor ζ der Hesseschen Covariante gleich $\alpha\eta$, wo α eine Constante, so ist nach Satz IV. No. 10 und nach No. 12 diese Covariante von $\Phi(y_1, y_2)$ nur um einen constanten Factor verschieden, also:

$$2N-4 = N,$$

d. h. wieder

$$N = 4. \tag{7.}$$

15.

Es mögen die Bezeichnungen der vorigen Nummer beibehalten werden, aber es werde vorausgesetzt, dass keiner der Factoren ζ die Form $\beta\eta^{L-1}\psi(\eta^L)$ habe, oder gleich η multiplicirt mit einer Constanten sei.

[120] Es ist alsdann nach No. 7, IV. kein Glied der Reihe:

$$F(\eta),\ F(\eta J),\ F(\eta J^2),\ \ldots,\ F(\eta J^{\lambda-1}), \tag{1.}$$

wo $\zeta = F(\eta)$ und $\lambda = L$ oder $\frac{L}{2}$, je nachdem L ungerade oder gerade, gleich einem anderen multiplicirt mit einer Constanten. Demnach sind die Glieder der Reihe (1.) Glieder des reducirten Wurzelsystems der irreductiblen Gleichung, welcher ζ genügt, also sämmtlich Factoren von $\Psi(y_1, y_2)$.

Ist $F_1(\eta)$ ein Linearfactor von $\Psi(y_1, y_2)$, welcher keinem Gliede der Reihe (1.) mit einer Constanten multiplicirt gleich ist, so ist auch $F_1(\eta J^a)$ für ein beliebiges ganzzahliges a nicht gleich einem Gliede der Reihe (1.) mit einer Constanten multiplicirt.

Denn aus der Gleichung

$$F_1(\eta J^a) = \varepsilon F(\eta J^b),$$

wo ε eine Constante ist, würde sich wegen der Irreductibilität der Gleichung für η ergeben:

$$F_1(\eta) = \varepsilon F(\eta J^{b-a}),$$

gegen die Voraussetzung.

Es ist also keines der Glieder der Reihe

$$F_1(\eta),\ F_1(\eta J),\ \ldots,\ F_1(\eta J^{\lambda-1}) \tag{2.}$$

gleich einem Gliede der Reihe (1.) mit einer Constanten multiplicirt. Es ist aber auch nach No. 7, IV. kein Glied der Reihe (2.) gleich einem anderen derselben Reihe mit einer Constanten multiplicirt. Die Glieder dieser Reihe sind also neue Glieder des reducirten Wurzelsystems der Gleichung für ζ, also sämmtlich Factoren von $\Psi(y_1, y_2)$.

In ähnlicher Weise würde aus der Existenz eines Linearfactors $F_2(\eta)$ von $\Psi(y_1, y_2)$, welcher weder gleich einem Gliede der Reihe (1.) noch einem Gliede der Reihe (2.) mit einer Constanten multiplicirt, die Existenz einer von (1.) und (2.) verschiedenen Reihe:

$$F_2(\eta),\ F_2(\eta J),\ \ldots,\ F_2(\eta J^{\lambda-1}) \tag{3.}$$

von Gliedern desselben reducirten Wurzelsystems oder λ neue Factoren von $\Psi(y_1, y_2)$ sich ergeben.

Durch Fortsetzung dieses Schlusses gelangt man zu dem Satze:

I. Ist $N > 2$ und kein Factor der Hesseschen Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ der Primform $\Phi(y_1, y_2)$ N^{ten} Grades von der Gestalt $\beta\eta^{L-1}\psi(\eta^L)$, so ist $\Psi(y_1, y_2)$ ein Product von Factoren der Form: [121]

$$P_\iota = F_\iota(\eta) F_\iota(\eta J) \ldots F_\iota(\eta J^{\lambda-1}), \tag{4.}$$

wo $\lambda = L$ oder $\frac{L}{2}$, je nachdem L ungerade oder gerade ist.

Da die Anzahl der Factoren von $\Psi(y_1, y_2)$ gleich $2N-4$, so ergiebt sich aus diesem Satze:

II. Es ist λ ein Divisor von $2N-4$.

Setzt man also

$$\frac{2N-4}{\lambda} = \lambda', \tag{5.}$$

so ist

$$\Psi(y_1, y_2) = CP_1 P_2 \ldots P_{\lambda'}, \tag{6.}$$

wo C eine Constante bedeutet.

16.

Unter den Voraussetzungen der vorigen Nummer sei:

1) $L = 2$. Aus Gleichung (1.) No. 14 folgt alsdann

$$N = \frac{2L'}{L'-1} = 2 + \frac{2}{L'-1}, \tag{1.}$$

d. h.

$$L' = 2, \quad N = 4 \tag{2.}$$

oder

$$L' = 3, \quad N = 3. \tag{3.}$$

2) $L > 2$. In diesem Falle bilden nach No. 7, I.

$$\eta_i \text{ und } \eta_i^{L-1}\psi(\eta_i^L)$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.). Setzen wir demnach

$$y_1 = \eta_i, \quad y_2 = \eta_i^{L-1}\psi(\eta_i^L). \tag{4.}$$

Wir haben alsdann

$$F_i(\eta_i) = \alpha_i y_1 + \beta_i y_2, \tag{5.}$$

wo α_i, β_i Constanten bedeuten. Ferner ist

$$F_i(\eta_i J^{\varkappa}) = \alpha_i J^{\varkappa} y_1 + \beta_i J^{-\varkappa} y_2. \tag{6.}$$

Demnach ist

$$P_i = J^{-\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}}[\beta_i^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1}\alpha_i^\lambda y_1^\lambda]. \tag{7.}$$

Es ergiebt sich also aus Gleichung (6.) vor. Nummer:

122] Ist $N > 2$, $L > 2$, und kein Factor der HESSEschen Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ der Primform $\Phi(y_1, y_2)$ N^{ten} Grades der Gestalt $\beta\eta^{L-1}\psi(\eta^L)$, oder gleich η multiplicirt mit einer Constanten, so hat $\Psi(y_1, y_2)$ die Form:

$$\Psi(y_1, y_2) = C(\beta_1^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1}\alpha_1^\lambda y_1^\lambda)(\beta_2^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1}\alpha_2^\lambda y_1^\lambda)\ldots(\beta_{k'}^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1}\alpha_{k'}^\lambda y_1^\lambda), \tag{8.}$$

wo C eine Constante bedeutet. Diese Covariante enthält also y_1 und y_2 nur in solchen Potenzen, deren Exponenten Vielfache von λ sind.

17.

Die HESSEsche Covariante der HESSEschen Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ Gleichung (8.) vor. Nummer hat die Gestalt:

$$\Psi_1(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{\lambda-2}\Psi_1'(y_1^\lambda, y_2^\lambda), \tag{1.}$$

wo $\Psi_1'(y_1^\lambda, y_2^\lambda)$ nur solche Potenzen von y_1 und y_2 enthält, deren Exponenten Vielfache von λ sind.

Da die HESSEsche Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ nach No. 12 Wurzel einer rationalen Function ist, so ist nach Satz III. No. 5 auch die HESSEsche Covariante der HESSEschen Covariante $\Psi_1(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function. Da $\Psi_1(y_1, y_2)$ den Factor y_1 $\lambda-2$ mal enthält, so enthält dieselbe Form nach Satz VI. No. 10 sämmtliche mit y_1 zu einem reducirten Wurzelsystem zu vereinigenden Integrale als Linearfactoren und zwar jedes mindestens zur $\lambda-2^{\text{ten}}$ Potenz. Da die Anzahl der Glieder dieses Wurzelsystems mindestens gleich N ist, so ist $\Psi_1(y_1, y_2)$ demnach durch eine Form vom mindestens $(\lambda-2)N^{\text{ten}}$ Grade theilbar. Nun ist $\Psi_1(y_1, y_2)$ vom Grade $4N-12$. Es muss also:

$$4N - 12 \geqq (\lambda-2)N \tag{2.}$$

oder

$$(6-\lambda)N \geqq 12 \tag{2a.}$$

sein. Aus dieser Ungleichung folgt:

I. Die Zahl λ ist kleiner als 6.

Aus Gleichung (1.) No. 14 folgt:

$$N = 2 + \frac{2L}{2L'-L}. \tag{3.}$$

Aus No. 14, ferner dem Satze II. No. 15, dem Satze I. dieser Nummer und der Gleichung (3.) ergiebt sich, dass für $N > 2$, $L > 2$ die folgende Tabelle die allein zulässigen Werthcombinationen von N, L, L' sämmtlich enthält: [123

$$\left\{\begin{array}{l} L = 3,\ \lambda = 3\colon\ L' = 2,\ N = 8 \text{ oder } L' = 3,\ N = 4, \\ L = 4,\ \lambda = 2\colon\ L' = 3,\ N = 6 \text{ oder } L' = 4,\ N = 4 \text{ oder } L' = 6,\ N = 3, \\ L = 5,\ \lambda = 5\colon\ L' = 3,\ N = 12 \text{ oder } L' = 5,\ N = 4, \\ L = 6,\ \lambda = 3\colon\ L' = 4,\ N = 8 \text{ oder } L' = 5,\ N = 5 \text{ oder } L' = 6,\ N = 4, \\ L = 8,\ \lambda = 4\colon\ L' = 5,\ N = 10 \text{ oder } L' = 6,\ N = 6 \text{ oder } L' = 8,\ N = 4, \\ L = 10,\ \lambda = 5\colon\ L' = 6,\ N = 12 \text{ oder } L' = 7,\ N = 7. \end{array}\right. \tag{4.}$$

Aus No. 14, den Gleichungen (2.) und (3.) in No. 16, dem Satze I. in No. 11 und aus der eben aufgestellten Tabelle (4.) dieser Nummer ergiebt sich der Satz:

II. Der niedrigste Grad N einer aus einem beliebigen Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.) y_1, y_2 gebildeten Form $f(y_1, y_2)$, welche gleich einer Wurzel einer rationalen Function von z, ist niemals grösser als 12.

18.

Es sei wieder η ein Linearfactor einer Primform niedrigsten Grades, und es werde $L > 2$ vorausgesetzt. Es giebt alsdann nach No. 7, I. ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.) von der Form

$$(1.)\qquad y_1 = \eta, \quad y_2 = \eta^{L-1}\psi(\eta^L).$$

Stellen wir die Primform N^{ten} Grades durch dasselbe dar, so haben wir

$$\Phi(y_1, y_2) = a_0 y_1^N + a_1 y_1^{N-1} y_2 + \cdots + a_N y_2^N.$$

Diese Form hat die Eigenschaft:

$$(2.)\qquad \Phi(y_1 J, y_2 J^{-1}) = \varepsilon \Phi(y_1, y_2),$$

wo ε eine Constante bedeutet.

Da die Gleichung (2.) identisch erfüllt werden muss, so ergiebt sich, dass

$$(3.)\qquad \varepsilon = J^{N-2k},$$

wo k eine der Zahlen $0, 1, \ldots, N$ bedeutet, und dass

$$(4.)\qquad a_i = 0, \quad \text{wenn nicht } 2i \equiv 2k, \text{ mod. } L, \text{ d. h. } i \equiv k, \text{ mod. } \lambda.$$

Da aber $\Phi(y_1, y_2)$ als Primform keinen quadratischen Factor enthält, so dürfen nicht gleichzeitig

124] $$a_0 = 0 \quad \text{und} \quad a_1 = 0$$

und nicht gleichzeitig

$$a_{N-1} = 0 \quad \text{und} \quad a_N = 0$$

sein. Da aber der Voraussetzung nach y_1 ein Divisor der Form $\Phi(y_1, y_2)$ ist, so hat man

$$(5.)\qquad a_N = 0.$$

Demnach ist entweder

$$\left.\begin{array}{ll} (6.) & 2k \equiv 0 \;\text{ und }\; 2k \equiv 2(N-1) \\ \text{oder} & \\ (6a.) & 2k \equiv 2 \;\text{ und }\; 2k \equiv 2(N-1) \end{array}\right\} \text{mod. } L.$$

Im Falle (6.) wäre

$$2(N-1) \equiv 0, \text{ mod. } L,$$

d. h.

$$(7.)\qquad N-1 \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Finden nun 1) die Voraussetzungen der No. 14 statt, so ist

$$N = 4,$$

also, da $L > 2$, nach Congruenz (7.),

$$\lambda = 3.$$

Es ergiebt sich also

$$(8.)\qquad N = 4, \quad L = 3 \quad \text{oder} \quad L = 6.$$

Finden 2) die Voraussetzungen der No. 15 statt, so folgt aus der Congruenz (7.)

$$(9.)\qquad 2N - 2 \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Unter denselben Voraussetzungen ist aber nach dem Satze II. in No. 15

$$(10.)\qquad 2N - 4 \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Aus den Congruenzen (9.) und (10.) ergiebt sich:

$$2 \equiv 0, \text{ mod. } \lambda,$$

d. h.

$$(11.)\qquad \lambda = 2, \quad L = 4.$$

Die möglichen Gestalten der Primformen niedrigsten Grades, für $N > 2$, $L > 2$ sind danach in folgender Tabelle enthalten:

125]

$$
(12.)\quad\left\{\begin{array}{ll}
(\alpha) & N = 3,\quad L = 4,\\
 & \Phi(y_1, y_2) = a_0 y_1^3 + a_2 y_1 y_2^2,\\
(\beta) & N = 4,\quad L = 3 \text{ oder } 6,\\
 & \Phi(y_1, y_2) = a_0 y_1^4 + a_3 y_1 y_2^3,\\
 & N = 4,\quad L = 4,\\
 & \Phi(y_1, y_2) = a_1 y_1^3 y_2 + a_3 y_1 y_2^3,\\
(\gamma) & N = 5,\quad L = 6,\\
 & \Phi(y_1, y_2) = a_1 y_1^4 y_2 + a_4 y_1 y_2^4,\\
(\delta) & N = 6,\quad L = 4,\\
 & \Phi(y_1, y_2) = a_1 y_1^5 y_2 + a_3 y_1^3 y_2^3 + a_5 y_1 y_2^5.\\
 & N = 6,\quad L = 8,\\
 & \Phi(y_1, y_2) = a_1 y_1^5 y_2 + a_5 y_1 y_2^5,\\
(\varepsilon) & N = 7,\quad L = 10,\\
 & \Phi(y_1, y_2) = a_1 y_1^6 y_2 + a_6 y_1 y_2^6,\\
(\zeta) & N = 8,\quad L = 3 \text{ oder } 6,\\
 & \Phi(y_1, y_2) = a_1 y_1^7 y_2 + a_4 y_1^4 y_2^4 + a_7 y_1 y_2^7,\\
(\eta) & N = 10,\quad L = 8,\\
 & \Phi(y_1, y_2) = a_1 y_1^9 y_2 + a_5 y_1^5 y_2^5 + a_9 y_1 y_2^9,\\
(\vartheta) & N = 12,\quad L = 5 \text{ oder } 10,\\
 & \Phi(y_1, y_2) = a_1 y_1^{11} y_2 + a_6 y_1^6 y_2^6 + a_{11} y_1 y_2^{11}.
\end{array}\right.
$$

19.

Die Tabelle (12.) der vorigen Nummer gestattet noch einige Reductionen.

In der That ist die Hesse'sche Covariante einer kubischen Form eine quadratische Form. Es kann demnach N nicht den Werth 3 haben (siehe auch No. 12). Deshalb ist in obiger Tabelle die Form (α) auszuschliessen.

Die Hesse'sche Covariante der Form (β) für $N = 4$, $L = 4$ obiger Tabelle ist

$$-3^2(a_1 y_1^2 - a_3 y_2^2)^2.$$

Es ist daher nach Satz III. No. 5 schon $a_1 y_1^2 - a_3 y_2^2$ Wurzel einer rationalen Function, also $N < 4$. Demnach ist die Form (β) für $N = 4$, $L = 4$ auszuschliessen.

Ist $f(y_1, y_2)$ eine beliebige binäre Form, so ist bekanntlich [126

$$(1.)\quad \frac{\partial^r f}{\partial y_1^r}\frac{\partial^r f}{\partial y_2^r} - r\frac{\partial^r f}{\partial y_1^{r-1}\partial y_2}\frac{\partial^r f}{\partial y_1 \partial y_2^{r-1}} + \frac{r(r-1)}{1.2}\frac{\partial^r f}{\partial y_1^{r-2}\partial y_2^2}\frac{\partial^r f}{\partial y_1^2 \partial y_2^{r-2}} - \text{etc.}$$

eine Covariante von $f(y_1, y_2)$.

Danach ist für $r = 4$ eine Covariante der Form (γ)

$$(1\text{a}.)\quad -(1.2.3.4)^2.2.3\, a_1 a_4 y_1 y_2.$$

Da nun weder a_1 noch a_4 verschwinden dürfen, weil $\Phi(y_1, y_2)$ als Primform nicht durch einen quadratischen Factor theilbar ist, so ist demnach (1a.) eine Form **zweiten** Grades, welche nach Satz III. No. 5 Wurzel einer rationalen Function ist. Es wäre also $N < 5$, und deshalb Form (γ) auszuschliessen.

Ebenso ist für $r = 6$ eine nach (1.) gebildete Covariante der Form (ε):

$$(1\text{b}.)\quad -2.5.(1.2.3.4.5.6)^2 a_1 a_6 y_1 y_2.$$

Es ist also aus denselben Gründen Form (ε) auszuschliessen. Es verbleibt demnach folgende Tabelle:

(2.) $N > 2$, $L > 2$,

N	L	$\Phi(y_1, y_2)$
4	3 oder 6	$a_0 y_1^4 + a_3 y_1 y_2^3$
6	4	$a_1 y_1^5 y_2 + a_3 y_1^3 y_2^3 + a_5 y_1 y_2^5$
6	8	$a_1 y_1^5 y_2 + a_5 y_1 y_2^5$
8	3 oder 6	$a_1 y_1^7 y_2 + a_4 y_1^4 y_2^4 + a_7 y_1 y_2^7$
10	8	$a_1 y_1^9 y_2 + a_5 y_1^5 y_2^5 + a_9 y_1 y_2^9$
12	5 oder 10	$a_1 y_1^{11} y_2 + a_6 y_1^6 y_2^6 + a_{11} y_1 y_2^{11}$

Nach Gleichung (2.) No. 16 muss noch der Fall $N = 4$, $L = 2$ berücksichtigt werden ($N = 3$ Gleichung (3.) daselbst ist aus dem im Anfange dieser Nummer angegebenen Grunde auszuschliessen). In diesem Falle hat nach No. 7, I. jedes Integral die Form

$$y\psi(y^2).$$

Nach No. 14 ist auch der Fall $N = 4$, $L = 1$ in Betracht zu ziehen.

Hieraus folgt, dass zur Tabelle (2.) noch die aus einem **beliebigen Fundamentalsystem** η_1, η_2 gebildete Form vierten Grades hinzugefügt werden muss, nämlich

$$(3.)\quad \begin{cases} N = 4, \quad L = 1 \quad \text{oder} \quad 2, \\ \Phi(\eta_1, \eta_2) = a_0\eta_1^4 + a_1\eta_1^3\eta_2 + a_2\eta_1^2\eta_2^2 + a_3\eta_1\eta_2^3 + a_4\eta_2^4. \end{cases}$$

127] 20.

Aus der vorigen Nummer und No. 2 ergiebt sich der Satz:

I. Wenn die Differentialgleichung (B.) ein algebraisches Integral besitzt, so ist entweder dieses selber, d. h. eine aus einem Fundamentalsysteme von Integralen y_1, y_2 gebildete Form ersten Grades, oder eine aus denselben Integralen gebildete Form, deren Grad eine der Zahlen 2, 4, 6, 8, 10, 12 ist, Wurzel einer rationalen Function.

II. Ist umgekehrt eine aus einem Fundamentalsysteme y_1, y_2 gebildete Form, höheren als zweiten Grades und nicht Potenz einer Form zweiten Grades, Wurzel einer rationalen Function, so hat die Differentialgleichung (B.) ein algebraisches Integral.

Es sei nämlich die Form:

$$(1.)\quad \Phi(y_1, y_2) = a_0 y_1^n + a_1 y_1^{n-1} y_2 + \cdots + a_n y_2^n = \varphi(z),$$

wo $\varphi(z)$ die Wurzel einer rationalen Function bedeutet. Ist $\Phi(y_1, y_2)$ die Potenz einer Form niedrigeren Grades $\Psi(y_1, y_2)$, so ergiebt sich, dass auch die letztere Form gleich der Wurzel einer rationalen Function ist. Dieselbe ist der Voraussetzung nach entweder vom ersten Grade — in welchem Falle die Differentialgleichung (B.) durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird — oder höheren als zweiten Grades. Im zweiten Falle sei also:

$$(2.)\quad \Psi(y_1, y_2) = b_0 y_1^k + b_1 y_1^{k-1} y_2 + \cdots + b_k y_2^k = X(z),$$

wo $k > 2$, und wo der Voraussetzung nach, wenn

$$(2a.)\quad \Psi(y_1, y_2) = (c_{11} y_1 + c_{12} y_2)^{\alpha_1} (c_{21} y_1 + c_{22} y_2)^{\alpha_2} (c_{31} y_1 + c_{32} y_2)^{\alpha_3} \ldots,$$

die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen.

Wir setzen wie in No. 13

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{y_2}{y_1} = u, \qquad b_0 + b_1 u + \cdots + b_k u^k = f(u), \\ \dfrac{d \log f(u)}{du} = f_1(u), \qquad \dfrac{d \log X(z)}{dz} = X_1(z). \end{cases}$$

Alsdann geht die Gleichung (2.) über in:

$$(4.)\quad f(u) = \frac{X(z)}{y_1^k}.$$

Die logarithmische Differentiation dieser Gleichung unter Benutzung der Gleichung (1.) No. 6 ergiebt:

$$(5.)\quad -Cf_1(u) = y_1^2 X_1(z) - k y_1 \frac{dy_1}{dz}.$$

Die Differentiation dieser Gleichung ergiebt unter abermaliger Anwendung [128 der Gleichung (1.) No. 6 und Berücksichtigung der Differentialgleichung (B.):

$$(6.)\quad C^2 \frac{df_1(u)}{du} = 2y_1^3 \frac{dy_1}{dz} X_1(z) + Q y_1^4 - k y_1^2 \left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2,$$

wo

$$(7.)\quad Q = \frac{dX_1(z)}{dz} - kP.$$

Die Elimination von $\frac{dy_1}{dz}$ aus den Gleichungen (5.) und (6.) ergiebt:

$$(8.)\quad C^2 \left[k \frac{df_1(u)}{du} + f_1(u)^2\right] = [X_1(z)^2 + kQ]\, y_1^4.$$

Substituirt man hierin für y_1 seinen Werth aus Gleichung (4.), so folgt:

$$(9.)\quad C^2 \left[k \frac{df_1(u)}{du} + f_1(u)^2\right] f(u)^{\frac{4}{k}} = [X_1(z)^2 + kQ]\, X(z)^{\frac{4}{k}}.$$

Es soll jetzt nachgewiesen werden, dass diese Gleichung in Bezug auf u nicht identisch erfüllt ist.

Dieselbe wäre nur dann identisch in Bezug auf u erfüllbar, wenn die linke Seite von u unabhängig wäre. Nun ist zunächst der Voraussetzung nach $f(u)$ nicht identisch Null, und es kann auch nicht identisch

$$k \frac{df_1(u)}{du} + f_1(u)^2 = 0$$

sein. Denn hieraus ergäbe sich

$$f(u) = K(u - \mu)^k,$$

wo K und μ Constanten sind, oder was dasselbe ist:

$$\Psi(y_1, y_2) = K(y_2 - \mu y_1)^k.$$

Dieses widerspräche aber der Voraussetzung. Es könnte also nur noch

$$R = f(u)^{\frac{4}{k}}\left[k\frac{df_1(u)}{du} + f_1(u)^2\right] = \nu$$

sein, wo ν eine von u unabhängige und von Null verschiedene Grösse wäre. Da der zweite Factor von R eine rationale Function von u ist, so müsste auch

$$f(u)^{\frac{4}{k}} = g(u)$$

eine rationale Function von u sein. Hieraus ergäbe sich aber

$$f(u)^4 = g(u)^k$$

oder

$$(c_{11}+c_{12}u)^{4\alpha_1}(c_{21}+c_{22}u)^{4\alpha_2}(c_{31}+c_{32}u)^{4\alpha_3}\cdots = g(u)^k.$$

129] Es müssten also die Exponenten $4\alpha_1, 4\alpha_2, 4\alpha_3, \ldots$ den gemeinschaftlichen Theiler k haben. Da aber der Voraussetzung nach $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, so müsste k ein Theiler von 4 sein, also, da $k > 2$,

$$k = 4$$

sein.

In diesem Falle ist also:

$$R = 4\frac{d^2f(u)}{du^2} - \frac{3}{f(u)}\left(\frac{df(u)}{du}\right)^2.$$

Da aber der Voraussetzung nach $f(u)$ mindestens zwei ungleiche Linearfactoren hat, so ist $\left(\frac{df(u)}{du}\right)^2$ nicht durch $f(u)$ theilbar, deshalb kann R sich nicht identisch auf eine Constante reduciren.

Es ergiebt sich daher aus der Gleichung (9.) u als algebraische Function von z. Alsdann aber liefert auch die Gleichung (4.) y_1 als algebraische Function von z, wodurch unser Satz bewiesen ist.

21.

Ist y ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B.), so genügt

$$v = y^\mu \tag{1.}$$

einer linearen Differentialgleichung $(\mu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten

$$\frac{d^{\mu+1}v}{dz^{\mu+1}} + P_{\mu-1}\frac{d^{\mu-1}v}{dz^{\mu-1}} + P_{\mu-2}\frac{d^{\mu-2}v}{dz^{\mu-2}} + \cdots + P_0 v = 0, \tag{C.}$$

(vergl. die Abhandlung des Herrn Liouville, dessen Journal t. IV, p. 430).

Dieselbe wird erhalten, wenn man in der Gleichung:

$$\frac{dv_{i+1}}{dz} = (i+1)(\mu-i)Pv_i + v_{i+2} \tag{2.}$$

$i = 0, 1, \ldots, \mu-1$ setzt, $v_0 = v$, $v_{\mu+1} = 0$ annimmt und aus diesen μ Gleichungen durch successive Differentiation und Elimination $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ herausschafft.

I. Der Differentialgleichung (C.) genügt auch jede aus einem Fundamentalsysteme y_1, y_2 gebildete Form μ^{ten} Grades.

In der That, da derselben der Ausdruck

$$(c_1 y_1 + c_2 y_2)^\mu$$

für beliebige Werthe der Constanten c_1, c_2 genügt, so ist auch

$$\sum_0^\mu {}_i\, \lambda_i (c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2)^\mu, \tag{3.}$$ [130

wo die λ_i ebenfalls Constanten bedeuten, ein Integral der Differentialgleichung (C.). Setzt man nun

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{1.2\ldots k} = \mu_k$$

und

$$\mu_k \sum_0^\mu {}_i\, \lambda_i c_{i1}^{\mu-k} c_{i2}^k = a_k, \qquad (k = 0, 1, \ldots, \mu) \tag{4.}$$

wo $a_0, a_1, \ldots, a_\mu$ beliebig gegebene Grössen sind, so ist die Determinante des Systems linearer Gleichungen (4.) für die Grössen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ wegen der Willkürlichkeit der Grössen c_{i1}, c_{i2} von Null verschieden, woraus sich ergiebt, dass das Integral (3.) der Differentialgleichung (C.) gleich einer beliebigen Form

$$a_0 y_1^\mu + a_1 y_1^{\mu-1} y_2 + \cdots + a_\mu y_2^\mu$$

gemacht werden kann.

In der oben angeführten Abhandlung des Herrn Liouville bemerkt derselbe pag. 431 in einer Note gelegentlich, dass

$$A_1 y_1^\mu + A_2 y_1^{\mu-1} y_2 + \cdots + A_{\mu+1} y_2^\mu,$$

wo y_1, y_2 zwei verschiedene Integrale der Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dz^2} = Py$,

$A_1, A_2, \ldots, A_{\mu+1}$ willkürliche Constanten bedeuten, das vollständige Integral der linearen Differentialgleichung $(\mu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung sei, welcher y^μ genügt. Den Beweis theilt er nicht mit, da diese Bemerkung für die Frage, welche dort verhandelt wird, nicht von Belang sei. Wie man sieht, stimmt der Sache nach diese Bemerkung mit unserem Satze I. dieser Nummer überein.

Es lässt sich übrigens auch direct durch Differentiation in analoger Weise wie für $v = y^\mu$, für $v = y_1^{\mu-k} y_2^k$ zeigen, dass die lineare Differentialgleichung, welcher dasselbe genügt, durch Elimination aus dem System (2.) erhalten wird. Aus der Homogeneität der Differentialgleichung (C.) ergiebt sich alsdann, dass eine beliebige aus y_1, y_2 gebildete Form ein Integral derselben ist.

II. Die Integrale

$$y_1^\mu,\ y_1^{\mu-1} y_2,\ \ldots,\ y_2^\mu \tag{5.}$$

der Differentialgleichung (C.) bilden ein Fundamentalsystem.

Denn wenn die Gleichung

$$a_0 y_1^\mu + a_1 y_1^{\mu-1} y_2 + \cdots + a_\mu y_2^\mu = 0$$

131] bestehen könnte, ohne dass die constanten Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_\mu$ sämmtlich Null wären, so ergäbe sich aus derselben ein für jedes z constanter Werth des Verhältnisses $\frac{y_2}{y_1}$, was der Voraussetzung widerspricht, dass y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.) bilden.

Aus der Bildungsweise der Differentialgleichung (C.) ergiebt sich:

III. Die Differentialgleichung (C.) hat keine anderen singulären Punkte als die der Differentialgleichung (B.).

IV. Sind die Integrale der Differentialgleichung (B.) sämmtlich algebraisch, so sind auch die Integrale der Differentialgleichung (C.) sämmtlich algebraisch.

Sind nämlich die Integrale der Differentialgleichung (B.) sämmtlich algebraisch, so gilt dasselbe für das Fundamentalsystem (5.) der Integrale der Differentialgleichung (C.), folglich für jedes Integral derselben.

22.

Aus den Sätzen I. und II. No. 20 und aus No. 13 ergiebt sich, wenn man noch erwägt, dass die Differentialgleichung (C.) für $\mu = 1$ mit der Differentialgleichung (B.) coincidirt, der folgende Satz:

Die nothwendige Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung (B.) algebraische Integrale besitzt, ist die, dass die Differentialgleichung (C.) für eine der Zahlen $\mu = 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt werde.

Erfolgt dieses für $\mu = 1$, oder erst für einen der angegebenen Zahlenwerthe von μ, der grösser ist als 2, so hat auch umgekehrt die Differentialgleichung (B.) algebraische Integrale.

Erfolgt dieses aber zuerst für $\mu = 2$, und ist $\varphi(z)$ ein Integral der Differentialgleichung (C.) für $\mu = 2$, welches gleich einer Wurzel einer rationalen Function, so ist $\varphi(z)^2$ eine rationale Function von z, und

$$\varphi(z)^2\left[\left(\frac{d\log\varphi(z)}{dz}\right)^2 + 2\,\frac{d^2\log\varphi(z)}{dz^2} - 4P\right]$$

eine constante Grösse λ. Ist nun $\lambda\int\frac{dz}{\varphi(z)}$ gleich dem Logarithmus einer algebraischen Function, so sind die Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch.

Durch diesen Satz ist die Untersuchung der Frage, wie die Differentialgleichung (B.) beschaffen sein müsse, um algebraische Integrale zu besitzen, [132 bis auf die Untersuchung von $\int\frac{dz}{\varphi(z)}$ für den Fall $\mu = 2$, nach No. 3 auf die elementare Aufgabe zurückgeführt worden, zu ermitteln, unter welchen Umständen ein System linearer Gleichungen Lösungen zulässt oder nicht zulässt.

In der That wird man ein für allemal für $\mu = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ die Differentialgleichung (C.) aufstellen können, und in jedem gegebenen Falle die Untersuchung anzustellen haben, unter welchen Umständen eine dieser Differentialgleichungen durch eine Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird, eine Untersuchung, welche nach No. 3 auf die Frage der Lösbarkeit eines Systems linearer Gleichungen zurückgeführt wird.

23.

Wir wollen nunmehr zeigen, dass man die allgemeine Aufstellung der Differentialgleichung (C.) für die angegebenen Werthe von μ auch entbehren kann.

Soll nämlich die Differentialgleichung (C.) für $\mu > 2$ durch eine Wurzel einer rationalen Function befriedigt werden, so sind nach dem Satze der vorigen Nummer die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B.), folglich auch nach dem Satze IV. No. 21 die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (C.) algebraisch. Diese gehört demnach zur Klasse der Differentialgleichungen (12.) No. 4 meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 66[1]) (vergl. diese Arbeit No. 4), und hat nach Satz III. No. 21 die singulären Punkte $a_1, a_2, \dots, a_\varrho$.

Es seien jetzt r_i und $1-r_i$ die beiden Wurzeln der zum singulären Punkte a_i gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.) (s. No. 4), y_1, y_2 das Fundamentalsystem, zu welchem diese Wurzeln als Exponenten resp. gehören, so gehören die nach Satz II. No. 21 ein Fundamentalsystem bildenden Integrale $y_1^\mu, y_1^{\mu-1} y_2, \dots, y_2^\mu$ der Differentialgleichung (C.) resp. zu den Exponenten:

$$(1.)\qquad \mu r_i,\ (\mu-2)r_i+1,\ (\mu-4)r_i+2,\ \dots,\ (\mu-2\mu)r_i+\mu,$$

welche demnach auch die $\mu+1$ Wurzeln der zum singulären Punkte a_i gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (C.) sind.

Sind ferner σ und $-\sigma-1$ die beiden Wurzeln der zu $z=\infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.) (s. No. 4), so ergiebt sich ebenso, dass die zu $z=\infty$ gehörige determinirende Funda-
133] mentalgleichung der Differentialgleichung (C.) die Wurzeln

$$(2.)\qquad \mu\sigma;\ (\mu-2)\sigma-1,\ (\mu-4)\sigma-2,\ \dots,\ (\mu-2\mu)\sigma-\mu$$

hat. Ist ein Integral v der Differentialgleichung (C.) Wurzel einer rationalen Function, so hat dasselbe die Form:

$$(3.)\qquad v = (z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\dots(z-a_\varrho)^{\alpha_\varrho} g(z) \qquad \text{(s. No. 3)},$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$ rationale Zahlen und $g(z)$ eine ganze rationale Function bedeuten.

Aus meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 66[1]), No. 5) ergiebt sich, dass die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$ Zahlenwerthe aus der Reihe (1.) sind.

Ist ferner ν der Grad von $g(z)$, so ist nach derselben Arbeit

$$-(\nu+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\varrho)$$

mit einer der Grössen (2.) identisch.

1) Abh. VI, Bd. I dieser Ausgabe, S. 159 ff. Sch.

Man hat also nachzusehen, für welche ganzzahligen Werthe von $k_1, k_2, \dots, k_\varrho$ und $\mathfrak{a}$ die Summe

$$(4.)\quad -[(\mu-2k_1)r_1+k_1+(\mu-2k_2)r_2+k_2+\dots+(\mu-2k_\varrho)r_\varrho+k_\varrho+(\mu-2\mathfrak{a})\sigma-\mathfrak{a}],$$

wo μ einen der Zahlenwerthe 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12 darstellt, eine ganze positive Zahl ν wird, und dann

$$(5.)\quad \alpha_1 = (\mu-2k_1)r_1+k_1,\ \ \alpha_2 = (\mu-2k_2)r_2+k_2,\ \ \dots,\ \ \alpha_\varrho = (\mu-2k_\varrho)r_\varrho+k_\varrho$$

und den Grad von $g(z)$ gleich ν zu wählen, und mit diesen Werthen zu untersuchen, ob v in (3.) der Differentialgleichung (C.) genügt.

Diese Untersuchung lässt sich nun folgendermassen ausführen:

Es sei μ eine der Zahlen 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, und es werde das Gleichungssystem (2.) No. 21 gebildet:

$$(6.)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dv}{dz} &= v_1, \\ \frac{dv_1}{dz} &= \mu P v + v_2, \\ \frac{dv_2}{dz} &= 2(\mu-1) P v_1 + v_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dv_\mu}{dz} &= \mu P v_{\mu-1}. \end{aligned}\right.$$

Ist nunmehr

$$(7.)\qquad g(z) = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \dots + g_\nu z^\nu,$$

und substituiren wir in die erste der Gleichungen (6.) den Werth v aus Gleichung (3.), so liefert dieselbe v_1. Setzen wir diesen Werth für v_1 [134
und v aus Gleichung (3.) in die zweite der Gleichungen (6.), so erhalten wir v_2 u. s. w. Die letzte der Gleichungen (6.) muss identisch befriedigt werden. Man erhält also aus dieser zuletzt ein System linearer Gleichungen für die Coefficienten $g_0, g_1, \dots, g_\nu$. Je nachdem dasselbe für irgend eine der Zahlen $\mu = 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ und irgend eines der oben bestimmten Werthsysteme $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho, \nu$ endliche Lösungen besitzt oder nicht, wird die Differentialgleichung (C.) durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt oder nicht.

24.

Wir schliessen dem Vorstehenden einige Sätze an, aus welchen sich in vielen Fällen auch ohne die nach voriger Nummer zu veranstaltende Rechnung beurtheilen lässt, ob die Differentialgleichung (B.) algebraische Integrale besitzt.

Es sei r eine Wurzel der zum singulären Punkte a oder zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.), wo a einen der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ bedeutet, und es werde vorausgesetzt, dass die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch sind, so ist r eine rationale Zahl (s. No. 4). Bezeichnen wir mit y das Glied des zu a gehörigen Fundamentalsystems von Integralen derselben Differentialgleichung, welches dem Exponenten r entspricht, und setzen:

$$(1.)\qquad r = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{n}},$$

wo $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{n}$ zwei ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler bedeuten.

Nach einem Umlaufe von z um a geht y in $yj^{\mathfrak{z}}$ über, wo j eine primitive Wurzel der Gleichung

$$(2.)\qquad j^{\mathfrak{n}} = 1$$

ist. Nach No. 1 ist $\mathfrak{n}$ ein Theiler des Grades m der irreductiblen Gleichung, welcher y genügt.

Die Anzahl ν der Glieder des reducirten Wurzelsystems derselben Gleichung kann nicht kleiner als N sein (s. Satz I. No. 11).

Nach No. 1 und No. 9 ist aber

$$(3.)\qquad \nu \leqq \frac{m}{\mathfrak{n}},$$

d. h. nach No. 11

$$(4.)\qquad \nu \leqq \frac{NL}{\mathfrak{n}}.$$

135] Hieraus ergiebt sich, dass

$$(5.)\qquad \mathfrak{n} \leqq L.$$

Ist demnach

$$(6.)\qquad N > 2,$$

so folgt aus der Tabelle (2.) No. 19 und Gleichung (3.) derselben Nummer

$$(7.)\qquad \mathfrak{n} \leqq 10.$$

Wir erhalten also den Satz:

Ist irgend ein Nenner der auf ihre kleinste Benennung gebrachten rationalen Zahlen, welche die zu den singulären Punkten und zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung (B.) befriedigen, grösser als 10, so besitzt dieselbe Differentialgleichung kein algebraisches Integral, wenn nicht diese selber oder die Differentialgleichung (C.) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird.

25.

Wird die Differentialgleichung (C.) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt, so ist unter Beibehaltung der Bezeichnungen der No. 13

$$(1.)\qquad y_1 y_2 = \psi(z)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ist a irgend ein singulärer Punkt der Differentialgleichung (B.), r und $1-r$ die Wurzeln der zu demselben gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, so ist in der Umgebung von a:

$$(2.)\qquad \begin{cases} y_1 = c_{11} X_1 (z-a)^r + c_{12} X_2 (z-a)^{1-r}, \\ y_2 = c_{21} X_1 (z-a)^r + c_{22} X_2 (z-a)^{1-r}, \end{cases}$$

wo X_1 und X_2 nach positiven ganzen Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihen sind, die für $z = a$ nicht verschwinden.

Aus den Gleichungen (1.) und (2.) folgt:

$$(3.)\qquad y_1 y_2 = c_{11} c_{21} X_1^2 (z-a)^{2r} + (c_{11} c_{22} + c_{21} c_{12}) X_1 X_2 (z-a) + c_{12} c_{22} X_2^2 (z-a)^{2(1-r)} = \psi(z)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ist $\psi(z)$ für $z = a$ von der μ^{ten} Ordnung Null oder von der Ordnung $-\mu$ unendlich, und hat r einen von den Zahlen 1, 2, 4 verschiedenen Nenner, so ergiebt sich aus dieser Gleichung [136

$$c_{11} = 0,\quad c_{22} = 0 \quad \text{oder} \quad c_{12} = 0,\quad c_{21} = 0$$

und $-\frac{\mu}{2} = 1$ oder

$$(4.)\qquad \mu = -2,$$

d. h. $\psi(z)$ kann in einem singulären Punkte nur unendlich werden, und zwar zweiter Ordnung. Nach Gleichung (1.) wäre aber jeder Punkt, in welchem $\psi(z)$ verschwindet, ein singulärer, es kann deshalb $\psi(z)$ überhaupt für keinen endlichen Werth von z verschwinden. Wird aber $\psi(z)$ in einem nicht singulären Punkte b unendlich, so folgt aus Gleichung (1.), dass $\psi(z)$ den Factor $z-b$ eine gerade Anzahl mal enthält. Es ist demnach

$$\psi(z) = \frac{1}{g(z)^2}, \tag{5.}$$

wo $g(z)$ eine ganze rationale Function von z ist.

Je nachdem also $\int \frac{dz}{g(z)}$ gleich dem Logarithmus einer algebraischen Function ist oder nicht, sind die Integrale der Differentialgleichung (B.) Wurzeln rationaler Functionen oder überhaupt nicht algebraisch.

Man hat also den Satz:

Wird die Differentialgleichung (C.) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt, und sind die sämmtlichen Nenner der Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen von den Zahlen 1, 2, 4 verschieden, so wird die Differentialgleichung (B.) entweder überhaupt durch kein algebraisches Integral oder durch die Wurzeln rationaler Functionen befriedigt.

In einer Abhandlung dieses Journal Bd. 75, S. 292 ff.[1]) hat Herr Schwarz unter Anwendung von Abbildungsproblemen die Bedingungen aufgestellt, unter welchen die Differentialgleichung der Gaussschen Reihe algebraische Integrale besitzt. Da diese Differentialgleichung einen besonderen Fall der Differentialgleichung (A.) bildet, wenn nämlich die Anzahl der singulären Punkte gleich zwei, so liessen sich die Resultate des Herrn Schwarz aus den oben entwickelten Principien für den besonderen Fall $\varrho = 2$ herleiten. Wir heben hier nur hervor, dass aus der vorhergehenden und dieser Nummer sich der wahre Grund dafür ergiebt, dass in der Tabelle derselben Abhandlung S. 323[2]), wenn nicht von den drei Zahlen λ'', μ'', ν'' zwei den Nenner 2 haben, die Nenner die Zahl 5 nicht übersteigen dürfen.

1) H. A. Schwarz, Gesammelte math. Abhandlungen, Bd. II (1890), S. 211 ff. Sch.

2) ebenda S. 246. Sch.

26. [137

Es seien wieder die rationalen Zahlen

$$\frac{\lambda_i}{\mathfrak{n}_i} \quad \text{und} \quad 1-\frac{\lambda_i}{\mathfrak{n}_i}$$

die Wurzeln der zum singulären Punkte a_i gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B) und y_{i1}, y_{i2} das zu demselben singulären Punkte gehörige Fundamentalsystem von Integralen derselben Differentialgleichung, welche resp. den Exponenten $\frac{\lambda_i}{\mathfrak{n}_i}$ und $1-\frac{\lambda_i}{\mathfrak{n}_i}$ entsprechen. Ferner sei $\frac{\lambda_i}{\mathfrak{n}_i}$ die in algebraischem Sinne grössere dieser beiden Zahlen, so dass $\frac{\lambda_i}{\mathfrak{n}_i}$ positiv ist.

Alsdann ist nach meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 66[1]) No. 5) in der Umgebung von a_i

$$y_{i1} = (z-a_i)^{\frac{\lambda_i}{\mathfrak{n}_i}}\omega_{i1}, \tag{1.}$$

wo ω_{i1} eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $z-a_i$ fortschreitende Reihe bedeutet, welche für $z = a_i$ nicht verschwindet.

Nach No. 6 Gleichung (1.) ist

$$y_{i2} = C_i y_{i1} \int \frac{dz}{(z-a_i)^{\frac{2\lambda_i}{\mathfrak{n}_i}}\omega_{i1}^2}, \tag{2.}$$

wo C_i eine Constante bedeutet.

Ist nun $\mathfrak{n}_i = 2$ und der Coefficient γ_i von $(z-a_i)^{\lambda_i-1}$ in der Reihe für $\frac{1}{\omega_{i1}^2}$ gleich Null, so tritt in der Entwickelung von y_{i2} kein Logarithmus auf, und man hat in der Umgebung von a_i ebenfalls

$$y_{i2} = (z-a_i)^{1-\frac{\lambda_i}{\mathfrak{n}_i}}\omega_{i2}, \tag{3.}$$

wo ω_{i2} eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $z-a_i$ fortschreitende Reihe bedeutet, die für $z = a_i$ nicht verschwindet.

Wir setzen jetzt voraus, dass für alle singulären Punkte

$$\mathfrak{n}_i = 2, \quad \gamma_i = 0 \tag{4.}$$

sei. Es bleiben alsdann y_{i1}^2, $y_{i1}y_{i2}$, y_{i2}^2 nach einem Umlaufe von z um a_i ungeändert.

1) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 159 ff. Sch.

138] Ist k eine von i verschiedene Zahl der Reihe $1, 2, \ldots, \varrho$, so ist

$$(5.)\qquad \begin{cases} y_{i1} = c_{11} y_{k1} + c_{12} y_{k2}, \\ y_{i2} = c_{21} y_{k1} + c_{22} y_{k2}. \end{cases}$$

Es ist demnach y_{i1}^2 von der Form:

$$(6.)\qquad y_{i1}^2 = A_0 y_{k1}^2 + A_1 y_{k1} y_{k2} + A_2 y_{k2}^2.$$

Nach einem Umlauf von z um a_k bleibt daher y_{i1}^2 ebenfalls ungeändert. Da aber y_{i1} als Integral einer Differentialgleichung von der Form (12.) meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 66, No. 4 [1]) überall von endlicher Ordnung unendlich wird, so ist y_{i1} die Quadratwurzel einer rationalen Function.

Wir erhalten also den Satz:

Ist für alle singulären Punkte $\mathfrak{n}_i = 2$, $\gamma_i = 0$, so wird die Differentialgleichung (B.) durch die Quadratwurzel einer rationalen Function befriedigt.

27.

Wir wollen zum Beschluss noch ein Verfahren angeben, vermöge dessen die Betrachtung der Differentialgleichung (C) entbehrlich gemacht und durch die directe Untersuchung der aus einem Fundamentalsysteme y_1, y_2 gebildeten Formen ersetzt wird.

Es sei y_1, y_2 ein beliebiges Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.),

$$(1.)\qquad \Phi(y_1, y_2) = a_0 y_1^N + a_1 y_1^{N-1} y_2 + \cdots + a_N y_2^N$$

eine Primform niedrigsten Grades, wo also nach Satz I. No. 20 N eine der Zahlen 2, 4, 6, 8, 10, 12 bedeutet.

Zum singulären Punkte a_i gehöre das Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.) y_{i1}, y_{i2}, so ist bekanntlich

$$(2.)\qquad \begin{cases} y_1 = c_{11}^{(i)} y_{i1} + c_{12}^{(i)} y_{i2}, \\ y_2 = c_{21}^{(i)} y_{i1} + c_{22}^{(i)} y_{i2}. \end{cases}$$

Sind die Exponenten, zu welchen y_{i1}, y_{i2} resp. gehören, $\frac{\delta_i}{\mathfrak{n}_i}$ und $1 - \frac{\delta_i}{\mathfrak{n}_i}$, und bedeutet j_i eine primitive Wurzel der Gleichung

$$(3.)\qquad j_i^{\mathfrak{n}_i} = 1,$$

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 186 ff. Sch.

so verwandeln sich y_1, y_2 nach einem Umlauf von z um a_i resp. in

$$(4.)\qquad \begin{cases} y_1' = b_{11}^{(i)} y_1 + b_{12}^{(i)} y_2, \\ y_2' = b_{21}^{(i)} y_1 + b_{22}^{(i)} y_2, \end{cases}$$

wo

$$(5.)\qquad \begin{cases} b_{11}^{(i)} = \dfrac{c_{11}^{(i)} c_{22}^{(i)} j_i^{\delta_i} - c_{12}^{(i)} c_{21}^{(i)} j_i^{-\delta_i}}{\Delta^{(i)}}, \\[2ex] b_{12}^{(i)} = \dfrac{-c_{11}^{(i)} c_{12}^{(i)} (j_i^{\delta_i} - j_i^{-\delta_i})}{\Delta^{(i)}}, \\[2ex] b_{21}^{(i)} = \dfrac{c_{21}^{(i)} c_{22}^{(i)} (j_i^{\delta_i} - j_i^{-\delta_i})}{\Delta^{(i)}}, \\[2ex] b_{22}^{(i)} = \dfrac{c_{11}^{(i)} c_{22}^{(i)} j_i^{-\delta_i} - c_{12}^{(i)} c_{21}^{(i)} j_i^{\delta_i}}{\Delta^{(i)}}, \\[2ex] \Delta^{(i)} = c_{11}^{(i)} c_{22}^{(i)} - c_{12}^{(i)} c_{21}^{(i)}. \end{cases}$$ [139

Da $\Phi(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function sein soll, so muss die Substitution

$$(6.)\qquad S_i = \begin{pmatrix} b_{11}^{(i)} & b_{12}^{(i)} \\ b_{21}^{(i)} & b_{22}^{(i)} \end{pmatrix}$$

diese Form in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten verwandeln, also

$$(7.)\qquad \Phi(b_{11}^{(i)} y_1 + b_{12}^{(i)} y_2,\ b_{21}^{(i)} y_1 + b_{22}^{(i)} y_2) = \varepsilon_i \Phi(y_1, y_2)$$

sein, wo ε_i eine Constante bedeutet.

Da diese Gleichung identisch erfüllt sein muss, so müssen die Coefficienten der Grössen $y_1^{N-k} y_2^k$ auf beiden Seiten übereinstimmen. Man erhält so $N+1$ Gleichungen für jeden singulären Punkt, im ganzen demnach

$$(N+1)\varrho$$

Gleichungen, deren System wir mit (G.) bezeichnen wollen.

Es sei a_1 einer der singulären Punkte, und die Grössen $c_{11}^{(1)}, c_{12}^{(1)}, c_{21}^{(1)}, c_{22}^{(1)}$ beliebig gewählt, ferner sei

$$(8.)\qquad \begin{cases} y_{11} = \gamma_{11}^{(i)} y_{i1} + \gamma_{12}^{(i)} y_{i2}, \\ y_{12} = \gamma_{21}^{(i)} y_{i1} + \gamma_{22}^{(i)} y_{i2}, \end{cases} \quad \text{für } i = 2, 3, \ldots, \varrho,$$

so ist

$$(9.)\quad \begin{cases} c_{11}^{(i)} = c_{11}^{(1)}\gamma_{11}^{(i)} + c_{12}^{(1)}\gamma_{21}^{(i)}, & c_{21}^{(i)} = c_{21}^{(1)}\gamma_{11}^{(i)} + c_{22}^{(1)}\gamma_{21}^{(i)}, \\ c_{12}^{(i)} = c_{11}^{(1)}\gamma_{12}^{(i)} + c_{12}^{(1)}\gamma_{22}^{(i)}, & c_{22}^{(i)} = c_{21}^{(1)}\gamma_{12}^{(i)} + c_{22}^{(1)}\gamma_{22}^{(i)}. \end{cases}$$

In meiner Abhandlung (dieses Journal Bd. 75, S. 208 ff.[1]) ist gelehrt worden, wie die Coefficienten der linearen homogenen Relationen, durch welche die zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsysteme mit einander verbunden sind, aus den in den Coefficienten der Differentialgleichung enthaltenen Constanten zu bestimmen sind. Danach ergeben
140] sich die Grössen $\gamma_{11}^{(i)}, \gamma_{12}^{(i)}, \gamma_{21}^{(i)}, \gamma_{22}^{(i)}$ als bekannte Functionen der in den Coefficienten der Differentialgleichung (B.) enthaltenen Constanten. Ihre Werthe sind z. B. für den Fall $\varrho = 2$ übereinstimmend mit den durch die Gausssche Π-Function ausgedrückten Coefficienten jener linearen homogenen Relationen, welche zwischen den zu je einem der beiden singulären Punkte gehörigen Fundamentalsystemen von Integralen der Differentialgleichung der Gaussschen Reihe bestehen (s. die Abhandlung des Herrn Kummer dieses Journal Bd. 15, S. 58, vergl. auch die im Nachlass enthaltene Arbeit von Gauss in dessen Werken, 3. Band).

Die Function P in der Differentialgleichung (B.) hat die Form:

$$(10.)\quad P = \frac{f_{2\varrho-2}(z)}{(z-a_1)^2(z-a_2)^2\ldots(z-a_\varrho)^2},$$

wo $f_{2\varrho-2}(z)$ eine ganze rationale Function von z vom $(2\varrho-2)^{\text{ten}}$ Grade bedeutet. Dieselbe enthält also ausser den singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$, die wir als gegeben annehmen, noch $2\varrho-1$ Constanten. Das System (G.) implicirt also als bestimmbare Grössen:

1) die Grössen $c_{11}^{(1)}, c_{12}^{(1)}, c_{21}^{(1)}, c_{22}^{(1)}$,

2) die Coefficienten von $f_{2\varrho-2}(z)$,

3) die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_N$ der Form (1.).

Das System (G.) ist nun für jedes N der Zahlenreihe 2, 4, 6, 8, 10, 12 aufzustellen. Alsdann ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Form Wurzel einer rationalen Function ist, die, dass wenigstens für eines dieser Systeme (G.), die Grössen 1), 2), 3) so bestimmt werden können,

[1]) Abh. XIV, Band I dieser Ausgabe, S. 394 ff. Sch.

dass dasselbe befriedigt wird und sich ε_i als Einheitswurzel ergiebt. Denn die Form $\Phi(y_1, y_2)$, welche nach den Umläufen von z um je einen singulären Punkt sich nur mit je einer Einheitswurzel multiplicirt, ist Wurzel einer rationalen Function, da y_1, y_2 als Integrale der Differentialgleichung (B.) überall von endlicher Ordnung unendlich sind.

Es ist hiermit die Frage beantwortet, wie die Coefficienten von $f_{2\varrho-2}(z)$ beschaffen sein müssen, damit die Differentialgleichung (B.) algebraische Integrale besitzt.

Wir haben oben dieselbe Frage unter Zuhülfenahme der Differentialgleichung (C.) gelöst, indem wir sie im Allgemeinen auf die Untersuchung zurückführten, unter welchen Umständen ein System algebraischer linearer Gleichungen befriedigt werden könne.

Das in dieser Nummer gelehrte Verfahren führt insofern auf trans- [141
scendente Gleichungen, als die Coefficienten $\gamma_{\lambda\mu}^{(i)}$ durch die in den Coefficienten der Differentialgleichung enthaltenen Constanten sich im Allgemeinen vermittelst unendlicher Reihen darstellen lassen (s. meine Arbeit, dieses Journal Bd. 75, S. 212[1])). Indessen wo die Gesetze dieser transcendenten Functionen sich einer ähnlichen Einfachheit wie die Gausssche Π-Function erfreuen, wird die zweite eben angegebene Methode nicht ohne Vortheil anwendbar sein.

28.

Ist die Differentialgleichung (B.) gegeben, und soll entschieden werden, ob dieselbe algebraische Integrale besitzt, so lässt die in voriger Nummer gelehrte zweite Methode Vereinfachungen zu.

Wir wählen

$$(1.)\quad y_1 = y_{i1}, \quad y_2 = y_{i2}.$$

Nach einem Umlaufe von z um a_i ist alsdann:

$$(2.)\quad \Phi(y_{i1} j_i^{\lambda_i}, y_{i2} j_i^{-\lambda_i}) = \varepsilon_i \Phi(y_{i1}, y_{i2}).$$

Diese Gleichung erfordert, dass ε_i die Form hat:

$$(3.)\quad \varepsilon_i = j_i^{(N-2k_i)\lambda_i},$$

wo k_i eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, N$ bedeutet. Andererseits aber muss $\Phi(y_{i1}, y_{i2})$

[1]) Abh. XIV, Band I dieser Ausgabe, S. 399. Sch.

durch beliebige Umläufe in sich selbst multiplicirt mit einer L^{ten} Wurzel der Einheit übergehen (s. No. 9 Satz I. und No. 10 und 11). Hieraus folgt:

$$(N-2k_i)\mathfrak{z}_i L \equiv 0, \text{ mod. } \mathfrak{n}_i,$$

oder, da $\mathfrak{z}_i$ zu $\mathfrak{n}_i$ relativ prim,

$$(N-2k_i)L \equiv 0, \text{ mod. } \mathfrak{n}_i. \tag{4.}$$

Nun ist nach No. 1 $\mathfrak{n}_i$ Divisor von $m = NL$, folglich

$$2k_i L \equiv 0, \text{ mod. } \mathfrak{n}_i. \tag{5.}$$

Es ist ferner

$$a_{\mathfrak{a}} = 0, \quad \text{wenn nicht } 2\mathfrak{a} \equiv 2k_i, \text{ mod. } \mathfrak{n}_i,$$

wo $\mathfrak{a}$ eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, N$ bedeutet, während für

$$2\mathfrak{a} \equiv 2k_i, \text{ mod. } \mathfrak{n}_i,$$

$a_{\mathfrak{a}}$ unbestimmt bleibt.

Hiernach lässt sich, wenn die Differentialgleichung (B.) vorgelegt ist, analog der Tabelle (2.) in No. 19 eine Tabelle (T.) aufstellen, welche für
142] $N = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ die den eben gefundenen Bedingungen genügenden Gestalten der mit je einem der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsystemen gebildeten Primformen enthält.

Ist nun

$$\begin{cases} y_{i1} = \gamma_{11}^{(ik)} y_{k1} + \gamma_{12}^{(ik)} y_{k2}, \\ y_{i2} = \gamma_{21}^{(ik)} y_{k1} + \gamma_{22}^{(ik)} y_{k2}, \end{cases} \tag{6.}$$

so wird

$$\Phi(y_{i1}, y_{i2}) = \Phi_k(y_{k1}, y_{k2}). \tag{7.}$$

Soll $\Phi(y_{i1}, y_{i2})$ Wurzel einer rationalen Function sein, so muss auch nach einem Umlaufe von z um a_k die Form $\Phi(y_{i1}, y_{i2})$ in sich selbst multiplicirt mit einer Einheitswurzel übergehen. Demnach muss $\Phi_k(y_{k1}, y_{k2})$ zu den möglichen Formen derselben Tabelle (T.) gehören.

Wendet man demnach die Transformation (6.) für alle von i verschiedenen Werthe von k der Reihe $k = 1, 2, \ldots, \varrho$ an und identificirt $\Phi_k(y_{k1}, y_{k2})$ mit den entsprechenden Formen der Tabelle (T.), welche mit y_{k1}, y_{k2} gebildet sind, so erhält man ein gewisses System (H.) von Gleichungen, welches befriedigt werden muss.

Da nun umgekehrt eine Form der Tabelle (T.), die aus dem zu einem singulären Punkte gehörigen Fundamentalsysteme gebildet ist, nach einem Umlaufe von z um diesen Punkt in sich selbst multiplicirt mit einer Einheitswurzel übergeht, und die Integrale überall von endlicher Ordnung unendlich werden, so ergiebt sich:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Form Wurzel einer rationalen Function wird, ist die, dass das System (H.) befriedigt wird.

Heidelberg, im Juli 1875.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 18, Gl. (B′.) $P_1(t)y$ statt $P_1(t)$,
„ 19, Zeile 3 t. IV statt B. 4,
„ 22, „ 4 Function statt Functionen,
„ 26, „ 12 2) statt (2.),
„ 27, Formel (3.) $j^{\mathfrak{b}}_{\chi}$ statt $j^{\mathfrak{b}}_{\lambda}$,
„ 28, Gl. (6.) $\frac{\lambda}{l}$ statt $\frac{\lambda}{t}$,
„ 33, Zeile 4 v. u. diese Constante statt dieselbe,
„ 38, „ 10 v. u. oder statt und nicht,
„ 40, „ 11 a_N statt a_n (auch wurde ebenda (2.) als Gleichungsnummer unterdrückt),
„ 43, Formel (1.) $-r$ statt $-r_1$ und $\frac{r(r-1)}{1.2}$ statt $r_2\frac{(r-1)}{1.2}$,
„ 46, Zeile 12 müsste statt muss,
„ 47, „ 6 v. u. y_2^{μ} statt y^{μ},
„ 48, „ 8 aus dem System statt des Systems,
„ 53, „ 7 befriedigen statt darstellen,
„ „ , „ 6 v. u. oder von der Ordnung $-\mu$ unendlich statt oder unendlich,
„ 57, „ 5 v. u. und im Folgenden (G.) statt G,
„ 59, „ 3, 4 Wurzel einer rationalen statt eine rationale,
„ „ , „ 14 $\gamma^{(\theta)}_{\lambda\mu}$ statt $\gamma^{(\theta)}_{11}$,
„ 60, „ 9 $a_0 = 0$ statt $a_0 \equiv 0$.

2) Wie Herr F. Klein (Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen, Sitzung vom 26. Juni 1876, s. auch Mathematische Annalen, Bd. 11, 1877, S. 118) bemerkt hat, enthält die Tabelle (12.) auf S. 43 noch überflüssige Formen; vergl. hierzu die Abhandlung XXV.

Sch.

XXI.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE.

(Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3e série, tome II, 1876, p. 158—160.)

Mon Mémoire traite des équations différentielles linéaires du second [158
ordre qui possèdent des intégrales algébriques, et d'une application nouvelle de la théorie des invariants.

Chaque intégrale de l'équation différentielle est une fonction linéaire et homogène de deux solutions fondamentales y_1, y_2 de cette équation, avec des coefficients constants. Une intégrale quelconque, algébrique étant η, toute fonction symétrique des diverses valeurs qu'admet η est une forme binaire des deux quantités y_1 et y_2, qui est elle-même une fonction rationnelle de la variable indépendante z. Mais, comme elle peut être un produit de puissances entières d'autres formes binaires, il est nécessaire de considérer ces formes binaires composées des quantités y_1, y_2, qui représentent des racines de fonctions rationnelles. Désignons leur complexe par Φ.

Si l'on peut satisfaire à l'équation différentielle par la racine d'une fonction rationnelle, les formes linéaires seront du plus petit degré possible, parmi celles du complexe Φ; en général, nous allons chercher le degré minimum N qui puisse être attribué à une forme de ce complexe.

Comme y_1 et y_2 se changent, par les divers chemins qu'on peut faire suivre à la variable z, en des fonctions linéaires èt homogènes de ces mêmes quantités, avec des coefficients constants, les diverses valeurs qui en résultent, pour une forme composée de y_1 et y_2, s'obtiennent au moyen de substitutions linéaires effectuées sur y_1 et y_2. En m'appuyant sur cette remarque, je démontre que les covariants d'une forme du complexe Φ représentent aussi des racines de fonctions rationnelles. De là résulte que les covariants de la forme du degré minimum N, dont les degrés sont inférieurs à N, doivent 159] tous s'évanouir identiquement. On pourrait, par suite, obtenir facilement le nombre N, si l'on possédait la solution du problème suivant: Trouver l'expression algébrique des formes binaires de degré m, dont tous les covariants de degré moindre que m disparaissent identiquement. Mais ce problème n'étant pas encore résolu, voici la marche que j'ai suivie pour déterminer N.

Parmi les racines d'une équation algébrique irréductible qui satisfont à l'équation différentielle, je distingue celles dont les quotients ne sont pas constants, en désignant leur ensemble par le nom de système réduit des racines. Chaque forme du complexe Φ, composée des termes d'un système réduit comme facteurs, étant aussi appelée forme primaire, je trouve que la forme de degré minimum N représente, aussi bien que son covariant HESSien, une forme primaire. Je conclus ensuite, de l'expression même du covariant HESSien, que N ne peut être supérieur à 12; puis, au moyen d'une réduction ultérieure, que N n'a qu'une des valeurs 2, 4, 6, 8, 10, 12.

Donc, pour que l'équation différentielle possède des intégrales algébriques, il faut qu'une forme dont le degré est l'un de ces nombres soit une racine d'une fonction rationnelle de la variable indépendante; et le théorème réciproque a lieu, en exceptant le cas de $N = 2$.

Pour reconnaître s'il y a des formes qui représentent des racines de fonctions rationnelles, j'ai employé deux méthodes: l'une ramène à la question de satisfaire à une équation différentielle linéaire, par la racine d'une fonction rationnelle. En effet, toute forme en y_1, y_2, et du degré m, satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre $m+1$; donc généralement, pour que l'équation différentielle donnée possède des intégrales algébriques, il faut et il suffit qu'une équation différentielle linéaire déterminée, et dont l'ordre ne surpasse point le nombre 13, puisse être satisfaite par la racine d'une fonction rationnelle. Mais la question de satisfaire à une équation différentielle par la racine d'une fonction rationnelle se réduit à la question élémentaire de reconnaître si un système d'équations linéaires admet des solutions finies. Ensuite je montre comment on peut parvenir à ce système d'équations linéaires,

sans former effectivement l'équation différentielle d'ordre $N+1$, mentionnée plus haut.

La seconde des deux méthodes dont j'ai parlé s'appuie sur une recherche directe des changements qu'éprouvent les formes composées de y_1 et y_2, [160 par les chemins divers de z, en employant les coefficients de ces relations linéaires et homogènes, qui lient les systèmes fondamentaux d'intégrales appartenant aux divers points singuliers de l'équation différentielle, relations que j'ai développées dans le Journal de M. BORCHARDT, tome LXXV, page 208[1]).

Enfin j'ajoute quelques théorèmes particuliers, parmi lesquels je ne mentionne ici que le suivant: Les nombres rationnels qui représentent les racines des équations fondamentales déterminantes, appartenant aux divers points singuliers de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = Py$$

et à $z = \infty$, étant réduits à leur plus simple expression, si l'un des dénominateurs surpasse le nombre 10, la proposée n'a pas d'intégrale algébrique, à moins cependant que la racine d'une fonction rationnelle ne satisfasse à cette équation, ou à l'équation en y^2.

Heidelberg, janvier 1876.

[1]) Mém. XIV, t. I de cette édition, p. 394 et suiv. Sch.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 64, Zeile 14 facteurs statt facteur,
" " , " 5 v. u. 13 statt 12,
" 65, $\frac{d^2 y}{dz^2}$ statt $\frac{d^2 y}{dx^2}$;
" 64, " 17 wurde »du« zwischen »covariant« und »HESSIEN« unterdrückt.

SCH.

XXII.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE.

a.

(Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, t. 82, p. 1494—1497; Séance du 26 juin 1876.)

Lorsque, plusieurs mois après la publication de mon travail sur les [1494
équations linéaires du second ordre, dans le Journal de M. BORCHARDT (t. LXXXI, p. 97 et suiv.[1])), mon attention se porta sur le travail du P. PÉPIN, paru dans les Annali di Matematica da TORTOLINI (t. V, p. 185 [1495
et suiv.), et qu'il rapporte dans sa Note des Comptes rendus du 5 juin 1876, je reconnus aussitôt que les résultats de cet auteur sont en défaut, du moins quant à leur relation avec l'intégration par des fonctions algébriques des équations du second ordre.

Maintenant, comme le P. PÉPIN semble croire, dans la Note citée, avoir, par son Mémoire, répondu aux questions se rapportant à l'intégration sous cette forme plus tôt et plus complètement que je ne l'avais fait, je me vois obligé de montrer que, loin que ce fût fait par le Mémoire du P. PÉPIN, ses résultats sont au contraire en défaut. Ces résultats se résument, comme il l'a énoncé lui-même dans la Note citée, en ce théorème: Si l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Py$$

1) Mém. XX, p. 11 et suiv. du présent volume. Sch.

est algébrique, il y aura toujours une intégrale particulière telle, que la fonction $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$ soit une fonction rationnelle de x ou une racine d'une équation du deuxième ou du quatrième degré.

Tout d'abord, je veux signaler un défaut que la solution du P. Pépin aurait, lors même qu'elle serait correcte. Si, en effet, pour la résolubilité algébrique, la condition que

$$\zeta = \frac{d\log y}{dx}$$

satisfasse à une équation du quatrième degré était effectivement nécessaire, la même condition ne serait encore aucunement suffisante, car

$$e^{\int \zeta dx}$$

n'est pas toujours algébrique en même temps que ζ.

Mais je vais maintenant faire voir que le théorème du P. Pépin, que je viens de citer, est inexact.

Prenons, par exemple, l'équation

$$z(z-1)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{6z-3}{5}\frac{du}{dz} + \frac{3}{100}u = 0$$

ou, en posant

$$u = z^{-\frac{3}{10}}(z-1)^{-\frac{3}{10}}y,$$

$$(1.)\qquad \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{21}{100}\frac{-z^2+z-1}{z^2(z-1)^2}y.$$

D'après le Mémoire de M. Schwarz (Journal de M. Borchardt, t. LXXV, p. 323, no. XI[1]), cette équation n'a que des intégrales algébriques.

Mais il est utile de prouver cela ici directement en appliquant la méthode de mon Mémoire cité ci-dessus, puisque ce sera ainsi donner la réfutation la plus simple du théorème du P. Pépin.

1496] D'après les principes de mon travail dans le tome LXVI du Journal de M. Borchardt[2]), on a un système fondamental d'intégrales η_1, η_2, qui, multipliées respectivement par $z^{-\frac{3}{10}}$, $z^{-\frac{7}{10}}$, sont holomorphes (pour parler avec MM. Briot et Bouquet) dans le voisinage du point $z=0$, et un autre système fondamental d'intégrales y_1, y_2, qui, multipliées respectivement par

[1]) H. A. Schwarz, Gesammelte math. Abhandlungen, Bd. II (1890), p. 246. Sch.

[2]) Mém. VI, t. I, p. 159 et suiv. de cette édition. Sch.

$(z-1)^{-\frac{3}{10}}$, $(z-1)^{-\frac{7}{10}}$, sont holomorphes dans le voisinage du point $z=1$. Ces systèmes fondamentaux sont liés entre eux par des relations que l'on peut déduire des principes établis dans mon travail du Journal de M. Borchardt (t. LXXV, p. 208 et suiv.[1]), ou que l'on peut mieux tirer du Mémoire de M. Kummer (Journal de Crelle, t. XV, p. 58) ou aussi des Œuvres de Gauss (t. III, posth., p. 210 et suiv.). On conclut de ces relations que, z faisant une circulation autour du point $z=0$, y_1, y_2 se changent respectivement en :

$$(2.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{-1}\left(\frac{j}{2\sin\frac{4\pi}{10}}y_1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\sin\frac{2\pi}{10}}y_2\right) \\ &\text{et} \\ &\sqrt{-1}\left(\frac{2^{\frac{2}{5}}}{\sin\frac{2\pi}{10}}y_1 - \frac{j^9}{2\sin\frac{4\pi}{10}}y_2\right), \end{aligned}\right.$$

où j est une racine primitive de l'équation $j^{10}=1$.

Il s'ensuit, en posant

$$(3.)\qquad \frac{\cos\frac{2\pi}{10}}{2^{\frac{2}{5}}} = \alpha, \qquad \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\cos\frac{2\pi}{10}} = \beta,$$

et

$$(4.)\qquad y_1 - \alpha j^{2k}y_2 = \varphi_k, \quad y_1 - \beta j^{2k+1}y_2 = \psi_k,$$

que, par une circulation de z autour du point $z=0$, les fonctions

$$y_1,\ y_2,\ \varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4,\ \psi_0,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4$$

se changent respectivement en

$$\varphi_2,\ \psi_4,\ \varphi_0,\ \varphi_4,\ \psi_3,\ y_1,\ \psi_0,\ y_2,\ \varphi_3,\ \psi_2,\ \psi_1,\ \varphi_1,$$

à des facteurs numériques près, et que le produit de tous ces facteurs numériques est égal à $-\sqrt{-1}$. Donc la forme

$$(5.)\qquad \varphi(y_1, y_2) = y_1y_2\varphi_0\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\psi_0\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4 = y_1y_2(y_1^5-\alpha^5y_2^5)(y_1^5+\beta^5y_2^5),$$

déjà invariable par une circulation de z autour du point $z=1$, se change [1497

[1]) Mém. XIV, t. I, p. 394 et suiv. de cette édition. Sch.

par une circulation de z autour du point $z=0$ en elle-même multipliée par $-\sqrt{-1}$. Par conséquent $\varphi(y_1, y_2)$ est une racine d'une fonction rationnelle. Comme une racine d'une fonction rationnelle ne varie pas, à une racine de l'unité comme facteur près, quand z fait une circulation autour d'un point critique, et comme y_1, y_2 acquièrent par une circulation de z autour du point $z=1$ respectivement les facteurs j^2, j^3, une forme binaire composée de y_1, y_2 du premier ou du second degré et égale à une racine d'une fonction rationnelle doit être ou y_1, ou y_2, ou $y_1 y_2$. Mais aucune de ces formes n'a la propriété de se transformer en elle-même, à une racine de l'unité comme facteur près, par une circulation de z autour du point $z=0$. Une forme du douzième degré étant donc racine d'une fonction rationnelle, sans qu'une forme du premier ou du second degré ait la même propriété, il suit des théorèmes cités pages 127 et 100 de mon Mémoire[1]) que l'équation différentielle n'a que des intégrales algébriques.

---

b.

(Comptes rendus etc., t. 83, 1876, p. 46—47; Séance du 3 juillet 1876.)

46] Nous venons de voir*) que, dans notre cas, une forme primaire, comme je l'ai définie dans mon Mémoire, est d'un degré plus élevé que le deuxième. Il suit alors du même Mémoire que le moindre degré N d'une telle forme ne pourrait avoir qu'une des valeurs 4, 6, 8, 10, 12. Nous allons faire voir que, dans notre cas, N est égal à 12; car, en soumettant une forme binaire composée de y_1, y_2 et du degré N, où N a une des valeurs que nous venons d'indiquer, aux conditions: 1° d'être invariable par une circulation de z autour du point $z=1$, à des racines de l'unité comme facteur près; 2° que ni la forme même, ni son covariant HESSIEN ne contienne des facteurs quadratiques (voir p. 114 et 116 de mon Mémoire[3])), on déduit qu'une telle forme ne peut

*) Comptes rendus, séance du 26 juin 1876, t. LXXXII, p. 1494[2]).

1) Mémoire XX, p. 44 et 14 du présent volume. Sch.

2) Note précédente. Sch.

3) p. 30 et 32 du présent volume. Sch.

être d'un degré moindre que le douzième et qu'elle est composée semblablement à la forme (5.).

Soit y une intégrale quelconque de l'équation (1.) et soit l'équation algébrique à laquelle satisfait $\zeta = \frac{d \log y}{dz}$ du $n^{\text{ième}}$ degré. D'après un théorème d'ABEL (Journal de CRELLE. t. VI, p. 77[1]); voir aussi le Mémoire de M. LIOUVILLE dans le Journal de l'École Polyt., Cah. XXIII), $\log y$ a la forme $A \log u$, u étant une fonction rationnelle de z et de ζ et A en notre cas un nombre rationnel. Donc une certaine puissance de y, soit y^μ, est une fonction rationnelle de z et de ζ, et satisfait par conséquent aussi, comme l'on sait, à une équation dont le degré ne surpasse pas le nombre n. D'après le théorème du P. PÉPIN cité ci-dessus, pour une certaine intégrale, n ne surpasserait pas le nombre 4. Par conséquent, on pourrait, pour cette intégrale, trouver un nombre entier μ tel que y^μ satisfasse à une équation dont le degré ne surpasserait pas le nombre 4, c'est à dire que y ne pourrait acquérir par les chemins divers de z plus de quatre valeurs dont les quotients ne soient pas racines de l'unité. Le système réduit (voir mon Mémoire p. 111[2])) de cette équation, n'ayant plus ainsi que quatre termes, offrirait une forme primaire, dont le degré ne surpasserait pas le nombre 4. Or nous avons démontré ci-dessus que le moindre degré que puisse avoir une forme primaire est le [47 douzième. Donc le théorème du P. PÉPIN est en défaut.

Je pourrais, du reste, en entrant dans les développements du Mémoire déjà cité du P. PÉPIN (contenu dans les Annali[3])), faire ressortir plusieurs erreurs qui l'ont porté au théorème que nous venons de réfuter; mais cela étendrait cette Note plus qu'il ne me semble nécessaire.

Enfin je remarque que l'on peut comprendre aussi par ce qui précède que le P. PÉPIN est en erreur, en croyant pouvoir réduire mes formes canoniques au premier ou au second degré, comme il l'a annoncé à la fin de sa Note, p. 1326 des Comptes rendus[4])).

1) Oeuvres compl. t. II (1881), p. 276. Sch.

2) p. 27 du présent volume. Sch.

3) t. V, 1863. Sch.

4) t. 82, 1876. Sch.

ANMERKUNGEN.

Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 68, Zeile 9 v. u. XI statt 11,
" ", " 13 v. u. ou statt où,
" 69, " 4 208 statt 209,
" 70, " 2 v. u. son covariant HESSien statt sa covariante HESSienne,
" 71, " 4 $\zeta = \frac{d \log y}{dz}$ statt $\zeta \frac{d \log y}{dz}$,
" ", " 9 de z et de ζ statt de z et ζ,
" ", " 13 v. u. p. 111 statt p. 3.

SCH.

XXIII.

SELBSTANZEIGE DER ABHANDLUNG: »ÜBER DIE LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG, WELCHE ALGEBRAISCHE INTEGRALE BESITZEN, UND EINE NEUE ANWENDUNG DER INVARIANTENTHEORIE«, BORCHARDTS JOURNAL, BAND 81, S. 97 sqq.[1]).

(Repertorium für reine und angewandte Mathematik, Bd. I, 1877, S. 1—9.)

1. [1

Es sei

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^2u}{dz^2} + p_1 \frac{du}{dz} + p_0 u = 0$$

eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten, welcher eine Wurzel u der irreductiblen algebraischen Gleichung:

$$\text{(1.)} \qquad A_m u^m + A_{m-1} u^{m-1} + \cdots + A_1 u + A_0 = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von z sind, genügt, so genügen ihr die sämmtlichen Wurzeln derselben Gleichung (Siehe S. 100).

Besitzt die Gleichung (1.) zwei Wurzeln u_1, u_2, deren Quotient nicht für jedes z constant ist, so bilden u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von Integralen, d. h. jedes Integral der Differentialgleichung hat die Form $c_1 u_1 + c_2 u_2$, wo c_1, c_2 constant sind (siehe die Abhandlung des Verfassers im 66. Bande des BORCHARDTschen Journals[2]) No. 2*)). Hieraus ergiebt sich, dass in diesem Falle

*) Es sollen im Folgenden die Arbeiten des Verfassers im BORCHARDTschen Journal einfacher durch blosse Angabe des Bandes, in welchem sie enthalten sind, bezeichnet werden.

[1]) Abh. XX, dieses Bandes, S. 11 ff. Die Übertragung der in der folgenden Selbstanzeige angegebenen Seitenzahlen der Originalabhandlung in die entsprechenden Zahlen dieser Ausgabe wurde unterlassen. Sch.

[2]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 159 ff. Sch.

die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung algebraisch sind (Siehe S. 100).

Ist der Quotient je zweier Wurzeln der Gleichung (1.) für jedes z constant, so hat sie die Form:

$$A_m u^m + A_0 = 0, \tag{1a.}$$

und die Differentialgleichung wird durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt. — Dieser Satz wird (S. 100—101) aus einem allgemeineren auf S. 99 bewiesenen hergeleitet, welcher folgendermassen lautet: Besitzt die irreductible Gleichung (1.) zwei Wurzeln u_1, u_2, deren Quotient eine rationale Function j von z, so ist j eine ganzzahlige Wurzel der Einheit.

2] Hiernach sind also, wenn die Differentialgleichung (A.) algebraische Integrale besitzt, zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Sie wird durch die Wurzel φ einer rationalen Function befriedigt. In diesem Falle ist es **möglich aber nicht nothwendig**, dass die Differentialgleichung (A.) noch ausserdem ein algebraisches Integral ψ besitzt, ohne dass $\frac{\psi}{\varphi}$ constant ist, dass also der Differentialgleichung nur algebraische Integrale genügen. Tritt dieses ein, so hat die Differentialgleichung ein Fundamentalsystem von Integralen, welches aus zwei verschiedenen Wurzeln rationaler Functionen besteht*).

2) Die Differentialgleichung wird durch die Wurzeln einer irreductiblen algebraischen Gleichung befriedigt, von denen mindestens der Quotient zweier nicht für jedes z constant. In diesem Falle sind die sämmtlichen Integrale algebraisch.

*) Man erkennt dieses am einfachsten folgendermassen:

Nach (B. 66[1] No. 4) hat ψ in der Umgebung eines singulären Punktes a der Differentialgleichung die Form

$$\psi = c_1\varphi + c_2(z-a)^{\lambda}\chi(z), \tag{1.}$$

wo c_1 und c_2 Constanten und $\chi(z)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihe darstellt, welche für $z = a$ nicht verschwindet. Hieraus ergiebt sich, dass $\frac{d}{dz}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)$ in der Umgebung eines jeden der singulären Punkte a mit einer Potenz von $z-a$ multiplicirt eindeutig wird. Da diese Function algebraisch und für alle übrigen endlichen Werthe von z eindeutig ist, so ist sie Wurzel einer rationalen Function. Bezeichnen wir dieselbe mit t, so ergiebt sich aus einem Satze von Abel (vergl. Liouville, Journal de l'École Polytech. cah. 22, p. 131), dass

$$\frac{\psi}{\varphi} = \int t\,dz = \beta t + C,$$

wo β eine rationale Function von C eine Constante bedeutet. Demnach ist

$$\psi = \beta\varphi t + C\varphi. \tag{2.}$$

1) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 159 ff. Sch.

Der mit 1) bezeichnete Fall ist leicht zu erledigen nach einem für lineare Differentialgleichungen einer **beliebigen Ordnung** gültigen Verfahren. Sind nämlich $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ die sämmtlichen singulären Punkte einer solchen Differentialgleichung, so hat eine ihr genügende Wurzel einer rationalen Function die Form:

$$u = (z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\ldots(z-a_\varrho)^{\alpha_\varrho}g(z),$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ rationale Zahlen, $g(z)$ eine ganze rationale Function bedeutet (S. 101). Es werden zunächst (S. 102) gewisse algebraische Gleichungen ratio- [3
nale Wurzeln besitzen müssen, welche die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ liefern. Alsdann hat ein bestimmtes System linearer Gleichungen endliche Lösungen zuzulassen, welche die Werthe der Coefficienten von $g(z)$ gewähren.

2.

Bei der Behandlung des Falles 2) voriger Nummer ist es zweckmässig, die Differentialgleichung (A.) durch die Substitution

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz}y$$

in eine Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dz^2} = Py \tag{B.}$$

zu verwandeln. Der Untersuchung werden gewisse aus einem Fundamentalsysteme von Integralen der Differentialgleichung (B.) y_1, y_2 gebildete Formen zu Grunde gelegt. Es sei nämlich η ein algebraisches Integral dieser Differentialgleichung, welches einer irreductiblen Gleichung

$$A_m y^m + A_{m-1}y^{m-1} + \cdots + A_0 = 0 \tag{1.}$$

mit rationalen Coefficienten genügt Unter den Wurzeln derselben seien $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ so beschaffen, dass nicht der Quotient zweier derselben für jedes z constant ist, so wird ihre Gesammtheit (S. 111) als das **reducirte Wurzelsystem der Gleichung** (1.) bezeichnet.

Das Product

$$\Pi = \eta\eta_1\eta_2\cdots\eta_{n-1}$$

ist eine algebraische Function, welche für jeden Umlauf von z in sich selbst multiplicirt mit einer Einheitswurzel übergeht, d. h. Wurzel einer rationalen Function (S. 114). Andererseits ist η_i als Integral der Differentialgleichung (B.) der Form $c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2$, wenn c_{i1}, c_{i2} Constanten bezeichnen. Demnach ist $\Pi = f(y_1, y_2)$ eine aus y_1, y_2 gebildete Form n^{ten} Grades. — Während also in dem Falle, dass die Differentialgleichung (B.) durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird, eine lineare Form $c_1 y_1 + c_2 y_2$ gleich der Wurzel einer rationalen Function ist, so sind in dem allgemeineren Falle, so fern die Differentialgleichung nur algebraische Integrale hat, Formen höheren Grades gleich Wurzeln rationaler Functionen. — Der niedrigste Grad einer Form dieser Art werde mit N bezeichnet (S. 116). Es wird nachgewiesen (Siehe 4] S. 123, Satz II.), dass die Zahl N niemals grösser als zwölf, und weiter (Siehe S. 126), dass sie eine gerade Zahl sei.

Bezeichnen wir den Complex aller Formen, welche Wurzeln rationaler Functionen aequivalent sind, mit Φ, so zeichnen sich unter diesen diejenigen aus, welche nur die Glieder des reducirten Wurzelsystems einer irreductiblen Gleichung als Factoren enthalten, welcher ein bestimmtes Integral genügt, und zwar diese Glieder alle und jedes zur ersten Potenz. Dieselben werden Primformen genannt (S. 114). Jede Form des Complexes Φ lässt sich in ein Product von Primformen zerlegen (S. 115). Die Zahl N ist auch der niedrigste Grad einer Primform (S. 116).

3.

Nach Ermittelung der eben angegebenen oberen Grenze für die Zahl N werden im Wesentlichen zwei Methoden angewendet, um über die Frage zu entscheiden, ob die Differentialgleichung (B.) algebraische Integrale habe oder nicht.

I. Methode.

Eine aus einem Fundamentalsysteme von Integralen der Differentialgleichung (B.) y_1, y_2 gebildete Form μ^{ten} Grades genügt einer linearen Differentialgleichung $\mu+1^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten, welche in der Arbeit S. 129 als Differentialgleichung (C.) bezeichnet ist. Dieselbe ist übereinstimmend mit der linearen Differentialgleichung, welcher y^μ genügt, wo y ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B.) ist (S. 129—131).

Wird also die Differentialgleichung (B.) nur durch algebraische Integrale befriedigt, so muss die Differentialgleichung (C.) für $\mu = N$, demnach, wenn nicht $N = 1$, d. h. schon der Differentialgleichung (B.) eine Wurzel einer rationalen Function genügt, für einen der geradzahligen Werthe von μ die nicht die Zahl 12 übersteigen, durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt werden (S. 131).

Erfolgt dieses für $\mu = 1$ oder für einen der angegebenen Zahlenwerthe von μ die grösser sind als 2, so hat auch umgekehrt die Differentialgleichung (B.) algebraische Integrale (S. 131). Dieser Satz ergiebt sich aus dem folgenden: Ist eine aus dem Fundamentalsysteme y_1, y_2 gebildete Form höheren als zweiten Grades und nicht Potenz einer Form zweiten Grades Wurzel einer rationalen Function, so hat die Differentialgleichung (B.) ein algebraisches Integral, ein Satz, welcher S. 127—128 bewiesen ist.

Hat aber die Differentialgleichung (C.) zuerst für $\mu = 2$ eine Wurzel φ [5 einer rationalen Function zum Integral, so ist $\varphi(z)^2$ eine rationale Function und

$$\varphi(z)^2\left[\left(\frac{d \log \varphi(z)}{dz}\right)^2 + 2\,\frac{d^2 \log \varphi(z)}{dz^2} - 4P\right]$$

eine constante Zahl λ. Ist nun

$$\lambda \int \frac{dz}{\varphi(z)}$$

gleich dem Logarithmus einer algebraischen Function, so sind die Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch (S. 131). Der Beweis dieses Satzes gründet sich auf die S. 117—118 gemachten Entwickelungen.

Hiermit ist die Untersuchung der Frage, wie die Differentialgleichung (B.) beschaffen sein müsse, um algebraische Integrale zu besitzen, bis auf die Betrachtung von $\int \frac{dz}{\varphi(z)}$, die im letztangegebenen Falle nöthig wird, auf die in No. 1 dieser Notiz angeführte Aufgabe zurückgeführt, nämlich zu bestimmen, unter welchen Umständen eine lineare Differentialgleichung durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird, d. h. nach S. 102 zu untersuchen, ob ein bestimmtes System linearer Gleichungen endliche Lösungen zulässt.

Es wird (S. 132—134) nachgewiesen, dass bei der Anwendung dieser Methode die Differentialgleichung (C.) nicht aufgestellt zu werden braucht, dass man vielmehr ein derselben gleichbedeutendes sich unmittelbar darbietendes System von Differentialgleichungen der Rechnung zu Grunde legen kann.

II. Methode.

Diese stützt sich auf Entwickelungen, welche der Verfasser im Bande 75 des Borchardtschen Journals S. 208 sqq.[1]) in Bezug auf die Coefficienten der linearen homogenen Relationen gegeben hat, durch welche die zu den verschiedenen singulären Punkten einer linearen Differentialgleichung gehörigen Fundamentalsysteme derselben mit einander verbunden werden; Entwickelungen, durch welche diese Coefficienten aus den in den Coefficienten der Differentialgleichung enthaltenen Constanten bestimmt werden.

Indem nun (S. 138—140) direct die Einwirkungen der verschiedenen Umläufe von z, als eben so vieler mit einem Fundamentalsysteme y_1, y_2 aus-
6] geführter linearer Substitutionen, auf eine aus y_1, y_2 gebildete Form untersucht werden, erhalten wir ein gewisses System von Gleichungen zwischen den Coefficienten jener linearen Relationen, den Coefficienten der Primform niedrigsten Grades, und den in P enthaltenen Constanten. Es lässt sich demnach bestimmen, wie diese Constanten beschaffen sein müssen, damit die Differentialgleichung (B.) algebraische Integrale besitze.

Der Verfasser bemerkt jedoch (S. 141), dass die erste Methode vor dieser den Vorzug besitze, die endgültige Entscheidung auf ein System algebraischer linearer Gleichungen zurückzuführen, während die zweite Methode die Untersuchung transcendenter Gleichungen erforderte. Indessen wo die Gesetze dieser transcendenten Functionen sich einer ähnlichen Einfachheit erfreuen wie die Gausssche Π-Function, könne diese Methode nicht ohne Vortheil angewendet werden.

Ist umgekehrt die Differentialgleichung (B.) gegeben, und soll entschieden werden, ob diese algebraische Integrale besitzt, so lässt die zweite Methode Vereinfachungen zu (Siehe S. 141—142), indem gelehrt wird, eine Tabelle von ähnlicher Beschaffenheit aufzustellen, wie die auf S. 126, und die Relationen zwischen den zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsystemen auf dieselbe anzuwenden.

1) Abh. XIV, Band I dieser Ausgabe, S. 394 ff. Sch.

4.

Es ist in No. 2 dieser Notiz das Resultat erwähnt worden, dass die Zahl N nicht grösser als 12 sei. Dasselbe ist eine unmittelbare Folge von Entwickelungen, welche sich auf die Eigenschaften derjenigen algebraischen Functionen, welche der Differentialgleichung (B.) genügen, und die Natur der binären Formen, welche aus einem Fundamentalsysteme y_1, y_2 derselben gebildet sind, beziehen (S. 102—126). Die hauptsächlichen Elemente dieser Entwickelungen sind die folgenden:

Sind die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch, so ist jedes Integral derselben eine rationale Function von z und einem beliebigen anderen Integrale (S. 107).

Wenn ein algebraisches Integral y auf einem gewissen Wege in yj übergeht, wo j constant, so ist j eine primitive ganzzahlige l^{te} Wurzel der Einheit; es ist l Divisor des Grades m der irreductiblen algebraischen Gleichung, welcher y genügt, und jedes Integral hat die Form

$$(\alpha'+\beta' c_1)\, y + \beta' y^{l-1}\psi(y^l),$$

worin α', β' Constanten, $\psi(y^l)$ eine ganze rationale Function von y^l vom [7
Grade $\frac{m}{l}-1$ mit in z rationalen Coefficienten bedeutet. Die Grösse c_1 ist ebenfalls constant, wenn $l > 2$ (S. 108).

Die Function

$$y^{l-1}\psi(y^l)$$

ist ebenfalls ein Integral der Differentialgleichung (B.) (S. 108—109).

Ist $F(y)$ ein Integral, welches nicht gleich y multiplicirt mit einer Constanten und

1) $$(\alpha.)\quad F(y) = \beta' y^{l-1}\psi(y^l) \quad (\beta' \text{ constant}),$$

so sind die Glieder der Reihe

$$(\beta.)\quad F(y),\ F(yj),\ F(yj^2),\ \ldots,\ F(yj^{l-1})$$

nur um constante Factoren verschieden.

2) Ist $F(y)$ nicht der Form (α.) und l eine ungerade Zahl, so ist kein Glied der Reihe (β.) gleich einem anderen multiplicirt mit einer Constanten.

3) Ist $F(y)$ nicht der Form (α.) und l eine gerade Zahl, so ist kein Glied der Reihe

$$(\gamma.)\quad F(y),\ F(yj),\ F(yj^2),\ \ldots,\ F\left(yj^{\frac{l}{2}-1}\right)$$

gleich einem anderen multiplicirt mit einer Constanten. Dagegen ist

$$F\left(yj^{\frac{l}{2}+i}\right) = -F(yj^i) \quad \text{(S. 110—111).}$$

Der Grad m der irreductiblen algebraischen Gleichung, welcher ein algebraisches Integral der Differentialgleichung (B.) genügt, ist für alle Integrale unverändert derselbe. Man kann daher mit Recht m den zur Differentialgleichung (B.) gehörigen Grad nennen (S. 111).

Ist $y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen algebraischen Gleichung m^{ten} Grades, welcher das Integral y genügt, und $j, j_1, j_2, \ldots$, die Reihe der Zahlen, mit welchen irgend welche der Glieder dieses Systems multiplicirt die anderen Wurzeln derselben Gleichung reproduciren, so sind diese Zahlen Einheitswurzeln. Sie seien resp. $l^{\text{te}}, l_1^{\text{te}}, l_2^{\text{te}}, \ldots$, primitive Wurzeln der Einheit, und unter den Zahlen $l, l_1, l_2, \ldots, l$ die grösste, so ist l ein Multiplum von $l_1, l_2, \ldots$, und es liefert das System:

$$y_i,\ y_i j,\ y_i j^2,\ \ldots,\ y_i j^{l-1} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (S. 111—113).

8] Die Zahl l wird der Index des reducirten Wurzelsystems genannt, es ist also das Product aus der Gliederzahl des reducirten Wurzelsystems in den Index desselben gleich dem Grade der Gleichung (S. 113).

Von jeder Form des in No. 2 dieser Notiz mit Φ bezeichneten Complexes gilt der Satz, dass sie alle solche Linearfactoren, welche zusammen das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen Gleichung bilden, gleich oft enthält (S. 115).

Gehört eine Form dem Complexe Φ an, so gehört auch jede Covariante derselben dem Complexe Φ an (S. 106).

Die Hessesche Covariante einer Primform niedrigsten Grades ist ebenfalls eine Primform (S. 116).

Die Linearfactoren einer Primform niedrigsten Grades bilden ein reducirtes Wurzelsystem mit kleinster Gliederanzahl N. Es wird der Index desselben mit L (S. 115) bezeichnet.

Es sei η ein Linearfactor einer Primform niedrigsten Grades $\Phi(y_1, y_2)$, ζ irgend ein Factor der Hesseschen Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ derselben. Ist

$$(\delta.)\quad \zeta = \beta' \eta^{L-1} \psi(\eta^L),$$

wo β' constant und

$$\psi(\eta^L) = c_0 + c_1 \eta^L + \cdots + c_{(N-1)L}\, \eta^{(N-1)L},$$

so ist $N = 4$ (S. 119).

Ist kein Factor ζ der Form (δ.), und $N > 2$, und setzt man $\lambda = \frac{L}{2}$ oder L, je nachdem L gerade oder ungerade, so ist λ Divisor von $2N-4$ (S. 121) und $\Psi(y_1, y_2)$ der Form

$$(\varepsilon.)\quad \Psi(y_1, y_2) = C[\beta_1^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1} \alpha_1^\lambda y_1^\lambda][\beta_2^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1} \alpha_2^\lambda y_1^\lambda] \ldots [\beta_{\lambda'}^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1} \alpha_{\lambda'}^\lambda y_1^\lambda],$$

$\lambda' = \frac{2N-4}{\lambda}$ (S. 122).

Die Hessesche Covariante $\Psi_1(y_1, y_2)$ der Hesseschen Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ hat die Form

$$\Psi_1(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{\lambda-2}\, \Psi_1'(y_1^\lambda, y_2^\lambda),$$

wo $\Psi_1'(y_1^\lambda, y_2^\lambda)$ nur solche Potenzen von y_1 und y_2 enthält, deren Exponenten Vielfache von λ sind (S. 122).

Die Zahl λ ist kleiner als 6 (S. 122).

Die Zahl N ist nicht grösser als 12 (S. 123).

Die Covarianten niedrigern als N^{ten} Grades einer Primform niedrigsten Grades müssen identisch verschwinden (Siehe S. 98).

Mit Hülfe der Eigenschaften der Primformen niedrigsten Grades wird [9 eine Tabelle für die möglichen Gestalten derselben hergeleitet (S. 123—126), aus welcher sich namentlich ergiebt, dass N von den die Zahl 12 nicht übersteigenden Werthen nur die geradzahligen annehmen kann.

5.

Zum Schluss noch einige besondere Resultate, welche zeigen, wie man in concreten Fällen aus den in der Arbeit entwickelten Principien einfache Mittel der Entscheidung gewinnen kann, ob die Differentialgleichung (B.) algebraische Integrale hat.

Sind die Integrale der Differentialgleichung (B.) sämmtlich algebraisch, so gehört sie zu der Klasse der Differentialgleichungen (12.) No. 4 der Arbeit in Bd. 66[1]), und es müssen die Wurzeln der zu den einzelnen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen nach (Bd. 66 No. 6 II[2]) rationale Zahlen sein (s. S. 104 der vorl. Arbeit). Ist dieses erfüllt, und irgend einer der Nenner dieser auf ihre kleinste Benennung gebrachten Zahlen grösser als 10, so besitzt die Differentialgleichung (B.) kein algebraisches Integral, wenn nicht diese selber oder die Differentialgleichung (C.) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird (Siehe S. 134—135).

Sind die Nenner derselben Zahlen sämmtlich von den Zahlen 1, 2, 4 verschieden, und wird die Differentialgleichung (C.) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt, so genügt der Differentialgleichung (B.) entweder überhaupt kein algebraisches Integral oder die Wurzel einer rationalen Function (S. 135—136).

Sind sämmtliche Nenner gleich 2, ferner $\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$ die in algebraischem Sinne grössere der beiden Wurzeln $\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$, $1-\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$ der zum singulären Punkte a_i gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, endlich y_{i1} das zu $\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$ als Exponent gehörige Integral (s. Bd. 66, No. 6[3]), und setzt man voraus, dass für alle singulären Punkte der Coefficient von $(z-a_i)^{-\mathfrak{z}_i-1}$ in der Entwickelung von $\frac{1}{y_{i1}^2}$ nach steigenden Potenzen von $z-a_i$ verschwindet, so wird die Differentialgleichung (B.) durch die Quadratwurzel einer rationalen Function befriedigt (Siehe S. 137—138).

Heidelberg.

L. Fuchs.

---

1) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 186. Sch.

2) Ebenda, S. 199. Sch.

3) Ebenda, S. 196 ff. Sch.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 76, Zeile 18 jedes statt jeden,
„ 78, „ 8 Entwickelungen statt Einwirkungen,
„ „, „ 8 v. u. Gausssche Π-Function statt Gaussschen Π-Functionen,
„ 79, „ 7 gebildet sind statt überhaupt,
„ 80, „ 12 die Reihe der Zahlen statt die Zahlen,
„ 81, „ 7 Factor ζ statt ζ Factor,
„ „, Gl. (ε.) $(-1)^{\lambda-1}\alpha_1^\lambda y_1^\lambda$ statt $(-1)^{\lambda-1}L_1^\lambda y_1^\lambda$,
„ 82, Zeile 17 No. 6 statt No. 5.

Sch.

XXIV.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, AUXQUELLES SATISFONT LES MODULES DE PÉRIODICITÉ DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES DES DEUX PREMIERES ESPÈCES.

Extrait d'une lettre adressée à M. HERMITE.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. 83, 1877, p. 13–37.)

Dans le mémoire suivant je conçois le module k des fonctions ellip- [13
tiques comme variable indépendante, et je définis les quantités K et K' comme des fonctions de cette variable au moyen de l'équation différentielle à laquelle elles satisfont. Soient K et K' des valeurs déterminées de ces fonctions pour une valeur donnée de k; leurs valeurs qui correspondent aux chemins de la variable indépendante menant au même point k ont respectivement les formes $a_1 K + b_1 K'$, $a_2 K + b_2 K'$, où a_1, b_1, a_2, b_2 sont des nombres indépendants de k. Je détermine ces nombres au moyen des principes établis dans mon mémoire (Journ. de M. BORCHARDT, t. 71, p. 91[1]), et ensuite je démontre que la partie réelle du quotient

$$\mathrm{H} = \frac{a_2 K + b_2 K'}{a_1 K + b_1 K'}$$

est ou nulle, ou positive. Ce théorème comprend comme cas spécial le théorème connu dans la théorie des fonctions elliptiques, qui dit que, pour une valeur fixe de k, la partie réelle du quotient des deux intégrales

---

[1]) Mém. VIII, t. I de cette édition, p. 241 et suiv. Sch.

définies K' et K est positive. Comme la démonstration de notre théorème plus général s'appuie sur des principes tout-à-fait différents de ceux qu'on applique pour démontrer le théorème spécial dans la théorie des fonctions elliptiques, elle en fournit en même temps une nouvelle démonstration.

Je considère ensuite, dans l'équation $q = e^{-\pi H}$, q comme variable indépendante, et je fais voir que la fonction k^2 de q qui en résulte par l'inversion est, de même que K, une fonction holomorphe dans l'intérieur d'un cercle $\mathfrak{K}$, décrit autour du point $q = 0$ comme centre avec un rayon égal à l'unité. De cette recherche il résulte une connexion entre k^2 et q telle que, lorsque q décrit un chemin quelconque dans l'intérieur de $\mathfrak{K}$, partant du centre et
14] aboutissant à un point quelconque de la périphérie, la fonction k^2 partant du point $k = 0$ doit aboutir à l'un des points $k = 1$, $k = \infty$. Il s'ensuit que chaque point de la circonférence de $\mathfrak{K}$ est un point de discontinuité de la fonction k^2 de q. Voilà la cause de la propriété déjà signalée de cette fonction, de ne point permettre d'extension par continuité au delà de cette périphérie.

La dépendance qu'il y a entre k^2 et q et que nous venons d'indiquer, peut également être caractérisée de cette manière que, dans le plan de k, à un chemin quelconque joignant le point $k = 0$ à l'un des points $k = 1$, $k = \infty$, correspond un chemin de q, contenu dans l'intérieur de $\mathfrak{K}$, partant de $q = 0$ et aboutissant à la périphérie, de sorte que la fonction k^2 de q, holomorphe dans l'intérieur de $\mathfrak{K}$, épuise tous les points du plan de k.

Je considère en second lieu les périodes de l'intégrale elliptique de seconde espèce, J et J', comme fonctions de la variable indépendante k, en les définissant par une équation différentielle linéaire du second ordre à laquelle elles satisfont. Les valeurs diverses de J et J' qui correspondent aux chemins divers de la variable indépendante menant au même point k, ont respectivement les formes $\alpha_1 J + \beta_1 J'$, $\alpha_2 J + \beta_2 J'$, où $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ sont des nombres indépendants de k. Ayant déterminé ces nombres, je fais l'étude du quotient

$$Z = \frac{\alpha_1 J + \beta_1 J'}{\alpha_2 J + \beta_2 J'}.$$

Ensuite je considère, dans l'équation $s = e^{-\pi Z}$, s comme variable indépendante, et je démontre que la fonction $\frac{1-k^2}{k^2}$ de s, qui en résulte par l'inversion, est aussi holomorphe dans l'intérieur d'un cercle $\mathfrak{L}$, décrit autour du point $s = 0$

comme centre avec un rayon égal à l'unité. Mais on trouve une différence essentielle entre la fonction $\frac{1-k^2}{k^2}$ de s et la fonction k^2 de q dont il a été question plus haut: c'est que les valeurs de k correspondant aux points de l'intérieur de $\mathfrak{L}$, n'épuisent pas tous les points du plan de k; au contraire la fonction $\frac{1-k^2}{k^2}$ de s permet une extension par continuité au delà de la périphérie de $\mathfrak{L}$, de telle manière que dans l'extérieur de $\mathfrak{L}$ elle est aussi holomorphe pour toute valeur finie de q. Enfin notre recherche même éclaircira pourquoi c'est $\frac{J}{J'}$ et non $\frac{J'}{J}$ qui joue le rôle analogue à $\frac{K'}{K}$.

1. [15

Supposons k réel et en valeur absolue inférieur à l'unité, et posons

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}},$$

Si en prenant la racine carrée avec le signe positif, on effectue les intégrations tout le long de l'axe réel des x, ces intégrales seront des fonctions de k bien déterminées. Soient $x^2 = y$ et $k^2 = \frac{1}{u}$, de sorte que u est réel et $\geqq 1$; on aura

$$K = \frac{1}{2}\sqrt{u}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(u-y)}}, \qquad K' = \frac{1}{2}\sqrt{u}\int_1^u \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}},$$

où la racine $\sqrt{u}$ est positive et les intégrations s'effectuent le long de l'axe réel des y avec le signe positif de la racine carrée.

En posant

$$\eta_1 = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(u-y)}}, \qquad \eta_2 = \int_1^u \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}},$$

on a

$$K = \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,\eta_1, \qquad K' = \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,\eta_2.$$

2.

Les valeurs des fonctions η_1, η_2 de u étant définies dans le numéro précédent pour des valeurs limitées de la variable u, je me propose de les déterminer pour des valeurs quelconques complexes de cette variable. Pour cela je recours à leur propriété connue de satisfaire à l'équation différentielle

$$\text{(A.)} \qquad 2u(u-1)\frac{d^2\eta}{du^2} + 2(2u-1)\frac{d\eta}{du} + \frac{1}{2}\eta = 0.$$

(Voir p. e. mon mémoire dans le Journ. de M. BORCHARDT, t. 71, p. 118[1]), éq. (7.)).

Au même endroit (p. 122[2]) j'ai démontré ce qui suit:

Au point singulier $u = 0$ appartient le système fondamental d'intégrales v_{01}, v_{02} qui, dans le domaine du même point, ont les formes:

$$(1.)\qquad \begin{cases} v_{01} = 1 + \sum_1^\infty {}_\mathfrak{b} \left(\dfrac{1.3.5\ldots(2\mathfrak{b}-1)}{2.4.6\ldots 2\mathfrak{b}}\right)^2 u^\mathfrak{b}, \\ v_{02} = H_0(u)\, v_{01} - v_{01} \log u, \end{cases}$$

où $H_0(u)$ est une fonction holomorphe dans le même domaine, définie par

16] l'équation:

$$H_0(u) = 4 \log 2 + \int_0^u \frac{1 + v_{01}^2 (u-1)}{v_{01}^2\, u (u-1)}\, du.$$

Au point singulier $u = 1$ appartient le système fondamental d'intégrales v_{11}, v_{12} qui, dans le domaine du point $u = 1$, ont les formes:

$$(2.)\qquad \begin{cases} v_{11} = 1 + \sum_1^\infty {}_\mathfrak{b} (-1)^\mathfrak{b} \left(\dfrac{1.3.5\ldots(2\mathfrak{b}-1)}{2.4.6\ldots 2\mathfrak{b}}\right)^2 (u-1)^\mathfrak{b}, \\ v_{12} = H_1(u)\, v_{11} + v_{11} \log (u-1), \end{cases}$$

où $H_1(u)$ est une fonction holomorphe dans le même domaine, définie par l'équation:

$$H_1(u) = -4 \log 2 + \int_1^u \frac{1 - v_{11}^2 u}{u(u-1)\, v_{11}^2}\, du.$$

Enfin au point singulier $u = \infty$ appartient le système fondamental d'intégrales $v_{\infty 1}, v_{\infty 2}$ qui, dans le domaine de $u = \infty$, ont les formes:

$$(3.)\qquad \begin{cases} v_{\infty 1} = \left(\dfrac{1}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \sum_1^\infty {}_\mathfrak{b} \left(\dfrac{1.3.5\ldots(2\mathfrak{b}-1)}{2.4.6\ldots 2\mathfrak{b}}\right)^2 \left(\dfrac{1}{u}\right)^\mathfrak{b}\right], \\ v_{\infty 2} = v_{\infty 1} H_\infty(u) + v_{\infty 1} \log \dfrac{1}{u}, \end{cases}$$

où $H_\infty(u)$ est une fonction holomorphe dans le même domaine, définie par l'équation:

$$H_\infty(u) = -4 \log 2 - \int_\infty^u \frac{1 + v_{\infty 1}^2 (1-u)}{v_{\infty 1}^2\, u (u-1)}\, du.$$

---

1) Mém. VIII, t. I de cette édition, p. 271. Sch.

2) ibid. p. 275. Sch.

On a par conséquent

$$(4.)\qquad \eta_1 = a_1 v_{11} + b_1 v_{12}; \quad \eta_2 = a_2 v_{11} + b_2 v_{12},$$

où a_1, b_1, a_2, b_2 sont des constantes que nous allons déterminer.

En posant

$$\eta_1 = A_1 + B_1$$

et

$$A_1 = \int_0^1 \frac{1 - \sqrt{y}}{\sqrt{y(1-y)(u-y)}}\, dy, \qquad B_1 = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y)(u-y)}},$$

où l'on doit prendre $\sqrt{y}$ positive et effectuer les intégrations le long de l'axe réel des y avec les signes positifs des racines carrées, on a

$$A_1 = 2 \log 2, \quad \text{pour} \quad u = 1;$$

puis on a

$$B_1 = 2 \log (\sqrt{u} + 1) - \log (u-1).$$

Donc [17

$$\lim\, [\eta_1 + \log (u-1)] = 4 \log 2, \quad \text{pour} \quad u = 1.$$

En ayant égard aux équations (2.), il suit de la première des équations (4.):

$$b_1 = -1, \quad a_1 = 0.$$

Par un calcul analogue il vient:

$$\lim \eta_2 = \pi, \quad \text{pour} \quad u = 1;$$

et puis

$$b_2 = 0, \quad a_2 = \pi.$$

La relation (4.) devient ainsi:

$$(B.)\qquad \eta_1 = -v_{12}, \quad \eta_2 = \pi v_{11}.$$

Nous avons de même

$$(5.)\qquad \eta_1 = c_1 v_{\infty 1} + d_1 v_{\infty 2}; \quad \eta_2 = c_2 v_{\infty 1} + d_2 v_{\infty 2},$$

où c_1, d_1, c_2, d_2 sont des constantes que nous allons déterminer. On voit immédiatement que

$$\lim \eta_1 \sqrt{u} = \pi, \quad \text{pour} \quad u = \infty.$$

Il s'ensuit donc des équations (3.)

$$d_1 = 0, \quad c_1 = \pi.$$

Posons $y = u-(u-1)z$ dans η_2; on aura

$$\eta_2\sqrt{u} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)\left[1-\frac{u-1}{u}z\right]}} = A_\infty + B_\infty$$

et

$$A_\infty = \int_0^1 \frac{(1-\sqrt{z})\,dz}{\sqrt{z(1-z)\left[1-\frac{u-1}{u}z\right]}}, \qquad B_\infty = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z)\left[1-\frac{u-1}{u}z\right]}},$$

où les intégrations doivent être effectuées de la même manière que dans les intégrales A_1, B_1. On a

$$\left.\begin{aligned} \lim A_\infty &= 2\log 2, \\ \lim B_\infty &= 2\log 2 - \lim\log\frac{1}{u}, \end{aligned}\right\} \text{(pour } u = \infty\text{)};$$

donc

$$\lim\left[\eta_2\sqrt{u} + \log\frac{1}{u}\right] = 4\log 2, \quad \text{pour} \quad u = \infty.$$

Par conséquent, en ayant égard aux équations (3.), il vient

$$d_2 = -1, \quad c_2 = 0.$$

18] Nous obtenons ainsi:

(C.) $$\eta_1 = \pi v_{\infty 1}, \quad \eta_2 = -v_{\infty 2}.$$

Posons enfin

(6.) $$\eta_1 = e_1 v_{01} + f_1 v_{02}, \quad \eta_2 = e_2 v_{01} + f_2 v_{02}.$$

La détermination des constantes e_1, f_1, e_2, f_2 exige un autre procédé, parce que η_1, η_2 ne sont définies dans le no. précédent que pour des valeurs réelles de u qui surpassent l'unité. L'une ou l'autre des équations (B.) et (C.) est propre à définir les fonctions η_1, η_2 pour toute l'étendue du plan u, les fonctions $v_{11}, v_{12}, v_{\infty 1}, v_{\infty 2}$ étant déterminées dans ce plan. (Voir mes mémoires t. 66, p. 121; t. 75, p. 177 du Journ. de M. Borchardt[1])). Nous pourrions aussi définir η_1, η_2 pour toute l'étendue du plan, en fixant leurs valeurs par des intégrales définies d'après la méthode de mon mém. t. 71, p. 123[2]). Une circulation de u autour du point $u = 1$ change η_1, η_2 en des fonctions linéaires

[1]) Mém. VI, p. 159; mém. XIV, p. 361 du t. I de cette édition. Sch.
[2]) Mém. VIII, t. I de cette édition, p. 276. Sch.

et homogènes de ces quantités, représentées d'après les équations (B.) par la substitution:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De même une circulation de u autour de $u = \infty$ change η_1, η_2 en des fonctions linéaires et homogènes de ces quantités, représentées d'après les équations (C.) par la substitution:

$$S_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2i & -1 \end{pmatrix}.$$

Et si le même contour est décrit dans le sens inverse, η_1, η_2 deviennent des fonctions linéaires et homogènes de ces quantités représentées par la substitution:

$$S_{-\infty} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2i & -1 \end{pmatrix}.$$

Désignons par

$$S_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

la substitution qui sert à déterminer les fonctions linéaires et homogènes des quantités η_1, η_2, qui résultent d'une circulation de u autour du point $u = 0$; on aura

(7.) $$S_{-\infty} = S_1 S_0,$$

en désignant, comme on le fait usuellement, une substitution composée de deux ou de plusieurs autres, par le produit des substitutions composantes.

L'équation (7.) peut être écrite ainsi [19

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-2\gamma i & \beta-2\delta i \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

et fournit tout de suite:

$$\alpha-2\gamma i = -1, \quad \beta-2\delta i = 0, \quad \gamma = -2i, \quad \delta = -1,$$

ou

(8.) $$\alpha = 3, \quad \beta = -2i, \quad \gamma = -2i, \quad \delta = -1;$$

donc

$$S_0 = \begin{pmatrix} 3 & -2i \\ -2i & -1 \end{pmatrix}.$$

Or d'après les équations (6.) et (1.) on a

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e_1 & f_1\\ e_2 & f_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2\pi i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1 & f_1\\ e_2 & f_2\end{pmatrix}^{-1},$$

en désignant par S^{-1} la substitution inverse d'une substitution S, ou, en posant

$$e_1 f_2 - e_2 f_1 = \Delta,$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\dfrac{2\pi i f_1 f_2}{\Delta} & \dfrac{2\pi i f_1^2}{\Delta}\\ -\dfrac{2\pi i f_2^2}{\Delta} & 1+\dfrac{2\pi i f_1 f_2}{\Delta}\end{pmatrix}.$$

On en tire donc à l'aide des équations (8.):

$$(9.)\qquad \frac{\pi i f_1 f_2}{\Delta} = -1, \qquad \frac{\pi f_1^2}{\Delta} = -1, \qquad \frac{\pi f_2^2}{\Delta} = 1.$$

Mais comme une de ces équations est une conséquence des deux autres, elles ne présentent en effet que deux équations pour la détermination des quantités e_1, f_1, e_2, f_2. Deux autres équations découlent de la méthode suivante, par laquelle nous pourrons obtenir encore d'autres formules utiles pour ce mémoire.

On a (Voir p. e. mon mém. t. 66, p. 128[1])

$$\begin{vmatrix}\dfrac{d\eta_{11}}{du} & \eta_{11}\\ \dfrac{d\eta_{12}}{du} & \eta_{12}\end{vmatrix} = \frac{C}{u(u-1)},$$

où C est indépendant de u. Par conséquent

$$\begin{vmatrix}\dfrac{d\eta_{11}}{du}(u-1) & \eta_{11}(u-1)\\ \dfrac{d\eta_{12}}{du} & \eta_{12}\end{vmatrix} = \frac{C}{u}.$$

20] D'après les équations (B.) et (2.), η_{12} et $\frac{d\eta_{12}}{du}$ ont des valeurs finies pour $u=1$, savoir $\eta_{12} = \pi$; en outre $\eta_{11}(u-1) = 0$ et $\frac{d\eta_{11}}{du}(u-1) = -1$ pour $u=1$. Donc on a

$$C = -\pi,$$

1) Mém. VI, t. I de cette édition, p. 166. Sch.

et par conséquent:

$$(D.)\qquad \begin{vmatrix}\dfrac{d\eta_{11}}{du} & \eta_{11}\\ \dfrac{d\eta_{12}}{du} & \eta_{12}\end{vmatrix} = \frac{-\pi}{u(u-1)}.$$

On a de même:

$$\begin{vmatrix}\dfrac{dv_{01}}{du} & v_{01}\\ \dfrac{dv_{02}}{du} & v_{02}\end{vmatrix} = \frac{C'}{u(u-1)},$$

où C' est indépendant de u; donc

$$\begin{vmatrix}\dfrac{dv_{01}}{du} & v_{01}\\ u\dfrac{dv_{02}}{du} & uv_{02}\end{vmatrix} = \frac{C'}{u-1}.$$

En posant $u=0$, on trouve d'après les équations (1.)

$$C' = -1,$$

par conséquent

$$(10.)\qquad \begin{vmatrix}\dfrac{dv_{01}}{du} & v_{01}\\ \dfrac{dv_{02}}{du} & v_{02}\end{vmatrix} = -\frac{1}{u(u-1)}.$$

Or on déduit des équations (6.)

$$\begin{vmatrix}\dfrac{d\eta_{11}}{du} & \eta_{11}\\ \dfrac{d\eta_{12}}{du} & \eta_{12}\end{vmatrix} = \Delta\begin{vmatrix}\dfrac{dv_{01}}{du} & v_{01}\\ \dfrac{dv_{02}}{du} & v_{02}\end{vmatrix},$$

par conséquent on conclut des équations (D.) et (10.)

$$(11.)\qquad \Delta = \pi.$$

Soit u une quantité réelle et positive inférieure à 1, et l'intégrale

$$\vartheta = \int_1^u \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}}$$

21] prise le long de l'axe réel des y avec le signe positif de la racine carrée; ϑ regardée comme fonction de u satisfait à l'équation différentielle (A.). Par un calcul analogue à celui que nous venons de faire pour la détermination de la limite de η_1 pour $u=1$, on déduit

$$\lim \vartheta = -\pi, \quad \text{pour} \quad u = 1.$$

D'une manière semblable à celle que l'on a employée ci-dessus pour η_2 on trouve:

$$\vartheta = -\pi v_{11}. \tag{12.}$$

De cette équation et des équations (B.), on conclut que ϑ représente, pour des valeurs réelles de u comprises entre 0 et 1, le prolongement de la fonction $-\eta_2$ telle qu'elle est définie par l'équation (B.) ou (C.). Donc on a

$$\lim \eta_2 = -\lim \vartheta, \quad \text{pour} \quad u = 0.$$

Mais en posant

$$\vartheta = A_0 + B_0,$$

où

$$A_0 = \int_1^u \frac{1-\sqrt{1-y}}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}}\,dy, \qquad B_0 = \int_1^u \frac{dy}{\sqrt{y(y-u)}},$$

on a

$$\left.\begin{aligned} \lim A_0 &= -2\log 2, \\ \lim B_0 &= -2\log 2 + \lim \log u, \end{aligned}\right\} \text{(pour } u = 0\text{)}.$$

Donc

$$\lim\,[\eta_2 + \log u] = 4\log 2, \quad \text{pour} \quad u = 0.$$

De la seconde des équations (6.) on déduit, en ayant égard aux équations (1.),

$$f_2 = 1, \quad e_2 = 0.$$

Par conséquent les équations (9.) et (11.) donnent les valeurs

$$e_1 = \pi, \quad f_1 = i, \quad e_2 = 0, \quad f_2 = 1.$$

On a donc:

$$\eta_1 = \pi v_{01} + i v_{02}; \quad \eta_2 = v_{02}. \tag{E.}$$

Ces équations et les équations (1.) pourraient servir à déterminer l'expression de S_0, que l'on trouverait d'accord avec l'expression déjà donnée plus haut.

3.

Recherchons maintenant les diverses valeurs que les fonctions η_1, η_2 peuvent acquérir pour un point quelconque u, d'après les divers chemins que peut suivre la variable pour parvenir à ce point.

A cet effet on déduit aisément les équations [22

$$S_0^n = \begin{pmatrix} 3 & -2i \\ -2i & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & -2ni \\ -2ni & -(2n-1) \end{pmatrix}, \tag{1.}$$

$$S_1^n = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & -2ni \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.}$$

pour une valeur quelconque entière de n, en désignant toujours une substitution composée de plusieurs autres par des produits et des puissances des substitutions composantes.

Les substitutions S_0, S_1 et leurs puissances ont par conséquent la forme:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \lambda & \mu i \\ \nu i & \varrho \end{pmatrix},$$

où $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ sont des nombres réels et entiers. Composons la substitution σ avec une substitution semblable σ':

$$\sigma' = \begin{pmatrix} \lambda' & \mu' i \\ \nu' i & \varrho' \end{pmatrix},$$

où $\lambda', \mu', \nu', \varrho'$ représentent aussi des nombres entiers et réels; il en résulte la substitution

$$\sigma'' = \sigma\sigma' = \begin{pmatrix} \lambda\lambda' - \mu\nu' & (\lambda\mu' + \mu\varrho')i \\ (\nu\lambda' + \varrho\nu')i & -\nu\mu' + \varrho\varrho' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda'' & \mu'' i \\ \nu'' i & \varrho'' \end{pmatrix}$$

de la même forme.

De là il suit que la substitution:

$$\Pi = S_0^k S_1^l S_0^{k_1} S_1^{l_1} S_0^{k_2} S_1^{l_2} \ldots,$$

où $k, l, k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots$ signifient des nombres réels et entiers positifs, négatifs ou nuls, a toujours la forme d'une substitution σ.

Comme un chemin quelconque de la variable u change les fonctions η_1, η_2 en des fonctions linéaires et homogènes de ces fonctions dont les coefficients s'obtiennent par une substitution de la forme Π, il s'ensuit que toutes les valeurs dont η_1 et η_2 soient susceptibles pour le même point u, sont représentées par les formules:

$$\text{(F.)} \qquad \lambda\eta_{1_1} + \mu i \eta_{1_2}, \quad \nu i \eta_{1_1} + \varrho \eta_{1_2},$$

où $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ sont des nombres réels entiers. Les déterminants des substitutions S_0 et S_1 étant égaux à l'unité, et le déterminant d'une substitution composée de plusieurs autres étant, comme l'on sait, égal au produit des déterminants des substitutions composantes, il en résulte que

$$\text{(G.)} \qquad \lambda\varrho + \mu\nu = 1.$$

23] 4.

D'après le no. précédent, le quotient

$$\mathrm{H} = \frac{\eta_{1_2}}{\eta_{1_1}} = \frac{K'}{K}$$

prendra en un point quelconque u, pour les divers chemins par où la variable u y parvient, les valeurs contenues dans la forme:

$$(\alpha.) \qquad \frac{\nu i + \varrho \mathrm{H}_0}{\lambda + \mu i \mathrm{H}_0} = \frac{i}{\mu} \frac{1}{\lambda + \mu i \mathrm{H}_0} - \frac{\varrho i}{\mu},$$

en désignant par H_0 une valeur quelconque parmi celles que H acquiert en u, et par $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ des nombres réels entiers qui satisfont à l'équation (G.).

Or d'après les équations (B.), (C.), (E.) et les équations (1.), (2.), (3.) du no. 2, on a

$$(\beta.) \qquad \begin{cases} \mathrm{H}_0 = -i, & \text{pour} \quad u = 0, \\ \mathrm{H}_0 = 0, & \text{pour} \quad u = 1, \\ \mathrm{H}_0 = \dfrac{4\log 2}{\pi} + \dfrac{1}{\pi}\lim \log u, & \text{pour} \quad u = \infty, \end{cases}$$

c. à. d. que la partie réelle de H_0 est infinie et positive pour $u = \infty$.

Donc toutes les valeurs qu'acquiert H pour les points $u = 0, 1, \infty$, la variable u y parvenant par un chemin quelconque, sont représentées par les formules suivantes:

$$\text{pour} \quad u = 0, \quad \mathrm{H} = \frac{\nu - \varrho}{\lambda + \mu} i,$$

$$\text{pour} \quad u = 1, \quad \mathrm{H} = \frac{\nu}{\lambda} i,$$

$$\text{pour} \quad u = \infty, \quad \mathrm{H} = \text{ou à} \ \frac{-\varrho}{\mu} i,$$

ou à un nombre dont la partie réelle est infinie et positive, en désignant toujours par $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ des nombres réels entiers qui satisfont à l'équation (G.). Il faut remarquer que la seconde valeur que H peut avoir pour $u = \infty$ correspond à $\mu = 0$. Mais on a alors d'après l'équation (G.) $\lambda\varrho = 1$, ou, λ, ϱ étant des nombres entiers, $\lambda = \varrho = \pm 1$, c. à. d. $\frac{\varrho}{\lambda} = 1$. Portant dans $(\alpha.)$ la valeur de H_0 donnée par $(\beta.)$ pour $u = \infty$, et $\mu = 0$, on arrive à une valeur dont la partie réelle est infinie et positive.

Posons maintenant

$$q = e^{-\pi \mathrm{H}};$$

les différentes valeurs qu'acquiert q pour $u = 0, 1, \infty$, la variable u ayant décrit pour parvenir à l'un de ces points un chemin quelconque, sont [24
données dans le tableau suivant:

$$\text{(H.)} \qquad \begin{cases} q = e^{-\pi\delta i}, & \text{pour} \quad u = 0, \\ q = e^{-\pi\varepsilon i}, & \text{pour} \quad u = 1, \\ q = \text{ou à} \ e^{-\pi\zeta i} \ \text{ou à zéro}, & \text{pour} \quad u = \infty, \end{cases}$$

où $\delta, \varepsilon, \zeta$ sont des nombres réels et rationnels. Donc:

A l'exception de la valeur $q = 0$ toutes les valeurs du tableau (H.) ont des modules égaux à l'unité.

5.

On déduit des équations (B.), (C.), (E.) et des équations (1.), (2.), (3.) du no. 2

$$(1.) \qquad \mathrm{H} = \frac{H_0(u) - \log u}{\pi + i[H_0(u) - \log u]} \quad \text{dans le domaine de} \quad u = 0,$$

$$(2.) \qquad \mathrm{H} = \frac{\pi}{-H_1(u) - \log(u-1)} \quad \text{dans le domaine de} \quad u = 1,$$

$$(3.) \qquad \mathrm{H} = -\frac{1}{\pi} H_\infty(u) - \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{u} \quad \text{dans le domaine de} \quad u = \infty.$$

Comme $H_0(u), -H_1(u), -H_\infty(u)$ dans le voisinage respectivement de $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$ ne diffèrent que très-peu de la valeur $4\log 2$, tandis que les parties réelles de $\log u, \log(u-1), \log\frac{1}{u}$ dans le voisinage respectivement des mêmes points acquièrent des valeurs infinies négatives, on conclut que les parties réelles des valeurs de H données par les formules (1.), (2.), (3.), *sont positives dans trois parties du plan, dont l'une contient le point* $u=0$, *l'autre le point* $u=1$ *et la troisième le point* $u=\infty$. Désignons ces parties du plan respectivement par f_0, f_1, f_∞.

Soit pour un chemin quelconque de u

$$\mathrm{H} = \alpha + \beta i,$$

où α, β sont des quantités réelles; on a d'après le no. 4, formule (α.) la valeur suivante de H pour un autre chemin quelconque de u:

$$\mathrm{H} = \frac{\nu i + \varrho(\alpha+\beta i)}{\lambda + \mu i(\alpha + \beta i)} = \frac{\alpha\varrho + (\beta\varrho + \nu)i}{\lambda - \mu\beta + \mu\alpha i}.$$

La partie réelle en est d'après l'équation (G.):

$$\frac{\alpha}{(\lambda-\mu\beta)^2 + \mu^2\alpha^2}.$$

Donc:

Le signe de la partie réelle de H *est indépendant du chemin parcouru par la variable* u.

25] En appliquant ce théorème aux valeurs de H pour les points de f_0, f_1, f_∞ on trouve:

La partie réelle de H *en un point quelconque de* f_0, f_1, f_∞ *est positive ou nulle, indépendamment du chemin qu'a parcouru* u *pour parvenir à ce point, ou bien:*

Le module de q *est égal ou inférieur à l'unité pour les points de* f_0, f_1, f_∞, *indépendamment du chemin de* u.

6.

De l'équation (D.) résulte

$$\frac{d\mathrm{H}}{du} = \frac{\pi}{u(u-1)\eta_1^2},$$

et par suite

$$\frac{dq}{du} = -\frac{\pi^2 q}{u(u-1)\eta_1^2}$$

ou

$$\text{(J.)} \qquad \frac{du}{dq} = -\frac{u(u-1)\eta_1^2}{\pi^2 q}.$$

On déduit des équations (C.) et (3.) no. 2 que dans le domaine de $u=\infty$

$$q = e^{\frac{v_{\infty 2}}{v_{\infty 1}}} = e^{H_\infty(u) + \log\frac{1}{u}};$$

donc on a

$$\text{(1.)} \qquad q = \frac{1}{16}\frac{1}{u} + \left(\frac{1}{u}\right)^2 f\left(\frac{1}{u}\right),$$

où $f\left(\frac{1}{u}\right)$ représente une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $\frac{1}{u}$ et convergente dans le domaine de $u=\infty$. Au moyen d'un théorème connu on tire de cette équation:

$$\text{(2.)} \qquad \frac{1}{u} = 16q + q^2\varphi(q),$$

où $\varphi(q)$ représente une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de q et convergente à l'intérieur d'un cercle décrit autour du point $q=0$ comme centre avec un rayon suffisamment petit.

En considérant dans l'équation différentielle (J.) q comme variable indépendante, cette équation a une intégrale $\frac{1}{u}$, s'évanouissant avec q et représentée par l'équation (2.) dans le voisinage de $q=0$. D'après un théorème connu, (Voir le mém. de MM. Briot et Bouquet dans le Journal de l'École Polytechn. cah. 36, p. 138) cette intégrale reste holomorphe dans une partie du plan qui contient $q=0$, tant que $\frac{du}{dq}$ a la même propriété par rapport à [26 q et u, ou bien lorsque l'on n'a point $q=\infty$ et que u n'acquiert aucune des valeurs 0, 1.

En outre, pour une valeur $q=q'$ finie, différente de zéro et non située sur la circonférence du cercle décrit autour de $q=0$ comme centre avec un rayon égal à l'unité, il n'est pas possible que u prenne une valeur u' différente de 0, 1, ∞ et pour laquelle η_1 soit égale à zéro. Car on aurait alors dans le voisinage de $u=u'$, $\eta_1 = (u-u')f(u)$, où $f(u)$ est holomorphe dans le même voisinage et ne s'évanouit pas pour $u=u'$; et l'on déduirait de l'équation (J.)

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{u-u'}\right) = \frac{u(u-1)f^2(u)}{\pi^2 q}.$$

Donc $\frac{1}{u-u'}$ serait dans le voisinage de $q=q'$ une fonction holomorphe de q et ne deviendrait pas infinie pour $q=q'$, contre l'hypothèse.

Mais pour la fonction u de q on a toujours l'équation:

$$q = e^{-\pi \mathrm{H}}, \tag{3.}$$

et d'après le no. 4 pour $u = 0, 1$, le module de q est égal à l'unité; d'où l'on conclut immédiatement ce théorème:

I. Si l'on considère dans l'équation (3.) u comme fonction de q, cette fonction est holomorphe dans un cercle $\mathfrak{K}$ décrit autour du point $q = 0$ comme centre avec un rayon égal à l'unité. En outre dans aucun point de l'intérieur de $\mathfrak{K}$ la variable u n'acquiert une valeur qui fasse évanouir la fonction η_1.

L'équation (2.) définit la fonction u dans toute l'étendue du cercle $\mathfrak{K}$.

La définition des fonctions η_1, η_2 par des intégrales définies (Voir no. 1) fait voir que, pour des valeurs réelles et positives de u supérieures à l'unité, H sera réel et positif et ne s'annulera que pour $u = \infty$. Donc quand u parcourt l'axe réel dès l'infini jusqu'à l'unité, q partira de $q = 0$, décrira une courbe dans l'intérieur de $\mathfrak{K}$, enfin s'arrêtera en un point λ de la périphérie $\mathfrak{P}$ de ce cercle. Quand q, tout en partant de $q = 0$, décrit dans l'intérieur de $\mathfrak{K}$ une courbe quelconque qui se termine à un point quelconque de $\mathfrak{P}$, on pourrait supposer que u, partant de $u = \infty$, parvînt à l'un des points $u = 0, 1$ ou n'y parvînt pas. Soit σ une partie finie de la courbe $\mathfrak{P}$, dont les points ne correspondent ainsi à aucun des points $u = 0, 1$ tandis qu'une extrémité μ de cet arc appartient à l'une des valeurs $u = 0, 1$; alors $\frac{du}{dq}$ est fini et déterminé le long de l'arc σ, et d'après le théorème déjà cité, (Voir 27] Briot et Bouquet l. c.), on pourrait, en traversant l'arc σ, continuer la fonction u de q à l'extérieur de $\mathfrak{K}$, et de cette manière u serait aussi pour tout point fini de cet extérieur une fonction holomorphe de q, puisque le module de q y est partout supérieur à l'unité, et par suite u différent de 0, 1. Donc tous les points de l'intérieur du cercle $\mathfrak{K}$ et les points à distance finie de son extérieur, qui communiquent les uns avec les autres par des chemins traversant l'arc σ, constituent ensemble un domaine du plan, dans lequel l'intégrale u de l'équation différentielle (J.), qui devient infinie pour $q = 0$, est holomorphe. Deux chemins de q qui joignent le point $q = 0$ au point μ, mais dont l'un est entièrement renfermé à l'intérieur de $\mathfrak{K}$, tandis que l'autre traverse d'abord la périphérie le long de σ et reste ensuite à l'extérieur de $\mathfrak{K}$, correspondent donc à deux chemins de u, qui mènent de $u = \infty$ jusqu'au même point $u = 0$, ou $u = 1$. Mais cela est impossible, car ce serait une contradiction avec le théorème énoncé à la fin du numéro précédent et d'après lequel aux valeurs de u dans le voisinage de l'un des points 0, 1, correspondent des valeurs de q, dont les modules sont inférieurs à l'unité.

Ayant démontré qu'il y a au moins un point λ de la périphérie $\mathfrak{P}$ jouissant de la propriété, qu'un chemin joignant $q = 0$ à $q = \lambda$ et restant dans l'intérieur de $\mathfrak{K}$, ramène la fonction de $u = \infty$ jusqu'à un des points $u = 0$, $u = 1$, on a ce théorème:

II. Si la variable q part de $q = 0$ et parcourt un rayon quelconque du cercle $\mathfrak{K}$, la fonction u part de $u = \infty$ et finit par arriver à l'un des points 0, 1 au moment où q atteint la périphérie $\mathfrak{P}$.

Si la variable u passe dans le plan des u de $u = \infty$ jusqu'à l'un des points $u = 0$, $u = 1$, la valeur correspondante de q partira de $q = 0$ et décrira un chemin entièrement contenu dans $\mathfrak{K}$ jusqu'à la périphérie $\mathfrak{P}$; car d'après le théorème II. q ne peut atteindre $\mathfrak{P}$ avant que u soit parvenu à l'un des points $u = 0$ ou $u = 1$. On peut donc énoncer ce théorème:

III. A chaque valeur finie ou infinie de u correspondent des valeurs de q, dont les modules sont inférieurs ou égaux à l'unité. Il est impossible d'étendre d'une manière continue, à travers la périphérie de $\mathfrak{K}$, l'intégrale u de l'équation différentielle (J.) qui devient infinie pour $q = 0$.

Le nombre de ces valeurs de q qui correspondent à la même valeur de u, est infini. L'une en étant $e^{-\pi \mathrm{H}}$, les autres sont d'après le no. 4

$$e^{-\pi\left(\frac{\nu i + \varrho \mathrm{H}}{\lambda + \mu i \mathrm{H}}\right)},$$

où $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ sont des nombres réels et entiers définis dans le no. 3.

Puisque, d'après le théorème I., toutes les dérivées de u envisagé [28 comme fonction de q, ainsi que la fonction u elle-même sont holomorphes à l'intérieur de $\mathfrak{K}$, on conclut de l'équation différentielle (J.):

IV. La fonction η_1^2 est aussi une fonction holomorphe de q à l'intérieur de $\mathfrak{K}$.

On parvient aussi au théorème suivant:

V. La fonction η_1 de q est différente de zéro pour toute valeur à l'intérieur de $\mathfrak{K}$, excepté pour le point $q = 0$; elle devient infinie pour tous les points de la périphérie.

En premier lieu pour tout point de l'intérieur de $\mathfrak{K}$, différent de $q = 0$, notre assertion se trouve déjà démontrée par le théorème I.

Soit maintenant q'' un point de la périphérie. D'après le théorème II. on devra faire correspondre à cette valeur l'un ou l'autre des points $u = 0$, $u = 1$; les équations (F.), (E.), (B.) montrent alors que η_1 est toujours infini. Il pourrait sembler que les cas où pour $u = 0$, $\lambda + \mu = 0$ et où pour $u = 1$, $\lambda = 0$, dussent faire exception. Mais comme $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ satisfont à l'équation (G.), on aurait dans le premier cas $\lambda = \mu = \pm 1$; par conséquent η_1 aurait dans le domaine de $u = 0$ la forme $\eta_1 = \pm \pi v_{01}$. Dans le second cas μ serait égal à ± 1, et par conséquent η_1 aurait dans le domaine de $u = 1$ la forme $\eta_1 = \pm \pi v_{11}$. Dans l'un et l'autre cas $\frac{u(u-1)\eta_1^2}{q}$ serait dans le voisinage de $q = q''$, $u = 0$ ou $u = 1$, une fonction holomorphe de u et de q, et par conséquent, d'après le théorème déjà cité, l'intégrale u de l'équation différentielle (J.), étendue d'une manière continue de l'intérieur de $\mathfrak{K}$ à l'intérieur d'un cercle entourant le point q'', resterait holomorphe dans ce cercle, et ainsi nous obtiendrions des valeurs de u, correspondant à des valeurs de q, dont les modules surpasseraient l'unité; ce qui est impossible d'après le théorème III.

Le théorème précédent peut aussi être énoncé comme il suit:

Va. La fonction η_1 de u ne s'évanouit que pour $u = \infty$ et devient infinie pour $u = 0$, $u = 1$, quel que soit le chemin parcouru par la variable u.

Du théorème V. on conclut aussi qu'il est impossible d'établir une extension par continuité de la fonction η_1 de q en passant de l'intérieur de $\mathfrak{K}$ à travers la périphérie à l'extérieur.

Dans l'équation

$$\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{n}} = q^{\frac{1}{n}}[16 + q\varphi(q)]^{\frac{1}{n}}, \tag{4.}$$

29] qui est une conséquence de l'équation (2.), développons la seconde partie suivant les puissances entières et positives de q; on obtient pour un nombre

entier quelconque n une équation de la forme:

$$\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{n}} = 16^{\frac{1}{n}} q^{\frac{1}{n}} \psi_n(q), \tag{5.}$$

où $\psi_n(q)$ est une série qui ne s'évanouit pas pour $q = 0$ et qui est convergente dans toute l'étendue de $\mathfrak{K}$, parce que $\frac{1}{u}$ n'y devient ni zéro (excepté au point $q = 0$), ni infini (pour $u = 0$, $\mathrm{mod}\, q = 1$, voir no. 4).

Posons $n = 8$, on a

$$\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \psi_8(q), \tag{6.}$$

relation que l'on peut transformer dans l'équation connue:

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \frac{(1+q^2)(1+q^4)\ldots}{(1+q)\,(1+q^3)\ldots} \tag{7.}$$

(Jacobi, Fundamenta p. 89[1])*).

Le développement de η_1 suivant les puissances de q peut s'obtenir de deux manières: Dans l'expression de η_1 en u, contenue dans les équations (C.), on peut substituer la valeur de $\frac{1}{u}$ (de l'équation (2.)) et de $\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{2}}$ (de l'équation (5.), pour $n = 2$). Ou bien au moyen de l'équation (J.) on peut calculer les valeurs des dérivées successives de η_1^2 en fonctions de q, pour $q = 0$ et ensuite appliquer le théorème de Maclaurin. De ce développement de η_1 et de celui de $u^{\frac{1}{2}}$ qui découle de l'équation (5.) pour $n = -2$, on conclut cette relation:

$$K = \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,\eta_1 = \chi(q), \tag{8.}$$

où $\chi(q)$ signifie une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de q, convergente à l'intérieur de $\mathfrak{K}$, et telle que $\chi(0)$ est différente de zéro (Voir les équations (3.) du no. 2 et les équations (C.)).

*) M. Hermite, qui a eu l'obligeance de lire les épreuves du présent mémoire, vient de me faire avec sa sagacité ordinaire la remarque suivante; »N'y aurait-il point lieu d'observer qu'en faisant $\varkappa^2 = f(\mathrm{H})$, il résulte de votre analyse que toutes les solutions de l'équation $f(\mathrm{H}) = f(\mathrm{H}_0)$ sont données par la formule $\mathrm{H} = \frac{\nu i + \varrho \mathrm{H}_0}{\lambda + \mu i \mathrm{H}_0}$, en insistant sur l'extrême importance de ce résultat, pour la détermination des modules singuliers de M. Kronecker, et en remarquant que les belles découvertes de l'illustre géomètre, sur les applications de la théorie des fonctions elliptiques à l'arithmétique, paraissent reposer essentiellement sur cette proposition, dont la démonstration n'avait pas encore été donnée?« F.

[1]) Jacobi, Werke, Bd. I (1880), p. 146. Sch.

30] Extrayons encore la racine carrée du second membre de l'équation (8.), nous trouvons ainsi un développement convergent à l'intérieur de $\mathfrak{K}$

$$(9.)\qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1+2q+2q^4+2q^9+\cdots$$

qui est d'accord avec le développement connu (Jacobi, Fundamenta p. 184[1]).

7.

Soit

$$(1.)\qquad J = \int_0^1 \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\qquad J' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}},$$

les intégrales étant prises le long de l'axe réel des x, la racine carrée avec le signe positif, et k étant supposé réel et en valeur absolue inférieur à l'unité.

En employant la même substitution que dans le no. 1

$$x^2 = y,\quad k^2 = \frac{1}{u}$$

nous obtenons

$$(2.)\qquad J = \frac{1}{2\sqrt{u}}\int_0^1 \frac{y\,dy}{\sqrt{y(1-y)(u-y)}},\qquad J' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\int_1^u \frac{y\,dy}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}},$$

$\sqrt{u}$ étant positive, et les intégrales prises le long de l'axe réel des y avec le signe posisif de la racine carrée.

Posons

$$(3.)\qquad \zeta_1 = \int_0^1 \frac{y\,dy}{\sqrt{y(1-y)(u-y)}},\qquad \zeta_2 = \int_1^u \frac{y\,dy}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}},$$

où u se trouve être réel et supérieur à l'unité, et où les intégrales doivent être prises le long de l'axe réel des y avec le signe positif de la racine carrée. Nous avons alors:

$$(4.)\qquad J = \frac{1}{2\sqrt{u}}\zeta_1,\qquad J' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\zeta_2.$$

Pour définir ζ_1, ζ_2 en fonction de la variable u sans restriction, nous les exprimons par les fonctions η_{11}, η_{12}.

En posant

$$y(y-1) = \psi(y),\quad y(y-1)(y-u) = \varphi(y),$$

1) Jacobi, Werke, Bd. I (1881), p. 235. Sch.

on a

$$(5.)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{\varphi(y)}} = -\frac{\frac12}{u-1}\frac{1}{\sqrt{\varphi(y)}} + \frac{\frac12}{\psi(u)}\frac{y}{\sqrt{\varphi(y)}} - \frac{1}{\psi(u)}\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\frac{\psi(y)}{y-u}}$$

et [31

$$(5a.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}} - \frac{1}{\sqrt{\psi(u)(u-y)}}\right] - \frac12\,\frac{1}{u^{\frac12}(u-1)^{\frac12}}\,\frac{1}{\sqrt{u-y}}\\ &\quad = -\frac{\frac12}{u-1}\frac{1}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}} + \frac{\frac12}{\psi(u)}\frac{y}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}}\\ &\qquad - \frac{1}{\psi(u)}\frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{\frac{\psi(y)}{u-y}} - \sqrt{\frac{\psi(u)}{u-y}} + \sqrt{\frac{u(u-y)}{u-1}}\right].\end{aligned}\right.$$

En intégrant l'équation (5.) entre les limites $y=0$ et $y=1$, nous en tirons

$$(6.)\qquad \frac{d\eta_{11}}{du} = -\frac{\frac12}{u-1}\eta_{11} + \frac{\frac12}{\psi(u)}\zeta_1.$$

D'ailleurs on a

$$\eta_{12} = \int_1^u \left[\frac{1}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}} - \frac{1}{\sqrt{\psi(u)(u-y)}}\right]dy + \frac{2}{\sqrt{u}}.$$

Donc, puisque l'expression sous le signe d'intégration s'évanouit pour $y=u$,

$$\frac{d\eta_{12}}{du} = \int_1^u \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}} - \frac{1}{\sqrt{\psi(u)(u-y)}}\right]dy - u^{-\frac32}.$$

Par conséquent, en intégrant l'équation (5a.) entre les limites $y=1$ et $y=u$, le premier membre devient $\frac{d\eta_{12}}{du}$, et l'on obtient:

$$(6a.)\qquad \frac{d\eta_{12}}{du} = -\frac{\frac12}{u-1}\eta_{12} + \frac{\frac12}{\psi(u)}\zeta_2.$$

Des équations (6.) et (6a.) on déduit:

$$(K.)\qquad \left\{\begin{aligned}\zeta_1 &= 2\psi(u)\frac{d\eta_{11}}{du} + u\eta_{11},\\ \zeta_2 &= 2\psi(u)\frac{d\eta_{12}}{du} + u\eta_{12}.\end{aligned}\right.$$

Remarquons en passant que les équations (K.) donnent immédiatement la relation connue de Legendre. Car ayant multiplié la première par η_{12}, la seconde par η_{11}, retranchons l'une de l'autre; il en résulte au moyen de l'équation (D.)

$$\zeta_1\eta_{12} - \zeta_2\eta_{11} = -2\pi.$$

En y substituant les valeurs de $\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ du no. 1 et de ce numéro, nous obtenons

$$KJ' - K'J = \frac{\pi}{2},$$

ce qui est effectivement l'équation de LEGENDRE.

32] En même temps on conclut du raisonnement précédent que cette équation de LEGENDRE subsiste pour les fonctions K, K', J, J' de u de même que pour des valeurs des périodes correspondant à une valeur fixe de u.

En outre les équations (K.) font voir que $q\zeta_1^2$, envisagée comme fonction de q, est holomorphe à l'intérieur du cercle $\mathfrak{K}$.

Car du no. 6 découle l'équation:

$$\frac{d\eta_1}{du}\psi(u) = -\frac{\pi^2 q}{\eta_1^2}\frac{d\eta_1}{dq}.$$

En y substituant pour η_1^2, $\frac{d\eta_1}{dq}$ les valeurs en fonction de q, tirées des équations (4.) et (8.) du numéro précédent, on obtient:

$$\frac{d\eta_1}{du}\psi(u) = q^{-\frac{1}{4}}F(q);$$

d'une manière analogue il vient:

$$u\eta_1 = q^{-\frac{1}{4}}F_1(q),$$

où $F(q)$, $F_1(q)$ sont des fonctions de q holomorphes à l'intérieur de $\mathfrak{K}$. Ainsi notre assertion se trouve démontrée.

8.

Soit η une intégrale quelconque de l'équation (A.) et posons:

$$\zeta = 2\psi(u)\frac{d\eta}{du} + u\eta, \tag{1.}$$

il s'ensuit

$$\frac{d\zeta}{du} = u\frac{d\eta}{du} + \frac{1}{2}\eta \tag{2.}$$

et

$$2(u-1)\frac{d^2\zeta}{du^2} = -(u+1)\frac{d\eta}{du} - \frac{1}{2}\eta. \tag{3.}$$

L'élimination de η, $\frac{d\eta}{du}$ fournit:

$$2u(u-1)\frac{d^2\zeta}{du^2} + 2u\frac{d\zeta}{du} - \frac{1}{2}\zeta = 0. \tag{L.}$$

(Cette équation peut se déduire directement par la méthode que j'ai donnée dans mon mém. t. 71, p. 91[1]).

Les racines des équations fondamentales et déterminantes de cette équation différentielle sont

$$\text{pour } u = 0\colon\ 0, 1; \quad \text{pour } u = 1\colon\ 0, 0; \quad \text{pour } u = \infty\colon\ -\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}.$$

Posons: [33

$$(4.)\quad \begin{cases} 2u(u-1)\dfrac{dv_{01}}{du} + uv_{01} = w_{01}, \\[2mm] 2u(u-1)\dfrac{d}{du}(H_0(u)v_{01}) + uH_0(u)v_{01} - 2(u-1)v_{01} = P_0(u)u^{-1}w_{01}, \\[2mm] P_0(u)u^{-1}w_{01} - w_{01}\log u = w_{02}; \end{cases}$$

$$(5.)\quad \begin{cases} 2u(u-1)\dfrac{dv_{11}}{du} + uv_{11} = w_{11}, \\[2mm] 2u(u-1)\dfrac{d}{du}(H_1(u)v_{11}) + uH_1(u)v_{11} + 2uv_{11} = P_1(u)w_{11}, \\[2mm] P_1(u)w_{11} + w_{11}\log(u-1) = w_{12}; \end{cases}$$

$$(6.)\quad \begin{cases} 2u(u-1)\dfrac{dv_{\infty 1}}{du} + uv_{\infty 1} = w_{\infty 1}, \\[2mm] 2u(u-1)\dfrac{d}{du}(H_\infty(u)v_{\infty 1}) + uH_\infty(u)v_{\infty 1} - 2(u-1)v_{\infty 1} = P_\infty(u)uw_{\infty 1}, \\[2mm] P_\infty(u)uw_{\infty 1} - w_{\infty 1}\log u = w_{\infty 2}. \end{cases}$$

Alors $P_0(u)$, $P_1(u)$, $P_\infty(u)$ sont des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives respectivement de $u, u-1, \frac{1}{u}$, et convergentes dans le domaine respectivement de $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$, et l'on a

$$P_0(0) = 4, \quad P_1(1) = -4\log 2 + 2, \quad P_\infty(\infty) = -4. \tag{7.}$$

Les systèmes fondamentaux d'intégrales de l'équation différentielle (L.), appartenant aux racines des équations fondamentales et déterminantes sont respectivement:

$$w_{01},\ w_{02};\quad w_{11},\ w_{12};\quad w_{\infty 1},\ w_{\infty 2};$$

et l'on conclut des équations (K.), (B.), (C.), (E.)

[1]) Mém. VIII, t. I de cette édition p. 241 et suiv. Sch.

$$\text{(M.)}\quad \begin{cases} \zeta_1 = \pi w_{01} + i w_{02}, & \zeta_2 = w_{02}, \quad \text{dans le domaine de } u = 0, \\ \zeta_1 = -w_{12}, & \zeta_2 = \pi w_{11}, \quad \text{dans le domaine de } u = 1, \\ \zeta_1 = \pi w_{\infty 1}, & \zeta_2 = -w_{\infty 2}, \quad \text{dans le domaine de } u = \infty. \end{cases}$$

Il suit de là que:

$$\text{(8.)}\quad \begin{cases} \zeta_1 = 2i, \quad \zeta_2 = 2, \quad \text{pour } u = 0, \\ \lim \zeta_1 = -2 + 4\log 2 - \lim \log(u-1), \quad \zeta_2 = \pi, \quad \text{pour } u = 1, \\ \zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = \infty, \quad \text{pour } u = \infty. \end{cases}$$

Posons

$$\text{(9.)}\qquad \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{J}{J'} = Z,$$

$$\text{(10.)}\qquad e^{-\pi Z} = s;$$

34] alors on a:

$$\text{(11.)}\quad \begin{cases} Z = i, \quad s = -1, \quad \text{pour } u = 0, \\ \text{la partie réelle de } Z \text{ infinie et positive}, \ s = 0, \ \text{pour } u = 1, \\ Z = 0, \quad s = 1, \quad \text{pour } u = \infty. \end{cases}$$

On conclut des équations (K.) que, u décrivant un contour fermé comprenant l'un des points: $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$, ζ_1, ζ_2 se transforment en des fonctions linéaires et homogènes des mêmes quantités et dont les coefficients sont représentés resp. par S_0, S_1, S_∞.

Donc, si l'on désigne par Z_0 une des valeurs de Z pour une valeur quelconque de u, les valeurs résultant des divers chemins parcourus par u seront représentées par la formule:

$$(\alpha.)\qquad \frac{\lambda + \mu i Z_0}{\nu i + \varrho Z_0}$$

(comparez la formule analogue (α.) du no. 4), où $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ sont des nombres réels et entiers caractérisés dans le no. 3, et en particulier toutes les valeurs de Z pour $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$ sont contenues resp. dans les formules:

$$Z = -\frac{\lambda - \mu}{\nu + \varrho} i; \qquad Z = \text{ou à} + \frac{\mu i}{\varrho}$$

ou à un nombre dont la partie réelle est infinie et positive; $Z = -\frac{\lambda i}{\nu}$.

Ainsi toutes les valeurs de s, pour $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$ ont des modules égaux à l'unité (excepté la valeur $s = 0$).

9.

On a d'après les formules (M.) et (4.), (5.), (6.) du numéro précédent:

$$\text{(1.)}\qquad Z = \frac{\pi}{P_0(u)u^{-1} - \log u} + i, \quad \text{dans le domaine de } u = 0,$$

$$\text{(2.)}\qquad Z = -\frac{1}{\pi}[P_1(u) + \log(u-1)], \quad \text{dans le domaine de } u = 1,$$

$$\text{(3.)}\qquad Z = -\frac{\pi}{P_\infty(u)u - \log u}, \quad \text{dans le domaine de } u = \infty.$$

Pour des valeurs de u très-voisines de $u = 0$, la partie réelle de $P_0(u)u^{-1} - \log u$ diffère très-peu de $\frac{4}{\varrho}\cos\varphi - \log\varrho$, où l'on a posé $\varrho e^{\varphi i}$ au lieu de u; partant son signe dépend de la valeur de $\cos\varphi$, et ainsi dans le voisinage de $u = 0$ la partie réelle de Z dépend aussi de la valeur de $\cos\varphi$.

Au contraire dans le voisinage de $u = 1$ le signe de la partie réelle [35 de Z est positif pour toute valeur de $\cos\varphi$, si l'on pose de même $u - 1 = \varrho e^{\varphi i}$.

Enfin dans le voisinage de $u = \infty$, le signe de la partie réelle de Z dépend de la valeur de $\cos\varphi$, en posant $u = \varrho e^{\varphi i}$.

Donc pour un point du voisinage de $u = 0$ et de $u = \infty$ le module de s pourra être tantôt plus grand, tantôt plus petit que l'unité, selon le chemin suivi par la variable u. Au contraire pour les points du voisinage de $u = 1$, le module de s est plus petit que l'unité quel que soit ce chemin.

10.

On déduit de l'équation différentielle (L.), ou aussi directement des équations (K.), au moyen de l'équation (D.):

$$\text{(D'.)}\qquad \begin{vmatrix} \frac{d\zeta_1}{du} & \zeta_1 \\ \frac{d\zeta_2}{du} & \zeta_2 \end{vmatrix} = -\frac{\pi}{u-1};$$

de là

$$\text{(1.)}\qquad \frac{dZ}{du} = -\frac{\pi}{(u-1)\zeta_2^2},$$

donc

$$\text{(J'.)} \qquad \frac{du}{ds} = \frac{(u-1)\zeta_2^2}{\pi^2 s}.$$

Il s'ensuit de l'équation (2.) du numéro précédent que dans le domaine de $u = 1$:

$$\text{(2.)} \qquad s = (u-1)e^{P_1(u)} = (u-1)g(u),$$

où $g(u)$ est holomorphe dans le domaine de $u = 1$, et a la valeur $e^{-4\log 2+2}$ pour $u = 1$.

D'après le théorème cité dans le no. 6, cette équation conduit à:

$$\text{(3.)} \qquad u-1 = e^{4\log 2-2}s + s^2 h(s),$$

où $h(s)$ est holomorphe dans le voisinage de $s = 0$.

Après cela le même raisonnement, par lequel nous sommes parvenu au théorème I. du no. 6, fournit ce théorème:

Quand on considère dans l'équation

$$\text{(4.)} \qquad s = e^{-\pi Z}$$

u comme fonction de s, cette fonction est holomorphe dans un cercle $\mathfrak{K}$ décrit autour de $s = 0$ comme centre avec un rayon égal 36] à l'unité. En outre, dans aucun des points de l'intérieur de $\mathfrak{K}$, u n'acquiert une valeur pour laquelle la fonction ζ_1 s'évanouisse. L'équation (3.) exprime la fonction u dans toute l'étendue du cercle $\mathfrak{K}$.

Lorsque la variable u passe le long de l'axe réel de $u = 1$ jusqu'à $u = \infty$, il résulte des expressions de ζ_1 et ζ_2 par des intégrales définies (no. 7) que ces deux fonctions seront réelles et positives. La fonction Z est donc aussi réelle et positive pour les mêmes valeurs de u. Donc le chemin correspondant de s reste tout entier dans l'intérieur de $\mathfrak{K}$ et parvient à un point de la circonférence de ce cercle au moment où u devient infini. Par suite l'inverse doit aussi avoir lieu: il y a au moins un chemin de la variable indépendante s, lequel provient de l'intérieur de $\mathfrak{K}$ et tel qu'on parvient à $u = \infty$, lorsque s arrive à un point de la circonférence. Comme pour ce point $\frac{du}{ds}$ cesse d'être holomorphe, la série (3.) ne représente plus la fonction $u-1$ pour les points de l'extérieur du cercle $\mathfrak{K}$; ou en d'autres termes: $\mathfrak{K}$ est le cercle de convergence de la série (3.).

De la même manière que dans le no. 5 à l'égard de la partie réelle de H, on démontre le théorème suivant:

Pour un point quelconque u le signe de la partie réelle de Z est indépendant des circulations que la variable u a faites autour des points $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$, lorsqu'elle parvient à ce point.

Comme d'après le numéro précédent le module de s acquiert dans le voisinage de $u = 0$, $u = \infty$ des valeurs tantôt plus grandes, tantôt plus petites que l'unité, il s'ensuit que, quand u part de $u = 1$ et suit des chemins quelconques, aboutissant à $u = 0$ ou $u = \infty$, s partira de $s = 0$, traversera la circonférence de $\mathfrak{K}$ et continuera une partie de son chemin à l'extérieur de $\mathfrak{K}$. De là résulte le théorème:

La fonction $u-1$ de s, définie par l'équation (4.) et s'évanouissant pour $s = 0$, peut être étendue d'une manière continue pour la portion du plan extérieure à la circonférence de $\mathfrak{K}$. Les valeurs de u correspondant à des valeurs de s de l'intérieur de $\mathfrak{K}$ n'épuisent pas tout le plan de u.

Pour des valeurs finies de s, dont les modules surpassent l'unité, l'on parvient, parce que $\frac{du}{ds}$ est une fonction holomorphe de u et de s, d'une manière analogue à celle qui a conduit au théorème I. du no. 6, au théorème suivant:

Si l'on étend d'une manière continue la fonction u définie [37 par l'équation (4.) en franchissant la circonférence de $\mathfrak{K}$ et que l'on reste ensuite à l'extérieur de $\mathfrak{K}$, cette fonction est holomorphe dans une partie du plan comprise entre la circonférence du cercle $\mathfrak{K}$ et celle d'un cercle décrit autour du même centre avec un rayon quelconque et plus grand que l'unité.

Elle est donc développable dans toute cette étendue suivant les puissances entières, tant positives que négatives de s.

Heidelberg, novembre 1876.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 86, Zeile 15 } par continuité statt continuelle,
„ 87, „ 5 }
„ 92, „ 8 v. u. p. 128 statt p. 121,
„ 94, „ 10 le prolongement statt la continuation,
„ „ , „ 8 v. u. la seconde des équations statt l'équation,
„ 96, „ 11 en statt dans,
„ „ , „ 14 acquiert en statt acquiert dans,
„ „ , „ 3 v. u. im Nenner $\lambda+\mu$ statt $\lambda-\mu$,
„ 97, „ 6 donnée par statt en,
„ „ , „ 12 le tableau suivant statt la table suivante,
„ „ , „ 17 du tableau statt de la table,
„ 98, „ 6, 7 la valeur suivante statt cette valeur,
„ 99, „ 13 v. u. tant que statt et où,
„ 100, „ 16 en statt dans,
„ 102, „ 16 $q = q''$ statt $q = q'$,
„ „ , „ 6 v. u. par continuite statt continue,
„ 103, „ 5 au statt le,
„ 108, „ 12 v. u. l'un des statt les;
„ 97, „ 15 wurde »pour $u = \infty$«,
„ 99, „ 12 v. u. wurden die Worte »lorsque« und »que« eingeschaltet.

2) In seiner Abhandlung: Schreiben an Herrn BORCHARDT über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen, Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 83, 1877, S. 265 ff., bemerkt Herr DEDEKIND (a. a. O. S. 286) das Folgende: »Ich erlaube mir hier auf eine Stelle der Abhandlung von FUCHS aufmerksam zu machen, in welche, wie mir scheint, sich ein Irrthum eingeschlichen hat. Sind m, n relative Primzahlen, und nähert sich $\omega = x+yi$[1]) dem rationalen Werthe $\frac{m}{n}$ so an, dass x constant $= \frac{m}{n}$ bleibt, und y positiv unendlich klein wird, so nähert sich k[2]), wie aus dem Fragmente von RIEMANN[3]) oder auch aus

[1]) ω ist in der Bezeichnung der vorstehenden Abhandlung gleich Hi. Sch.
[2]) k ist in der Bezeichnung der vorstehenden Abhandlung gleich $\frac{1}{u}$. Sch.
[3]) Riemanns Werke (1892), S. 455 ff. Sch.

der obigen Theorie folgt, dem Werthe

$$
\begin{aligned}
k &= \infty, \quad \text{wenn } m \equiv 1, \; n \equiv 1, \; \text{mod. } 2,\\
k &= 1, \quad\quad „ \quad m \equiv 0, \; n \equiv 1, \quad „ \; ,\\
k &= 0, \quad\quad „ \quad m \equiv 1, \; n \equiv 0, \quad „ \; ,
\end{aligned}
$$

ist; wenn dagegen $\omega = x+yi$ sich auf dieselbe Weise einem **irrationalen** reellen Werthe x nähert, so ergiebt sich aus der obigen Theorie (vergl. den Schluss von § 2), dass k sich **keinem** bestimmten Werthe nähert, sondern unaufhörliche Schwankungen erleidet. Dies steht im Widerspruch mit dem Satze II. auf S. 27[1]) der genannten Abhandlung, in welchem behauptet wird, dass die Grösse u ($= k^{-1}$ nach meiner Bezeichnung) sich immer einem der beiden Werthe Null oder Eins annähern müsse, und mir scheint, als sei der Beweis dieser Behauptung gerechten Bedenken unterworfen, namentlich in dem Theile, welcher auf die Worte »ou n'y parvint pas« (S. 26[2])) folgt. Doch ist diese Abweichung von keiner wesentlichen Bedeutung für den Hauptgegenstand der sehr interessanten Abhandlung«.

An der von Herrn DEDEKIND bezeichneten Stelle der vorstehenden Abhandlung (S. 100, Zeile 14 v. u. bis S. 101, Zeile 10) ist nachgewiesen, dass jeder Bogen von endlicher Länge der Kreisperipherie $\mathfrak{P}$ Punkte enthalten muss, in denen u einen der Werthe 0, 1 anzunehmen vermag, d. h. dass diese Punkte — wie wir mit Benutzung der von Herrn G. CANTOR später (Mathematische Annalen, Bd. 15, 1879, S. 2) eingeführten Terminologie sagen können — auf $\mathfrak{P}$ **überall dicht** liegen. Die irrthümliche Ausdrucksweise des Theorems II. (S. 101), die sich auch auf die Erörterungen S. 102 und auf einige Stellen der Einleitung (S. 86, Zeilen 11, 13) übertragen hat, rührt also daher, dass FUCHS zwischen den Begriffen »überall dicht liegen« und »continuirlich erfüllen« nicht scharf genug unterschieden hat, was ja zum Theil auch auf den Mangel einer passenden Terminologie, zur Zeit der Abfassung dieser Abhandlung, zurückzuführen sein dürfte. Dass es sich in der That nur um einen ungenauen Ausdruck handelt, zeigen einerseits die Formeln (H.), S. 97, andererseits der Umstand, dass diese Ungenauigkeit, die sich übrigens durch leichte Änderungen des Textes beseitigen liesse, auf die Bündigkeit der weiteren Schlüsse, namentlich der Beweise der Theoreme III., Va, ohne Einfluss ist.

Die Abhandlung verdankt ihre Entstehung einer Anfrage von HERMITE. In einem: »Paris, 1. Juillet 1876« datirten Briefe an FUCHS, schreibt HERMITE: »Vous devez sans doute, au moyen des principes qui vous appartiennent, pouvoir démontrer qu'en posant

$$\frac{K'}{K} = \omega \quad \text{et:} \quad k = f(\omega)$$

k est une fonction uniforme de $\omega = x+yi$, dans toute l'étendue des valeurs positives de x, mais ce que je n'aperçois aucunement, et ce qui m'intéresserait beaucoup, ce serait de voir clairement à quoi il tient qu'en posant:

$$\frac{J'}{J} = x+yi$$

on cesse d'avoir une fonction à sens unique. Vos méthodes, je n'en doute pas, doivent immédiatement donner la raison de la différence de nature des fonctions définies par les deux équations«.

Nach Empfang des Manuscriptes der vorstehenden Arbeit schreibt HERMITE d. d. Paris, 27. Novembre 1876: »Mon cher ami, Vous venez de m'envoyer un beau et excellent travail; recevez mes remerciments et mes vives félicitations. Non seulement vous avez résolu ma question concernant la fonction inverse du rapport des fonctions complètes de second espéce $\frac{J'}{J}$, mais vous avez aussi à l'égard de $\frac{K'}{K}$

[1]) S. 101 dieses Bandes. Sch.
[2]) S. 100 dieses Bandes. Sch.

exposé une théorie approfondie que je juge pour la théorie des fonctions elliptiques de la plus grande importance. Le point vraiment fondamental que la partie réelle de H est essentiellement positive, j'avais vainement tenté de l'établir par une méthode élémentaire, pour ne pas être obligé de recourir aux principes nouveaux découverts par RIEMANN. Vous avez, mon cher ami, complètement réussi là où j'avais échoué, et votre méthode tirée des vrais principes de la question restera dans la science. C'est également un très important résultat que d'avoir fait résulter de ces mêmes principes que $\sqrt[8]{k}$ et $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ sont des fonctions uniformes de q, et je ressens quelque satisfaction à vous avoir provoqué à tirer explicitement ces belles conséquences de vos théorèmes généraux sur les équations linéaires d'ordre quelconque«.

Auf den Gegenstand der vorstehenden Abhandlung ist der Verfasser später in der »Note zu der im Bande 83, p. 13 sqq. dieses Journals enthaltenen Arbeit: Sur quelques propriétés etc.; extrait d'une lettre adressée à M. HERMITE«, Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 112, 1893, S. 156—164, zurückgekommen.

SCH.

XXV.

UEBER DIE LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG, WELCHE ALGEBRAISCHE INTEGRALE BESITZEN.

Zweite Abhandlung.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 85, 1878, S. 1—25.)

In meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 81, p. 97[1]) habe ich die Frage, [1 unter welchen Umständen eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung algebraische Integrale besitze, auf die Frage zurückgeführt, wann gewisse aus der gegebenen eindeutig ableitbare lineare Differentialgleichungen, deren Ordnungszahl nicht grösser als zwölf, durch Wurzeln rationaler Functionen befriedigt werden. Zu diesem Behufe führte ich (das. S. 114[2]) den Begriff der Primform ein, und zeigte, dass der Grad der Primformen niedrigsten Grades in keinem Falle den zwölften überschreite. Zu den Zwecken meiner dortigen Abhandlung war eine Reduction der möglichen Gestalten dieser Primformen auf das geringste Mass nicht erforderlich. Ich beschränkte mich aus diesem Grunde daselbst auf diejenigen Reductionen dieser Formen, welche eine unmittelbare Folge des Begriffes derselben sind, und stellte dieselben in einer Tabelle (p. 126 das.[3]) zusammen.

Seitdem haben die Herren F. KLEIN und C. JORDAN sich mit demselben Gegenstande beschäftigt. Insbesondere hat Herr KLEIN in einer Reihe von Abhandlungen, welche theils in den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen, theils in den Mathematischen Annalen ent-

1) Abh. XX, S. 11 ff. dieses Bandes. Sch.
2) S. 30 dieses Bandes. Sch.
3) S. 43 dieses Bandes. Sch.

halten sind, die Eigenschaften der algebraischen Gleichungen, deren Wurzeln linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung genügen, zum Gegenstande seiner Untersuchungen gemacht, und meine oben genannte Tabelle einer Reduction unterworfen.

In neuerer Zeit ist es auch Herrn GORDAN gelungen (Mathem. Ann. Bd. 12, p. 147) die von mir in der Einleitung zu meiner oben genannten Abhandlung aufgestellte Aufgabe, die Formen n^{ten} Grades zu bestimmen, deren Covarianten niedrigeren als n^{ten} Grades identisch verschwinden, für binäre Formen zu lösen, und zu zeigen, dass dieselben mit meinen Primformen niedrigsten Grades zusammenfallen.

2] Bei Gelegenheit einer Note des Herrn P. PEPIN (Comptes rendus de l'Acad. des sc. de Paris, Juni 1876) habe ich (das. Juli 1876[1]) nachgewiesen, dass der Grad zwölf von den Primformen niedrigsten Grades auch wirklich erreicht wird.

In dem Folgenden erlaube ich mir zu zeigen, wie eine consequente Ausführung der Theorie der Primformen, bei welcher nicht bloss diejenigen niedrigsten Grades, sondern die Gesammtheit derselben in Betracht gezogen wird, die natürliche Grundlage für alle auf die hier betrachteten Differentialgleichungen bezüglichen Fragen bildet. Es wird gezeigt, wie durch dieselbe nicht blos die in meiner oben genannten Abhandlung gefundenen Resultate auf die einfachste Weise erhalten werden, sondern auch die endgültig möglichen Gestalten der Primformen niedrigsten Grades sich von selbst ergeben, und neue Eigenschaften der linearen Differentialgleichungen, denen die Wurzeln algebraischer Gleichungen genügen, so wie die Form dieser Gleichungen erkannt werden.

Meine Abhandlung (Bd. 81, p. 97[2]) erlaube ich mir im Folgenden, der häufig vorkommenden Citate wegen, zur Abkürzung mit A. zu bezeichnen.

1.

I. Der Grad m einer irreductiblen algebraischen Gleichung, deren Wurzeln einer Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dz^2} = Py \quad \text{(Gl. (B.) in A. p. 102[3])}$$

genügen, ist eine gerade Zahl.

1) Abh. XXII, S. 67 ff. dieses Bandes. Sch.
2) Abh. XX, S. 11 ff. dieses Bandes. Sch.
3) S. 17 dieses Bandes. Sch.

Ist nämlich L' der Index des zu der HESSEschen Covariante einer Primform niedrigsten Grades N gehörigen reducirten Wurzelsystems, so besteht (A. p. 118[1]) die Gleichung:

$$m = (2N-4)L',$$

woraus sich unsere Behauptung ergiebt.

II. Der Grad einer beliebigen Primform, ebenso wie der Index des zugehörigen reducirten Wurzelsystems ist ein Divisor des zur Differentialgleichung gehörigen Grades m.

In der That sei n der Grad einer beliebigen Primform und l der Index des zugehörigen reducirten Wurzelsystemes, so ist (A. p. 113[2])

$$m = nl.$$

III. Es sei y_1, y_2 ein beliebiges Fundamentalsystem von Inte- [3
gralen, c_1, c_2 willkürliche Constanten, so ist die Anzahl der Glieder des reducirten Wurzelsystems der Gleichung, welcher $c_1y_1 + c_2y_2$ genügt, m oder $\frac{m}{2}$.

Sind nämlich unter den Wurzeln der Gleichung, welcher $c_1y_1+c_2y_2$ genügt, zwei solche, deren Quotient gleich einer Einheitswurzel j, so ist (nach dem Satze A. p. 112[3]) $j(c_1y_1+c_2y_2)$ eine Wurzel derselben Gleichung. Da diese Gleichung irreductibel ist, so geht auf einem gewissen Wege $c_1y_1+c_2y_2$ in $j(c_1y_1+c_2y_2)$ über. Es mögen nun auf demselben Wege y_1, y_2 resp. in $\alpha_{11}y_1+\alpha_{12}y_2$, $\alpha_{21}y_1+\alpha_{22}y_2$ übergehen, so folgt:

$$(1.)\qquad \begin{cases} c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{21} = jc_1, \\ c_1\alpha_{12} + c_2\alpha_{22} = jc_2. \end{cases}$$

Sollen diese Gleichungen für beliebige Werthe von c_1, c_2 bestehen, so ist nothwendig und hinreichend, dass:

$$(2.)\qquad \begin{cases} \alpha_{11} = \alpha_{22} = j, \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0. \end{cases}$$

Da aber (A. p. 105[4]) $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 1$, so müsste $j^2 = 1$, d. h. wegen der

1) S. 34 dieses Bandes. Sch.
2) S. 29 dieses Bandes. Sch.
3) S. 27 dieses Bandes. Sch.
4) S. 19 dieses Bandes. Sch.

Irreductibilität der Gleichung, welcher $c_1 y_1 + c_2 y_2$ genügt:

$$(3.)\qquad j = -1$$

sein. Es ist demnach der Index des reducirten Wurzelsystems dieser Gleichung entweder 1 oder 2, d. h. die Anzahl der Glieder des Systems m oder $\frac{m}{2}$.

Diese Anzahl stellt zu gleicher Zeit den grösstmöglichen Grad einer Primform dar, wir wollen diesen mit μ bezeichnen.

Die verschiedenen Werthe, welche y_1, y_2 annehmen können, sind in der Form $\alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2$, $\alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2$ enthalten. Sind γ_1, γ_2 bestimmte Constanten, so kann man auf unzählig viele verschiedene Arten c_1, c_2 so wählen, dass die Gleichungen (1.) nur für die Werthe (2.) und (3.) bestehen können, und dass die den verschiedenen Werthen von y_1, y_2 entsprechenden Gleichungen:

$$c_1 \alpha_{11} + c_2 \alpha_{21} = \gamma_1,$$
$$c_1 \alpha_{12} + c_2 \alpha_{22} = \gamma_2$$

nicht erfüllt werden. Die Primform μ^{ten} Grades, von der $c_1 y_1 + c_2 y_2$ ein Linearfactor ist, ist alsdann nicht durch $\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2$ theilbar. Hieraus ergiebt sich, 4] wenn wir, wie im Folgenden immer, Formen als identisch oder von einander verschieden bezeichnen, je nachdem sie bis auf einen constanten Factor gleich sind oder nicht:

IV. Der höchste Grad μ einer Primform ist m oder $\frac{m}{2}$, und es giebt unzählig viele von einander verschiedene Primformen dieses höchsten Grades.

2.

I. Ist f eine Primform niedrigsten Grades N, $H(f)$ ihre Hessesche Covariante, $H^2(f)$ die Hessesche Covariante von $H(f)$, so ist eine Gleichung

$$H(f)^3 = \gamma f^2 H^2(f) \quad (\gamma \text{ constant})$$

nicht möglich.

Denn f und $H(f)$ als Primformen können einen gemeinschaftlichen linearen Factor nur haben, wenn sie identisch sind (A. p. 114[1]), Satz IV.); hierzu wäre aber erforderlich, dass

$$2N - 4 = N, \quad \text{d. h.} \quad N = 4.$$

[1]) S. 30 dieses Bandes. Sch.

Ist N von 4 verschieden, so müsste demnach, wenn die obige Gleichung stattfände, $H^2(f)$ durch $H(f)^3$ theilbar sein, dieses ist aber nicht möglich, da der Grad der letzteren Form höher ist als der der ersteren.

Ist $N = 4$, so wähle man ein Fundamentalsystem y_1, y_2 von der Beschaffenheit, dass y_2 ein Factor von f ist, alsdann hat f die Form

$$f = 4a_1 y_1^3 y_2 + 6a_2 y_1^2 y_2^2 + 4a_3 y_1 y_2^3 + a_4 y_2^4.$$

Hieraus ergiebt sich, dass

$$H(f) = -12^2 a_1^2 y_1^4 + \cdots.$$

Da nun a_1 nicht verschwinden darf, weil f als Primform nicht durch y_2^2 theilbar ist, so folgt, dass $H(f)$ nicht durch y_2 theilbar, also von f verschieden ist. Demnach ist der Satz auch für diesen Fall bewiesen.

Es sei nun F eine Primform μ^{ten} Grades, welche mit keiner der Formen f, $H(f)$, $H^2(f)$ einen gemeinschaftlichen Linearfactor hat — nach S. IV. voriger No. giebt es unzählig viele derartige Formen — so kann man nach S. I. eine Constante λ so bestimmen, dass

$$\varphi = H(f)^3 - \lambda f^2 H^2(f)$$

durch einen Linearfactor von F theilbar wird, ohne dass φ identisch verschwindet.

Da $H(f)$, $H^2(f)$ homogene Functionen der Coefficienten von f, resp. des zweiten und vierten Grades sind, so bleibt der Quotient $\frac{f^2 H^2(f)}{H(f)^3}$ unverändert, [5 wenn f in jf übergeht. Dieser Quotient bleibt also für jeden Weg der Variabeln z unverändert, er ist also eine rationale Function von z. Hieraus ergiebt sich aber, dass φ gleich der Wurzel einer rationalen Function und (nach A. p. 115[1]), S. VI.) durch F theilbar ist. Man erhält daher den Satz:

II. Ist μ der höchste und N der niedrigste Grad einer Primform, so muss

$$\mu \leqq 6N - 12$$

sein.

Es sei L der Index eines reducirten Wurzelsystems von der kleinsten Anzahl N, so ist (A. p. 115[1]))

$$m = NL.$$

[1]) S. 31 dieses Bandes. Sch.

Es ist demnach nach S. II. dieser Nummer und S. IV. voriger Nummer

1) entweder

$$NL \leqq 6N-12, \quad (\mu = m),$$

2) oder

$$NL \leqq 12N-24, \quad \left(\mu = \frac{m}{2}\right),$$

also

III. *Je nachdem $\mu = m$ oder $\mu = \frac{m}{2}$, ist $L < 6$ oder $L < 12$.*

Dieses ist der Fundamentalsatz unserer Abhandlung in Bd. 81 dieses Journals (p. 122[1]) daselbst).

Die gegenwärtige von der dortigen verschiedene Herleitung desselben zeichnet sich vor jener dadurch aus, dass sie ohne Anwendung anderer Hülfsmittel als der Entwickelung des Primformenbegriffs sich ergiebt.

IV. *Ist eine Form g gleich der Wurzel einer rationalen Function, so sind*

$$\frac{H(g)}{g^2} \quad \text{und} \quad \frac{H^2(g)}{g^4}$$

rationale Functionen.

Da nämlich die verschiedenen Werthe, welche g annimmt, die Form jg haben, wo j eine Einheitswurzel bedeutet, so sind die verschiedenen Werthe von $H(g)$, $H^2(g)$ resp. der Form $j^2H(g)$, $j^4H^2(g)$ (A. p. 106[2])), woraus die Richtigkeit des Satzes hervorgeht.

V. *Der Index des reducirten Wurzelsystems einer beliebigen irreductiblen Gleichung, deren Wurzeln der Differentialgleichung genügen, ist eine gerade Zahl.*

Zunächst ist ersichtlich, *dass der Index eines jeden reducirten Wurzelsystems eine gerade Zahl ist, wenn dieses für ein einziges System feststeht.*

6] Denn es gehöre ein Integral y_1 zu einem beliebigen Wurzelsystem, dessen Index $2l$ eine gerade Zahl ist, und es werde eine primitive $2l^{te}$ Wurzel der Einheit mit j bezeichnet. Es giebt alsdann (A. p. 108 und 109[3])) ein zweites Integral y_2, welches mit y_1 ein Fundamentalsystem bildet und nach Vollziehung desselben Umlaufes, auf welchem y_1 in $y_1 j$ übergeht, sich in $y_2 j^{-1}$ verwandelt.

1) S. 39 dieses Bandes. Sch.
2) S. 21 dieses Bandes. Sch.
3) S. 32, 24 dieses Bandes. Sch.

Eine l-malige Wiederholung desselben Umlaufes führt aber y_1 und y_2 gleichzeitig resp. in $-y_1$ und $-y_2$ über. Auf demselben Wege muss demnach *jedes* Integral, als lineare homogene Function von y_1, y_2 seinen entgegengesetzten Werth erhalten. Eine irreductible Gleichung muss aber die sämmtlichen Werthe, die eine Wurzel derselben annimmt, als Wurzeln enthalten. Hieraus folgt, dass wenn die Wurzeln irgend einer irreductiblen Gleichung der Differentialgleichung genügen, dieselben zu je zweien einander gleich und entgegengesetzt sind, d. h. dass der Index des reducirten Wurzelsystems dieser Gleichung eine gerade Zahl ist (A. p. 113[1])).

Ist n die Anzahl der Glieder eines reducirten Wurzelsystems, l der Index desselben, so ergiebt die Gleichung $m = nl$ nach S. I. No. 1, dass, wenn eine der beiden Zahlen n, l ungerade, die andere gerade sein müsse. Wenn demnach l für *jedes* reducirte Wurzelsystem eine ungerade Zahl wäre, so müsste der Grad *jeder* Primform, also (nach A. p. 115[2]), S. V.) der Grad *jeder* Form, welche gleich der Wurzel einer rationalen Function ist, eine gerade Zahl sein. In der Gleichung, welcher das reducirte Wurzelsystem mit dem Index l genügt, sind (A. p. 99[3])) die Exponenten der Unbekannten y durch l theilbar. Der Coefficient a_{m-li} von y^{m-li} ist eine rationale Function von z und durch eine Form li^{ten} Grades darstellbar. Demnach ist $a_{m-li} = 0$, wenn nicht i eine gerade Zahl. Die Gleichung enthielte also nur solche Potenzen von y, deren Exponenten durch $2l$ theilbar wären, d. h. (A. p. 111[4])) der Index des reducirten Wurzelsystems wäre nicht l sondern $2l$.

Demnach muss mindestens ein reducirtes Wurzelsystem, folglich nach dem eben bewiesenen Hülfssatz *jedes* reducirte Wurzelsystem einen geradzahligen Index besitzen.

3.

Aus der Gleichung

$$m = NL = (2N-4)L' \tag{1.}$$

folgt, dass $\frac{LN}{2N-4}$ eine ganze Zahl ist. Setzen wir

$$\frac{2L}{N-2} = \varrho, \tag{2.}$$ [7

1) S. 28 dieses Bandes. Sch.
2) S. 30 dieses Bandes. Sch.
3) S. 14 dieses Bandes. Sch.
4) S. 27 dieses Bandes. Sch.

so ist

$$\frac{LN}{2N-4} = L' = \frac{1}{2}(L+\varrho). \tag{3.}$$

Demnach ist ϱ eine ganze Zahl.

Nach Satz V. voriger No. ist L' eine gerade Zahl, also

$$L + \varrho \equiv 0, \quad \text{mod. } 4. \tag{4.}$$

Da nach S. III. und S. V. voriger No. L eine gerade Zahl und kleiner als 12 ist, so ergiebt die Bedingung, dass ϱ eine ganze Zahl ist, welche der Congruenz (4.) genügt,

$$\text{für} \quad N > 4$$

folgende Combinationen

$$\begin{array}{ll} L = 6, & N = 8 \\ L = 8, & N = 6 \\ L = 10, & N = 12. \end{array}$$

Die Combination $L = 6$, $N = 8$ liefert

$$m = 48$$

und nach S. III. voriger No.

$$\mu = 24.$$

Nach S. II. No. 1 wäre demnach der Grad einer beliebigen Primform im gegenwärtigen Falle eine der Zahlen 8, 12, 24, also stets durch 4 theilbar. Da jede Form $\varphi(y_1, y_2)$, welche gleich der Wurzel einer rationalen Function, (A. p. 115[1]) sich in ein Produkt von Primformen zerlegen lässt, so ist der Grad derselben durch 4 theilbar.

Es sei nunmehr y ein Linearfactor einer Primform f achten Grades, so genügt y einer Gleichung 48^{ten} Grades, in welcher die Exponenten der Potenzen der Unbekannten durch 6 theilbar sind, weil der Index des reducirten Wurzelsystems dieser Gleichung gleich 6 angenommen worden. Da sich aber andererseits die Coefficienten der Potenzen der Unbekannten als ganze homogene Functionen $\varphi(y_1, y_2)$ von y_1, y_2 darstellen lassen und diese rationale Functionen von z sind, so folgt aus dem eben Bewiesenen, dass nur die Coefficienten derjenigen Potenzen von Null verschieden sein können, deren

1) S. 30 dieses Bandes. Sch.

Exponenten durch 4 theilbar sind. Demnach genügt y einer Gleichung 48^{ten} Grades, in welcher die Exponenten der Potenzen der Unbekannten durch 12 theilbar sind. Da aber die Anzahl der Glieder des reducirten Wurzelsystems dieser Gleichung gleich 4 wäre, so ergäbe sich, dass schon eine Form vierten Grades gleich der Wurzel einer rationalen Function wäre, gegen die Voraussetzung.

Demnach ist die Combination $L = 6$, $N = 8$ auszuschliessen. Es verbleiben demnach für $N > 4$ die Combinationen

$$\begin{cases} L = 8, & N = 6; \\ L = 10, & N = 12. \end{cases} \tag{5.}$$

4.

Für die Combination $L = 8$, $N = 6$ hat eine Primform niedrigsten Grades (A. p. 125[1]) die Gestalt

$$f = a_1 y_1^5 y_2 + a_5 y_1 y_2^5,$$

wo y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen ist, welche auf demselben Wege resp. in $y_1 j, y_2 j^{-1}$ übergehen, wenn j eine primitive achte Wurzel der Einheit bedeutet. (A. p. 123[2].)

Da y_1, y_2 mit beliebigen constanten Factoren multiplicirt werden können, so ist

$$\text{für} \quad L = 8, \quad N = 6$$

$$f_6 = y_1^5 y_2 + y_1 y_2^5 \tag{1.}$$

eine Primform niedrigsten Grades.

Für die Combination $L = 10$, $N = 12$ hat die Primform niedrigsten Grades (A. p. 125[1]) die Form

$$f = a_1 y_1^{11} y_2 + a_6 y_1^6 y_2^6 + a_{11} y_1 y_2^{11},$$

wo y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen bilden, welche auf demselben Wege resp. in $y_1 j, y_2 j^{-1}$ übergehen, wenn j eine primitive zehnte Wurzel der Einheit ist.

Damit die Covariante

$$\frac{\partial^8 f}{\partial y_1^8}\frac{\partial^8 f}{\partial y_2^8} - 8\frac{\partial^8 f}{\partial y_1^7 \partial y_2}\frac{\partial^8 f}{\partial y_1 \partial y_2^7} + \cdots$$

1) S. 42 dieses Bandes. Sch.
2) S. 40 dieses Bandes. Sch.

als Form achten Grades (s. A. p. 98[1]) identisch verschwinde, ist erforderlich, dass

$$a_6^2 + 11^2 a_1 a_{11} = 0.$$

Da überdiess y_1, y_2 mit beliebigen constanten Factoren multiplicirt werden können, so ist für

9]

$$L = 10, \quad N = 12$$

$$f_{12} = y_1^{11} y_2 + 11 y_1^6 y_2^6 - y_1 y_2^{11} \tag{2.}$$

eine Primform niedrigsten Grades*).

Die Formen (1.) und (2.) besitzen die Eigenschaft:

$$H^2(f_6) = \text{Const.} f_6^2, \tag{3.}$$

$$H^2(f_{12}) = \text{Const.} f_{12}^3. \tag{4.}$$

5.

Ist $N > 4$, so ist nach Gleichung (5.) No. 3, $L = 8$ oder 10, also nach S. III. No. 2, $\mu = \frac{m}{2}$. Man hat demnach

a) für die Combination $L = 8$, $N = 6$, $m = 48$, $\mu = 24$,

b) für die Combination $L = 10$, $N = 12$, $m = 120$, $\mu = 60$.

Im Falle a) könnte demnach nach S. II. No. 1 der Grad n einer Primform nur eine der Zahlen $n = 6, 8, 12, 16, 24$ sein. Da aber nach S. V. No. 2 das zu jedem n gehörige l eine gerade Zahl sein muss, so ist $n = 16$ auszuschliessen, dessen zugehöriges l den Werth 3 hätte.

Im Falle b) kann der Grad einer Primform nur durch eine der Zahlen $n = 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60$ dargestellt werden. Hiervon sind die Zahlen $n = 24$, $n = 40$ auszuschliessen, weil denselben resp. die ungeradzahligen Werthe $l = 5$, $l = 3$ entsprechen würden. Gäbe es eine Primform φ vom 15ten Grade, so wäre $H(\varphi)$ vom Grade 26. Diese Form müsste (nach A. p. 115[3]) sich in ein Product von Primformen niedrigeren als 26sten Grade zerlegen lassen, was nicht möglich ist.

*) Diese beiden Formen (1.) und (2.) stimmen bis auf constante Factoren mit denjenigen überein, auf welche Herr KLEIN die Tabelle in meiner Abhandlung p. 126[2]) reducirt hat.

1) S. 12 dieses Bandes. Sch.
2) S. 43 dieses Bandes. Sch.
3) S. 30 dieses Bandes. Sch.

Man erhält also den Satz:

Für $N = 6$, $L = 8$ ist der Grad einer Primform durch eine der Zahlen 6, 8, 12, 24; für $N = 12$, $L = 10$ durch eine der Zahlen 12, 20, 30, 60 bestimmt.

6.

Es seien ψ und χ zwei beliebige Formen n^{ten} Grades des Fundamentalsystems, so folgt aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_1} y_1 + \frac{\partial\psi}{\partial y_2} y_2 = n\psi, \qquad \frac{\partial\chi}{\partial y_1} y_1 + \frac{\partial\chi}{\partial y_2} y_2 = n\chi,$$ [10

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial\psi}{\partial y_2} y_2' = \psi', \qquad \frac{\partial\chi}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial\chi}{\partial y_2} y_2' = \chi',$$

$$y_1' = \frac{dy_1}{dz}, \quad y_2' = \frac{dy_2}{dz}, \quad \psi' = \frac{d\psi}{dz}, \quad \chi' = \frac{d\chi}{dz},$$

und unter Berücksichtigung von A. p. 104[1]) Gl. (2.)

$$\chi \frac{\partial\psi}{\partial y_1} - \psi \frac{\partial\chi}{\partial y_1} = C y_2 (\chi\psi' - \chi'\psi), \tag{1.}$$

wo C eine Constante bedeutet.

Die linke Seite dieser Gleichung ist durch y_2 theilbar.

Sind ψ und χ Wurzeln rationaler Functionen, so ist auch $\chi\psi' - \chi'\psi$ Wurzel einer rationalen Function. Man erhält demnach den Satz:

I. Sind ψ und χ Formen desselben Grades und jede gleich der Wurzel einer rationalen Function, so ist auch die Form

$$G(\psi, \chi) = \frac{1}{y_2}\left(\chi \frac{\partial\psi}{\partial y_1} - \psi \frac{\partial\chi}{\partial y_1}\right)$$

gleich der Wurzel einer rationalen Function.

Ist das eine Glied y_1 des Fundamentalsystems y_1, y_2 Linearfactor einer Primform f niedrigsten Grades N und $y_2 = y_1^{L-1}\psi(y_1^L)$ (s. A. p. 123[2]), so ist eine beliebige von f verschiedene Primform φ nicht durch y_1 theilbar (A. p. 114[3]) S. IV.), dieselbe enthält demnach das von y_1 unabhängige Glied.

1) S. 19 dieses Bandes. Sch.
2) S. 40 dieses Bandes. Sch.
3) S. 30 dieses Bandes. Sch.

Hieraus folgt aber wie in A. p. 123[1]) Gl. (4.) No. 18, dass φ die Form hat

$$\varphi = y_1^{\frac{1}{2}L}\varphi_1 + a_n y_2^n, \tag{2.}$$

wo n den Grad von φ, und φ_1 eine Form $(n-\frac{1}{2}L)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet.

Es seien nunmehr ψ und χ zwei Primformen n^{ten} Grades, welche sowohl unter einander als auch von f verschieden sind, so ist $\chi\psi' \gtrless \chi'\psi$, also auch die Form $G(\psi,\chi)$ von Null verschieden. Nach S. I. ist dieselbe gleich der Wurzel einer rationalen Function, nach Gleichung (2.) ist sie durch $y_1^{\frac{1}{2}L-1}$ theilbar, folglich ist diese Form (A. p. 115[2]) S. VI.) durch $f^{\frac{1}{2}L-1}$ theilbar. Der Quotient ist entweder eine Constante oder, als Wurzel einer rationalen Function, mindestens vom N^{ten} Grade. Es ist also entweder

$$n = \tfrac{1}{4}NL - \tfrac{1}{2}N + 1 \tag{3.}$$

oder

$$n \geqq \tfrac{1}{4}NL + 1. \tag{3a.}$$

Für den Fall

$$N = 6, \quad L = 8 \tag{a.}$$

11] wäre demnach entweder

$$n = 10 \quad \text{oder} \quad n \geqq 13.$$

Für den Fall

$$N = 12, \quad L = 10 \tag{b.}$$

wäre entweder

$$n = 25 \quad \text{oder} \quad n \geqq 31.$$

Nach dem Satze voriger Nummer giebt es also für den Fall (a.) nur je eine Primform 8^{ten} und 12^{ten} Grades, für den Fall (b.) nur je eine des 20^{sten} und 30^{sten} Grades.

Es giebt aber überdies ausser f nicht noch eine Primform f' N^{ten} Grades, da sonst nach S. I. $G(f,f')$ eine Form $(2N-2)^{\text{ten}}$ Grades wäre, welche gleich der Wurzel einer rationalen Function. Aber für $N=6$ giebt es keine solche Form 10^{ten}, und für $N=12$ keine solche 22^{sten} Grades, weil diese weder Primformen sind noch sich in Producte aus den Primformen verwandeln lassen.

---

1) S. 40 dieses Bandes. Sch.
2) S. 31 dieses Bandes. Sch.

Man erhält also den Satz:

II. Ist $n<\mu$, so giebt es nicht zwei verschiedene Primformen n^{ten} Grades.

7.

I. Das Quadrat der Primform f_6 und die Primform $H(f_6)$ sind rationale Functionen von z.

Nach S. IV. No. 2 ist nämlich $\frac{H^2(f_6)}{f_6^4}$ rational. Nach No. 4 Gl. (3.) ist $H^3(f_6) = \text{Const.}\, f_6^2$, woraus sich ergiebt, dass f_6^2, also auch nach S. IV. No. 2 $H(f_6)$ rational ist.

Bezeichnen wir mit $\overline{H}(f_6)$ die von ihrem numerischen Factor befreite Hessesche Covariante von f_6, so ist

$$\overline{H}(f_6) = y_1^8 - 14y_1^4y_2^4 + y_2^8. \tag{1.}$$

Damit die Form

$$\psi = \overline{H}(f_6)^3 + \lambda f_6^4 \quad (\lambda \text{ constant}) \tag{2.}$$

durch das Quadrat eines Ausdruckes $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2$ theilbar werde, muss der letztere Ausdruck ein Linearfactor der Form:

$$4\overline{H}(f_6)\frac{\partial f_6}{\partial y_1} - 3f_6\frac{\partial \overline{H}(f_6)}{\partial y_1}$$

d. h. der Form

$$\varphi_{12} = (y_1^4-y_2^4)(y_1^8+34y_1^4y_2^4+y_2^8) \tag{3.}$$

sein.

Ist $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2$ ein Linearfactor von φ_{12} und wird λ so bestimmt, dass [12 ψ durch $(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)^2$ theilbar wird, so ist (A. p. 115[1]) S. VI.) ψ durch das Quadrat derjenigen Primform theilbar, wovon $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2$ ein Linearfactor ist, da ψ nach S. I. eine rationale Function von z ist. Demnach müssen sämmtliche Linearfactoren von χ, also χ selber, Factoren von φ_{12} sein. Die Primform χ ist aber von f_6 verschieden, weil φ_{12} nicht durch y_1 theilbar ist, und von $H(f_6)$ verschieden, weil sonst χ auch Divisor von f_6 sein müsste (nach Gl. (2.)). Die Primform χ ist also 12^{ten} Grades, und demnach mit φ_{12} identisch.

Es ist also $\psi = \varphi_{12}^2$. Setzt man diesen Werth in Gl. (2.) und bestimmt die Constante λ durch Vergleichung der Coefficienten auf beiden Seiten, so

---

1) S. 31 dieses Bandes. Sch.

erhält man

$$\varphi_{12}^2 = \overline{H}(f_6)^3 + 108 f_6^4. \tag{4.}$$

II. Es ist also φ_{12} die Primform 12^{ten} Grades und ihr Quadrat eine rationale Function von z.

III. Die Primform f_{12} und die Primform $H(f_{12})$ sind rationale Functionen von z.

In der That ist (Gl. (4.) No. 4) $H^2(f_{12}) = \text{Const.}\, f_{12}^5$, und nach S. IV. No. 2 $\frac{H^2(f_{12})}{f_{12}^4}$ rational, also auch f_{12}, und nach demselben Satze $H(f_{12})$ eine rationale Function.

Bezeichnen wir wieder mit $\overline{H}(f_{12})$ die vom numerischen Factor befreite Form $H(f_{12})$, so ist

$$\overline{H}(f_{12}) = y_1^{20} - 228 y_1^{15} y_2^5 + 494 y_1^{10} y_2^{10} + 228 y_1^5 y_2^{15} + y_2^{20}. \tag{5.}$$

Setzen wir

$$\varphi_{30} = (y_1^{10} + y_2^{10})(y_1^{20} + 522 y_1^{15} y_2^5 - 10006 y_1^{10} y_2^{10} - 522 y_1^5 y_2^{15} + y_2^{20}), \tag{6.}$$

so ergiebt sich, wie oben, dass φ_{30} eine Primform, und die Gleichung

$$\varphi_{30}^2 = \overline{H}(f_{12})^3 + 1728 f_{12}^5, \tag{7.}$$

also:

IV. Die Form φ_{30} ist die Primform 30^{sten} Grades und ihr Quadrat eine rationale Function von z.

Unter Zuhülfenahme des Satzes II. No. 6 und des Satzes in No. 5 ergiebt sich also:

V. Es giebt
für $N = 6$, $L = 8$ ausser f_6, $H(f_6)$, φ_{12} und den in unendlicher Anzahl vorhandenen Primformen 24^{sten} Grades,
13] und für $N = 12$, $L = 10$ ausser f_{12}, $H(f_{12})$, φ_{30} und den in unendlicher Anzahl vorhandenen Primformen 60^{sten} Grades keine anderen Primformen.

VI. Für $N = 6$, $L = 8$ ist jede Primform F 24^{sten} Grades in der Form

$$\Phi_{24} = \nu \overline{H}(f_6)^3 + \lambda f_6^4, \tag{8.}$$

für $N = 12$, $L = 10$ ist jede Primform F 60^{sten} Grades in der Form

$$\Phi_{60} = \nu \overline{H}(f_{12})^3 + \lambda f_{12}^5 \tag{8a.}$$

enthalten, und umgekehrt sind Φ_{24}, Φ_{60} Primformen 24^{sten} resp. 60^{sten} Grades, wenn nicht $\lambda = 0$ oder $\nu = 0$ oder resp. $\frac{\lambda}{\nu} = 108$, $\frac{\lambda}{\nu} = 1728$.

Man darf in der That nur ν und λ so bestimmen, dass Φ_{24} resp. Φ_{60} durch einen Linearfactor von F theilbar wird. Diese Formen sind alsdann (A. p. 115[1]) S. VI.) durch F theilbar. Der Quotient ist eine von Null verschiedene Constante, weil die genannten Formen mit F von gleichem Grade sind und nur für $\lambda = \nu = 0$ identisch verschwinden können. Der zweite Theil des Satzes folgt daraus, dass, wenn nicht $\lambda = 0$ oder $\nu = 0$, Φ_{24} resp. Φ_{60} weder durch f noch durch $H(f)$ theilbar sein kann, und resp. durch φ_{24} und φ_{60} nur theilbar ist für $\frac{\lambda}{\nu} = 108$ resp. $\frac{\lambda}{\nu} = 1728$. Da also die Formen Φ_{24}, Φ_{60} ausser in diesen Fällen nicht in Primformen niedrigeren Grades zerlegbar sind, so sind sie selber Primformen.

Sind F_1, F_2, F_3 drei Primformen μ^{ten} Grades, so folgt aus ihrer Darstellung durch Gl. (8.) resp. (8a.) der Satz:

VII. Die sämmtlichen Primformen μ^{ten} Grades sind rationale Functionen. Zwischen je drei derselben findet eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten statt.

8.

Es sei

$$f_6 = \chi(z), \tag{1.}$$

wo $\chi(z)$ die Quadratwurzel einer rationalen Function von z, so ergiebt sich aus A. p. 128[2]) Gl. (8.)

$$\overline{H}(f_6) = C\left[\left(\frac{d \log \chi(z)}{dz}\right)^2 + 6 \frac{d^2 \log \chi(z)}{dz^2} - 36 P\right] \chi(z)^2 = \chi_1(z), \tag{2.}$$

wo C eine Constante.

Die mit noch zu bestimmenden Constanten zu multiplicirenden Linearfactoren von f_6 genügen einer Gleichung 48^{sten} Grades

$$y^{48} + p_1 y^{40} + p_2 y^{32} + p_3 y^{24} + p_4 y^{16} + p_5 y^8 + p_6 = 0. \tag{A.}$$

Wir wollen die Coefficienten dieser Gleichung als ganze homo- [14
gene Functionen der rationalen Functionen $\chi(z)^2$ und $\chi_1(z)$ darstellen.

[1]) S. 31 dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 45 dieses Bandes. Sch.

Es seien $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1, \gamma, \gamma_1$ noch zu bestimmende Constanten, η eine primitive 4^{te} Wurzel der negativen Einheit, so sind die 8^{ten} Potenzen der Wurzeln der Gl. (A.)

$$\alpha y_1^8,\quad \alpha_1 y_2^8,\quad \beta(y_1-\eta y_2)^8,\quad \beta_1(y_1+\eta y_2)^8,\quad \gamma(y_1-i\eta y_2)^8,\quad \gamma_1(y_1+i\eta y_2)^8.$$

Die Coefficienten $p_1, p_2, \dots$ sind Formen, welche gleich rationalen Functionen von z sind. Der Coefficient p als der negative Werth der Summe der 8^{ten} Potenzen der Wurzeln ist eine Form 8^{ten} Grades, demnach eine Primform, weil p_1 nicht verschwinden kann, ohne dass auch α verschwindet, was nicht möglich ist. Nach S. V. voriger Nummer ist also

$$p_1 = \lambda_1 \overline{H}(f_6), \tag{3.}$$

wo λ_1 eine Constante. Durch Vergleichung der beiderseitigen Coefficienten ergiebt sich

$$\alpha_1 = \alpha,\quad \beta_1 = \beta = \gamma_1 = \gamma = \tfrac{1}{16}\alpha,\quad \lambda_1 = \tfrac{5}{4}\alpha.$$

Wählen wir $\alpha = 16$, so dass $\sqrt{2}\,y_1$ der Gleichung (A.) genügt, so sind die achten Potenzen der Wurzeln derselben:

$$16y_1^8,\quad 16y_2^8,\quad (y_1-\eta y_2)^8,\quad (y_1+\eta y_2)^8,\quad (y_1-i\eta y_2)^8,\quad (y_1+i\eta y_2)^8 \tag{ω.}$$

und

$$\lambda_1 = 20.$$

Bezeichnet man mit s_k die k^{te} Potenzsumme der Grössen (ω.), so ist s_k eine Form $8k^{\text{ten}}$ Grades, welche gleich einer rationalen Function. Zerlegt man diese Form, unter Berücksichtigung der Gleichung (4.) in No. 7 und der Sätze V. und VI. derselben Nummer, in Primformen, so ergiebt sich folgende Gestalt derselben:

$$\left\{\begin{aligned} s_2 &= \lambda_2 \mathrm{H}^2,\\ s_3 &= \lambda_3 \mathrm{H}^3 + \mu_3 f^4,\\ s_4 &= \lambda_4 \mathrm{H}^4 + \mu_4 f^4 \mathrm{H},\\ s_5 &= \lambda\, \mathrm{H}^5 + \mu_5 f^4 \mathrm{H}^2, \end{aligned}\right. \tag{4.}$$

wo H und f zur Abkürzung für $\overline{H}(f_6)$ resp. f_6 gesetzt ist.

Die Grössen λ und μ werden durch Vergleichung der Coefficienten auf beiden Seiten dieser Gleichungen bestimmt.

Mit Hülfe der Gleichungen (4.) werden alsdann die Coefficienten p_2, p_3, p_4, p_5 berechnet, während p_6 als Product der Grössen (ω.) die Form hat: [15

$$p_6 = \lambda_6 f_6^2. \tag{5.}$$

Die Vergleichung zweier Coefficienten auf beiden Seiten liefert

$$\lambda_6 = 16^2.$$

Man erhält demnach

$$\left\{\begin{aligned} &p_1 = -20\chi_1,\quad p_2 = 70\chi_1^2,\\ &p_3 = -100\chi_1^3 - 14.3088\chi^4,\quad p_4 = 65\chi_1^4 - 40.424\chi_1\chi^4,\\ &p_5 = -16\chi_1^5 - 1248\chi_1^2\chi^4,\quad p_6 = 16^2\chi^5, \end{aligned}\right. \tag{6.}$$

wo χ, χ_1 zur Abkürzung für $\chi(z)$ resp. $\chi_1(z)$ gesetzt ist.

9.

Es sei wiederum

$$f_{12} = \chi(z), \tag{1.}$$

wo $\chi(z)$ eine rationale Function von z, so ergiebt sich aus A. p. 128 [1]) Gl. (8.)

$$\overline{H}(f_{12}) = C\left[\left(\frac{d\log\chi(z)}{dz}\right)^2 + 12\,\frac{d^2\log\chi(z)}{dz^2} - 12^2 P\right]\chi(z)^2 = \chi_1(z). \tag{2.}$$

Die mit bestimmten Constanten multiplicirten Linearfactoren von f_{12} genügen einer Gleichung 120^{sten} Grades, welche nur solche Potenzen der Unbekannten enthält, deren Exponenten durch zehn theilbar.

Bezeichnet man also die beiden Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + 11x - 1 = 0 \tag{3.}$$

mit p^5, q^5, ferner mit η eine primitive fünfte Wurzel der Einheit, endlich die zehnten Potenzen der Glieder des reducirten Wurzelsystems der Gleichung mit

$$\alpha y_1^{10},\quad \alpha_1 y_2^{10},\quad \beta_k(y_1 - p\eta^k y_2)^{10},\quad \gamma_k(y_1 - q\eta^k y_2)^{10},\quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

so ergiebt die Bedingung, dass die Summe dieser Grössen als eine Form zehnten Grades, welche gleich einer rationalen Function, (in Folge der Voraussetzung $N = 12$) identisch verschwinden muss,

$$\alpha_1 = \alpha,\quad \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \frac{-q^5}{5(q^5-p^5)}\,\alpha,$$

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \frac{p^5}{5(q^5-p^5)}\,\alpha.$$

---

[1]) S. 45 dieses Bandes. Sch.

Demnach sind die zehnten Potenzen der Wurzeln der Gleichung, welcher $\sqrt[4]{5}\,y_1$ genügt:

$$(\omega.)\qquad 25\sqrt{5}\,y_1,\quad 25\sqrt{5}\,y_2,\quad -q^5(y_1-\eta_1^k p y_2)^{10},\quad p^5(y_1-\eta_1^k q y_2)^{10},\quad (k=0,1,2,3,4)$$

16] und diese Gleichung lautet:

$$(\mathrm{B.})\quad y^{120}+p_2y^{100}+p_3y^{90}+p_4y^{80}+p_5y^{70}+p_6y^{60}+p_7y^{50}+p_8y^{40}+p_9y^{30}+p_{10}y^{20}+p_{11}y^{10}+p_{12}=0.$$

Bezeichnet man wieder mit s_k die k^{te} Potenzsumme der Grössen (ω.) und zerlegt die Formen $10k^{\text{ten}}$ Grades in Primformen, so ergiebt sich unter Zuhülfenahme der Sätze II., IV., V. in No. 7 eine Darstellung derselben als ganze homogene Functionen von f_{12}, $\overline{H}(f_{12})$, φ_{30}, in welcher die Coefficienten durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von y_1 auf beiden Seiten bestimmt werden. Aus den Potenzsummen ergeben sich alsdann folgende Werthe der Coefficienten p als ganze homogene Functionen von $\chi(z)$, $\chi_1(z)$, und von

$$\varphi_{30}(z) = \sqrt{\chi_1(z)^3+1728\chi(z)^5}:$$

$$(4.)\qquad \begin{cases} p_2 = \varkappa_2\chi_1,\quad p_3 = \lambda_3\varphi,\quad p_4 = \varkappa_4\chi_1^2,\quad p_5 = \lambda_5\chi_1\varphi, \\ p_6 = \varkappa_6\chi_1^3+\lambda_6\chi^5,\quad p_7 = \lambda_7\chi_1^2\varphi,\quad p_8 = \varkappa_8\chi_1^4+\lambda_8\chi_1\chi^5, \\ p_9 = \lambda_9\chi_1^3\varphi+\mu_9\chi^5\varphi,\quad p_{10} = \varkappa_{10}\chi_1^5+\lambda_{10}\chi_1^2\chi^5, \\ p_{11} = \lambda_{11}\chi_1^4\varphi+\mu_{11}\chi^5\chi_1\varphi,\quad p_{12} = 5^5\chi^{10}, \end{cases}$$

wo χ, χ_1, φ zur Abkürzung für resp. $\chi(z)$, $\chi_1(z)$, $\varphi_{30}(z)$ gesetzt ist, und worin $\varkappa_2, \varkappa_3, \ldots, \lambda_3, \lambda_5, \ldots, \mu_9, \ldots$ vollständig bestimmte numerische Grössen sind.

Natürlich könnte man auch die Formen (4.) der Coefffcienten p direct aus der Zerlegung derselben in Primformen, unter Zuhülfenahme der Sätze II., IV., V. in No. 7 aufstellen und die Unbekannten $\varkappa$, λ, μ durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von y_1 auf beiden Seiten bestimmen. Allein es erleichtert wesentlich die Rechnung, die Coefficienten p durch Vermittlung der Potenzsummen s_k herzuleiten. Dieselbe Bemerkung ist auch bei den analogen Gleichungen (6.) voriger Nummer zu machen.

Die Form für p_{12} ergiebt sich daraus, dass dieser Coefficient das Product der Grössen (ω.) sein muss.

Da die Grössen p rationale Functionen von z sind und $L = 10$, so ergiebt sich aus den Gleichungen (4.) ausserdem:

Die Primform φ_{30} ist eine rationale Function.

10.

Es sei a ein singulärer Punkt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dz^2} = Py,$$

η_{11}, η_{12} ein Fundamentalsystem von Integralen, welche resp. den Wurzeln [17 r, $1-r$ der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichung entsprechen, wobei wir voraussetzen wollen, dass r die kleinere der beiden Wurzeln ist, was erlaubt ist, weil dieselben verschieden sein müssen (s. m. Abh. Bd. 66[1]), No. 6). Es sei alsdann

$$(1.)\qquad y_1 = \gamma_1\eta_{11}+\delta_1\eta_{12},\quad y_2 = \gamma_2\eta_{11}+\delta_2\eta_{12}.$$

Substituirt man diese Werthe für y_1, y_2 in eine Primform n^{ten} Grades, so kann zweierlei eintreten. Entweder ist der Coefficient von η_{11}^n Null oder nicht. Im ersteren Falle ist der Coefficient von $\eta_{11}^{n-1}\eta_{12}$ jedenfalls von Null verschieden, weil f als Primform nicht durch η_{12}^2 theilbar sein kann. Hieraus ergiebt sich der Satz:

I. Eine Primform f n^{ten} Grades hat in der Umgebung eines singulären Punktes a entweder die Form

$$(2.)\qquad f = (z-a)^{nr}\varphi(z)$$

oder

$$(2\mathrm{a}.)\qquad f = (z-a)^{(n-2)r+1}\varphi(z),$$

wo $\varphi(z)$ Wurzel einer rationalen Function ist, welche für $z=a$ weder Null noch unendlich ist.

Wenn weder f noch $H(f)$ die Form (2a.) hat, so kann $\frac{\lambda}{\nu}$ so bestimmt werden, dass die Form Φ_{24}, resp. Φ_{30} durch η_{12} theilbar wird. Es giebt also eine Primform der Gestalt (2a.). Andererseits sind (nach A. p. 114[2]) S. IV.) nicht zwei verschiedene Primformen gleichzeitig durch η_{12} theilbar. Es ergiebt sich also:

II. Von der Gesammtheit der Primformen hat eine die Gestalt (2a.), die übrigen die Gestalt (2.).

---

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 159 ff. Sch.

[2]) S. 30 dieses Bandes. Sch.

Ist f eine Primform niedrigsten Grades N, so ist nach No. 7

a) für $N = 6$, f_6^3 rational, also

entweder $12r$ oder $8r$ eine ganze Zahl,

also weil $L = 8$, unter Berücksichtigung von A. p. 135[1]) Gl. (5.) der Nenner von r eine der Zahlen

$$(\alpha.) \qquad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8;$$

b) für $N = 12$ ist f_{12} rational, also

entweder $12r$ oder $10r$ eine ganze Zahl,

18] demnach, weil $L = 10$, der Nenner von r eine der Zahlen

$$(\beta.) \qquad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10.$$

Fasst man beides zusammen, so erhält man den Satz:

III. Die Nenner der Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen haben für $N = 6$ einen der Zahlenwerthe (α.), für $N = 12$ einen der Zahlenwerthe (β.).

Aus dem Satze I. ergiebt sich übrigens folgende Gestalt einer Primform n^{ten} Grades als Function von z:

$$(3.) \qquad f(z) = \psi(z)(z-a_1)^{(n-2\varepsilon_1)r_1+\varepsilon_1} \times (z-a_2)^{(n-2\varepsilon_2)r_2+\varepsilon_2} \ldots,$$

wenn man mit $a_1, a_2, \ldots$ die singulären Punkte, mit $r_1, r_2, \ldots$ resp. die jedesmal kleinere der beiden Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen, mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ Zahlen, welche entweder den Werth Null oder Eins haben, endlich mit $\psi(z)$ eine ganze rationale Function bezeichnet, welche für keinen der singulären Punkte verchwindet.

11.

Wir betrachten jetzt den Fall

$$N = 4.$$

Nach S. II. No. 2 ist in diesem Falle

$$(1.) \qquad \mu \leqq 12,$$

1) S. 52 dieses Bandes. Sch.

also nach S. IV. No. 1

$$(2.) \qquad m \leqq 24,$$

folglich ist in Übereinstimmung mit A. p. 125[1])

$$(3.) \qquad L \leqq 6.$$

Es sei

a) $L < 3$, so wird (nach A. p. 135[2]) Gl. (5.) und p. 138[3]) No. 26) die Differentialgleichung durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt.

b) $L = 4$ ist aus dem A. p. 125[1]) angegebenen Grunde auszuschliessen.

c) $L = 5$ kann nicht statthaben, weil in diesem Falle die Primform 4^{ten} Grades durch y_1^2 oder y_2^2 theilbar sein müsste.

d) $L = 3$ oder 6.

Ist j eine primitive dritte oder sechste Wurzel der Einheit und sind y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen, welche auf einem gewissen Wege gleichzeitig in $y_1 j$, $y_2 j^{-1}$ resp. übergehen, so ergiebt sich, dass eine Prim- [19
form vierten Grades eine der beiden Gestalten hat

$$(\alpha.) \quad a_0 y_1^4 + a_3 y_1 y_2^3, \qquad (\beta.) \quad a_1 y_1^3 y_2 + a_4 y_2^4.$$

Da die erstere durch y_1, die zweite durch y_2 theilbar ist, so folgt aus A. p. 114[4]) S. IV., dass, wenn erst a_0, a_1, a_3, a_4 fixirt sind, jede Primform vierten Grades mit einer der beiden Formen (α.) oder (β.) übereinstimmt. Wir fixiren $a_0 = 1$, $a_3 = 1$, was erlaubt ist, da y_1, y_2 mit beliebigen constanten Factoren multiplicirt werden dürfen. Es wird dann die Form (α.)

$$(4.) \qquad f_4 = y_1^4 + y_1 y_2^3.$$

Nun ist

$$(5.) \qquad H(f_4) = 9(8y_1^3 y_2 - y_2^4).$$

Nehmen wir als Form (β.)

$$(6.) \qquad \overline{H}(f_4) = 8y_1^3 y_2 - y_2^4,$$

so sind f_4 und $\overline{H}(f_4)$ die einzigen Primformen vierten Grades. Es ist demnach die Hessesche Covariante von f_4 von dieser Form verschieden.

1) S. 42 dieses Bandes. Sch.
2) S. 52 dieses Bandes. Sch.
3) S. 56 dieses Bandes. Sch.
4) S. 30 dieses Bandes. Sch.

Aus dem Satze V. No. 2 ergiebt sich aber, dass der **Index jedes reducirten Wurzelsystems, also auch L eine gerade Zahl sein muss.**

Wir erhalten also den Satz:

I. **Für $N=4$ ist $L=6$, und es sind f_4 und $\overline{H}(f_4)$ die einzigen Primformen vierten Grades.**

Es ergiebt sich

$$H^2(f_4) = -9^2.24^2 f_4. \tag{7.}$$

Demnach folgert man aus dem Satze IV. No. 2:

II. **f_4^3 und $\overline{H}(f_4)^3$ sind rationale Functionen von z.**

Bestimmt man λ so, dass

$$\psi = -\overline{H}(f_4)^3 + \lambda f_4^3$$

durch einen Linearfactor der Form

$$\varphi_6 = \frac{1}{y_2}\left[\overline{H}(f_4)\frac{\partial f_4}{\partial y_1} - f_4\frac{\partial \overline{H}(f_4)}{\partial y_1}\right] = 8y_1^6 - 20y_1^3 y_2^3 - y_2^6 \tag{8.}$$

theilbar wird, so wird ψ, aus demselben Grunde wie in No. 7 in den ähnlichen Fällen, durch φ_6^2 theilbar. Es ergiebt sich

$$\varphi_6^2 = -\overline{H}(f_4)^3 + 64 f_4^3. \tag{9.}$$

Da eine Form sechsten Grades nicht Wurzel einer rationalen Function sein kann, ohne Primform zu sein (weil $N=4$), **so ist φ_6 eine Primform.**
20] Nach No. 6 Gl. (3.) und (3a.) giebt es nicht zwei verschiedene Primformen sechsten Grades.

Die Form

$$F = \nu \overline{H}(f_4)^3 + \lambda f_4^3 \tag{10.}$$

ist eine Primform für jedes Werthsystem der Constanten λ und ν, ausser für $\nu = 0$ oder $\lambda = 0$, oder $\nu = -1$, $\lambda = 64$. Umgekehrt ist jede Primform F zwölften Grades in der Form (10.) enthalten. Denn man kann $\frac{\lambda}{\nu}$ so bestimmen, dass die rechte Seite der Gleichung (10.) durch einen Linearfactor von F, also (A. p. 114[1]) S. IV.) durch F theilbar wird. Der Quotient ist eine Constante, welche nicht verschwindet, weil f_4 und $\overline{H}(f_4)$ von einander verschieden sind. Fasst man das Vorhergehende zusammen, so folgt:

1) S. 30 dieses Bandes. Sch.

III. **Für $N=4$ giebt es nur die Primformen f_4, $\overline{H}(f_4)$, φ_6 und die in unendlicher Anzahl vorhandenen Primformen zwölften Grades. Die letzteren sind sämmtlich durch die Gleichung (10.) dargestellt.**

Es ergiebt sich aus der Gleichung (10.), ebenso wie in No. 7, dass **zwischen je drei Primformen zwölften Grades eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten stattfindet.**

12.

Die Linearfactoren von f_4, mit bestimmten Constanten multiplicirt, genügen einer Gleichung 24sten Grades, welche nur sechste Potenzen der Unbekannten enthält.

Die sechsten Potenzen der Glieder des reducirten Wurzelsystems derselben seien

$$\alpha y_1^6,\quad \beta(y_1+y_2)^6,\quad \gamma(y_1+py_2)^6,\quad \delta(y_1+p^2y_2)^6,$$

wo p eine primitive dritte Wurzel der Einheit bedeutet. Es ergiebt sich, dass die Summe dieser Grössen nicht Null sein darf, weil hierzu die unmögliche Bedingung $\alpha = 0$ zu erfüllen wäre. Diese Summe als Form sechsten Grades, welche gleich einer rationalen Function, ist demnach gleich φ_6 multiplicirt mit einer Constanten. Hieraus folgt

$$\beta = \gamma = \delta = -\tfrac{1}{27}\alpha, \quad \text{und die Summe gleich } \tfrac{1}{9}\alpha\varphi_6.$$

Wählen wir $\alpha = -27$, so ist das reducirte Wurzelsystem der Gleichung, welcher $\sqrt[6]{-27}\,y_1$ genügt:

$$\sqrt[6]{-27}\,y_1,\quad (y_1+y_2),\quad (y_1+py_2),\quad (y_1+p^2y_2). \tag{ω.}$$

Es sei wiederum [21

$$f_4 = \chi(z), \tag{1.}$$

wo $\chi(z)$ die Kubikwurzel einer rationalen Function, und

$$\overline{H}(f_4) = C\left[\left(\frac{d\log\chi(z)}{dz}\right)^2 + 4\frac{d^2\log\chi(z)}{dz^2} - 16P\right]\chi(z)^2 = \chi_1(z), \tag{2.}$$

so können wir die Coefficienten der Gleichung

$$y^{24} + p_1 y^{18} + p_2 y^{12} + p_3 y^6 + p_4 = 0, \tag{C.}$$

welcher die Grössen (ω.) genügen, folgendermaassen als ganze homogene Functionen von $\chi(z)$, $\chi_1(z)$ und

$$(3.)\qquad \varphi_6(z) = \sqrt{-\chi_1(z)^3+64\chi(z)^3}$$

darstellen.

Bezeichnen wir nämlich wieder mit s_k die k^{te} Potenzsumme der sechsten Potenzen der Grössen (ω.), so ergiebt die Zerlegung der Form s_k in Primformen ihre Darstellung als ganze homogene Function von f_4, $\overline{H}(f_4)$ und φ_6. Die Unbekannten ergeben sich wieder durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von y_1 auf beiden Seiten. Auf diesem Wege erhalten wir:

$$(4.)\qquad \begin{cases} s_1 = -3\varphi, \quad s_2 = -3\chi_1^3+732\chi^3, \\ s_3 = 3\chi_1^3\varphi-2460\chi^3\varphi, \quad s_4 = 3\chi_1^6-6216\chi_1^3\chi^3+531444\chi_1^6, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung χ, χ_1, φ für $\chi(z), \chi_1(z), \varphi_6(z)$ resp. gesetzt ist.

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, dass φ_6 eine rationale Function von z ist.

Aus den Gleichungen (4.) ergeben sich die Werthe der Coefficienten der Gleichung (C.)

$$(5.)\quad p_1 = 3\varphi, \quad p_2 = -3\chi_1^3-78\chi^3, \quad p_3 = -\chi_1^3\varphi+10\chi^3\varphi, \quad p_4 = -27\chi^6.$$

Die letztere dieser Gleichungen ergiebt sich auch unmittelbar daraus, dass p_4 gleich dem Producte der sechsten Potenzen der Grössen (ω.) ist.

Aus dem Satze I. No. 10 und aus A. p. 135[1]) Gl. (5.) ergiebt sich:

Die Nenner der Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen fallen für $N=4$ mit einer der Zahlen

1, 2, 3, 4, 6

zusammen.

Dieser Satz, zusammen mit Satz III. No. 10, liefert den Satz A. p. 135[2]) mit der näheren Bestimmung, dass die Nenner 7 und 9 für $N>2$ überhaupt ausgeschlossen sind.

---

[1]) S. 52 dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 53 dieses Bandes. Sch.

13. [22

In den Nummern 8, 9, 12 ist gezeigt worden, wie die Coefficienten der algebraischen Gleichung, deren Wurzeln der Differentialgleichung genügen, vermittelst einer Function $\chi(z)$ ausgedrückt werden können.

Diese Function χ ist für $N=6$ die Quadratwurzel, für $N=4$ die Kubikwurzel einer rationalen Function, dagegen für $N=12$ eine rationale Function.

Die Exponenten der Factoren von χ, welche für die singulären Punkte Null oder unendlich werden, sind durch die Gleichung (3.) No. 10 näher bestimmt.

Die definitive Bestimmung von χ erfolgt (nach A. p. 129—133[1])) dadurch, dass diese Function einer linearen homogenen Differentialgleichung resp. der 5^{ten}, 7^{ten} oder 13^{ten} Ordnung, oder dem Systeme von resp. 4, 6, 12 solchen Differentialgleichungen zu genügen hat. Obgleich diese Bestimmung wesentlich durch die gewonnene Kenntniss der Beschaffenheit der Exponenten derjenigen Factoren von χ, welche für die singulären Punkte Null oder unendlich werden, erleichtert wird, so ist doch zuweilen folgender Weg zur Bestimmung von χ vorzuziehen.

Ist f eine Form vom k^{ten} Grade, so kann man aus den beiden Gleichungen:

$$(1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y_1}y_1+\dfrac{\partial f}{\partial y_2}y_2 = kf, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_1}y_1'+\dfrac{\partial f}{\partial y_2}y_2' = \dfrac{df}{dz}, \end{cases} \qquad y_1' = \frac{dy_1}{dz},\quad y_2' = \frac{dy_2}{dz},$$

$\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}$ berechnen. Für jede dieser Formen $(k-1)^{ten}$ Grades werden die den beiden Gleichungen (1.) analogen Gleichungen aufgestellt, und aus diesen $\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2}$ berechnet.

Ist nun $f=\chi$, wo χ Wurzel einer rationalen Function von z, so ergiebt diese Rechnung unter Zuhülfenahme von A. p. 104[2]) Gl. (2.)

$$(2.)\qquad H(f) = C\left[\left(\frac{d\log\chi}{dz}\right)^2+k\frac{d^2\log\chi}{dz^2}-k^2P\right]\chi^2 = \chi_1,$$

wo C eine Constante bedeutet. Diese Gleichung haben wir in den Nummern

---

[1]) S. 46—51 dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 19 dieses Bandes. Sch.

8, 9, 12 bereits für $k = 6, 12, 4$ aus A. p. 128[1]) durch directe Ausrechnung deducirt.

Aus den Gleichungen (3.) und (4.) No. 4 und Gleichung (7.) No. 11 ergiebt sich:

23] **Die Functionen χ und χ_1 genügen den Systemen von Differentialgleichungen:**

$$(3.) \quad \begin{cases} C\left[\left(\dfrac{d\log\chi}{dz}\right)^2 + N\dfrac{d^2\log\chi}{dz^2} - N^2 P\right]\chi^2 = \chi_1, \\ C'\left[\left(\dfrac{d\log\chi_1}{dz}\right)^2 + (2N-4)\dfrac{d^2\log\chi_1}{dz^2} - (2N-4)^2 P\right]\chi_1^2 = \chi^\lambda, \end{cases}$$

wo C, C' Constanten und $\lambda = 1$ für $N = 4$, $\lambda = 2$ für $N = 6$, $\lambda = 3$ für $N = 12$.

Die Gleichungen (3.) können dazu dienen, die ganze rationale Function $\psi(z)$ zu bestimmen, welche in Gleichung (3.) No. 10 als Factor von χ auftritt, wodurch nach dem Obigen χ vollständig bestimmt ist. Der Grad von $\psi(z)$ ergiebt sich auf ähnliche Weise wie A. p. 133[2]) der Grad von $g(z)$.

14.

Zum Beschluss fügen wir noch zwei fernere Beweise des Satzes,

dass die Nenner der Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen mit einer der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 zusammenfallen müssen, wenn $N > 2$, hinzu (siehe No. 10, S. III., den Satz am Schluss von No. 12 und A. p. 135[3]). Wir glauben diese Beweise um so weniger unterdrücken zu dürfen, weil sie diesen Satz fast als eine unmittelbare Folge aus der Begriffsbestimmung einer Primform darstellen.

Ist f eine Primform n^{ten} Grades, gebildet aus einem beliebigen Fundamentalsystem von Integralen y_1, y_2, so dürfen in derselben nicht gleichzeitig die Glieder mit y_1^n und $y_1^{n-1}y_2$, ebenso wenig gleichzeitig die Glieder mit y_2^n, $y_2^{n-1}y_1$ fehlen, weil f weder durch y_1^2 noch durch y_2^2 theilbar sein darf (A. p. 114[4])). Die Primform besteht daher aus mindestens zwei Gliedern.

1) S. 45 dieses Bandes. Sch.
2) S. 51 dieses Bandes. Sch.
3) S. 53 dieses Bandes. Sch.
4) S. 30 dieses Bandes. Sch.

Es sei demnach erstens

$$f = a_0 y_1^n + a_k y_1^{n-k} y_2^k + \cdots,$$

wo a_0 und a_k von Null verschieden sind. Da $k \geqq 1$, so ergiebt sich, dass die höchste Potenz von y_1 in $H(f)$ die $(2n-k-2)^{\text{te}}$ ist, demnach ist die niedrigste Potenz von y_2 in dieser Form die $(k-2)^{\text{te}}$, weil $H(f)$ vom $(2n-4)^{\text{ten}}$ Grade.

Ist f eine Primform niedrigsten Grades, so ist auch $H(f)$ eine Primform (A. p. 116[1]) und als solche nicht durch y_2^2 theilbar. Demnach muss

$$k - 2 < 2,$$

d. h. k eine der Zahlen 1, 2, 3 sein.

Haben nun r und a dieselbe Bedeutung wie in No. 10, während y_1, y_2 [24 mit den dortigen η_1, η_2 resp. übereinstimmen, so ist — da f nach einem Umlaufe um a sich mit einer Einheitswurzel multiplicirt —

$$nr - [(n-2k)r + k],$$

also auch $2kr$ eine ganze Zahl.

Der Nenner von r ist demnach eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 6.

Es sei zweitens

$$f = a_1 y_1^{n-1} y_2 + a_k y_1^{n-k} y_2^k + \cdots,$$

a_1 und a_k von Null verschieden, so ist

$$H(f) = -(n-1)^2 a_1^2 y_1^{2n-4} + (n-1)k((k-3)n+2) a_1 a_k y_1^{2n-k-3} y_2^{k-1} + \cdots.$$

Es sei $k > 2$, so sind die Coefficienten von y_1^{2n-4} und von $y_1^{2n-4-(k-1)} y_2^{k-1}$ in $H(f)$ von Null verschieden und die höchste Potenz von y_1 in $H^2(f)$, nach dem im ersten Falle Bewiesenen, die $(4n-k-9)^{\text{te}}$. Demnach ist $H^2(f)$ als eine Form vom Grade $4n-12$ durch y_2^{k-3} theilbar.

Ist wieder f eine Primform niedrigsten Grades, so kann $H^2(f)$ nicht durch die vierte Potenz einer Primform, folglich auch nicht (A. p. 115[2]) durch y_2^4 theilbar sein. Demnach ist

$$k - 3 < 4,$$

d. h. k eine der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6.

1) S. 32 dieses Bandes. Sch.
2) S. 31 dieses Bandes. Sch.

In diesem Falle ist

$$(n-2)r+1-[(n-2k)r+k],$$

also auch $(2k-2)r$ eine ganze Zahl, d. h.

der Nenner von r ist eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10.

15.

Der einfachste Beweis des in voriger Nummer erwähnten Satzes ist wohl der folgende.

Ist f eine Primform niedrigsten Grades, so sind f und $H(f)$ nicht durch y_2^2 und $H^2(f)$ nicht durch y_2^4 theilbar. Demnach enthält

$$f \text{ ein Glied der Form } a_0 y_1^n \text{ oder } a_1 y_1^{n-1} y_2,$$
$$H(f) \text{ ein Glied der Form } b_0 y_1^{2n-4} \text{ oder } b_1 y_1^{2n-5} y_2,$$
$$H^2(f) \text{ ein Glied der Form } c_0 y_1^{4n-12} \text{ oder } c_1 y_1^{4n-13} y_2 \text{ oder } c_2 y_1^{4n-14} y_2^2 \text{ oder } c_3 y_1^{4n-15} y_2^3.$$

Haben a, r wieder dieselbe Bedeutung wie in No. 10, während y_1, y_2 mit
25] den dortigen η_1, η_2 resp. übereinstimmen, bezeichnen wir ferner den Nenner von r mit ν und mit j eine primitive ν^{te} Wurzel der Einheit, so gehen nach einem Umlaufe von z um a

$$f \text{ in } j^n f \text{ oder in } j^{n-2} f,$$
$$H(f) \text{ in } j^{2n-4} H(f) \text{ oder in } j^{2n-6} H(f),$$
$$H^2(f) \text{ in } j^{4n-12} H^2(f) \text{ oder in } j^{4n-14} H^2(f) \text{ oder in } j^{4n-16} H^2(f) \text{ oder in } j^{4n-18} H^2(f) \text{ über.}$$

Da nach S. IV. No. 2 $\frac{H(f)}{f^2}$, $\frac{H^2(f)}{f^4}$ ungeändert bleiben müssen, so ist erforderlich, dass gleichzeitig eine der Congruenzen:

$$2n \equiv 2n-4, \quad 2n \equiv 2n-6, \quad \text{mod.}\, \nu$$

und eine der Congruenzen

$$4n \equiv 4n-12, \quad 4n \equiv 4n-14, \quad 4n \equiv 4n-16, \quad 4n \equiv 4n-18, \quad \text{mod.}\, \nu$$

stattfindet, oder gleichzeitig eine der Congruenzen

$$2(n-2) \equiv 2n-4, \quad 2(n-2) \equiv 2n-6, \quad \text{mod.}\, \nu$$

und eine der Congruenzen

$$4(n-2) \equiv 4n-12, \quad 4(n-2) \equiv 4n-14, \quad 4(n-2) \equiv 4n-16, \quad 4(n-2) \equiv 4n-18, \quad \text{mod.}\, \nu.$$

Hieraus ergiebt sich, dass ν eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 ist.

Heidelberg, den 3. November 1877.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 119, Zeile 9 v. u. gleich der statt gleich ist der,
„ 128, „ 8, 9 eine rationale Function statt rationale Functionen,
„ 131, „ 6 v. u. $\alpha_1 y_2^{10}$ statt $\alpha_1 y_1^{10}$,
„ 132, „ 10 v. u. $\varkappa$ statt $\varkappa_1$,
„ 138, „ 10 v, u. p_4 statt p_3,
„ 140, „ 12 v. u. Nenner statt Summe,
„ 141, „ 5 dieser Form statt derselben;
„ 134, „ 10 v. u. wurde das zweite »mit« eingeschaltet.

SCH.

XXVI.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE.

(Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, t. 85, 1877, p. 947—950; Séance du 19 Novembre 1877.)

En désignant par y_1 une intégrale de l'équation différentielle [947

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_0 y = 0$$

et posant

$$\Delta = e^{-\int p_1 dx},$$

on tire d'un théorème du no. 2 de mon Mémoire dans le Journal de Borchardt, t. 66[1]), que

$$y_2 = y_1 \int \frac{\Delta}{y_1^2} dx$$

est aussi une intégrale, et que l'on n'a jamais

$$y_2 = \text{const.}\, y_1,$$

de sorte que y_1, y_2 font un système fondamental d'intégrales. Si l'équation a la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Py, \tag{1.}$$

une intégrale quelconque y_1 fait avec

$$y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2} \tag{2.}$$

---

[1]) Mémoire VI, p. 159, t. I de cette édition. Sch.

un système fondamental. La forme (2.) de la fonction y_2 est permanente pour des valeurs quelconques des constantes contenues dans P. Il n'y a lieu de faire, dans certains cas, une distinction que si l'on veut effectuer l'intégrale

$$\int \frac{dx}{y_1^2}.$$

Soit par exemple,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{a^2-\frac{1}{4}}{x^2}\,y = 0, \tag{3.}$$

948] une intégrale y_1 est

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}+a}, \tag{4.}$$

et l'on a

$$y_2 = x^{\frac{1}{2}+a}\int_\alpha^x x^{-(1+2a)}\,dx. \tag{5.}$$

La forme (5.) est valable pour toute valeur de a; mais, si l'on veut obtenir explicitement l'intégrale

$$\int_\alpha^x x^{-(1+2a)}\,dx$$

par des fonctions connues, il faut distinguer les deux cas $a = 0$ et a non égal à zéro.

C'est de même ce qui arrive à l'égard de l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (2k^2\sin^2\mathrm{am}\,x + k^2\sin^2\mathrm{am}\,a - 1 - k^2)\,y. \tag{6.}$$

Vous avez trouvé que

$$y_1 = \frac{\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)}\,e^{-x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}} \tag{7.}$$

est une intégrale; donc

$$y_2 = y_1\int_\alpha^x \frac{\Theta^2(x)\,e^{2x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}}{\mathrm{H}^2(x+a)}\,dx \tag{8.}$$

est aussi une intégrale valable pour toute valeur de a et qui fait avec y_1 un système fondamental. Une distinction n'est à faire que si l'on veut

exprimer y_2 par des fonctions connues. En effet on trouve

$$\frac{\Theta^2(x)}{\mathrm{H}^2(x+a)}\,e^{2x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}} = \frac{1}{C}\,\frac{d}{dx}\left[\frac{\mathrm{H}(x-a)}{\mathrm{H}(x+a)}\,e^{2x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}\right], \tag{9.}$$

où

$$C = 2\sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\,\mathrm{am}\,a\,\frac{\Theta^2(a)}{\Theta^2(0)}\,k.$$

Comme cette constante ne peut devenir infinie, $\sin\mathrm{am}\,a$, dans le coefficient de y de l'équation différentielle (6.), devant être fini, on peut avoir

$$\begin{cases} \text{ou } 1^\circ\ C = 0 \\ \text{ou } 2^\circ\ C \text{ différent de zéro.} \end{cases} \tag{10.}$$

Dans le second cas, les équations (7.) à (9.) fournissent

$$y_2 = \frac{\mathrm{H}(x-a)}{\Theta(x)}\,e^{x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}. \tag{11.}$$

C'est précisément votre autre intégrale. Les valeurs pour lesquelles arrive le cas premier (10.) sont

$$\begin{cases} (\alpha)\quad a = 2mK + 2niK', \\ (\beta)\quad a = (2m+1)K + 2niK', \\ (\gamma)\quad a = (2m+1)K + (2n+1)iK', \end{cases} \tag{12.}$$

m, n étant des nombres entiers.

Dans le cas (12α.), on a [949

$$\int_\alpha^x \frac{\Theta^2(x)}{\mathrm{H}^2(x+a)}\,e^{2x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}\,dx = e^{-\frac{2n^2K'\pi}{K}}\int_\alpha^x \frac{\Theta^2(x)}{\mathrm{H}^2(x)}\,dx, \tag{13α.}$$

dont la valeur est, à un facteur constant près,

$$\frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)} - \frac{Jx}{K} + \text{const.}$$

De là et de l'équation (8.) découle le système fondamental

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}, \\[2ex] y_2 = \dfrac{\mathrm{H}'(x)}{\Theta(x)} - \dfrac{Jx}{K}\,\dfrac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}. \end{cases} \tag{14α.}$$

Dans le cas (12β.), on a

$$(13\beta.)\qquad \int_\alpha^x \frac{\Theta^2(x)\,e^{2x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}}{\mathrm{H}^2(x+a)}\,dx = e^{-\frac{2n^2\pi K'}{K}}\int_\alpha^x \frac{\Theta^2(x)}{\mathrm{H}_1^2(x)}\,dx,$$

dont la valeur est, à un facteur constant près,

$$x\frac{\Theta_1''(0)}{k'^2}-\frac{1}{k'^2}\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}+\text{const.}$$

De là et de l'équation (8.) découle le système fondamental

$$(14\beta.)\qquad \begin{cases} y_1 = \dfrac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)}, \\[2mm] y_2 = x\dfrac{\Theta_1''(0)}{k'^2}\dfrac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)}-\dfrac{1}{k'^2}\dfrac{\mathrm{H}_1(x)\,\Theta'(x)}{\Theta^2(x)}. \end{cases}$$

Dans le cas (12γ.), on a

$$(13\gamma.)\qquad \int_\alpha^x \frac{\Theta^2(x)\,e^{2x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}}{\mathrm{H}^2(x+a)}\,dx = e^{-\frac{2\pi K'}{K}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\int_\alpha^x \frac{\Theta^2(x)}{\Theta_1^2(x)}\,dx,$$

dont la valeur est, à un facteur constant près,

$$-x\frac{\Theta''(0)}{k'^2}+\frac{1}{k'^2}\frac{d\log\Theta_1(x)}{dx}+\text{const.}$$

De là et de l'équation (8.) découle le système fondamental

$$(14\gamma.)\qquad \begin{cases} y_1 = \dfrac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}, \\[2mm] y_2 = -x\dfrac{\Theta''(0)}{k'^2}\dfrac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}+\dfrac{1}{k'^2}\dfrac{\Theta_1'(x)\,\Theta_1(x)}{\Theta_1(x)\,\Theta(x)}. \end{cases}$$

950] Par ce qui précède, il est démontré que l'équation différentielle (6.) se comporte comme l'équation différentielle (3.). La valeur de y_2 pour celle-ci est donnée par l'équation (5.), pour celle-là par l'équation (8.). Pour une valeur générale de a, y_2 a la forme $x^{\frac{1}{2}-a}$ pour l'équation (3.), et la forme (11.) pour l'équation (6). Mais la supposition $a = 0$ fait entrer le logarithme dans la valeur évaluée de y_2 de l'équation (5.), comme pour des valeurs de a données par les équations (12.), la valeur évaluée de y_2 a des formes particulières.

Mais il s'ensuit en même temps que les valeurs (12.) de a sont les seules pour lesquelles la fonction y_2 n'ait pas la forme (11.).

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

S. 146, Gl. (5.) und Zeile 14 wurde unter den Integralzeichen $x^{-(1+2a)}$ statt x^{-1+2a} gesetzt.

„ „ , „ (8.)
„ 147, „ (13α.)
„ 148, „ (13β.), (13γ.) } wurde als untere Grenze der Integrale α statt a gesetzt.

„ 147, Zeile 3 wurde où statt ou gesetzt.

„ „ , „ 4 wurde in dem Ausdrucke für C ein vorgesetztes Minuszeichen unterdrückt und im Nenner $\Theta^2(0)$ statt $\Theta(0)$ gesetzt.

„ „ , Gl. (13α.) wurde auf der rechten Seite im Exponenten von e der Factor π hinzugefügt.

„ 148, „ (13β.) wurde auf der rechten Seite im Exponenten von e $-\frac{2n^2\pi K'}{K}$ statt $\frac{2\pi i}{K}(-n^2K+n^2iK')$, und ebenso

„ „ , „ (13γ.) $-\frac{2\pi K'}{K}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$ statt $\frac{2\pi i}{K}\left(-2nK+\left(n^2-\frac{1}{4}\right)iK'\right)$ gesetzt.

„ 148, Zeile 6 v. u. wurde pour statt dans gesetzt.

2) Die vorstehende Arbeit verdankt ihre Entstehung dem folgenden an Fuchs gerichteten Schreiben von Hermite.

»Paris 27 Octobre 1877.

Mon cher ami,

Permettez moi de faire appel à votre connaissance approfondie de la nature analytique des fonctions définies par des équations différentielles linéaires, et de vous demander de vouloir bien déduire de vos principes, des relations qui me paraissent intéressantes et que je prends la liberté de soumettre à votre attention, dans le cas le plus simple. Je considère l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [2k^2\,\mathrm{sn}^2x+k^2\,\mathrm{sn}^2a-1-k^2]\,y$$

dont la solution générale est ainsi donnée:

$$y = Cy_1+C'y_2$$

en faisant:

$$y_1 = \frac{\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)}\,e^{-x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}},$$

$$y_2 = \frac{\mathrm{H}(x-a)}{\Theta(x)}\,e^{x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}.$$

Vous voyez que par le changement de x en $x+2K$ et $x+2iK'$, y_1 se change en μy_1 et $\mu' y_1$, tandis que y_2 devient $\frac{1}{\mu} y_2$ et $\frac{1}{\mu'} y_2$. Mais le cas particulier où l'on suppose $a=0$ (l'un de ceux de LAMÉ) donne un tout autre résultat. Et d'abord, pour avoir dans ce cas la solution générale je pars de la formule:

$$y = C\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)} + C'\left[\frac{\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)} e^{-x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}\right]$$

et je développe le second terme suivant les puissances croissantes de a, ce qui donne

$$y = (C+C')\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)} + C'a\left[\frac{\mathrm{H}'(x)}{\Theta(x)} - \frac{Jx}{K}\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}\right] + \cdots,$$

et par suite d'après le procédé de D'ALEMBERT

$$y = C_1\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)} + C_1'\left[\frac{\mathrm{H}'(x)}{\Theta(x)} - \frac{Jx}{K}\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}\right].$$

Faisant donc

$$y_1 = \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)},$$

$$y_2 = \frac{\mathrm{H}'(x)}{\Theta(x)} - \frac{Jx}{K}\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)},$$

vous voyez que par le changement de x en $x+2K$, y_1 devient $-y_1$ et y_2, $-y_2+2Jy_1$. Semblablement par le changement de x en $x+2iK'$, y_1 se reproduit, tandis que y_2 devient: $y_2-2iJ'y_1$. Ce que je ne vois point maintenant, mais ce que vous devez certainement voir, en considérant l'équation proposée, c'est la raison de ce changement de nature de l'intégrale, pour $a=0$. Des circonstances toutes semblables présentent d'ailleurs lorsqu'on fait: $a=K$, puis enfin $a=K+iK'$, et peut-être vos principes ouvriraient-ils la voie, pour obtenir ces valeurs singulières auxquelles correspond une autre nature, un autre mode d'existence de l'intégrale. Vous voyez que dans le cas général de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2 x + h]\,y$$

ce serait une belle et grande chose, que de trouver, par cette voie, les valeurs de h, auxquelles correspondent les solutions de LAMÉ au nombre de $2n+1$, qui sont des fonctions doublement périodiques.

Permettez moi d'appeler votre attention sur ces questions, qui par des voies différentes ont été déjà abordées par LAMÉ et M. HEINE, mais qui me semblent vous revenir de droit plus qu'à tout autre, et recevez, mon cher ami, la nouvelle assurance de mes sentiments les meilleurs et les plus dévoués.«

CH. HERMITE.«

Vergl. die beiden folgenden Abhandlungen XXVII, XXVIII; am Schlusse des ersten Theiles der Abhandlung XXVIII findet man eine Ausführung der Rechnung, die den Werth der Constanten C (S. 147, Gl. (9.)) liefert, und eine vereinfachte Darstellung der Bestimmung der Integrale für $a=0, K, K+iK'$.

SCH.

XXVII.

ÜBER EINE KLASSE VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, WELCHE DURCH ABELSCHE ODER ELLIPTISCHE FUNCTIONEN INTEGRIRBAR SIND.

(Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.-A.-Universität, Göttingen 1878, No. 1, 16. Januar 1878, Sitzung am 5. Januar, S. 19—32; wieder abgedruckt in den Annali di Matematica p. ed a., Ser. II, Bd. 9, 1878, S. 25—35.)

Die Differentialgleichung [19[1]]

$$\text{(A.)}\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2\sin^2\mathrm{am}\,x + h]\,y,$$

durch welche bekanntlich die LAMÉschen Functionen definirt werden, ist nach LAMÉ insbesondere von Herrn HEINE zum Gegenstande eingehender Untersuchungen gemacht worden. Während man sich jedoch bis dahin darauf beschränkte, nur solche Werthe von h in Betracht zu ziehen, für welche die Differentialgleichung durch doppeltperiodische Functionen integrirbar ist, hat in neuerer Zeit Herr HERMITE es unternommen, dieselbe Differentialgleichung für beliebige Werthe von h zu integriren (Sur quelques applications des fonctions elliptiques in den Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, 15. Octobre 1877, sqq.[2]). Unter diesen Umständen scheint es nicht ohne Interesse, auf eine Klasse von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung hinzuweisen, welche ich in meiner Arbeit (BORCHARDTS Journal, Band 81, p. 116—118[3]), No. 13) durch ABELsche oder elliptische Func-

[1]) Seitenzahlen der ersten Veröffentlichung in den Göttinger Nachrichten. Sch.

[2]) Separat erschienen, Paris 1885. Sch.

[3]) Abh. XX, S. 32—34 dieses Bandes. Sch.

tionen integrirt habe, und wovon nicht nur die LAMÉsche Differentialgleichung (A.), sondern auch diejenigen Differentialgleichungen, welche Herr HEINE
20] (BORCHARDTS Journal, Band 60, p. 252) den LAMÉschen Functionen höherer Ordnung zu Grunde gelegt hat, besondere Fälle sind.

1.

Wir resumiren zuerst die Resultate der No. 13, p. 116—118 meiner Arbeit in BORCHARDTS Journal, Band 81 [1]).

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Differentialgleichung:

$$\text{(B.)} \qquad \frac{d^2 y}{dz^2} = Py$$

ein Integral der Form

$$\text{(1.)} \qquad y = \varphi(z)^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{4}}\int\frac{dz}{\varphi(z)}}$$

habe, wo $\varphi(z)^2$ eine rationale Function von z und λ eine Constante, ist die, dass P die Form habe:

$$\text{(C.)} \qquad P = \frac{1}{4}\left(\frac{d\log\varphi}{dz}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2\log\varphi}{dz^2} - \frac{\lambda}{4\varphi^2}.$$

1) Ist λ von Null verschieden, so hat Gl. (B.) das Fundamentalsystem von Integralen:

$$\text{(D.)} \qquad y_1 = \varphi(z)^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{4}}\int\frac{dz}{\varphi(z)}}, \qquad y_2 = \varphi(z)^{\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{-\frac{\lambda}{4}}\int\frac{dz}{\varphi(z)}}.$$

2) Ist $\lambda = 0$, so sind

$$\text{(E.)} \qquad y_1 = \varphi(z)^{\frac{1}{2}}, \qquad y_2 = \varphi(z)^{\frac{1}{2}}\int\frac{dz}{\varphi(z)}$$

ein Fundamentalsystem.

21] Für die Werthe von z, für welche $\varphi(z)$ unendlich wird, ist P ebenfalls unendlich, für die Nullwerthe b von $\varphi(z)$, dagegen ist P nur dann nicht unendlich, wenn

$$\text{(F.)} \qquad \varphi'(b)^2 = -\lambda, \quad \text{wo } \varphi'(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz}.$$

1) Abh. XX, S. 32—34 dieses Bandes. Sch.

2.

Wir betrachten nunmehr den speciellen Fall:

$$\text{(G.)} \qquad R(z)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{2}R'(z)\frac{du}{dz} + H(z)u = 0,$$

wo $R(z)$, $H(z)$ ganze rationale Functionen resp. vom Grade m und $m-2$ sind und $R'(z) = \frac{dR(z)}{dz}$, und ausserdem $R(z)$ nur ungleiche Linearfactoren hat.

Wendet man die Substitution

$$\text{(1.)} \qquad u = R(z)^{-\frac{1}{4}}y$$

(s. meine oben citirte Abhandlung, p. 102 [1])) an, setzt

$$\text{(2.)} \qquad \varphi = GR^{\frac{1}{2}}$$

und berücksichtigt, dass die zu den singulären Punkten der Gleichung (G.) gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen die Wurzeln $0, \frac{1}{2}$ haben, so folgt aus No. 1, dass die Gleichung (G.) dann und nur dann ein Integral der Form

$$\text{(3.)} \qquad u = G^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{4}}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}}$$

hat, wenn G eine ganze rationale Function ist mit der Eigenschaft, dass [22
für jeden Nullwerth b von G

$$\text{(F'.)} \qquad G'(b)^2 R(b) = -\lambda, \qquad G'(z) = \frac{dG(z)}{dz},$$

und

$$\text{(C'.)} \quad H(z) = \left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d\log G}{dz}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2\log G}{dz^2} - \frac{1}{4}\frac{d\log G}{dz}\frac{d\log R}{dz} + \frac{\lambda}{4G^2R}\right]R.$$

Ist λ von Null verschieden, so ist demnach $G(z)$ durch keinen quadratischen Factor theilbar und für die Wurzeln der Gleichung $R(z) = 0$ von Null verschieden.

Ist dagegen $\lambda = 0$, so ist $G(z)$ für $z = b$ Null zweiter oder erster Ordnung, je nachdem $R(b)$ von Null verschieden oder gleich Null ist. Ist $R(b)$ von Null verschieden, so ist

$$\text{(F''.)} \qquad \frac{G^{(3)}(b)}{G^{(2)}(b)} = -\frac{3}{2}\frac{R'(b)}{R(b)}, \qquad G^{(k)}(z) = \frac{d^kG(z)}{dz^k}.$$

1) S. 17 dieses Bandes. Sch.

Ist $\lambda = 0$, so wird die quadratische Form S. 116[1]), No. 13 Gl. (1.) meiner citirten Arbeit ein Quadrat, es genügt daher $\sqrt{G}$ der Gleichung (G.).

3.

Nach S. 129[2]), No. 21 meiner citirten Arbeit genügt $G(z)$ unter allen Umständen der Differentialgleichung:

$$\text{(H.)} \qquad R\frac{d^3w}{dz^3}+\frac{3}{2}R'\frac{d^2w}{dz^2}+\left[\frac{1}{2}R''+4H\right]\frac{dw}{dz}+2H'w = 0,$$

23] $$\frac{d^kR}{dz^k} = R^{(k)}, \qquad \frac{d^kH}{dz^k} = H^{(k)}.$$

Man gelangt daher auch auf folgendem Wege zur Bestimmung der Coefficienten von $H(z)$. Damit Gleichung (H.) durch eine ganze rationale Function $2n^{\text{ten}}$ Grades $G(z)$ befriedigt werde, setze man

$$G(z) = c_0+c_1z+\cdots+c_{2n}z^{2n}$$

in dieselbe ein. Es sind alsdann die $m+2n-2$ Gleichungen

$$\text{(J.)} \qquad \sum_0^m{}_i\left[(l+3-i)(l+1)\left(l+2-\frac{1}{2}i\right)p_i+(4l+8-2i)A_{i-2}\right]c_{l+2-i} = 0$$

für $l = 0, 1, 2, \ldots, m+2n-3$ zu befriedigen, wo

$$R(z) = \sum_0^m{}_i p_iz^i, \qquad H(z) = \sum_0^{m-2}{}_i A_iz^i$$

gesetzt ist. Zwischen diesen Gleichungen eliminire man die Grössen $c_0, c_1, \ldots, c_{2n}$, und erhält für die Coefficienten $A_0, A_1, \ldots, A_{m-2}$, $m-2$ Gleichungen, wodurch sie sämmtlich als Functionen eines derselben, z. B. A_0, welcher willkürlich bleibt, sich ergeben.

Soll die Gleichung (G.) durch die Function $\sqrt{G}$ befriedigt werden, so 24] tritt zu den Gleichungen (J.) noch eine Gleichung hinzu, welche ausdrückt, dass $G(z)$ durch einen quadratischen Factor theilbar wird. Oder man substituire nach No. 2 in Gleichung (G.)

$$\sqrt{G} = (c_0'+c_1'z+\cdots+c_\mu'z^\mu)\sqrt{R_1(z)},$$

[1]) S. 32 dieses Bandes. Sch.
[2]) S. 46, 47 dieses Bandes. Sch.

wo $R_1(z)$ eine ganze rationale Function ν^{ten} Grades, welche nur für die Wurzeln der Gleichung $R(z) = 0$ und für diese nur erster Ordnung verschwindet, und stelle die Bedingungsgleichungen für die Coefficienten

$$c_0', c_1', \ldots, c_\mu', \quad A_0, A_1, \ldots, A_{m-2}$$

auf. Nach der einen oder der anderen Methode ergiebt sich eine algebraische Gleichung für den im allgemeinen Falle willkürlich verbleibenden Coefficienten A_0.

4.

Ist $G(z)$ durch keinen quadratischen Factor theilbar, und für die Wurzeln der Gleichung $R(z) = 0$ von Null verschieden, so ist nach No. 2 λ von Null verschieden, und man erhält als Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (G.)

$$\text{(K.)} \qquad u_1 = G^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}}, \qquad u_2 = G^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}}.$$

Bezeichnen wir mit $b_1, b_2, \ldots, b_{2n}$ die Wurzeln der Gleichung $G(z) = 0$ und setzen

$$\text{(1.)} \qquad G'(b_i)\sqrt{R(b_i)} = \varepsilon_i\sqrt{-\lambda},$$

so ist nach No. 2 $\varepsilon_i = \pm 1$ und $\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}$ ein Abelsches Integral dritter [25 Gattung und für $z = b_i$ unendlich wie $\frac{1}{2}\varepsilon_i\log(z-b_i)$. Durch Einführung der Abelschen Functionen lassen sich daher y_1, y_2 durch Thetafunctionen mit ϱ Argumenten darstellen, wenn $m = 2\varrho+1$ oder $2\varrho+2$ ist.

Indem wir uns die Ausführung dieser Rechnung, so wie die eingehendere Untersuchung des Falles $\lambda = 0$, welcher sich auf die von Herrn Heine den Laméschen Functionen höherer Ordnung zu Grunde gelegten Differentialgleichungen bezieht, vorbehalten, beschränken wir uns gegenwärtig auf den speciellen Fall der Laméschen Differentialgleichung.

5.

Transformirt man die Gleichung (A.) durch die Substitution

$$\text{(1.)} \qquad \frac{dz}{dx} = \sqrt{R(z)}, \qquad R(z) = (1-z^2)(1-k^2z^2),$$

so erhält man als besonderen Fall der Gleichung (G.)

$$(\mathrm{G}'.)\qquad R(z)\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{2}R'(z)\frac{du}{dz}-[n(n+1)k^2z^2+h]u=0.$$

Für diesen Fall genügt der Gleichung (H.) für **jeden Werth** von h eine ganze rationale Function von z, $G(z)$, $2n^{\text{ten}}$ Grades, der Form

$$(2.)\qquad G(z)=c_0+c_1z^2+c_2z^4+\cdots+c_nz^{2n}.$$

26] Das System der Gleichungen (J.) reducirt sich nämlich in diesem Falle auf die n folgenden:

$$(\mathrm{J}'.)\qquad \begin{cases}(2l+4)(2l+3)(2l+2)c_{l+2}-(2l+2)[(4l^2+8l+4)(k^2+1)+4h]c_{l+1}\\ \qquad\qquad +(2l+1)(2l-2n)(2l+2n+2)k^2c_l=0\end{cases}$$

für $l=0,1,2,\dots,n-1$, während die Anzahl der Unbekannten $c_0,c_1,c_2,\dots,c_n$ gleich $n+1$.

Setzen wir

$$(3.)\qquad G(z)=(z^2-b_1^2)(z^2-b_2^2)\dots(z^2-b_n^2),$$

$$(4.)\qquad z=\sin\operatorname{am}x,\qquad b_i=\sin\operatorname{am}\beta_i,$$

und drücken das Integral dritter Gattung $\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}$ durch Thetafunctionen aus, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung (1.) No. 4 nach Gleichung (K.) das folgende Fundamentalsystem der Gleichung (A.)

$$(\mathrm{K}'.)\qquad \begin{cases} y_1=\prod\limits_{l=1}^{l=n}e^{-\varepsilon_l x\frac{\Theta'(\beta_l)}{\Theta(\beta_l)}}\dfrac{\mathrm{H}(x+\beta_l)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon_l)}\,\mathrm{H}(x-\beta_l)^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon_l)}}{\Theta(x)^n}\\[2ex] y_2=\prod\limits_{l=1}^{l=n}e^{+\varepsilon_l x\frac{\Theta'(\beta_l)}{\Theta(\beta_l)}}\dfrac{\mathrm{H}(x+\beta_l)^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon_l)}\,\mathrm{H}(x-\beta_l)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon_l)}}{\Theta(x)^n}.\end{cases}$$

27]

6.

Eine Ausnahme tritt nach No. 2 **dann und nur dann ein,** wenn die Gleichung (G'.) ein Integral von einer der Formen

$$(\alpha.)\qquad f_{00}=F_{00},\quad f_{10}=F_{10}\sqrt{1-z^2},\quad f_{01}=F_{01}\sqrt{1-k^2z^2},\quad f_{11}=F_{11}\sqrt{R(z)}$$

besitzt, worin $F_{\alpha\beta}$ eine ganze rationale Function von z vom Grade $n-\alpha-\beta$ bedeutet.

Setzen wir

$$F_{\alpha\beta}=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_{n-\alpha-\beta}z^{n-\alpha-\beta},$$

so liefert die Substitution der Functionen (α.) in die Gleichung (G'.) zur Bestimmung der Grössen $c_0,c_1,c_2,\dots,c_{n-\alpha-\beta}$ das System von Gleichungen

$$(\mathrm{L}.)\qquad \begin{cases}(l+2)(l+1)c_{l+2}-[(l+\alpha)^2+(l+\beta)^2k^2+h]c_l\\ \qquad +k^2(l+\alpha+\beta+n-1)(l+\alpha+\beta-n-2)c_{l-2}=0\end{cases}$$

für

$$l=0,1,2,\dots,n-\alpha-\beta+2,$$

worin α,β resp. durch die Combinationen 0, 0; 1, 0; 0, 1; 1, 1 zu ersetzen sind. Je nachdem $n-\alpha-\beta$ gerade oder ungerade, kann man die Coefficienten von c mit ungeradem oder geradem Index gleich Null wählen, und es verbleiben zur Bestimmung der übrigen $\frac{n-\alpha-\beta}{2}+1$, resp. $\frac{n-\alpha-\beta+1}{2}$ Grössen c ebenso viele Gleichungen. Setzt man die Determinante derselben gleich Null, so [28 erhält man eine algebraische Gleichung für h

$$(\mathrm{M}.)\qquad \Psi(h)=0,$$

welche im Wesentlichen mit derjenigen übereinstimmt, welche Lamé und Herr Heine als Bedingung für die Existenz ganzer Lösungen der Laméschen Differentialgleichung aufgestellt haben.

Es sei

$$(1.)\qquad n-\alpha-\beta=\mu,$$

so ist

$$(2.)\qquad F_{\alpha\beta}=(z^2-b_1^2)(z^2-b_2^2)\dots(z^2-b_{\frac{\mu}{2}}^2)$$

oder

$$(2\mathrm{a}.)\qquad F_{\alpha\beta}=z(z^2-b_1^2)(z^2-b_2^2)\dots(z^2-b_{\frac{\mu-1}{2}}^2),$$

je nachdem μ gerade oder ungerade ist, worin die Grössen b_i von den Wurzeln der Gleichung $R(z)=0$ verschieden sind.

Reducirt man das Integral $\int\frac{dz}{f_{\alpha\beta}^2\sqrt{R}}$ auf die Normalform, was am zweckmässigsten durch das bekannte Verfahren des Herrn Weierstrass geschieht (s. meine Arbeit B. 71 des Borchardtschen Journals[1]), No. 9), so ergiebt sich

[1]) Abh. VIII, Band I dieser Ausgabe, S. 241 ff. Sch.

unter Berücksichtigung der Gleichung:

$$R(b_i) f''_{\alpha\beta}(b_i) + \tfrac{1}{2} R'(b_i) f'_{\alpha\beta}(b_i) = 0,$$

dass die Integrale dritter Gattung herausfallen (vergl. HEINE: Handbuch der Kugelfunctionen, p. 241[1]).

Setzen wir nach geschehener Reduction

29] $$z = \sin\operatorname{am} x, \quad b_i = \sin\operatorname{am} \beta_i,$$

so ergeben die Gleichungen (E.), Gl. (1.) in No. 2 das folgende Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (A.)

$$(\mathrm{N.}) \begin{cases} y_1 = f_{\alpha\beta} = (\cos\operatorname{am} x)^{\alpha} (\Delta\operatorname{am} x)^{\beta} (\sin\operatorname{am} x)^{\varepsilon} \prod\limits_{1}^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}}{}_{l} \dfrac{\mathrm{H}(x+\beta_l)\,\mathrm{H}(x-\beta_l)}{\Theta(x)^{\mu-\varepsilon}}, \\ y_2 = y_1 \Big[\Big(\sigma - \tau \dfrac{J}{K}\Big) x + \sum\limits_{1}^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}}{}_{l}\, \omega_l \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x+\beta_l)\,\mathrm{H}(x-\beta_l) \\ \qquad - \varepsilon \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x) + \alpha\gamma \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}_1(x) + \beta\delta \mathrm{D}_x \log \Theta_1(x)\Big], \end{cases}$$

wo $\varepsilon = 0$ oder 1, je nachdem μ gerade oder ungerade,

$$\gamma = \frac{2}{R'(1) F^2_{\alpha\beta}(1)}, \qquad \delta = \frac{2}{kR'\left(\frac{1}{k}\right) F^2_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{k}\right)},$$

$$\sigma = -k^2 \sum_{1}^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}}{}_{l} \frac{b_l^2}{f'_{\alpha\beta}(b_l)^2 R(b_l)} + \alpha\gamma k^2 + \beta\delta,$$

$$\omega_l = -\frac{1}{R(b_l) f'_{\alpha\beta}(b_l)^2}, \qquad \tau = 2 \sum_{1}^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}}{}_{l}\, \omega_l - \varepsilon + \alpha\gamma + \beta\delta.$$

30] Man hat für α, β die Combinationen 0, 0; 1, 0; 0, 1; 1, 1 zu setzen. Natürlich ist die letzte nur für $n \geqq 2$ möglich:

Ist z. B. $n = 1$, so ergeben die Gln. (J'.)

$$G(z) = \sin^2\operatorname{am} a - z^2,$$

wenn man mit Herrn HERMITE

$$h = -1 - k^2 + k^2 \sin^2\operatorname{am} a$$

setzt. Die Gleichungen (K'.) werden:

$$y_1 = e^{-x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}} \frac{\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)}, \qquad y_2 = e^{x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}} \frac{\mathrm{H}(x-a)}{\Theta(x)}.$$

1) Zweite Auflage, Bd. I (1878), S. 386. Sch.

Nach Gleichung (L.) ist

1) für $\alpha = 0$, $\beta = 0$, die Gl. (M.): $h = -1-k^2$,

$$\mu = 1, \quad \varepsilon = 1, \quad f_{00} = F_{00} = z,$$

die Gln. (N.):

$$y_1 = \sin\operatorname{am} x, \quad y_2 = \sin\operatorname{am} x\Big[\frac{J}{K} x - \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x)\Big];$$

2) für $\alpha = 1$, $\beta = 0$, die Gl. (M.): $h = -1$,

$$\mu = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \gamma = -\frac{1}{k'^2}, \quad \sigma = -\frac{k^2}{k'^2}, \quad \tau = -\frac{1}{k'^2},$$

$$f_{10} = \sqrt{1-z^2}, \quad F_{10} = 1,$$

die Gln. (N.):

$$y_1 = \cos\operatorname{am} x, \quad y_2 = \frac{1}{k'^2} \cos\operatorname{am} x\Big[\frac{J-Kk^2}{K} x - \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}_1(x)\Big],$$ [31

3) für $\alpha = 0$, $\beta = 1$, die Gl. (M.): $h = -k^2$,

$$\mu = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \delta = \frac{1}{k'^2}, \quad \sigma = \frac{1}{k'^2}, \quad \tau = \frac{1}{k'^2};$$

die Gln. (N.):

$$y_1 = \Delta\operatorname{am} x, \quad y_2 = \frac{1}{k'^2} \Delta\operatorname{am} x\Big[\frac{K-J}{K} x + \mathrm{D}_x \log \Theta_1(x)\Big],$$

Resultate, welche mit denen des Herrn HERMITE l. c., p. 826[1]) übereinstimmen.

7.

Während für ein willkürliches h die Gleichung (A.) durch ein Fundamentalsystem von Integralen (K'.) befriedigt wird, deren logarithmische Ableitung doppelt periodisch ist, findet dieses für diejenigen besonderen Werthe von h, für welche die Gleichung (G'.) durch eine Function der Form $f_{\alpha\beta}(z)$ befriedigt wird, nicht mehr statt, wie die Gln. (N.) zeigen. Man kann dieses aber auch a priori ohne Zuhülfenahme der Integrale (N.) erkennen. Es sei nämlich $u_1 = f_{\alpha\beta}(z)$, so kann zunächst $u_2 = u_1 \int \frac{dz}{u_1^2 \sqrt{R}}$ nicht algebraisch sein. Denn da die zu den singulären Punkten der Gleichung (G'.) gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen die Wurzeln $0, \frac{1}{2}$ haben, so würde sich ein Integral u_2 ergeben der Form $u_2 = f_{\alpha'\beta'}(z)$, (s. meine Abh. B. 66 des BORCHARDTschen Journals[2]), No. 6 II), worin die Combination $\alpha'\beta'$ von der Com-

1) Hermite, Sur quelques applications etc., Paris 1885, S. 17. Sch.
2) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 159 ff. Sch.

bination $\alpha\beta$ verschieden wäre. Dieses ist aber nicht möglich, denn da die 32] zum Punkte $z=\infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Gleichung (G'.) die Wurzeln $-n$ und $n+1$ hat, und $f_{\alpha\beta}, f_{\alpha'\beta'}$ beide für $z=\infty$ unendlich n^{ter} Ordnung werden, so müsste $f_{\alpha'\beta'} = \text{const.}\, f_{\alpha\beta}$ sein.

Es seien nunmehr a, a' zwei beliebige singuläre Punkte der Gleichung (G'.), so gehört $u_1 = f_{\alpha\beta}(z)$ zu einer der Wurzeln $0, \frac{1}{2}$ der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, und es gehöre ein Integral u_2 resp. zu $\frac{1}{2}$ oder 0. Ferner sei η_1, η_2 ein zu $0, \frac{1}{2}$ resp. gehöriges auf a' bezügliches Fundamentalsystem, so ist

$$u_1 = c_{11}\eta_1 + c_{12}\eta_2, \quad u_2 = c_{21}\eta_1 + c_{22}\eta_2,$$

wo entweder $c_{11} = 0$ oder $c_{12} = 0$, weil $u_1 = f_{\alpha\beta}(z)$. Es sind aber wenigstens für irgend ein a' die Grössen c_{21}, c_{22} von Null verschieden, weil u_2 nicht algebraisch ist. Nach einem Umlaufe um a und a' gehen u_1, u_2 resp. über in

$$\frac{c_{11}c_{22}+c_{12}c_{21}}{\Delta}u_1 - \frac{2c_{11}c_{12}}{\Delta}u_2, \qquad -\frac{2c_{21}c_{22}}{\Delta}u_1 + \frac{c_{21}c_{12}+c_{11}c_{22}}{\Delta}u_2,$$

wo $\Delta = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$ von Null verschieden ist. Da c_{21}, c_{22} nicht verschwinden, so ist u_2 nicht in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten übergegangen, oder, was auf dasselbe hinaus kommt, es ist, wenn man $u_2 = f(x)$ setzt, $D_x \log f(x)$ nicht periodisch, da ein Umlauf von z um zwei singuläre Punkte der Gl. (G'.) einer Vermehrung von x um eine der Perioden gleichkommt.

Heidelberg, 15. December 1877.

ANMERKUNG.

Der Gleichmässigkeit wegen wurde von der No. 5 (S. 155) ab für den Modul des elliptischen Gebildes k statt $\varkappa$, und von S. 158 ab für das Derivationszeichen D_x statt D gesetzt.

SCH.

XXVIII.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES QUI ADMETTENT DES INTÉGRALES DONT LES DIFFÉRENTIELLES LOGARITHMIQUES SONT DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES.

Extrait d'une Lettre adressée à M. HERMITE.

(Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3e série, t. 4, 1878, p. 125—140.)

1.

Je me propose le problème de déterminer les coefficients de l'équation [125 différentielle

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_0 y = 0, \tag{1.}$$

de manière qu'elle soit satisfaite par un système fondamental d'intégrales uniformes $y_1, y_2, \ldots, y_m$, ayant la propriété qu'en posant

$$y_i = f_i(x), \tag{2.}$$

$$\begin{cases} f_i(x+2K) = \mu_i f_i(x) \\ f_i(x+2K'i) = \mu_i' f_i(x) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m) \tag{3.}$$

et que les points singuliers de l'équation différentielle soient des pôles de ses intégrales.

On voit d'abord que les quantités $\frac{1}{y_i}\frac{d^k y_i}{dx^k}$ sont des fonctions uniformes doublement périodiques aux périodes $2K$ et $2K'i$. En posant dans l'équation différentielle y_i en lieu de y et en exprimant $p_{m-1}, p_{m-2}, \ldots, p_0$ au moyen des équations en nombre m, ainsi obtenues, on obtient (voir mon Mémoire, [126

t. LXVI du Journal de M. Borchardt[1]), no. 4) ces coefficients comme fonctions des quantités $\frac{1}{y_i}\frac{d^k y_i}{dx^k}$.

Donc ces coefficients sont des fonctions uniformes, doublement périodiques aux périodes $2K$ et $2K'i$ qui ne deviennent infinies que de manière que leurs valeurs réciproques restent continues.

Comme les intégrales ne deviennent discontinues pour un point singulier a, que de manière qu'elles se transforment en fonctions holomorphes dans le voisinage de a, en les multipliant par une puissance déterminée de $x-a$, il s'ensuit (voir mon Mémoire, t. LXVI[1]), no. 4, et t. LXVIII[2]), no. 3, du Journal de M. Borchardt) qu'on a dans le voisinage de a

$$p_{m-i} = \frac{P_i}{(x-a)^i}, \tag{4.}$$

où P_i est holomorphe dans le même voisinage.

2.

Considérons en particulier l'équation différentielle du deuxième ordre

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p_1\frac{du}{dx} + p_0 u = 0; \tag{A.}$$

on a, dans le voisinage d'un point singulier a,

$$\left\{\begin{aligned} p_1 &= \frac{\alpha}{x-a} + q_1, \\ p_0 &= \frac{\beta}{(x-a)^2} + \frac{\beta'}{x-a} + q_2, \end{aligned}\right. \tag{1.}$$

où α, β, β' sont des constantes et q_1, q_2 des fonctions holomorphes dans le voisinage de a; donc les fonctions doublement périodiques p_1, p_0 ne deviennent infinies pour $x = a$ que respectivement du premier et du second ordre.

Par suite, si l'on représente p_1 selon votre méthode (Note sur la théorie des fonctions elliptiques, ajoutée à la 6e édition du Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral de Lacroix), on obtient

$$p_1 = \gamma + \textstyle\sum_k A_k \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x-a_k), \tag{2.}$$

1) Mém. VI, t. I de cette édition, p. 159 et suiv. Sch.

2) Mém. VII, t. I de cette édition, p. 205 et suiv. Sch.

où le signe Σ se rapporte à tous les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ con- [127
tenus dans un parallélogramme de périodes et où γ signifie une constante, et où, de plus,

$$\textstyle\sum_k A_k = 0. \tag{3.}$$

Il s'ensuit

$$v = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx} = e^{-\frac{1}{2}\gamma x} \textstyle\prod_k [\mathrm{H}(x-a_k)]^{-\frac{1}{2}A_k}. \tag{4.}$$

En posant

$$u = vy, \tag{5.}$$

on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Py, \tag{B.}$$

où

$$P = \frac{1}{4}p_1^2 + \frac{1}{2}\frac{dp_1}{dx} - p_0; \tag{6.}$$

donc P est aussi une fonction uniforme doublement périodique qui devient infinie dans les points singuliers au plus de l'ordre 2, et si l'équation différentielle (A.) possède un système fondamental d'intégrales

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x),$$

avec la propriété indiquée par les équations (3.), no. 1, l'équation différentielle (B.) a aussi un tel système fondamental, puisque la fonction v satisfait aux équations (3.), no. 1, en ayant égard à l'équation (3.) de ce numéro. Donc nous pouvons nous restreindre à la recherche concernant l'équation différentielle (B.).

3.

Soit $F(x)$ une fonction uniforme satisfaisant aux équations

$$\left\{\begin{aligned} F(x+2K) &= \mu F(x), \\ F(x+2K'i) &= \mu' F(x), \end{aligned}\right. \tag{1.}$$

et qui ne devient infinie que d'ordre fini, $\mathrm{D}_x \log F(x)$ est uniforme doublement périodique et ne devient infini que du premier ordre.

Par suite on a, d'après votre mode de représentation, [128

$$\mathrm{D}_x \log F(x) = \delta + \textstyle\sum_i r_i \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x-a_i), \tag{2.}$$

où le signe Σ s'étend à tous les zéros et les infinis de la fonction $F(x)$ contenus dans le parallélogramme des périodes, δ désignant une constante et

$$(3.)\qquad \textstyle\sum_i r_i = 0.$$

De l'équation (2.) il suit

$$(4.)\qquad F(x) = e^{\delta x+\delta'} \textstyle\prod_i [\mathrm{H}(x-a_i)]^{r_i},$$

où le signe Π s'étend aussi aux mêmes zéros et infinis, δ' désignant une constante. La fonction $F(x)$ étant uniforme, les exposants r sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, selon que a correspond à un zéro ou un infini.

On a, dans le voisinage de a_k,

$$(5.)\qquad \delta + \textstyle\sum_i r_i \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x-a_i) = \dfrac{r_k}{x-a_k} + \textstyle\sum'_i r_i \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(a_k - a_i) + \delta + \varphi(x),$$

où le signe $\sum'_i$ s'étend à tous les a_i, excepté a_k, $\varphi(x)$ étant une fonction holomorphe dans le voisinage de a_k et $\varphi(a_k) = 0$; donc, en posant

$$(6.)\qquad R_k = \textstyle\sum'_i r_i \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(a_k - a_i) + \delta,$$

il s'ensuit de l'équation (2.) que, dans le voisinage de a_k,

$$(7.)\qquad [\mathrm{D}_x \log F(x)]^2 = \frac{r_k^2}{(x-a_k)^2} + 2\frac{r_k R_k}{x-a_k} + \psi,$$

où ψ est holomorphe dans le voisinage de a_k.

129] On a donc, d'après votre mode de réprésentation des fonctions doublement périodiques,

$$(8.)\qquad [\mathrm{D}_x \log F(x)]^2 = \varepsilon + \textstyle\sum_i [2r_i R_i \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x-a_i) - r_i^2 \mathrm{D}_x^2 \log \mathrm{H}(x-a_i)],$$

ε étant constant. Il s'ensuit

$$(9.)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{F(x)} \mathrm{D}_x^2 F(x) = \mathrm{D}_x^2 \log F(x) + [\mathrm{D}_x \log F(x)]^2 \\ \qquad = \varepsilon + \textstyle\sum_i [2r_i R_i \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x-a_i) + (r_i - r_i^2) \mathrm{D}_x^2 \log \mathrm{H}(x-a_i)], \end{cases}$$

d'où ce théorème:

Pour que l'équation différentielle

$$(\mathrm{B.})\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = Py$$

soit satisfaite par une intégrale uniforme ayant les propriétés indiquées, il faut et il suffit que P ait la forme

$$(10.)\qquad P = \varepsilon + \textstyle\sum_i [A_i \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x-a_i) + B_i \mathrm{D}_x^2 \log \mathrm{H}(x-a_i)],$$

et

$$A_i = 2r_i R_i,\quad B_i = r_i - r_i^2,$$

r_i étant un nombre entier. On a alors

$$(11.)\qquad F(x) = e^{\delta x+\delta'} \textstyle\prod_i [\mathrm{H}(x-a_i)]^{r_i} \prod_k \mathrm{H}(x-a'_k),$$

où le signe $\prod_k$ s'étend à toutes les valeurs a'_k pour lesquelles la fonction $F(x)$ s'annule, et pour lesquelles $r_k = 1$, $R_k = 0$: donc $A_k = 0$, $B_k = 0$. Pour ces valeurs a'_k la fonction P ne devient pas infinie; en désignant leur nombre par k, on a, d'après l'équation (3.),

$$(12.)\qquad k + r_1 + r_2 + \cdots = 0,$$

où $r_1, r_2, \ldots$ appartiennent à ceux des points a pour lesquels la fonction [130 P devient infinie.

4.

En supposant maintenant que l'équation différentielle (B.) ait une intégrale y_1 de la forme (11.) du numéro précédent,

$$(1.)\qquad y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2}$$

est aussi une intégrale de la même équation. D'après le mode de représentation que vous venez de publier dans les Comptes rendus, t. LXXXVI, p. 693 [1]), on a

$$(2.)\qquad \frac{1}{y_1^2} = \textstyle\sum [Af(x-a) + A_1 \mathrm{D}_x f(x-a) + \cdots + A_r \mathrm{D}_x^r f(x-a)],$$

où le signe Σ s'étend à tous les zéros a de la fonction y_1, de manière que, d'accord avec la notation indiquée ci-dessus, y_1 devient nul de l'ordre r.

La quantité A est le coefficient de $(x-a)^{2r-1}$ dans le développement de $\frac{(x-a)^{2r}}{y_1^2}$ suivant les puissances de $x-a$.

L'intégrale y_2 se comporte dans le voisinage de a comme un logarithme, sinon $A = 0$.

[1]) Sur quelques applications etc., Paris 1885, p. 5. Sch.

Si l'on veut donc que y_2 soit aussi uniforme, on doit avoir, pour tous les zéros de y_1, $A = 0$; par suite on a

$$\frac{1}{y_1^2} = \sum [A_1 \mathrm{D}_x f(x-a) + \cdots + A_r \mathrm{D}_x^r f(x-a)]; \tag{3.}$$

donc y_2 a la forme

$$y_2 = y_1 \sum [A_1 f(x-a) + A_2 \mathrm{D}_x f(x-a) + \cdots + A_r \mathrm{D}_x^{r-1} f(x-a)], \tag{4.}$$

et elle satisfait aux équations (1.), no. 3, et de plus y_1, y_2 font un système fondamental.

5.

Application au cas de l'équation différentielle de Lamé.

En supposant que dans l'équation différentielle (B.) la fonction P ne
131] devient infinie dans le parallélogramme des périodes que pour la valeur $x = 2K'i$ et en posant

$$\varepsilon = h + n(n+1)\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}, \tag{1.}$$

$$A = 2rR = 0, \tag{2.}$$

$$B = r - r^2 = -n(n+1), \tag{3.}$$

l'équation différentielle devient, d'après une formule connue,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, x + h]\, y;$$

c'est l'équation de Lamé sous la forme que vous lui avez donnée, p. 690 des Comptes rendus[1]).

On a, dans ce cas,

$$y_1 = F(x) = \frac{e^{\delta x + \delta'} \mathrm{H}(x-a_1')\,\mathrm{H}(x-a_2')\ldots \mathrm{H}(x-a_n')}{\Theta^n(x)}, \tag{4.}$$

les quantités $a_1', a_2', \ldots$ dépendant essentiellement de la valeur de h.

Pour le cas spécial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (2k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, x + k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a - 1 - k^2)\, y, \tag{5.}$$

dont vous parlez dans votre Lettre du 27 octobre 1877[2]), on a $n = 1$, et

1) Sur quelques applications etc., Paris 1885, p. 1. Sch.

2) Voir p. 149 du présent volume. Sch.

$$y_1 = F(x) = e^{\delta x}\frac{\mathrm{H}(x-a')}{\Theta(x)}. \tag{6.}$$

En posant cette valeur dans l'équation différentielle (5.), on déduit $a' = a$, $\delta = \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}$, et l'on parvient ainsi à l'intégrale que vous avez trouvée,

$$y_1 = F(x) = \frac{\mathrm{H}(x-a)}{\Theta(x)} e^{x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}. \tag{7.}$$

Une autre intégrale y_2, faisant un système fondamental avec y_1, se [134
trouve par l'équation

$$y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2}. \tag{8.}$$

Pour l'évaluer on peut suivre le chemin que j'ai indiqué dans ma Lettre du 30 octobre[1]), mais on peut aussi exprimer $\frac{1}{y_1^2}$ par votre formule, p. 693 des Comptes rendus[2]).

6.

En représentant $\frac{1}{y_1^2}$ par votre formule, je vous demande de me permettre de faire auparavant une remarque à l'égard de votre fonction $f(x)$. Pour qu'on puisse représenter une fonction $F(x)$, devenant infinie pour un nombre infini de points du plan, par $f(x)$ et les dérivées de cette fonction, il faut que $f(x)$ jouisse de la même propriété.

Par là il est défendu que la quantité ω soit telle que

$$\mathrm{H}(x+\omega) = e^{\alpha x + \beta}\,\mathrm{H}(x),$$

où α, β sont des constantes. Cette équation n'est remplie que si

$$\omega = m\,2K + n\,2K'i,$$

où m et n sont des nombres entiers. Posons donc

$$\psi(x) = \frac{1}{y_1^2}, \tag{1.}$$

on a

$$\begin{cases} \psi(x+2K) = \mu\psi(x), \\ \psi(x+2K'i) = \mu'\psi(x), \end{cases} \tag{2.}$$

1) Voir Mém. XXVI, p. 145 et suiv. du présent volume. Sch.

2) Sur quelques applications etc., Paris 1885, p. 5. Sch.

où

$$(3.)\qquad \begin{cases} \mu = e^{-4K\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}, \\ \mu' = e^{-2\frac{i\pi}{K}a - 4iK'\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}. \end{cases}$$

133] Pour exprimer $\psi(x)$ par votre formule, on doit poser, p. 692 des Comptes rendus[1]),

$$(4.)\qquad \begin{cases} \lambda = -2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}, \\ \omega = 2a. \end{cases}$$

Votre formule est donc applicable pour notre cas, excepté pour les valeurs de a que voici

$$(5.)\qquad a = mK + nK'i \quad (m, n \text{ nombres entiers}),$$

c'est-à-dire, comme $\Theta(a)$ ne doit pas être zéro, afin que $\sin\operatorname{am} a$ entrant dans l'équation différentielle reste fini pour ces valeurs de a, pour lesquelles on a $\mathrm{H}(a)\,\mathrm{H}_1(a)\,\Theta_1(a) = 0$, ou

$$(5a.)\qquad \sin\operatorname{am} a \cos\operatorname{am} a \,\Delta\operatorname{am} a = 0.$$

Mais si a n'appartient pas aux valeurs (5.), la fonction $\psi(x)$ est représentable par votre formule, et nous choisissons

$$(6.)\qquad f(x) = \frac{\mathrm{H}'(0)}{\mathrm{H}(2a)}\frac{\mathrm{H}(x+2a)}{\mathrm{H}(x)}e^{-2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}.$$

La fonction $\psi(x)$ ne devient infinie dans un parallélogramme de périodes que pour le point $x = a$, et là elle devient infinie du second ordre. Le coefficient de $x-a$ dans le développement de $\psi(x)(x-a)^2$, selon les puissances de $x-a$, s'annule; par suite on a, d'après votre formule, p. 693 des Comptes rendus[2]),

$$(7.)\qquad \psi(x) = A_1 \mathrm{D}_x f(x-a);$$

donc, à un facteur constant près,

$$(8.)\qquad y_2 = y_1\int\frac{dx}{y_1^2} = y_1 f(x-a) = \frac{\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)}e^{-\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x},$$

comme vous avez trouvé aussi.

1) Sur quelques applications etc., Paris 1885, p. 3. Sch.
2) Ibid. p. 5. Sch.

Il suit du développement précédent qu'il y a une exception, si a appar- [134
tient aux valeurs (5.), mais aussi qu'il n'y a pas d'autre exception. Cela est d'accord avec ce que j'ai indiqué dans ma Lettre précédente[1]). Dans ce cas d'exception on doit, ou procéder comme je l'ai déjà fait dans ma Lettre, ou choisir une fonction $f(x)$ par laquelle soit représentable une fonction $F(x)$ jouissant de la propriété

$$F(x+2K) = \mu F(x),$$
$$F(x+2K'i) = \mu' F(x).$$

Voici maintenant avec plus de détails les calculs relatifs à ma Lettre du 30 octobre, pour l'évaluation de l'intégrale $y_2 = y_1\int\frac{dx}{y_1^2}$.

Je pars de l'équation connue

$$(1.)\qquad \int_0^x \frac{\sin\operatorname{am} a\cos\operatorname{am} a\,\Delta\operatorname{am} a}{\sin^2\operatorname{am} a - \sin^2\operatorname{am} x}dx = -x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\mathrm{H}(a+x)}{\mathrm{H}(a-x)},$$

qui vaut pour toutes les valeurs de a, excepté les valeurs

$$(2.)\qquad a = mK + nK'i \quad (m, n \text{ nombres entiers}).$$

Par la différentiation de l'équation (1.) on obtient

$$(3.)\qquad \mathrm{D}_x\log\frac{\mathrm{H}(x-a)}{\mathrm{H}(x+a)} = -2\left[\frac{\sin\operatorname{am} a\cos\operatorname{am} a\,\Delta\operatorname{am} a}{\sin^2\operatorname{am} a - \sin^2\operatorname{am} x} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right],$$

de là

$$(4.)\qquad \mathrm{D}_x\left[\log\frac{\mathrm{H}(x-a)}{\mathrm{H}(x+a)} + 2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x\right] = -2\frac{\sin\operatorname{am} a\cos\operatorname{am} a\,\Delta\operatorname{am} a}{\sin^2\operatorname{am} a - \sin^2\operatorname{am} x}.$$

D'autre part on sait que

$$\sin^2\operatorname{am} a - \sin^2\operatorname{am} x = -\frac{\Theta^2(0)\,\mathrm{H}(x+a)\,\mathrm{H}(x-a)}{k\Theta^2(x)\,\Theta^2(a)};$$

donc l'équation (4.) devient [135

$$\mathrm{D}_x\log\left[\frac{\mathrm{H}(x-a)}{\mathrm{H}(x+a)}e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}\right] = 2k'\frac{\mathrm{H}(a)\,\mathrm{H}_1(a)\,\Theta_1(a)}{\Theta(a)\,\Theta^2(0)}\frac{\Theta^2(x)}{\mathrm{H}(x+a)\,\mathrm{H}(x-a)}.$$

Multipliant les deux membres par

$$\frac{\mathrm{H}(x-a)}{\mathrm{H}(x+a)}e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x},$$

1) Mém. XXVI, p. 145 et suiv. du présent volume. Sch.

il suit

$$\text{(5.)}\qquad D_x\left[\frac{\mathrm{H}(x-a)}{\mathrm{H}(x+a)}e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}\right] = \text{const.}\,\frac{\Theta^2(x)\,e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}}{\mathrm{H}^2(x+a)} = \frac{\text{const.}}{y_1^2}.$$

De cette équation on déduit

$$\frac{y_2}{y_1} = \int\frac{dx}{y_1^2} = \text{const.}\,\frac{\mathrm{H}(x-a)}{\mathrm{H}(x+a)}e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x},$$

par suite, à un facteur constant près,

$$\text{(6.)}\qquad y_2 = \frac{\mathrm{H}(x-a)}{\Theta(x)}e^{\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}.$$

L'équation (1.) est en défaut, si l'on attribue à la quantité a une des valeurs (2.).

Prenons $a = 0$, $a = K$, $a = K+iK'$: alors on a, à des facteurs constants près, respectivement

$$y_1 = \sin\operatorname{am} x,\quad y_1 = \cos\operatorname{am} x,\quad y_1 = \Delta\operatorname{am} x;$$

mais

$$\int\frac{dx}{\sin^2\operatorname{am} x} = \mathfrak{S}x - D_x\log\mathrm{H}(x),$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2\operatorname{am} x} = \mathfrak{S}_1x - D_x\log\mathrm{H}_1(x),$$

$$\int\frac{dx}{\Delta^2\operatorname{am} x} = \mathfrak{S}_2x - D_x\log\Theta_1(x),$$

136] $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ étant des constantes connues; donc, on a respectivement

$$y_2 = \mathfrak{S}x\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)} - \frac{\mathrm{H}'(x)}{\Theta(x)},$$

$$y_2 = \mathfrak{S}_1x\frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)} - \frac{\mathrm{H}_1'(x)}{\Theta(x)},$$

$$y_2 = \mathfrak{S}_2x\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta(x)},$$

Heidelberg, 16 novembre 1877.

A votre demande j'ajoute ici aujourd'hui un résumé bref des recherches que j'ai faites depuis que je vous adressai la lettre mentionnée dans cette Note et que j'ai publiées dans les Nouvelles de la Société royale de Göttingue (d. d. 15 décembre 1877[1]).

L'équation différentielle de Lamé et de même ces équations différentielles qui font base à la théorie des fonctions de Lamé d'ordre supérieur, introduites par M. Heine, ne sont que des cas particuliers d'une classe d'équations différentielles linéaires du second ordre, que j'ai traitées dans mon travail (Journal de M. Borchardt, t. LXXXI, p. 116—118[2]), no. 13), et que j'y ai intégrées au moyen d'intégrales elliptiques et hyperelliptiques.

Dans la Note mentionnée insérée dans les Nouvelles de la Société royale de Göttingue, après avoir résumé dans le no. 1 le résultat principal du no. 13 de mon travail du t. LXXXI du Journal de M. Borchardt[2]), je fais voir dans le no. 2, au moyen de ce résultat, que, pour que l'équation spéciale

$$\text{(A.)}\qquad R(z)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{2}R'(z)\frac{du}{dz} + H(z)u = 0,$$

où $R(z)$, $H(z)$ sont des fonctions rationnelles et entières respectivement du degré m et $m-2$, et $R'(z) = \frac{dR(z)}{dz}$, ait une intégrale de la forme

$$u = G^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}},$$

où G est une fonction rationnelle et entière et λ une constante, il faut [137 et il suffit que, pour tout zéro b de la fonction $G(z)$,

$$\text{(B.)}\qquad G'(b)^2R(b) = -\lambda$$

et

$$\text{(C.)}\quad H(z) = \left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d\log G}{dz}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{d^2\log G}{dz^2} - \frac{1}{4}\,\frac{d\log G}{dz}\,\frac{d\log R}{dz} + \frac{\lambda}{4G^2R}\right]R.$$

Si λ s'annule, $G(z)$ s'annule pour $z = b$ du premier ou du second ordre, selon que $R(b)$ est égal à zéro ou différent de zéro. Dans ce cas, si $R(b)$

---

1) Mém. XXVII, p. 151 et suiv. du présent volume. Sch.

2) Mém. XX, p. 32—34 du présent volume. Sch.

est différent de zéro, on a

$$\text{(B'.)} \qquad \frac{G'''(b)}{G''(b)} = -\frac{3}{2}\frac{R'(b)}{R(b)}.$$

Dans le no. 3 j'applique les résultats du no. 21 de mon Mémoire cité contenu dans le Journal de M. Borchardt, t. LXXXI, p. 129 [1]), desquels il suit que $G(z)$ satisfait toujours à l'équation différentielle

$$\text{(D.)} \qquad R\frac{d^3\omega}{dz^3} + \frac{3}{2}R'\frac{d^2\omega}{dz^2} + \left[\frac{1}{2}R'' + 4H\right]\frac{d\omega}{dz} + 2H'\omega = 0,$$

au moyen de laquelle je détermine les coefficients de la fonction $G(z)$, et j'établis les conditions pour que l'équation (A.) ait une intégrale de la forme $G_1(z)\sqrt{R_1(z)}$, $G_1(z)$, $R_1(z)$ étant des fonctions rationnelles et entières dont la dernière ne s'annule que du premier ordre et seulement pour les racines de l'équation $R(z) = 0$.

Ayant ainsi trouvé $G(z)$, si $G(z)$ n'a aucun facteur quadratique, l'équation (A.) a un système fondamental d'intégrales

$$\text{(E.)} \qquad u_1 = G^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}}, \qquad u_2 = G^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}}.$$

Je démontre dans le no. 4 que l'intégrale $\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}$ est une intégrale abélienne de troisième espèce devenant infinie pour $z = b_i$ comme la fonction $\pm\frac{1}{2}\log(z - b_i)$. En me réservant l'évaluation de ces intégrales au moyen des 138] fonctions Θ-abéliennes, ainsi que la considération plus approfondie du cas $\lambda = 0$ à une autre occasion, je me restreins dans les numéros suivants au cas

$$\text{(A'.)} \qquad R(z)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{2}R'(z)\frac{du}{dz} - [n(n+1)k^2z^2 + h]u = 0,$$

où

$$R(z) = (1 - z^2)(1 - k^2z^2),$$

que l'on obtient en faisant dans l'équation de Lamé

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{R(z)}.$$

En évaluant alors les intégrales (E.), je trouve, dans le no. 5, le système

1) Mém. XX, p. 46, 47 du présent volume. Sch.

fondamental d'intégrales de l'équation de Lamé

$$\text{(F.)} \qquad \begin{cases} y_1 = \prod_1^n {}_l\, e^{-\varepsilon_l x\frac{\Theta'(\beta_l)}{\Theta(\beta_l)}} \dfrac{\mathrm{H}(x+\beta_l)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon_l)}\,\mathrm{H}(x-\beta_l)^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon_l)}}{\Theta(x)^n}, \\ y_2 = \prod_1^n {}_l\, e^{+\varepsilon_l x\frac{\Theta'(\beta_l)}{\Theta(\beta_l)}} \dfrac{\mathrm{H}(x+\beta_l)^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon_l)}\,\mathrm{H}(x-\beta_l)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon_l)}}{\Theta(x)^n}, \end{cases}$$

en désignant par $b_l = \sin\mathrm{am}\,\beta_l$ l'une des racines de l'équation $G(z) = 0$ et en déterminant le signe de $\varepsilon_l = \pm 1$ par l'équation

$$G'(b_l)\sqrt{R(b_l)} = \varepsilon_l\sqrt{-\lambda}.$$

Il est remarquable que les cas d'exceptions s'offrent par la même méthode sans aucune difficulté. En effet, je démontre dans le no. 6 qu'il n'y a d'exception que quand l'équation (A'.) est satisfaite elle-même par une intégrale algébrique, c'est-à-dire pour les valeurs de h pour lesquelles on peut satisfaire au système d'équations linéaires suivantes:

$$\text{(G.)} \qquad \begin{cases} (l+2)(l+1)c_{l+2} - [(l+\alpha)^2 + (l+\beta)^2k^2 + h]c_l \\ \qquad + k^2(l+\alpha+\beta+n-1)(l+\alpha+\beta-n-2)c_{l-2} = 0, \end{cases}$$

pour

$$l = 0, 1, 2, \ldots, n-\alpha-\beta+2,$$

où α, β désignent l'un ou l'autre des nombres 0, 1. Selon que $n-\alpha-\beta$ [139 est pair ou impair, on peut poser les coefficients d'indices impairs ou pairs égaux à zéro, et l'élimination des quantités c restantes conduit à une équation algébrique

$$\text{(H.)} \qquad \Psi(h) = 0,$$

pour déterminer la quantité h. Les intégrales de l'équation de Lamé se trouvent dans ce cas comme voici:

En posant $n-\alpha-\beta = \mu$, on a

$$\text{(I.)} \qquad \begin{cases} y_1 = (\cos\mathrm{am}\,x)^\alpha(\Delta\,\mathrm{am}\,x)^\beta(\sin\mathrm{am}\,x)^\varepsilon \prod_1^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}} {}_l\, \dfrac{\mathrm{H}(x+\beta_l)\,\mathrm{H}(x-\beta_l)}{\Theta(x)^{\mu-\varepsilon}}, \\ y_2 = y_1\Big[\Big(\sigma - \tau\dfrac{J}{K}\Big)x + \sum_1^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}} {}_l\, \omega_l \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x+\beta_l)\,\mathrm{H}(x-\beta_l) \\ \qquad - \varepsilon\mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x) + \alpha\gamma\mathrm{D}_x \log \mathrm{H}_1(x) + \beta\delta\mathrm{D}_x \log \Theta_1(x)\Big], \end{cases}$$

$b = \sin \operatorname{am} \beta_i$ étant racine de l'équation $F_{\alpha\beta}(z) = 0$, où $F_{\alpha\beta}(z)$ est une fonction rationnelle et entière du degré μ, dont les coefficients se déterminent par l'équation (G.).

Dans les formules (I.) on a $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$, selon que μ est pair ou impair, et

$$\gamma = \frac{2}{R'(1)F^2_{\alpha\beta}(1)}, \qquad \delta = \frac{2}{kR'\left(\frac{1}{k}\right)F^2_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{k}\right)},$$

$$\sigma = -k^2 \sum_{1}^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}} {}_i \frac{b_i^2}{f'_{\alpha\beta}(b_i)^2 R(b_i)} + \alpha\gamma k^2 + \beta\delta,$$

$$\omega_i = -\frac{1}{R(b_i)f'_{\alpha\beta}(b_i)^2}, \qquad \tau = 2\sum_{1}^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}} {}_i \omega_i - \varepsilon + \alpha\gamma + \beta\delta,$$

$$f_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}(\sqrt{1-z^2})^{\alpha}(\sqrt{1-k^2z^2})^{\beta}.$$

140] Enfin j'explique, dans le no. 7, aussi par une autre méthode, en m'appuyant seulement sur les principes de la théorie des équations différentielles linéaires, sans recourir à l'évaluation des intégrales, pourquoi l'exception doit se présenter dans le cas indiqué.

Heidelberg, 31. janvier 1878.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 161, Gl. (1.) dreimal 1 statt i,
„ „, Zeile 3 v. u. $2K'i$ statt $2Ki'$,
„ „, „ 2 v. u. p_0 statt p,
„ „, letzte Zeile en statt au,
„ 162, Gl. (4.) p_{m-i} statt p_i,
„ „, Gln. (1.) und Zeile 6 v. u. p_0 statt p_2,
„ „, Zeile 5 v. u. zweimal du statt de,
„ „, Gl. (2.) } a_k statt a,
„ 163, Gl. (4.) }
„ „, Zeile 14 v. u. y_2 statt y_1,
„ „, „ 13 v. u. les équations statt l'équation,
„ „, „ 11 v. u. à l'équation statt aux équations,
„ 164, Gl. (7.) $\frac{r_k^2}{(x-a_k)^2}$ statt $\frac{r_k^2}{(x-a)^2}$,
„ „, Gl. (9.) hinter $\frac{1}{F(x)} D_x^2 F(x)$ $=$ statt $-$,
„ 165, Zeile 13 v. u. En supposant statt Supposant,
„ „, Gl. (1.) $y_1 \int \frac{dx}{y_1^2}$ statt $\int \frac{dx}{y_1^2}$,
„ „, Zeile 6 v. u. y_1 statt y,
„ „, „ 5 v. u. notation statt signification und nul statt zéro,
„ 166, No. 4, Gl. (4.) D_x^{r-1} statt D^{r-i},
„ „, Zeile 11 des périodes statt de période,
„ „, No. 5, Gl. (4.) im Nenner $\Theta^n(x)$ statt $\Theta(x)$,
„ „, Gl. (5.) 1 statt i,
„ 168, Zeile 13 ou statt où,
„ „, „ 9 v. u. périodes statt période,
„ „, „ 8 v. u. du statt de,
„ 169, „ 2 aux valeurs statt à la valeur,
„ „, Gl. (1.) $\Delta \operatorname{am} \alpha$ statt $\Delta \operatorname{am} u$,

S. 169, Gl. (3.) $\cos \operatorname{am} a$, $\Delta \operatorname{am} a$ statt $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$,
" " , Zeile 5 v. u. k statt K,
" " , " 3 v. u. $2k'$ statt $-k_1$,
" 171, " 2 v. u. zweimal du statt de,
" 173, " 4 b_l, β_l statt b_i, β_i,
" " , Gl. (H.) Ψ statt ψ,
" " , Gl. (I.) J statt I,
" 174, Zeile 1 $\sin \operatorname{am} \beta_i$ statt $\sin \beta_i$;
" 166, No. 4, Gl. (4.) wurde nach y_1 das $\sum$-Zeichen und
" 169, Gl. (4.) die eckige Klammer auf der linken Seite eingefügt. Sch.

XXIX.

SELBSTANZEIGE DER ABHANDLUNG: »SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, AUXQUELLES SATISFONT LES MODULES DE PÉRIODICITÉ DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES DES DEUX PREMIÈRES ESPÈCES. EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE À M. HERMITE. (BORCHARDTS JOURNAL DER MATHEMATIK, BD. 83, S. 13[1])«.

(Repertorium für reine und angewandte Mathematik, Bd. II, 1879, S. 235—240.)

1. [235

Der Verfasser behandelt zunächst nach den Principien seiner Abhandlung (Borchardts Journal, Bd. 71, p. 91[2]) die beiden Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung als Functionen eines unbeschränkt veränderlichen Moduls k. Diese Functionen werden als Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher sie bekanntlich genügen, definirt. Es sei nämlich

$$k^2 = \frac{1}{u}$$

und es seien

$$v_{01}, v_{02}; \quad v_{11}, v_{12}; \quad v_{\infty 1}, v_{\infty 2}$$

Fundamentalsysteme von Integralen der Differentialgleichung

$$\text{(A.)} \qquad 2u(u-1)\frac{d^2\eta}{du^2} + 2(2u-1)\frac{d\eta}{du} + \frac{1}{2}\eta = 0,$$

[1]) Abh. XXIV, S. 85 dieses Bandes. Sch.
[2]) Abh. VIII, Band I dieser Ausgabe, S. 241 ff. Sch.

welche resp. zu den singulären Punkten

$$u = 0, \quad u = 1, \quad u = \infty$$

236] gehören (im Sinne der Arbeit des Verfassers BORCHARDTS Journal, Bd. 66, p. 139[1]), so ergeben sich die folgenden gleichwerthigen Definitionen der Functionen K und K'

$$K = \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,\eta_1, \qquad K' = \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,\eta_2,$$

$$\text{(B.)} \qquad \eta_1 = -v_{12}, \qquad \eta_2 = \pi v_{11},$$

$$\text{(C.)} \qquad \eta_1 = \pi v_{\infty 1}, \qquad \eta_2 = -v_{\infty 2},$$

$$\text{(D.)} \qquad \eta_1 = \pi v_{01} + i v_{02}, \qquad \eta_2 = v_{02}.$$

Diese Relationen werden unter Zuhülfenahme der Arbeit des Verfassers BORCHARDTS Journal, Bd. 75, p. 177[2]) nach den Principien seiner Arbeiten Bd. 66 und Bd. 71 desselben Journals[3]) entwickelt. Dieselben gewähren die Möglichkeit, den Verlauf der Functionen η_1, η_2 für die ganze u-Ebene festzustellen. Es ergiebt sich danach, dass, wenn zu einem beliebigen u die Werthe η_1, η_2 gehören, die Gesammtheit der zu demselben Werthe u gehörigen Werthe resp.

$$\text{(E.)} \qquad \lambda\eta_1 + \mu i \eta_2, \quad \nu i \eta_1 + \varrho\eta_2$$

sind, wo $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ reale ganze Zahlen sind, welche der Gleichung

$$\text{(F.)} \qquad \lambda\varrho + \mu\nu = 1$$

genügen.

Für die Function

$$\mathrm{H} = \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

wird aus diesen Resultaten gefolgert, dass dieselbe für

$$u = 0, \quad u = 1, \quad u = \infty,$$

und für beliebige Wege, auf welchen u zu einem dieser Werthe gelangt, resp. die allgemeine Form:

$$\frac{\nu - \varrho}{\lambda - \mu}\, i, \quad \frac{\nu}{\lambda}\, i, \quad -\frac{\varrho}{\mu}\, i$$

1) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 179. Sch.

2) Abh. XIV, Band I dieser Ausgabe, S. 361 ff. Sch.

3) Abh. VI und VIII, Band I dieser Ausgabe, S. 159 ff. und S. 205 ff. Sch.

annimmt, demzufolge die Werthe der Function

$$q = e^{-\pi \mathrm{H}}$$

für $u = 0$ und $u = 1$ und für beliebige Wege von u einen Modul gleich der Einheit besitzen, während der Modul von q für $u = \infty$ entweder verschwindet oder der Einheit gleich wird.

Es wird hierauf nachgewiesen, dass das Vorzeichen des realen Theiles von H für einen beliebigen Werth von u von dem Wege unabhängig ist, auf welchem man dahin gelangt. Insbesondere ist der reale Theil von H für einen beliebigen Punkt je einer der Umgebungen f_0, f_1, f_∞ der drei singulären Punkte $0, 1, \infty$ positiv oder Null, also der Modul von q kleiner oder gleich der Einheit, unabhängig von dem Wege, auf welchem u zu einem dieser Punkte gelangt.

Hat k einen bestimmten Werth, und werden K und K', wie es in der Theorie der elliptischen Functionen geschieht, als bestimmte Integrale [237 gegeben, und wird

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

gesetzt, so ist bekannt, dass der Modul von q kleiner ist als Eins. Dieser Satz ist jedoch nur ein besonderer Fall des in der vorliegenden Arbeit gegebenen, insofern hier K und K' als Functionen der unbeschränkt Veränderlichen k aufgefasst werden. Der Beweis des allgemeinen Satzes enthält aber zu gleicher Zeit einen neuen Beweis dieser Thatsache der Theorie der elliptischen Functionen, welche daselbst nach RIEMANN durch die Theorie der Integrale algebraischer Functionen hergeleitet wird.

Es wird hierauf u als Function von q betrachtet, und mit Hülfe der Differentialgleichung

$$\text{(G.)} \qquad \frac{du}{dq} = -\frac{u(u-1)}{\pi^2 q}\,\eta_1^2$$

gezeigt, dass innerhalb eines um den Punkt $q = 0$ mit dem Radius gleich der Längeneinheit beschriebenen Kreises $\mathfrak{K}$ u eine eindeutige und ausser für $q = 0$, wo $u = \infty$, im Innern überall stetige Function von q ist, und keinen Werth annimmt, für welchen η_1 verschwindet. Innerhalb $\mathfrak{K}$ gilt die

Gleichung

$$\frac{1}{u} = 16q + q^2\varphi(q), \tag{1.}$$

wo $\varphi(q)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von q fortschreitende Reihe darstellt.

Es ergiebt sich weiter die folgende merkwürdige Eigenschaft dieser Function. Wenn q von $q = 0$ ausgehend einen beliebigen Radius des Kreises $\mathfrak{K}$ durchläuft, so geht u von $u = \infty$ aus und gelangt schliesslich zu einem der Werthe $u = 0$, $u = 1$ gleichzeitig, wenn q die Peripherie von $\mathfrak{K}$ erreicht.

Hieraus wird gefolgert, dass eine stetige Fortsetzung des Integrals der Differentialgleichung (G.), welches für $q = 0$ unendlich wird, über die Peripherie von $\mathfrak{K}$ hinaus nicht möglich ist, und nachgewiesen, dass jedem endlichen oder unendlich grossen Werthe von u Werthe von q innerhalb $\mathfrak{K}$ oder auf der Peripherie von $\mathfrak{K}$ entsprechen.

Wird auch η_1 als Function von q aufgefasst, so ergiebt sich, dass η_1^2 innerhalb $\mathfrak{K}$ eine eindeutige, endliche und stetige Function von q ist, und dass η_1 von Null verschieden ist für alle Punkte des Innern von $\mathfrak{K}$ mit Ausnahme von $q = 0$, dagegen unendlich für jeden Punkt der Peripherie von $\mathfrak{K}$, was auch so ausgedrückt werden kann, dass η_1 als Function von u nur für
238] $u = \infty$ verschwindet und für $u = 0$, $u = 1$ unendlich wird, für jeden Weg auf welchem u zu einem dieser Punkte gelangt ist.

Aus der Gleichung (1.) lässt sich der bekannte Ausdruck

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \frac{(1+q^2)(1+q^4)\cdots}{(1+q)(1+q^3)\cdots} \tag{2.}$$

(Jacobi, Fundamenta p. 89[1]) herleiten.

Herr Hermite macht an dieser Stelle die folgende Anmerkung: N'y aurait-il point lieu d'observer qu'en faisant

$$\varkappa^2 = f(\mathrm{H})$$

il résulte de votre analyse que toutes les solutions de l'équation

$$f(\mathrm{H}) = f(\mathrm{H}_0)$$

[1]) Jacobis Werke, Bd. I (1881), S. 146. Sch.

sont données par la formule

$$\mathrm{H} = \frac{\nu i + \varrho \mathrm{H}_0}{\lambda + \mu i \mathrm{H}_0},$$

en insistant sur l'extrême importance de ce résultat, pour la détermination des modules singuliers de M. Kronecker, et en remarquant que les belles découvertes de l'illustre géomètre, sur les applications de la théorie des fonctions elliptiques à l'arithmétique, paraissent reposer essentiellement sur cette proposition, dont la démonstration n'avait pas encore été donnée?

Es werden ferner zwei Wege angegeben, um den Ausdruck von η_1 als Function von q gültig innerhalb $\mathfrak{K}$ herzuleiten. Es ergiebt sich hierbei die Gleichung

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots \tag{3.}$$

(Jacobi, Fundamenta p. 184[1]).

2.

Die beiden Perioden des elliptischen Integrals zweiter Gattung werden alsdann als Functionen der unbeschränkt veränderlichen Grösse k durch Vermittelung der bereits in ihrem Verhalten als Functionen von u erforschten Functionen η_1, η_2 definirt. Es ergiebt sich nämlich, wenn man setzt

$$J = \frac{1}{2\sqrt{u}}\zeta_1, \qquad J' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\zeta_2,$$

$$\left\{\begin{aligned} \zeta_1 &= 2\psi(u)\frac{d\eta_1}{du} + u\eta_1, \\ \zeta_2 &= 2\psi(u)\frac{d\eta_2}{du} + u\eta_2, \\ \psi(u) &= u(u-1), \end{aligned}\right. \tag{H.}$$

Gleichungen, aus welchen sich unmittelbar die Legendresche Relation

$$KJ' - K'J = \frac{\pi}{2}$$

ergiebt.

Die Function $q\zeta_1^2$ von q ist innerhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ eindeutig und continuirlich.

[1]) Jacobis Werke, Bd. I (1881), S. 235. Sch.

239] Die Functionen ζ_1, ζ_2 bilden ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung

$$\text{(I.)} \qquad 2u(u-1)\frac{d^2\zeta}{du^2} + 2u\frac{d\zeta}{du} - \frac{1}{2}\zeta = 0$$

(s. die bereits citirte Abhandlung Bd. 71, p. 91 [1])).

Sind wiederum

$$w_{01},\ w_{02};\quad w_{11},\ w_{12};\quad w_{\infty 1},\ w_{\infty 2}$$

resp. die zu den singulären Punkten

$$u = 0,\quad u = 1,\quad u = \infty$$

gehörigen Fundamentalsysteme von Integralen derselben, so ergiebt sich

$$\text{(K.)} \qquad \begin{cases} \zeta_1 = \pi w_{01} + i w_{02}, & \zeta_2 = w_{02}, \\ \zeta_1 = -w_{12}, & \zeta_2 = \pi w_{11}, \\ \zeta_1 = \pi w_{\infty 1}, & \zeta_2 = -w_{\infty 2} \end{cases}$$

und für $u = 0$

$$\zeta_1 = 2i,\quad \zeta_2 = 2,$$

für $u = 1$

$$\lim \zeta_1 = -2 + 4\log 2 - \lim\log(u-1),\quad \zeta_2 = \pi,$$

für $u = \infty$

$$\zeta_1 = 0,\quad \zeta_2 = \infty.$$

Es wird hierauf

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = Z,\quad e^{-\pi Z} = s$$

gesetzt.

Bedeutet alsdann Z_0 einen der Werthe von Z für ein beliebiges u, so sind die den verschiedenen Wegen von u entsprechenden Werthe von Z in der Form

$$\frac{\lambda + \mu i Z_0}{\nu i + \varrho Z_0}$$

enthalten. Insbesondere ist für $u = 0$

$$Z = -\frac{\lambda - \mu}{\nu + \varrho} i,$$

für $u = 1$

$$Z = \frac{\mu}{\varrho} i$$

1) Abh. VIII, Band I dieser Ausgabe, S. 241 ff. Sch.

oder gleich einer Zahl, deren reeller Theil positiv und unendlich ist, endlich für $u = \infty$

$$Z = -\frac{\lambda}{\nu} i,$$

so dass die Moduln aller Werthe von s für $u = 0, 1, \infty$ der Einheit gleich werden, den Werth $s = 0$ für $u = 1$ ausgenommen.

Es wird hierauf gezeigt, dass der Modul von s in einem Punkte der Umgebung sowohl von $u = 0$ als von $u = \infty$ bald grösser bald kleiner als die Einheit werden kann, je nach dem Wege, auf welchem u zu einem dieser Punkte gelangt. Dagegen für die Punkte in der Umgebung von $u = 1$ ist der Modul von s für einen beliebigen Weg von u kleiner als die Einheit.

Es ergiebt sich analog der Gleichung (G.)

$$\text{(G}'\text{.)} \qquad \frac{du}{ds} = \frac{(u-1)\zeta_2^2}{\pi^2 s}.$$

Ähnlich wie u als Function von q behandelt wurde, wird jetzt u als [240 Function von s untersucht. Diese Function erweist sich als eindeutig und stetig innerhalb eines mit dem Radius Eins um $s = 0$ beschriebenen Kreises $\mathfrak{K}$. Für keinen Werth innerhalb $\mathfrak{K}$ erlangt u einen Werth, für welchen ζ_2 verschwindet.

Die der Gleichung (1.) analoge Gleichung

$$\text{(1}^1\text{.)} \qquad u - 1 = e^{4\log 2 - 2} s + s^2 h(s)$$

stellt u als Function von s innerhalb $\mathfrak{K}$ dar, wo $h(s)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von s fortschreitende Reihe bedeutet.

Ähnlich wie für die Function H ergiebt sich, dass das Vorzeichen des realen Theiles von Z für einen beliebigen Werth von u unabhängig ist von den Umläufen, welche u um die Punkte

$$u = 0,\quad u = 1,\quad u = \infty$$

vollzogen hat, wenn es zu jenem Werthe gelangt.

Die durch die Gleichung

$$e^{-\pi Z} = s$$

definirte Function $u-1$ von s, welche für $s = 0$ verschwindet, und innerhalb $\mathfrak{K}$ durch die Gleichung (1^1.) dargestellt wird, kann auf stetige Weise über die

Peripherie von $\mathfrak{K}$ hinaus fortgesetzt werden. Die Werthe von u, welche den Werthen von s innerhalb $\mathfrak{K}$ entsprechen, erschöpfen nicht die ganze u-Ebene. Setzt man u über die Peripherie hinaus stetig fort, und verbleibt alsdann im Äusseren von $\mathfrak{K}$, so ist u eindeutig und stetig innerhalb eines Theiles der s-Ebene, welcher zwischen der Peripherie von $\mathfrak{K}$ und derjenigen eines concentrischen Kreises enthalten ist, dessen Radius einen beliebigen die Einheit überschreitenden Werth hat.

Heidelberg. L. Fuchs.

ANMERKUNG.

In Bezug auf die S. 180, Zeile 6–9 enthaltene Angabe vergl. die Anmerkung zu der Abh. XXIV, S. 114 ff. dieses Bandes.

Sch.

XXX.

ÜBER EINE KLASSE VON FUNCTIONEN MEHRERER VARIABELN, WELCHE DURCH UMKEHRUNG DER INTEGRALE VON LÖSUNGEN DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT RATIONALEN COEFFICIENTEN ENTSTEHEN.

(Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.-A.-Universität, Göttingen 1880, Nr. 3, 25. Februar 1880, Sitzung am 7. Februar; S. 170–176.)

Der königlichen Societät beehre ich mich von dem Inhalt einer Ar- [170 beit Kenntniss zu geben, welche ich zu veröffentlichen im Begriffe bin.

Gleich wie diejenigen Functionen mehrerer Variabeln, welche man Abel-sche Functionen nennt, den Integralen algebraischer Functionen ihre Entstehung verdanken, indem man nach dem Vorgange von Jacobi die oberen Grenzen von p Integralen einer geeigneten algebraischen Function als Function von der Summe dieser Integrale und von $p-1$ anderen ähnlich gebildeten Summen auffasst, ebenso entsteht, wie ich in dieser Arbeit zeige, eine neue Klasse von Functionen mehrerer Variabeln, wenn man die Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten zu Grunde legt.

Ich habe mir zunächst die Aufgabe gestellt, die Beschaffenheit der Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung zu untersuchen, wenn durch die m Gleichungen

$$\sum_1^m{}_i \int_{\zeta_i}^{z_i} f_a(z)\,dz = u_a, \qquad (a = 1, 2, \ldots, m)$$

wo $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ Constanten, $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ ein Fundamentalsystem [171 von Lösungen der Differentialgleichung bedeutet, $z_1, z_2, \ldots, z_m$ als analytische Functionen der Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ definirt werden sollen.

Ich habe diese Aufgabe für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung durchgeführt, und bin zu den folgenden Resultaten gekommen.

1.

Es sei die gegebene Differentialgleichung

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + P\frac{dy}{dz} + Qy = 0,$$

worin P, Q rationale Functionen von z; $f(z)$, $\varphi(z)$ sei ein willkürliches Fundamentalsystem von Lösungen dieser Gleichung.

Es mögen z_1, z_2 als Functionen der Variabeln u_1, u_2 durch die Gleichungen

$$\text{(B.)} \qquad \begin{cases} \int_{\zeta_1}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} f(z)\,dz = u_1, \\ \int_{\zeta_1}^{z_1} \varphi(z)\,dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} \varphi(z)\,dz = u_2 \end{cases}$$

definirt werden.

Sind z_1, z_2 analytische Functionen von u_1, u_2, und setzen wir

$$z_1 = F_1(u_1, u_2), \quad z_2 = F_2(u_1, u_2),$$

so ergiebt sich zunächst die folgende Eigenschaft dieser Functionen

172] $$\text{(C.)} \qquad \begin{cases} F_1[\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \gamma_1 c,\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \gamma_2 c] = F_1(u_1, u_2), \\ F_2[\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \gamma_1 c,\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \gamma_2 c] = F_2(u_1, u_2), \end{cases}$$

worin c eine Constante, $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ die Elemente einer Substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

bedeuten, welche auf $f(z)$, $\varphi(z)$ durch einen Umlauf der Variablen z ausgeübt wird, und γ_1, γ_2 bestimmte diesem Umlaufe zugehörige Grössen sind.

Die Functionen F_1, F_2 nehmen ausserdem im Allgemeinen für noch unzählig viele andere Werthsysteme u_1, u_2 dieselben Werthe wieder an.

2.

Ist a_i ein singulärer Punkt der Gleichung (A.), sind $r_1^{(i)}, r_2^{(i)}$ die Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, sind ferner s_1, s_2 die Wurzeln der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, so bestimme ich zunächst diese Wurzeln so, dass wenn u_1, u_2 Werthe erreichen, für welche von den Werthen a, b die resp. die Grössen z_1, z_2, annehmen, entweder einer mit einem singulären Punkte coincidirt, oder beide mit zwei von einander verschiedenen singulären Punkten, ohne dass jedoch die Gleichung

$$\text{(D.)} \qquad \frac{f(z_2)}{\varphi(z_2)} - \frac{f(z_1)}{\varphi(z_1)} = 0$$

durch $z_1 = a$, $z_2 = b$ befriedigt wird, die Ableitungen $\frac{\partial z_\alpha}{\partial u_i}$ in der Umge- [173
bung von $z_1 = a$, $z_2 = b$ holomorphe Functionen von z_1, z_2 sind.

Hierbei ist der unendlich ferne Punkt unter die singulären Punkte mit inbegriffen.

Die Bestimmung soll überdiess so getroffen werden, dass für endliche Werthsysteme u_1, u_2 die angegebenen Werthe von z_1, z_2 auch erreichbar sind.

Es ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass

$$\text{(E.)} \qquad \begin{cases} r_1^{(i)} = -1 + \frac{1}{n_i}, \quad r_2^{(i)} = -1 + \frac{k_i}{n_i}, \quad k_i > 1, \quad k_i, n_i \text{ ganze positive Zahlen;} \\ s_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad s_2 = 1 + \frac{k}{n}, \quad k > 1, \quad k, n \text{ ganze positive Zahlen.} \end{cases}$$

Ich zeige alsdann, dass die Grössen $r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, s_1, s_2$ weiter so bestimmt werden können, dass durch die Gleichung

$$\text{(F.)} \qquad \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \zeta$$

z als eindeutige Function von ζ definirt wird, und demnach die Gleichung (D.) nur für $z_2 = z_1$ befriedigt werden kann. Es ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass entweder

$$r_2^{(i)} = r_1^{(i)} + 1$$

oder [174

$$k_i = 2$$

und entweder $s_2 = s_1 + 1$ oder

$$s_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad s_2 = 1 + \frac{2}{n},$$

mit dem Hinzufügen, dass die Entwickelung eines Integrals der Gleichung (A.) in der Umgebung eines singulären Punktes keine Logarithmen enthalte.

Ich beweise hierauf, dass wenn

$$(\mathrm{G.})\quad \begin{cases} r_1^{(i)} = -1+\dfrac{1}{n_i}, \quad r_2^{(i)} = -1+\dfrac{2}{n_i} \quad \text{oder} \quad r_1^{(i)} = -\dfrac{1}{2}, \quad r_2^{(i)} = +\dfrac{1}{2}, \\[2ex] s_1 = \dfrac{3}{2} \quad \text{und} \quad s_2 = \dfrac{5}{2} \quad \text{oder} \quad s_1 = 1+\dfrac{1}{n}, \quad s_2 = 1+\dfrac{2}{n} \end{cases}$$

mit dem Hinzufügen, dass die Entwickelung eines Integrals der Gleichung (A.) in der Umgebung eines singulären Punktes keine Logarithmen enthält, z_1, z_2 Wurzeln einer quadratischen Gleichung sind, deren Coefficienten eindeutige analytische Functionen von u_1, u_2.

175] 3.

Es wird hierauf nachgewiesen, dass die Anzahl ϱ der endlichen singulären Punkte der Gleichung (A.) nicht grösser sein kann als sechs, wenn die Bedingungen (G.) erfüllt sein sollen.

Ich hebe alsdann das Beispiel

$$\varrho = 6, \quad r_1^{(i)} = -\tfrac{1}{2}, \quad r_2^{(i)} = \tfrac{1}{2}$$

hervor und zeige, dass in diesem Falle die Gleichung (A.) durch ein Fundamentalsystem

$$y_1 = \frac{g(z)}{\sqrt{R(z)}}, \qquad y_2 = \frac{h(z)}{\sqrt{R(z)}},$$

wo

$$R(z) = (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_6),$$

$g(z)$, $h(z)$ ganze rationale Functionen von nicht höherem als dem ersten Grade, befriedigt wird. In diesem Falle coincidiren die Functionen $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$ mit den hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

Hierauf weise ich nach, dass im Allgemeinen die Gleichung (A.) unter den Bedingungen (G.) nicht algebraisch integrirbar sei, und demgemäss im Allgemeinen unsere Functionen $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$ von den Abelschen Functionen verschieden sind.

Ich wähle hierzu das mit den Bedingungen (G.) verträgliche Beispiel:

Anzahl der endlichen singulären Punkte $\varrho = 2$,

$$r_1^{(1)} = -\tfrac{2}{3}, \quad r_2^{(1)} = -\tfrac{1}{3}, \quad r_1^{(2)} = -\tfrac{5}{6}, \quad r_2^{(2)} = -\tfrac{4}{6}, \quad s_1 = \tfrac{3}{2}, \quad s_2 = 2$$

und beweise, dass das allgemeine Integral der Gleichung (A.) in diesem [176
Falle nicht algebraisch ist.

Zum Schluss bemerken wir, dass die Gleichungen (B.) durch die eindeutige, im Allgemeinen nicht rationale Substitution (F.) unter Voraussetzung der Bedingungen (G.) in ähnliche Gleichungen transformirt werden, in welchen $f(z)$ und $\varphi(z)$ durch Quadratwurzeln eindeutiger im Allgemeinen nicht rationaler Functionen von ζ ersetzt werden, während ζ an die Stelle von z als Integrationsvariable eintritt.

Heidelberg, 4. Februar 1880.

ANMERKUNG.

Die in dem einleitenden Satze S. 185 erwähnte Arbeit, von welcher die vorstehende Note einen Auszug giebt, ist die folgende Abh. XXXI; auf die Verallgemeinerung des Jacobischen Umkehrungsproblems beziehen sich ferner noch die Abhandlungen XXXII–XXXVI, XXXVIII, XLI, XLIX, L und LI dieses Bandes. Vergl. im übrigen die Anmerkungen zu den Abhandlungen XXXI und XXXIV dieses Bandes.

Sch.

XXXI.

ÜBER EINE KLASSE VON FUNCTIONEN MEHRERER VARIABELN, WELCHE DURCH UMKEHRUNG DER INTEGRALE VON LÖSUNGEN DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT RATIONALEN COEFFICIENTEN ENTSTEHEN.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 89, 1880, S. 151–169.)

Gleichwie diejenigen Functionen mehrerer Variabeln, welche man [151 Abelsche Functionen nennt, den Integralen algebraischer Functionen ihre Entstehung verdanken, indem man nach dem Vorgange von Jacobi die oberen Grenzen von p Integralen einer geeigneten algebraischen Function als Functionen von der Summe dieser Integrale und von $p-1$ anderen ähnlich gebildeten Summen auffasst, ebenso entsteht, wie ich in der folgenden Arbeit zeige, eine neue Klasse von Functionen mehrerer Variabeln, wenn man die Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten zu Grunde legt.

Ich habe mir zunächst die Aufgabe gestellt, die Beschaffenheit der Lösungen einer linearen, homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung zu untersuchen, wenn durch die m Gleichungen

$$\sum_1^m{}_i \int_{\zeta_i}^{z_i} f_\alpha(z)\,dz = u_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

wo $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ Constanten, $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung bedeutet, $z_1, z_2, \ldots, z_m$ als analytische Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ definirt werden sollen.

Ich habe diese Aufgabe für Differentialgleichungen zweiter Ordnung durchgeführt, und erlaube mir in dem Folgenden die Resultate, zu welchen ich gelangt bin, mitzutheilen.

Für die weitere Behandlung der hier definirten Functionen, namentlich für ihre analytische Darstellung, werden diejenigen Relationen, welche ich in meiner in diesem Journal Bd. 76 p. 177[1]) enthaltenen Arbeit für die 152] zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen der linearen Differentialgleichungen entwickelt habe, heranzuziehen sein.

Die Resultate der vorliegenden Arbeit habe ich am 4ten gegenwärtigen Monats der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vorgelegt[2]).

1.

Es mögen die Integrale der Differentialgleichung

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^2 y}{dz^2} + P\frac{dy}{dz} + Qy = 0,$$

in welcher die Coefficienten P, Q rationale Functionen von z, für jeden singulären Punkt a die Eigenschaft haben, mit einer Potenz von $z-a$ multiplicirt, für $z = a$ weder Null noch unendlich zu werden (siehe meine Abhandlung Bd. 66 dieses Journals p. 146[3])).

Es sei

$$y_1 = f(z), \quad y_2 = \varphi(z)$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (A.), so sind

$$w_1 = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz, \qquad w_2 = \int_{z_0}^{z} \varphi(z)\,dz,$$

wo z_0 einen willkürlichen Werth bezeichnet, und eine Constante, welche wir gleich c setzen wollen, ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung

$$\text{(A'.)} \qquad \frac{d^3 w}{dz^3} + P\frac{d^2 w}{dz^2} + Q\frac{dw}{dz} = 0.$$

Eine Änderung des Integrationsweges möge w_1, w_2 resp. in w_1', w_2' überführen,

1) Abh. XVI, Band I dieser Ausgabe, S. 415 ff. Sch.
2) Siehe die vorhergehende Abh. XXX. Sch.
3) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 186, 187. Sch.

so ist

$$\text{(1.)} \qquad \begin{cases} w_1' = \alpha_{11} w_1 + \alpha_{12} w_2 + \beta_1 c, \\ w_2' = \alpha_{21} w_1 + \alpha_{22} w_2 + \beta_2 c, \end{cases}$$

wo $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}, \beta_1, \beta_2$ Constanten bedeuten.

Dieselbe Änderung des Weges führt y_1, y_2 resp. in y_1', y_2' über, wo

$$\text{(2.)} \qquad \begin{cases} y_1' = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2, \\ y_2' = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2. \end{cases}$$

Wir definiren nunmehr durch die Gleichungen

$$\text{(B.)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\zeta_1}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} f(z)\,dz = u_1, \\ \displaystyle\int_{\zeta_1}^{z_1} \varphi(z)\,dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} \varphi(z)\,dz = u_2, \end{cases}$$

worin ζ_1, ζ_2 beliebige aber feste von den singulären Punkten [153 der Gleichung (A.) verschiedene Werthe sind, und zugleich $f(\zeta_1), f(\zeta_2), \varphi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2)$ gegebene Werthe haben, z_1, z_2 als Functionen von u_1, u_2 und untersuchen, welche Eigenschaften $f(z), \varphi(z)$ haben müssen, damit z_1, z_2 bestimmte analytische Functionen der genannten Variabeln werden.

Die dieselben Werthe von z verbindenden Integrationswege denken wir uns in beiden Gleichungen übereinstimmend.

Von jedem der singulären Punkte der Gleichung (A.) $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ sei ein beliebiger Schnitt bis ins Unendliche gezogen. Der zu a_i gehörige Schnitt soll mit q_i bezeichnet werden. Die Schnitte sollen weder sich selbst noch einer den anderen schneiden. Die so zerschnittene Ebene der complexen Variabeln z soll mit T' bezeichnet werden. Überschreiten die sämmtlichen Integrale in (B.) denselben Schnitt q_i gleich oft und in gleicher Richtung, so verwandelt eine Änderung des Integrationsweges u_1 in $\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \beta_1 c$, u_2 in $\alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \beta_2 c$, wenn dieser Änderung des Weges die auf y_1, y_2 angewendete Substitution

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

entspricht. Die Grössen β_1, β_2 haben bestimmte Werthe, wenn die Änderung des Integrationsweges eine bestimmte ist.

Es sei nunmehr

$$(C.)\qquad z_1 = F_1(u_1, u_2),\quad z_2 = F_2(u_1, u_2),$$

so haben die Functionen F_1, F_2 die Eigenschaft

$$(D.)\qquad \begin{cases} F_1(\alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\beta_1 c,\ \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\beta_2 c) = F_1(u_1, u_2), \\ F_2(\alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\beta_1 c,\ \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\beta_2 c) = F_2(u_1, u_2). \end{cases}$$

Die Functionen F_1, F_2 nehmen ausserdem im Allgemeinen für noch unzählig viele andere Werthe von u_1, u_2 dieselben Werthe wieder an, wie daraus hervorgeht, dass man den Integrationsweg von ζ_2 nach z_2 oder den von ζ_1 nach z_1 ungeändert lassen kann, während man den anderen Integrationsweg variirt.

2.

Wir wollen nunmehr voraussetzen, dass die Gleichung (A.) nur wesentlich singuläre Punkte besitze, d. h. dass die Coefficienten derselben nur für solche
154] Punkte unendlich werden, in welchen das allgemeine Integral entweder unstetig wird oder eine Verzweigung erleidet. Die Wurzeln der zu diesen einzelnen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen seien reale und rationale Zahlen und ausserdem in Übereinstimmung mit meiner Abhandlung Bd. 76 dieses Journals p. 184 [1]) von einander verschieden, negativ und absolut kleiner als Eins.

Dagegen seien die Wurzeln der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von einander verschiedene, reale und rationale Zahlen, welche die positive Einheit übersteigen.

Alsdann werden in Gleichung (B.) für endliche Werthe u_1, u_2 die Grössen z_1, z_2 mit singulären Punkten der Gleichung (A.) oder mit dem unendlich fernen Punkte coincidiren können.

Die Functionen z_1, z_2 der unabhängigen Variabeln u_1, u_2, welche durch die Gleichungen (B.) definirt werden, genügen den Differentialgleichungen

$$(E.)\qquad \begin{cases} \Delta . dz_1 = \varphi(z_2)\,du_1 - f(z_2)\,du_2, \\ \Delta . dz_2 = -\varphi(z_1)\,du_1 + f(z_1)\,du_2, \end{cases}$$

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} f(z_1) & f(z_2) \\ \varphi(z_1) & \varphi(z_2) \end{vmatrix}.$$

Wenn u_1, u_2 von den Werthen $0, 0$ ausgehend auf willkürlichen von einander

1) Abh. XVI, Band I dieser Ausgabe, S. 422. Sch.

unabhängigen Wegen fortgehen, so werden nach den von den Herren Briot und Bouquet entwickelten Principien (cf. Bulletin des Sciences mathématiques t. III, p. 265, und Briot, Théorie des fonctions abéliennes, p. 79) z_1, z_2 von den Werthen ζ_1, ζ_2 ausgehend auf entsprechenden Bahnen sich stetig fortsetzen und in der Umgebung der durchlaufenen Werthe von u_1, u_2 holomorph sein, bis z_1, z_2 entweder unendlich geworden oder zu solchen Werthen gelangt sind, für welche $\frac{f(z_1)}{\Delta}, \frac{f(z_2)}{\Delta}, \frac{\varphi(z_1)}{\Delta}, \frac{\varphi(z_2)}{\Delta}$ nicht sämmtlich endliche und bestimmte Werthe erhalten.

Letzterer Umstand könnte nur eintreten, wenn entweder z_1 oder z_2 oder beide Grössen sich einem singulären Punkte der Gleichung (A.) oder dem unendlich fernen Punkte annähern, oder wenn dieselben Grössen Werthe annehmen, welche die Gleichung $\Delta = 0$ befriedigen.

3.

Es möge zunächst für $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, z_1 mit einem singulären Punkte a der Gleichung (A.), z_2 aber mit einem nicht singulären im Endlichen befindlichen Punkte b coincidiren, ohne dass jedoch $z_1 = a$, $z_2 = b$ der [155
Gleichung

$$(F.)\qquad \frac{f(z_1)}{\varphi(z_1)} = \frac{f(z_2)}{\varphi(z_2)}$$

genügen.

Wir setzen

$$z_1 - a = w_1,\quad z_2 - b = w_2,$$

alsdann ist nach meiner Abhandlung Bd. 66 dieses Journals p. 139 [1]) in der Umgebung von a

$$(1.)\qquad \begin{cases} f(z_1) = c_{11}w_1^{r_1}g_1(w_1) + c_{12}w_1^{r_2}g_2(w_1), \\ \varphi(z_1) = c_{21}w_1^{r_1}g_1(w_1) + c_{22}w_1^{r_2}g_2(w_1), \end{cases}$$

wo r_1, r_2 die Wurzeln der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, $c_{11}, \dots, c_{22}$ Constanten, $g_1(w_1), g_2(w_1)$ in der Umgebung von a holomorph und $g_1(0), g_2(0)$ von Null verschieden sind.

Dagegen hat man in der Umgebung von $z_2 = b$

$$(2.)\qquad \begin{cases} f(z_2) = \gamma_0 + \gamma_1 w_2 + \gamma_2 w_2^2 + \cdots, \\ \varphi(z_2) = \gamma_0' + \gamma_1' w_2 + \gamma_2' w_2^2 + \cdots, \end{cases}$$

wo γ_i, γ_i' bestimmte Constanten.

1) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 179. Sch.

Es wird daher

$$\Delta = w_1^{r_1} G_1(w_1, w_2) + w_1^{r_2} G_2(w_1, w_2), \tag{3.}$$

wo G_1, G_2 in der Umgebung von resp. 0, 0 holomorphe Functionen von w_1, w_2 bedeuten.

Es sei $r_2 > r_1$.

Da $z_1 = a$, $z_2 = b$ nicht der Gleichung (F.) genügen, so muss

$$G_1(0,0) = g_1(0)\,[c_{11}\gamma_0' - c_{21}\gamma_0]$$

von Null verschieden sein.

Demnach ist

$$\Delta w_1^{-r_1} \quad \text{für} \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 0$$

endlich und von Null verschieden.

Nun sei nach voriger Nummer

$$r_1 = -\frac{k_1}{n}, \qquad r_2 = -\frac{k_2}{n},$$

wo k_1, k_2, n positive ganze Zahlen bedeuten, wovon die beiden ersteren kleiner sind als n, und es werde

$$w_1 = t^n$$

156] gesetzt, so verwandeln sich die Gleichungen (E.) in

$$\left\{\begin{aligned} n t^{n-1}\Delta dt &= \varphi(w_2 + b)\,du_1 - f(w_2+b)\,du_2, \\ \Delta dw_2 &= -[c_{21} t^{-k_1} g_1(t^n) + c_{22} t^{-k_2} g_2(t^n)]\,du_1 + [c_{11} t^{-k_1} g_1(t^n) + c_{12} t^{-k_2} g_2(t^n)]\,du_2. \end{aligned}\right. \tag{4.}$$

Setzen wir demnach voraus, dass

$$k_1 \geqq n-1,$$

d. h. weil $k_1 < n$

$$k_1 = n-1, \tag{5.}$$

so sind die aus den Gleichungen (4.) sich ergebenden Werthe von

$$\frac{\partial t}{\partial u_1}, \frac{\partial t}{\partial u_2}, \frac{\partial w_2}{\partial u_1}, \frac{\partial w_2}{\partial u_2}$$

in der Umgebung von $t = 0$, $w_2 = 0$ holomorphe Functionen von t, w_2.

Es sind demnach z_1 und z_2 in der Umgebung der Werthe $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ holomorphe Functionen von u_1, u_2.

4.

Es möge nunmehr für $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$ werden, wo a_1 und a_2 von einander verschiedene singuläre Punkte der Gleichung (A.) sind, ohne dass jedoch $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$ der Gleichung (F.) genügen.

Seien r_{11}, r_{12} die Wurzeln der zu a_1 gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, r_{21}, r_{22} diejenigen der zu a_2 gehörigen, so setzen wir in Übereinstimmung mit den beiden vorigen Nummern

$$\left\{\begin{aligned} & r_{11} = -1 + \frac{1}{n_1}, \qquad r_{12} = -1 + \frac{l_1}{n_1} \\ & r_{21} = -1 + \frac{1}{n_2}, \qquad r_{22} = -1 + \frac{l_2}{n_2} \\ & l_1, l_2, n_1, n_2 \text{ positive ganze Zahlen, } l_1 > 1, \ l_2 > 1. \end{aligned}\right. \tag{1.}$$

Man hat, wenn wieder

$$z_1 - a_1 = w_1, \quad z_2 - a_2 = w_2$$

gesetzt wird, wie in Nummer 3, Gleichung (1.)

$$\left\{\begin{aligned} f(z_1) &= c_{11} w_1^{r_{11}} g_1(w_1) + c_{12} w_1^{r_{12}} g_2(w_1), \\ \varphi(z_1) &= c_{21} w_1^{r_{11}} g_1(w_1) + c_{22} w_1^{r_{12}} g_2(w_1), \\ f(z_2) &= e_{11} w_2^{r_{21}} h_1(w_2) + e_{12} w_2^{r_{22}} h_2(w_2), \\ \varphi(z_2) &= e_{21} w_2^{r_{21}} h_1(w_2) + e_{22} w_2^{r_{22}} h_2(w_2), \end{aligned}\right. \tag{2.}$$

wo $c_{11}, \ldots, c_{22}$, $e_{11}, \ldots, e_{22}$ Constanten, $g_1(w_1), g_2(w_1), h_1(w_2), h_2(w_2)$ in der Umgebung von resp. $w_1 = 0$ und $w_2 = 0$ holomorphe Functionen sind, welche resp. für $w_1 = 0$ und $w_2 = 0$ von Null verschieden werden. Es erhält [157 jetzt Δ die Form

$$\left\{\begin{aligned} \Delta = {} & w_1^{r_{11}} w_2^{r_{21}} G_{11}(w_1, w_2) + w_1^{r_{11}} w_2^{r_{22}} G_{12}(w_1, w_2) \\ & + w_1^{r_{12}} w_2^{r_{21}} G_{21}(w_1, w_2) + w_1^{r_{12}} w_2^{r_{22}} G_{22}(w_1, w_2), \end{aligned}\right. \tag{3.}$$

wo die Functionen $G_{ik}(w_1, w_2)$ in der Umgebung von $w_1 = 0$, $w_2 = 0$ holomorphe Functionen von w_1, w_2 sind.

Nun ist

$$G_{11}(0,0) = [c_{11} e_{21} - e_{11} c_{21}]\, g_1(0)\, h_1(0)$$

von Null verschieden, weil sonst die Gleichung (F.) durch $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$ befriedigt werden müsste, was unserer Voraussetzung widerspricht.

Demnach ist

$$\Delta w_1^{-r_{11}} w_2^{-r_{21}} \quad \text{für} \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 0$$

endlich und von Null verschieden.

Substituirt man in den Gleichungen (E.)

$$z_1 - a_1 = t_1^{n_1}, \quad z_2 - a_2 = t_2^{n_2},$$

so ergiebt sich demnach, dass $\frac{\partial t_1}{\partial u_1}, \frac{\partial t_1}{\partial u_2}, \frac{\partial t_2}{\partial u_1}, \frac{\partial t_2}{\partial u_2}$ in der Umgebung von $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ holomorphe Functionen von t_1, t_2 sind. Demnach sind t_1, t_2, folglich auch z_1, z_2 in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ holomorphe Functionen von u_1, u_2.

Die zu $z = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung für die Gleichung (A.) habe die Wurzeln ϱ_1, ϱ_2. Es sei

$$\varrho_1 = \frac{s_1}{n}, \qquad \varrho_2 = \frac{s_2}{n};$$

wo n, s_1, s_2 ganze positive Zahlen und zwar $s_2 > s_1 > n$ (s. No. 2).

Wir setzen nunmehr voraus

$$s_1 = n + 1. \tag{4.}$$

Unter dieser Voraussetzung wird, wie in den Fällen der vorigen und dieser Nummer, bewiesen, dass z_1, z_2 eindeutig bleiben auch in der Umgebung solcher Werthe von u_1, u_2, für die $z_1 = \infty$ und z_2 in einen singulären Punkt a der Gleichung (A.) oder in einen nicht singulären Punkt a einrückt, wenn nur nicht die Gleichung (F.) durch das Werthenpaar $z_1 = \infty$, $z_2 = a$ befriedigt wird.

Fasst man die Resultate der vorigen und dieser Nummer zusammen, so erhält man den Satz:

158] Wenn für jeden singulären Punkt der Gleichung (A.) die Wurzeln r_1, r_2 der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichung die Form haben

$$\text{(G.)} \quad \begin{cases} r_1 = -1 + \frac{1}{n}, \quad r_2 = -1 + \frac{l}{n} \quad (n \text{ und } l \text{ positive ganze Zahlen}), \\ l > 1, \end{cases}$$

während die Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden

Fundamentalgleichung die Form haben

$$\text{(G'.)} \quad \begin{cases} \varrho_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad \varrho_2 = 1 + \frac{l}{n} \quad (n, l \text{ positive ganze Zahlen}), \\ l > 1, \end{cases}$$

so sind z_1, z_2 eindeutige Functionen der Variabeln u_1, u_2 in der Umgebung aller derjenigen Werthe derselben, für welche z_1, z_2 nicht in solche Punkte einrücken, für welche die Gleichung (F.) erfüllt ist.

5.

Sind $f(z), \varphi(z)$ zwei willkürliche Integrale der Gleichung (A.), so ist in der Umgebung eines singulären Punktes a

$$\text{(1.)} \quad \begin{cases} f(z) = c_{11}(z-a)^{r_1} g_1(z) + c_{12}(z-a)^{r_2} g_2(z), \\ \varphi(z) = c_{21}(z-a)^{r_1} g_1(z) + c_{22}(z-a)^{r_2} g_2(z), \end{cases}$$

worin r_1, r_2 die Wurzeln der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, $r_2 > r_1$, $c_{11}, \ldots, c_{22}$ von Null verschiedene Constanten, $g_1(z), g_2(z)$ in der Umgebung von $z = a$ holomorphe Functionen und $g_1(a), g_2(a)$ von Null verschieden.

Es wird in der gegenwärtigen Arbeit durchweg vorausgesetzt, dass die Entwickelung eines Integrals der Gleichung (A.) in der Umgebung eines singulären Punktes oder des Unendlichkeitspunktes keine Logarithmen enthält.

Setzen wir

$$\zeta = \frac{f(z)}{\varphi(z)}, \tag{H.}$$

so ist für $z = a$, $\zeta = \frac{c_{11}}{c_{21}}$, also endlich und von Null verschieden. Ebenso ergiebt sich, dass für $z = \infty$, ζ endlich und von Null verschieden.

Es soll in Gleichung (H.) z als Function von ζ definirt werden.

Es möge einem willkürlichen Werthe ζ_0 von ζ ein Werth $z = z_0$ zugehören. Setzt man von diesem Werthepaare ausgehend die Function z in der ζ-Ebene fort, so kann dieses mit Hülfe der Gleichung

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{\varphi(z)^2}{F(z)}, \tag{J.}$$ [159

welcher z genügt (s. meine Abhandlung Bd. 66, p. 128[1])), geschehen, worin

$$F(z) = C.e^{-\int P dz}.$$

Die Grösse C hat einen constanten und bestimmten Werth, wenn $f(z), \varphi(z)$ bestimmte Lösungen der Gleichung (A.) bedeuten.

Die Werthe von ζ, für welche z aufhören könnte holomorph zu sein, sind ausser $\zeta = \infty$ solche Werthe derselben Variabeln, für welche z gleich einem singulären Punkte der Gleichung (A.) oder $z = \infty$ wird.

Es sei zunächst für $\zeta = \zeta_1$, $z = a$ ein singulärer Punkt der Gleichung (A.), r_1, r_2 die Wurzeln der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, welche den Gleichungen (G.) genüge leisten.

Nun ist (s. meine Abhandlung Bd. 66, p. 143[2])) in der Umgebung von a

$$F(z) = (z-a)^{r_1+r_2-1}\,\eta(z),$$

wo $\eta(z)$ in der Umgebung von a holomorph und für $z = a$ von Null verschieden.

Ist nun erstlich

$$r_2 = r_1 + 1, \tag{2.}$$

so folgt unmittelbar aus Gleichung (J.), dass z in der Umgebung von $\zeta = \zeta_1$ holomorph ist. Findet dagegen die Gleichung (2.) nicht statt, so substituire man in Gleichung (J.)

$$z - a = t^n.$$

Man erhält alsdann

$$n\frac{dt}{d\zeta} = t^{2-l}\frac{\psi(t)}{\eta(t)}, \tag{3.}$$

worin $\psi(t)$ und $\eta(t)$ in der Umgebung von $t = 0$ holomorph und der Quotient derselben für $t = 0$ weder Null noch unendlich.

Es sei in diesem Falle

$$l = 2. \tag{4.}$$

Alsdann ergiebt die Gleichung (3.), dass t, folglich auch z in der Umgebung von $\zeta = \zeta_1$ holomorph ist.

1) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 166. Sch.

2) Ebenda S. 183. Sch.

Es sei ferner für $\zeta = \zeta_2$, $z = \infty$ und ϱ_1, ϱ_2 die Wurzeln der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, welche der Gleichung (G'.) genüge leisten.

Es ist in der Umgebung von $z = \infty$

[160

$$\left\{\begin{aligned} f(z) &= \gamma_{11}\left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_1}\cdot h_1\left(\frac{1}{z}\right) + \gamma_{12}\left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_2}\cdot h_2\left(\frac{1}{z}\right),\\ \varphi(z) &= \gamma_{21}\left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_1}\cdot h_1\left(\frac{1}{z}\right) + \gamma_{22}\left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_2}\cdot h_2\left(\frac{1}{z}\right),\\ F(z) &= \left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_1+\varrho_2+1}\cdot \eta_1\left(\frac{1}{z}\right), \end{aligned}\right. \tag{5.}$$

wo $h_1\left(\frac{1}{z}\right), h_2\left(\frac{1}{z}\right), \eta_1\left(\frac{1}{z}\right)$ in der Umgebung von $z = \infty$ holomorph und für $z = \infty$ von Null verschieden. Die Constanten $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{22}$ sind ebenfalls nicht Null, weil $f(z), \varphi(z)$ willkürliche Lösungen der Gleichung (A.) sind.

Ist wiederum

$$\varrho_2 = \varrho_1 + 1, \tag{6.}$$

so ergiebt die Gleichung (J.) unmittelbar, dass z in der Umgebung von $\zeta = \zeta_2$ eindeutig ist. Wird dagegen die Gleichung (6.) nicht erfüllt, so substituire man in (J.)

$$z = t^{-n}$$

und erhält

$$-n\frac{df}{d\zeta} = t^{2-l}\frac{\psi_1(t)}{\eta_1(t)}, \tag{7.}$$

wo $\psi_1(t), \eta_1(t)$ in der Umgebung von $t = 0$ holomorph und für $t = 0$ von Null verschieden.

In diesem Falle sei wieder

$$l = 2. \tag{8.}$$

Alsdann ist t, folglich auch z in der Umgebung von $\zeta = \zeta_2$ eindeutig.

Es sei endlich für $\zeta = \infty$, $z = b$, so ist nach der am Anfang dieser Nummer gemachten Bemerkung b weder einer der singulären Punkte der Gleichung (A.) noch unendlich. Für $z = b$ ist aber $\varphi(z) = 0$.

Es sei in der Umgebung von $z = b$

$$\left\{\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1(z-b) + \cdots,\\ \varphi(z) &= a_1'(z-b) + \cdots, \end{aligned}\right. \tag{9.}$$

so erhält man

$$(10.)\qquad (z-b)\frac{a_1'+a_2'(z-b)+\cdots}{a_0+a_1(z-b)+\cdots} = \frac{1}{\zeta}.$$

Da nun $f(z)$ und $\varphi(z)$ nicht gleichzeitig verschwinden, weil b nicht singulärer Punkt der Gleichung (A.) ist, so folgt, dass a_0 von Null verschieden ist. Es kann aber auch nicht a_1' verschwinden, weil sich sonst aus Gleichung (A.) ergeben würde, dass $\varphi(z)$ identisch Null ist. Demnach erhält Gleichung
161] (10.) die Form

$$(10a.)\qquad \alpha_1(z-b)+\alpha_2(z-b)^2+\cdots = \frac{1}{\zeta},$$

wo $\alpha_1 = \frac{a_1'}{a_0}$ endlich und von Null verschieden. Es folgt nun aus dieser Gleichung auf bekannte Weise, dass z eine holomorphe Function von $\frac{1}{\zeta}$ in der Umgebung von $\zeta = \infty$ ist.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich also der Satz:

I. Genügen für jeden singulären Punkt die Grössen r_1, r_2 den Bedingungen

$$(K.)\quad \left\{\begin{array}{l} r_1 = -1+\frac{1}{n} \quad \text{und entweder} \quad r_2 = r_1+1 \quad \text{oder} \quad r_2 = -1+\frac{2}{n} \\ \text{und für den unendlich fernen Punkt} \\ \varrho_1 = 1+\frac{1}{n} \quad \text{und entweder} \quad \varrho_2 = \varrho_1+1 \quad \text{oder} \quad \varrho_2 = 1+\frac{2}{n}, \end{array}\right.$$

so ist die durch die Gleichung (H.) definirte Function z von ζ für alle Werthe von ζ meromorph.

Eine unmittelbare Folgerung dieses Satzes ist das Corollar:

Die Function $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ erhält nicht ein und denselben Werth für verschiedene Werthe von z.

Wir setzen jetzt voraus, dass für den Fall, dass die Gleichung (2.) oder die Gleichung (6.) besteht, der Nenner von r_1, resp. der Nenner von ϱ_1 gleich 2 sei.

Alsdann ist auch die Function $F(z)$ eine eindeutige Function von ζ.

Es sei nämlich $\zeta = \zeta'$ ein Werth, für welchen z mit keinem der singulären Punkte der Gleichung (A.) coincidirt oder unendlich wird, so ist selbstverständlich $F(z)$ in der Umgebung von $\zeta = \zeta'$ eindeutig.

Es sei nunmehr $\zeta = \zeta_1$ ein Werth, für welchen z mit einem singulären Punkte a coincidirt, so ist nach dem Obigen

$$F(z) = (z-a)^{r_1+r_2-1}\eta(z),$$

wo $\eta(z)$ in der Umgebung von $z = a$ holomorph und für $z = a$ von Null verschieden ist.

Findet nun Gleichung (2.) statt, so ist nach der eben gemachten Voraussetzung

$$r_1+r_2-1 = 2r_1 = \text{einer ganzen Zahl},$$

es ist also $F(z)$ ebenso wie z in der Umgebung von $\zeta = \zeta_1$ eindeutig.

Findet dagegen die Gleichung (4.) statt, so ist [162

$$r_2+r_1-1 = -3+\frac{3}{n}.$$

Es ist demnach

$$F(z) = t^{3-3n}\eta(a+t^n).$$

Nach dem Obigen ist t, folglich auch $F(z)$ in der Umgebung von $\zeta = \zeta_1$ eindeutig.

Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass $F(z)$ in der Umgebung eines solchen Werthes von ζ eindeutig ist, für welchen z unendlich wird.

Da oben nachgewiesen worden, dass z eine eindeutige Function von ζ ist, so folgt dasselbe für die Ableitung $\frac{dz}{d\zeta}$. Da also sowohl $\frac{dz}{d\zeta}$ als auch $F(z)$ eine eindeutige Function von ζ ist, so ergiebt die Gleichung (J.), dass auch $\varphi(z)^2$ und demgemäss auch $f(z)^2$ eindeutige Functionen von ζ sind.

Man erhält daher den folgenden Satz:

II. Wenn die Bedingungen (K) die Einschränkung erfahren, dass der Nenner von r_1 oder von ϱ_1 die Zahl Zwei sei für den Fall, dass $r_2 = r_1+1$ oder $\varrho_2 = \varrho_1+1$, so sind auch $\varphi(z)^2$ und $f(z)^2$ eindeutige Functionen von ζ.

6.

Aus der vorigen Nummer ergiebt sich, dass, wenn die unabhängigen Variabeln u_1, u_2 in den Gleichungen (B.) solche Werthe v_1, v_2 resp. erreichen, für welche z_1, z_2 die Gleichung (F.) befriedigen, nothwendigerweise $z_1 = z_2$ sein müsse, sobald die Gleichungen (K.) erfüllt sind.

Es sei demgemäss für $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $z_1 = z_2 = b$.

Wenn wir hier die Voraussetzung des Satzes II. voriger Nummer aufnehmen, so ergiebt sich nach diesem Satze, dass gleichzeitig die Gleichungen

$$f(z_2) = \pm f(z_1), \quad \varphi(z_2) = \pm \varphi(z_1) \tag{1.}$$

stattfinden, wo die Vorzeichen sich entsprechen.

Wir unterscheiden jetzt drei Fälle:

1. b sei ein **nicht singulärer** Punkt der Gleichung (A.), und es sei in der Umgebung von $z_1 = b$

$$\left\{\begin{aligned} f(z_1) &= a_0 + a_1(z_1-b) + a_2(z_1-b)^2 + \cdots, \\ \varphi(z_1) &= c_0 + c_1(z_1-b) + c_2(z_1-b)^2 + \cdots, \end{aligned}\right. \tag{2.}$$

163] so ist nach den Gleichungen (1.)

$$\left\{\begin{aligned} \pm f(z_2) &= a_0 + a_1(z_2-b) + a_2(z_2-b)^2 + \cdots = f'(z_2), \\ \pm \varphi(z_2) &= c_0 + c_1(z_2-b) + c_2(z_2-b)^2 + \cdots = \varphi'(z_2), \end{aligned}\right. \tag{2a.}$$

worin die Vorzeichen sich entsprechen.

Die Gleichungen (E.) werden daher

$$\left\{\begin{aligned} \Delta' dz_1 &= \varphi'(z_2)\, du_1 - f'(z_2)\, du_2, \\ \pm \Delta' dz_2 &= -\varphi(z_1)\, du_1 + f(z_1)\, du_2, \end{aligned}\right. \tag{Ea.}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} f(z_1) & f'(z_2) \\ \varphi(z_1) & \varphi'(z_2) \end{vmatrix}.$$

Setzen wir

$$\left\{\begin{aligned} (z_1-b) \pm (z_2-b) &= w_1, \\ (z_1-b)^2 \pm (z_2-b)^2 &= w_2, \end{aligned}\right. \tag{3.}$$

wo die Vorzeichen sich entsprechen, so folgt aus den Gleichungen (Ea.)

$$\left\{\begin{aligned} \Delta' dw_1 &= [\varphi'(z_2) - \varphi(z_1)]\, du_1 - [f'(z_2) - f(z_1)]\, du_2, \\ \Delta' dw_2 &= 2[(z_1-b)\varphi'(z_2) - (z_2-b)\varphi(z_1)]\, du_1 - 2[(z_1-b) f'(z_2) - (z_2-b) f(z_1)]\, du_2. \end{aligned}\right. \tag{4.}$$

Setzt man die Werthe aus den Gleichungen (2.) und (2a.) in Δ' ein, so ergiebt sich, dass Δ' durch $(z_2-b)-(z_1-b)$ theilbar ist. Die Glieder des Quotienten sind ganze, homogene, symmetrische Functionen von z_1-b, z_2-b, und der Werth dieses Quotienten für $z_1 = b$, $z_2 = b$ ist $a_0 c_1 - a_1 c_0$, welcher nicht verschwindet, da $f(z)$, $\varphi(z)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (A.) bilden.

Die Coefficienten von du_1, du_2 in den Gleichungen (4.) sind ebenfalls durch $(z_2-b)-(z_1-b)$ theilbar, und die Quotienten ganze, homogene, symmetrische Functionen von z_1-b, z_2-b.

Aus den Gleichungen (4.) ergeben sich demnach für $\frac{\partial w_1}{\partial u_1}, \frac{\partial w_2}{\partial u_1}, \frac{\partial w_1}{\partial u_2}, \frac{\partial w_2}{\partial u_2}$ Ausdrücke, welche rational von w_1, w_2 abhängen und für $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ nicht unendlich werden. Daher sind w_1, w_2 in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ eindeutige Functionen von u_1, u_2.

Gelten nunmehr in den Gleichungen (3.) die unteren Vorzeichen, so ergiebt sich, dass auch z_1-b und z_2-b, also z_1 und z_2 in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ eindeutige Functionen von u_1, u_2 sind.

Gelten aber in den Gleichungen (3.) die oberen Vorzeichen, so folgt, dass $z_1 + z_2$ und $z_1 z_2$ in derselben Umgebung eindeutige Functionen repräsentiren.

2. b sei ein singulärer Punkt der Gleichung (A.), r_1, r_2 die Wurzeln [164 der zu demselben gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, und zwar sei in Übereinstimmung mit den Sätzen I., II. voriger Nummer

$$\left\{\begin{aligned} & r_1 = -1 + \frac{1}{n}, \quad r_2 = -1 + \frac{2}{n} \text{ oder } r_2 = r_1 + 1 \\ & \text{mit der Bedingung für den letzteren Fall, dass } n = 2. \end{aligned}\right. \tag{5.}$$

Wir setzen in den Gleichungen (E.)

$$z_1 - b = t_1^n, \quad z_2 - b = t_2^n.$$

Alsdann ist

$$\left\{\begin{aligned} f(z_1) &= t_1^{1-n}[c_{11} g_1(t_1^n) + c_{12} t_1^{\varepsilon n+1-\varepsilon} g_2(t_1^n)], \\ \varphi(z_1) &= t_1^{1-n}[c_{21} g_1(t_1^n) + c_{22} t_1^{\varepsilon n+1-\varepsilon} g_2(t_1^n)], \\ \pm f(z_2) &= t_2^{1-n}[c_{11} g_1(t_2^n) + c_{12} t_2^{\varepsilon n+1-\varepsilon} g_2(t_2^n)] = f'(z_2), \\ \pm \varphi(z_2) &= t_2^{1-n}[c_{21} g_1(t_2^n) + c_{22} t_2^{\varepsilon n+1-\varepsilon} g_2(t_2^n)] = \varphi'(z_2), \end{aligned}\right. \tag{6.}$$

worin $c_{11}, \ldots, c_{22}$ willkürliche Constanten, $g_1(t^n)$, $g_2(t^n)$ in der Umgebung von $t = 0$ holomorphe Functionen von t^n und für $t = 0$ von Null verschieden und $\varepsilon = 0$ oder 1, je nachdem $r_2 = -1 + \frac{2}{n}$ oder $r_2 = r_1 + 1$, d. h. $r_1 = -\frac{1}{2}$, $r_2 = +\frac{1}{2}$. Setzen wir wieder

$$\Delta' = \begin{vmatrix} f(z_1) & f'(z_2) \\ \varphi(z_1) & \varphi'(z_2) \end{vmatrix},$$

so folgt aus den Gleichungen (6.)

$$(6a.)\qquad \Delta' = (c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21})t_1^{1-n}t_2^{1-n}[t_2^{\varepsilon n+1-\varepsilon}g_1(t_1^n)g_2(t_2^n)-t_1^{\varepsilon n+1-\varepsilon}g_2(t_1^n)g_1(t_2^n)].$$

Der Ausdruck $\Delta t_1^{n-1}t_2^{n-1}$ ist durch $t_2^2-t_1^2$ oder durch t_2-t_1 theilbar, je nachdem $\varepsilon=1$ oder $\varepsilon=0$. Der Werth des Quotienten für $t_1=0$, $t_2=0$ ist

$$(c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21})g_1(0)g_2(0),$$

welcher von Null verschieden ist, weil $f(z)$, $\varphi(z)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (A.), und weil $g_1(0)$, $g_2(0)$ nicht verschwinden.

Setzen wir

$$f(z_1)t_1^{n-1} = f_1(t_1),\quad \varphi(z_1)t_1^{n-1} = \varphi_1(t_1),$$
$$f'(z_2)t_2^{n-1} = f_1(t_2),\quad \varphi'(z_2)t_2^{n-1} = \varphi_1(t_2),$$

so werden die Gleichungen (E.)

$$(Eb.)\qquad \begin{cases} n\Delta' t_1^{n-1}t_2^{n-1}dt_1 = \varphi_1(t_2)du_1-f_1(t_2)du_2,\\ \pm n\Delta' t_1^{n-1}t_2^{n-1}dt_2 = -\varphi_1(t_1)du_1+f_1(t_1)du_2.\end{cases}$$

165] Ist a) $\varepsilon=0$, so ergiebt sich an der Hand der Gleichungen (Eb.) auf ähnliche Weise wie im Falle 1. für z_1-b, z_2-b an der Hand der Gleichungen (Ea.), dass t_1 und t_2 selber oder t_1+t_2, t_1t_2 und demnach auch z_1+z_2 und z_1z_2 in der Umgebung von $u_1=v_1$, $u_2=v_2$ eindeutige Functionen von u_1, u_2 sind.

Es sei b) $\varepsilon=1$.

Setzen wir, je nachdem in den Gleichungen (Eb.) das obere oder untere Vorzeichen gilt,

$$t_1\pm t_2 = w_1,\quad t_1^3\pm t_2^3 = w_2,$$

so folgt aus den Gleichungen (Eb.)

$$(7.)\qquad \begin{cases} n\Delta' t_1^{n-1}t_2^{n-1}dw_1 = [\varphi_1(t_2)-\varphi_1(t_1)]du_1-[f_1(t_2)-f_1(t_1)]du_2,\\ n\Delta' t_1^{n-1}t_2^{n-1}dw_2 = 3[t_1^2\varphi_1(t_2)-t_2^2\varphi_1(t_1)]du_1-3[t_1^2f_1(t_2)-t_2^2f_1(t_1)]du_2.\end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind die Coefficienten von du_1, du_2 durch $t_2^2-t_1^2$ theilbar, die Quotienten sind in ihren einzelnen Gliedern rationale, homogene, symmetrische Functionen von t_1^2, t_2^2. Ausserdem ist

$$3t_1t_2 = \pm\left(w_1^2-\frac{w_2}{w_1}\right).$$

Daher sind $\frac{\partial w_1}{\partial u_1}$, $\frac{\partial w_1}{\partial u_2}$, $\frac{\partial w_2}{\partial u_1}$, $\frac{\partial w_2}{\partial u_2}$ rational aus w_1, w_2 gebildete Ausdrücke, welche

für $u_1=v_1$, $u_2=v_2$ nicht unendlich werden, woraus sich ergiebt, dass w_1, w_2, folglich auch z_1+z_2 und z_1z_2 in der Umgebung von $u_1=v_1$, $u_2=v_2$ eindeutige Functionen von u_1, u_2 sind.

3. $b=\infty$. Es seien ϱ_1, ϱ_2 die Wurzeln der zu $z=\infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung und in Übereinstimmung mit den Sätzen I., II. voriger Nummer

$$(5a.)\qquad \varrho_1 = 1+\frac{1}{n},\quad \varrho_2 = 1+\frac{2}{n}\quad\text{oder}\quad \varrho_1=\frac{3}{2},\quad \varrho_2=\frac{5}{2}.$$

Setzen wir in der Gleichung (A.)

$$\frac{1}{z}=\xi,\quad y=\xi^2\eta,$$

so sind

$$\frac{f(z)}{\xi^2} = f'(\xi),$$
$$\frac{\varphi(z)}{\xi^2} = \varphi'(\xi)$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung zwischen η und ξ. Für diese Gleichung ist $\xi=0$ ein singulärer Punkt, und es sind

$$(5b.)\qquad \sigma_1 = -1+\frac{1}{n},\quad \sigma_2 = -1+\frac{2}{n}\quad\text{oder}\quad \sigma_1=-\frac{1}{2},\quad \sigma_2=+\frac{1}{2}$$ [166

die Wurzeln der zu $\xi=0$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung.

Aus den Gleichungen (B.) folgt aber, wenn man

$$\frac{1}{z_1}=\xi_1,\quad \frac{1}{z_2}=\xi_2$$

setzt,

$$(E'.)\qquad \begin{cases} f'(\xi_1)d\xi_1+f'(\xi_2)d\xi_2 = du_1,\\ \varphi'(\xi_1)d\xi_1+\varphi'(\xi_2)d\xi_2 = du_2.\end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich nun, wie im Falle 2), dass $\xi_1+\xi_2$, $\xi_1\xi_2$ in der Umgebung von $u_1=v_1$, $u_2=v_2$ holomorphe Functionen von u_1, u_2 sind.

Demnach haben z_1+z_2, z_1z_2 dieselbe Eigenschaft.

Fasst man das Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich folgender Satz:

Sind die Wurzeln r_1, r_2 jeder determinirenden Fundamentalgleichung, welche zu den verschiedenen singulären Punkten der

Gleichung (A.) gehören, so beschaffen, dass entweder

$$r_1 = -1+\frac{1}{n}, \quad r_2 = -1+\frac{2}{n}$$

oder

$$r_1 = -\tfrac{1}{2}; \quad r_2 = +\tfrac{1}{2}$$

und für die Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung entweder

$$\varrho_1 = 1+\frac{1}{n}, \quad \varrho_2 = 1+\frac{2}{n}$$

oder

$$\varrho_1 = \tfrac{3}{2}, \quad \varrho_2 = \tfrac{5}{2},$$

so sind die durch die Gleichungen (B.) definirten Functionen $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$ Wurzeln einer quadratischen Gleichung, deren Coefficienten eindeutige Functionen von u_1, u_2.

7.

Nach meiner Abhandlung Bd. 66, p. 145[1]) dieses Journals ist

$$(1.) \qquad \sum(r_1+r_2)+\varrho_1+\varrho_2 = A-1,$$

wenn man mit A die Anzahl der singulären Punkte der Gleichung (A.) bezeichnet.

167] Ist A' die Anzahl der singulären Punkte, für welche die determinirenden Fundamentalgleichungen die Wurzeln $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ haben, A'' die Anzahl der übrigen, so geht die Gleichung (1.) über in

$$(2.) \qquad 3\sum\frac{1}{n_i}+\varrho_1+\varrho_2 = A'+3A''-1,$$

wo die Summe sich auf die Nenner der Wurzeln derjenigen Fundamentalgleichungen beziehen, welche zu den singulären Punkten der zweiten Art gehören. Da

$$\varrho_1+\varrho_2 \leqq 5,$$
$$3\sum\frac{1}{n_i} \leqq \frac{3A''}{2},$$

so folgt aus Gleichung (2.)

$$(3.) \qquad \tfrac{3}{2}A''+A' \leqq 6 \quad \text{oder} \quad A+\tfrac{1}{2}A' \leqq 6.$$

1) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 185, 186. Sch.

Hieraus folgt:

Die Anzahl der singulären Punkte der Gleichung (A.) ist nicht grösser als Sechs.

8.

Ein Beispiel für den Fall $A = 6$ ist das folgende.

Es sei für jeden der sechs singulären Punkte

$$r_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad r_2 = +\tfrac{1}{2},$$

so wird nach meiner Abhandlung Bd. 81[1]) die Gleichung (A.) durch die Quadratwurzel einer rationalen Function befriedigt. Da überdies in den für die Umgebung je eines singulären Punktes oder des unendlich fernen Punktes geltenden Entwickelungen keine Logarithmen auftreten dürfen, so giebt es noch eine zweite Quadratwurzel einer rationalen Function, welche die Gleichung (A.) befriedigt und mit der ersten zusammen ein Fundamentalsystem bildet.

Bezeichnet man die singulären Punkte mit $a_1, a_2, \ldots, a_6$ und setzt

$$(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_6) = \varphi(z),$$

so hat das Fundamentalsystem die Form

$$y_1 = \frac{g(z)}{\sqrt{\varphi(z)}}, \qquad y_2 = \frac{h(z)}{\sqrt{\varphi(z)}},$$

wo $g(z), h(z)$ ganze rationale Functionen bedeuten.

Da im gegenwärtigen Falle

$$\varrho_1 = 2, \quad \varrho_2 = 3,$$

so folgt, dass $g(z), h(z)$ den ersten Grad nicht übersteigen. Im gegenwärtigen Beispiele liefern also die Functionen $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$ die hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. [168

9.

Dass aber im Allgemeinen die hier charakterisirten Differentialgleichungen (A.) nicht algebraische Integrale besitzen, und demzufolge die Functionen $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$ von den Abelschen Functionen verschieden sind, ergiebt sich an dem folgenden Beispiel.

1) Abh. XX, S. 11 ff. dieses Bandes. Sch.

Es sei $A = 2$, a_1, a_2 die beiden singulären Punkte der Gleichung (A.); die Wurzeln der zu a_1 gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung

$$r_{11} = -\tfrac{2}{3},\quad r_{12} = -\tfrac{1}{3},$$

die Wurzeln der zu a_2 gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung

$$r_{21} = -\tfrac{5}{6},\quad r_{22} = -\tfrac{4}{6},$$

die Wurzeln der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung

$$\varrho_1 = \tfrac{3}{2},\quad \varrho_2 = 2.$$

Substituirt man in der Gleichung (A.) für diesen Fall

$$y = (z-a_1)^{-1}(z-a_2)^{-\frac{5}{4}}w,$$

so sind die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung für w resp. gehörig

$$\text{zu } a_1: \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3};\quad \text{zu } a_2: \tfrac{5}{12}, \tfrac{7}{12};\quad \text{zu } \infty: -\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{4},$$

also hat die Gleichung für w die Form

$$(1.)\qquad \frac{d^2w}{dz^2} = Pw,$$

wo P eine rationale Function von z.

Nach meiner Abhandlung Bd. 81 dieses Journals p. 135[1]) ist diese Differentialgleichung, da die Nenner der Wurzeln der zu a_2 gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung grösser als zehn, nicht algebraisch integrirbar, wenn nicht ihre Integrale selber oder eine homogene Function zweiten Grades ihrer Integrale gleich der Wurzel einer rationalen Function.

Da die Nenner der Wurzeln der zu den singulären Punkten a_1, a_2 gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen von den Zahlen 1, 2, 4 verschieden sind, so bliebe nach derselben Abhandlung p. 136[2]) nur die Möglichkeit, dass die Gleichung (1.) vollständig durch Wurzeln rationaler Function integrirbar wäre.

Dieses findet jedoch nicht statt.

169] Denn jede Wurzel w einer rationalen Function von z, welche der Gleichung (1.) genügen soll, müsste die Form

$$w = \psi(z)(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}$$

[1]) Abh. XX, S. 53 dieses Bandes. Sch.

[2]) Ebenda S. 54. Sch.

haben, wo $\psi(z)$ eine ganze rationale Function von z, welche für $z = a_1$ und für $z = a_2$ von Null verschieden ist, wo ferner α_1 einen der Werthe $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$; α_2 einen der Werthe $\frac{5}{12}, \frac{7}{12}$ hätte. Der Grad μ von $\psi(z)$ müsste der Bedingung

$$\mu + \alpha_1 + \alpha_2 = \tfrac{3}{4} \text{ oder } \tfrac{1}{4}$$

genügen.

Diesen Anforderungen entspricht aber nur die Function

$$w = (z-a_1)^{\frac{1}{3}}(z-a_2)^{\frac{5}{12}}$$

und keine andere Wurzel einer rationalen Function.

Die Gleichung (1.) ist demnach nicht vollständig durch algebraische Functionen integrirbar, daher auch **nicht** die Gleichung (A.).

Wir fügen zum Beschluss noch folgende Bemerkung hinzu:

Setzt man, wie in Gleichung (H.)

$$(1.)\qquad \frac{f(z)}{\varphi(z)} = v,$$

so ist nach No. 5 Satz I. z eine eindeutige Function von v. Nach Satz II. derselben Nummer sind aber auch $f(z)^2$ und $\varphi(z)^2$ eindeutige Functionen von v.

Es sei daher

$$(2.)\qquad z = \chi(v),$$

so ergiebt sich folgender Satz:

Die Gleichungen (B.) lassen sich durch die eindeutigen im allgemeinen nicht rationalen Substitionen

$$z_1 = \chi(v_1),\quad z_2 = \chi(v_2)$$

in die Form

$$(\text{L.})\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\eta_1}^{v_1} \sqrt{g(v)}\,dv + \int_{\eta_2}^{v_2} \sqrt{g(v)}\,dv = u_1 \\ \displaystyle\int_{\eta_1}^{v_1} v\sqrt{g(v)}\,dv + \int_{\eta_2}^{v_2} v\sqrt{g(v)}\,dv = u_2, \end{cases}$$

bringen, wo

$$\zeta_1 = \chi(\eta_1),\quad \zeta_2 = \chi(\eta_2)$$

und $g(v)$ eine eindeutige im allgemeinen nicht rationale Function von v ist.

Heidelberg, 14. Februar 1880.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 200, Zeile 8 $\zeta = \zeta_1$ statt $z = \zeta_1$,

„ 210, „ 13 v. u. die Nenner der Wurzeln statt die Wurzeln.

2) Der Ausdruck analytische Function (S. 191, Zeile 2, 1 v. u. und S. 193, Zeile 15) ist hier und ebenso an den entsprechenden Stellen der Abhandlungen XXX, XXXII[1]) in dem Sinne zu verstehen, wie Jacobi in der Abhandlung (Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 13, 1834, Werke, Bd. 2, 1882, S. 45 ff.), an welche die Untersuchungen von Fuchs sich anschliessen, diesen Ausdruck gebraucht. Eine Function einer Variabeln wird[2]) nach Jacobi als eine analytische zu bezeichnen sein, wenn die Werthe der unabhängigen Variabeln, für welche die Function denselben Werth annehmen kann — nach der von Herrn G. Cantor (Mathematische Annalen, Bd. 15, 1879, S. 2) eingeführten Terminologie — nicht in der ganzen Ebene überall dicht sind. Den analogen Begriff hatte Jacobi auch für Functionen von mehreren Variabeln gebildet[3]). Das von Fuchs in der No. 1 (S. 193, Z. 8—16) formulirte Problem stimmt demnach mit der Frage überein, unter welchen Bedingungen die durch die Transformationen (ebenda)

$$\alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2 + \beta_1 c,$$
$$\alpha_{21} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \beta_2 c$$

dargestellte Gruppe — im Sinne der von Herrn Poincaré, in seinen an eben diese Arbeit von Fuchs anknüpfenden Untersuchungen (1882), eingeführten Terminologie — eine eigentlich discontinuirliche ist.

Zu dem Satze I., S. 202 vergl. die Abhandlung XXXIV und die zu ihr gehörige Anmerkung.

Eine französische Übersetzung der vorstehenden Abhandlung (von Herrn Stéphanos) ist im Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. IV, 1880, S. 278—300, erschienen. Sch.

1) Vergl. auch die Abhandlung XLVI (1895) dieses Bandes.

2) Vergl. Schlesinger, Über den Begriff der analytischen Function bei Jacobi etc., Bibliotheca Mathematica, 3. Folge, Bd. VI, 1905, S. 88 ff.

3) Vergl. Schlesinger, a. a. O. S. 94.

XXXII.

SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES TIRÉES DE L'INVERSION DES INTÉGRALES DE SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DONT LES COEFFICIENTS SONT DES FONCTIONS RATIONNELLES.

(Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.)

(Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, t. 90, Paris 1880.)

a.

(Séance du Lundi 22 Mars 1880, p. 678—680.)

De même que ces fonctions de plusieurs variables que l'on appelle [678 fonctions abéliennes doivent leur naissance aux intégrales des fonctions algébriques, en concevant, d'après Jacobi, les limites supérieures de p intégrales d'une fonction algébrique convenablement choisie comme fonctions de la somme de ces intégrales et de $p-1$ autres sommes composées d'une manière semblable, de même on fait naître une nouvelle classe de fonctions de plusieurs variables, comme je le démontre dans mon Mémoire, si l'on part des intégrales des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels comme fondement.

Je me suis proposé d'abord le problème de rechercher la nature des intégrales d'une équation différentielle linéaire homogène de l'ordre m, en supposant possible de définir $z_1, z_2, \ldots, z_m$ comme fonctions analytiques des variables $u_1, u_2, \ldots, u_m$ par les équations

$$\sum_1^m {}_i \int_{\zeta_i}^{z_i} f_a(z)\,dz = u_a, \qquad (a = 1, 2, \ldots, m)$$

où $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ sont des constantes,

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$$

un système fondamental de solutions de l'équation différentielle.

J'ai complètement résolu ce problème pour les équations différentielles du second ordre, et je suis parvenu aux résultats suivants.

1. Étant donnée l'équation différentielle

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + P\frac{dy}{dz} + Qy = 0,$$

où P, Q signifient des fonctions rationnelles de z, soit $f(z)$, $\varphi(z)$ un système fondamental arbitraire de solutions de cette équation; que l'on définisse z_1, z_2 comme des fonctions des variables u_1, u_2 par les équations

$$\text{(B.)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \int_{\zeta_1}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} f(z)\,dz &= u_1, \\ \int_{\zeta_1}^{z_1} \varphi(z)\,dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} \varphi(z)\,dz &= u_2. \end{aligned} \right.$$

En supposant z_1, z_2 fonctions analytiques de u_1, u_2 et en posant

$$z_1 = F_1(u_1, u_2), \quad z_2 = F_2(u_1, u_2),$$

679] on obtient tout d'abord la propriété suivante de ces fonctions,

$$\text{(C.)} \qquad \left\{ \begin{aligned} F_1(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \gamma_1 c,\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \gamma_2 c) &= F_1(u_1, u_2), \\ F_2(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \gamma_1 c,\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \gamma_2 c) &= F_2(u_1, u_2), \end{aligned} \right.$$

où l'on désigne par c une constante, par $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ les éléments d'une substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

à laquelle on doit assujettir $f(z)$, $\varphi(z)$ lorsque la variable part d'une valeur et y revient en décrivant un contour fermé, et γ_1, γ_2 étant des quantités déterminées relatives à ce contour.

Les fonctions F_1, F_2 reprennent d'ailleurs en général les mêmes valeurs pour d'autres systèmes de valeurs de u_1, u_2 en nombre infini.

2. Soit a_i un point singulier de l'équation (A.); soient $r_1^{(i)}, r_2^{(i)}$ les racines de l'équation fondamentale déterminante pour le point a_i, soient, en outre,

s_1, s_2 les racines de l'équation fondamentale déterminante pour $z = \infty$. Je détermine d'abord ces racines de manière que, lorsque u_1, u_2 acquièrent des valeurs pour lesquelles des deux valeurs a, b que reçoivent respectivement les quantités z_1, z_2, l'une coïncide avec un point singulier ou l'une et l'autre avec deux points singuliers différents entre eux, sans que l'équation

$$\text{(D.)} \qquad \frac{f(z_2)}{\varphi(z_2)} - \frac{f(z_1)}{\varphi(z_1)} = 0$$

soit satisfaite par $z_1 = a$, $z_2 = b$, les dérivées partielles de z_1 et z_2 deviennent fonctions holomorphes de z_1, z_2 dans le voisinage de $z_1 = a$, $z_2 = b$.

Il est à remarquer que l'on comprend ici le point $z = \infty$ parmi les points singuliers.

D'ailleurs, je fais la détermination de manière que, pour des systèmes de valeurs finies de u_1, u_2, z_1, z_2 peuvent acquérir les valeurs indiquées.

Voici, à cette effet, les conditions nécessaires et suffisantes:

$$\text{(E.)} \left\{ \begin{array}{l} r_1^{(i)} = -1 + \dfrac{1}{n_i},\ r_2^{(i)} = -1 + \dfrac{k_i}{n_i},\ k_i > 1,\ k_i, n_i \text{ des nombres entiers et positifs;} \\ s_1 = 1 + \dfrac{1}{n},\ s_2 = 1 + \dfrac{k}{n},\ k > 1,\ k, n \text{ des nombres entiers et positifs.} \end{array} \right.$$

Je fais voir alors que les quantités $r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, s_1, s_2$ peuvent être déter- [680 minées, en outre, de manière que, par l'équation

$$\text{(F.)} \qquad \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \zeta,$$

z se définisse comme fonction monodrome de ζ, et que, partant, l'équation (D.) ne puisse être satisfaite que pour $z_1 = z_2$. Les conditions qui sont alors nécessaires et suffisantes sont les suivantes:

$$r_2^{(i)} = r_1^{(i)} + 1 \quad \text{ou} \quad k_i = 2,$$

et

$$s_2 = s_1 + 1 \quad \text{ou} \quad s_1 = 1 + \frac{1}{n}, \ s_2 = 1 + \frac{2}{n},$$

en ajoutant la condition que le développement d'une intégrale de l'équation (A.) dans le voisinage d'un point singulier ne contienne pas de logarithmes.

Je démontre ensuite que, si

$$(G.)\quad \begin{cases} r_1^{(i)} = -1+\dfrac{1}{n_i}, \quad r_2^{(i)} = -1+\dfrac{2}{n_i} \quad \text{ou} \quad r_1^{(i)} = -\dfrac{1}{2}, \quad r_2^{(i)} = \dfrac{1}{2}, \\[2mm] s_1 = \dfrac{3}{2}, \quad s_2 = \dfrac{5}{2} \quad \text{ou} \quad s_1 = 1+\dfrac{1}{n}, \quad s_2 = 1+\dfrac{2}{n}, \end{cases}$$

la condition étant en outre remplie que le développement d'une intégrale de l'équation (A.) dans le voisinage d'un point singulier ne contienne pas de logarithmes, z_1, z_2 sont des racines d'une équation du second degré dont les coefficients sont des fonctions analytiques et monodromes de u_1, u_2.

---

b.

(Séance du Lundi 29 Mars 1880, p. 735—736.)

735] 3. Aux résultats que j'ai précédemment exposés*), j'ajoute les suivants. Je fais voir que le nombre ϱ des points singuliers finis de l'équation (A.) ne surpasse pas le nombre 6, en supposant remplies les conditions (G.).

Je marque ensuite l'exemple

$$\varrho = 6, \quad r_1^{(i)} = -\tfrac{1}{2}, \quad r_2^{(i)} = \tfrac{1}{2},$$

et je fais voir que, dans ce cas, l'équation (A.) est satisfaite par le système fondamental

$$y_1 = \frac{g(z)}{\sqrt{R(z)}}, \qquad y_2 = \frac{h(z)}{\sqrt{R(z)}},$$

où

$$R(z) = (z-a_1)\dots(z-a_6),$$

$g(z)$, $h(z)$ sont des fonctions rationnelles et entières dont le degré ne surpasse par l'unité. Dans ce cas, les fonctions $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$ coïncident avec les fonctions hyperelliptiques du premier ordre.

Puis je démontre qu'en général l'équation (A.), sous les conditions (G.), n'est pas intégrable complètement par des fonctions algébriques, et que, par

*) Comptes rendus, même tome, p. 678 [1]).

[1]) Note précédente. Sch.

conséquent, nos fonctions $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$ sont différentes des fonctions abéliennes.

J'y applique l'exemple suivant, compatible avec les conditions (G.), savoir: nombre des points singuliers finis $\varrho = 2$,

$$\begin{aligned} r_1^{(1)} &= -\tfrac{2}{3}, & r_2^{(1)} &= -\tfrac{1}{3}, \\ r_1^{(2)} &= -\tfrac{5}{6}, & r_2^{(2)} &= -\tfrac{4}{6}, \\ s_1 &= \tfrac{3}{2}, & s_2 &= 2, \end{aligned}$$

et je démontre que l'intégrale générale de l'équation (A.) n'est pas algébrique dans ce cas.

A la fin je remarque que, les conditions (G.) étant remplies, les équations (B.) sont transformées par la substitution monodrome, mais généralement non rationnelle, (F.) en des équations semblables, dans lesquelles $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont remplacées par les racines carrées de fonctions monodromes, mais généralement non rationnelles de ζ, et ζ prend la place de z comme variable d'intégration.

J'ajoute le théorème suivant, qui est semblable aux théorèmes d'Abel pour les intégrales des fonctions algébriques:

Étant données deux séries de valeurs de z arbitrairement choisies, l'une en contenant un nombre quelconque n, savoir [736

$$z_3, z_4, \dots, z_{n+2},$$

l'autre les valeurs $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+2}$; étant d'ailleurs données les valeurs qu'acquièrent les fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$ qui font ensemble un système fondamental d'intégrales de l'équation (A.), savoir

$$\begin{aligned} f(z_i) &= a_i, & f(\zeta_i) &= \alpha_i, \\ \varphi(z_i) &= b_i, & \varphi(\zeta_i) &= \beta_i, \end{aligned}$$

on peut toujours trouver deux quantités z_1, z_2, et d'une seule manière, satisfaisant à la fois aux équations

$$\sum_1^{n+2}{}_i \int_{\zeta_i}^{z_i} f(z_i)\,dz_i = 0, \qquad \sum_1^{n+2}{}_i \int_{\zeta_i}^{z_i} \varphi(z_i)\,dz_i = 0$$

et à une équation du second degré dont les coefficients sont des fonctions monodromes des quantités

$$z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_{n+2},\quad \zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_{n+2},\quad a_i,\ b_i.\quad \alpha_i,\ \beta_i.$$

Ce théorème découle immédiatement du théorème énoncé à la fin du no. 2. Enfin je remarque que, pour la discussion ultérieure des fonctions F_1, F_2, il faut avoir recours aux résultats de mon Mémoire contenu dans le Journal de M. Borchardt, t. 76, p. 177[1]).

1) Mém. XVI, t. I de cette édition, p. 415 et suiv. Sch.

XXXIII.

ÜBER DIE FUNCTIONEN, WELCHE DURCH UMKEHRUNG DER INTEGRALE VON LÖSUNGEN DER LINEAREN DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN ENTSTEHEN.

(Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.-A. Universität, Göttingen 1880, No. 13, 14. Juli 1880, Sitzung am 3. Juli; S. 445—453.)

In einer Mittheilung, enthalten in den »Nachrichten der Königl. Ge- [445
sellschaft der Wissenschaften« Februar d. J. p. 170 sqq.[1]) habe ich Functionen mehrerer Variabeln definirt, welche der Umkehrung von Integralen der Lösungen linearer Differentialgleichungen ihre Entstehung verdanken.

Ich habe daselbst, und ausführlicher in Borchardts Journal Bd. 89, p. 151 sqq.[2]), ein Beispiel derartiger Functionen geliefert, indem ich für den Fall von Differentialgleichungen zweiter Ordnung folgende Einschränkungen einführte:

Die Functionen z_1, z_2 von u_1, u_2 sollen die singulären Stellen der Differentialgleichung für endliche Werthe von u_1, u_2 erreichen, und die Darstellung der Lösungen dieser Differentialgleichung in der Umgebung der singulären Punkte keine Logarithmen enthalten. Ausserdem sollen diese singulären Stellen sämmtlich so beschaffen sein, dass die Lösungen in ihnen unendlich werden [446
oder sich verzweigen.

Es ist selbstverständlich, dass diese Einschränkungen nicht sämmtlich nothwendig sind. Die nothwendigen Einschränkungen habe ich vielmehr in

1) Abh. XXX, S. 185 ff. dieses Bandes. Sch.
2) Abh. XXXI, S. 191 ff. dieses Bandes. Sch.

einer Arbeit, welche nächstens erscheinen wird, für Differentialgleichungen beliebiger Ordnung entwickelt.

Die gegenwärtige Notiz bezweckt nur die Tabelle derjenigen Differentialgleichungen aufzustellen, welche den im obengenannten Beispiele gemachten Einschränkungen entsprechen, indem ich in den Bezeichnungen auf die oben erwähnte in den Nachrichten der Königl. Societät enthaltene Notiz unter dem Zeichen N. Bezug nehme.

In dieser Tabelle, welche ich hier folgen lasse, bezeichnen p, q die Coefficienten der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\omega}{dz^2}+p\frac{d\omega}{dz}+q\omega = 0,$$

und A die Anzahl der singulären Punkte der Differentialgleichung (A.) in N.

Bei jeder Differentialgleichung, welche algebraische Integrale besitzt, ist der Kürze halber nur die Bemerkung »algebraische Integrale« angeführt, während für die übrigen ein Fundamentalsystem von Integralen ω_1, ω_2 der Differentialgleichung für ω angegeben ist.

I. $A = 6$.

$$R = (z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_6),\quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = 0,\quad q = 0,$$

algebraische Integrale.

447]

II. $A = 5$.

1) $$R = (z-a_1)\dots(z-a_5),\quad y = R^{-\frac{1}{4}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-a_4}+\frac{1}{z-a_5}\right),\quad q = -\frac{1}{4}\frac{1}{(z-a_4)(z-a_5)},$$

algebraische Integrale.

2) $$R = (z-a_1)\dots(z-a_5),\quad y = R^{-\frac{1}{4}}\omega;$$
$$p = 0,\quad q = 0,$$

algebraische Integrale.

III. $A = 4$.

1) $$R = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4),\quad y = R^{-\frac{1}{4}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz},\quad q = \frac{\pi^2}{\Omega^2}\frac{1}{R},$$

wo Ω einen Periodicitätsmodul des elliptischen Integrals $\int R^{-\frac{1}{2}}dz$ bezeichnet,

$$\omega_1 = e^{\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}}dz},\quad \omega_2 = e^{-\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}}dz}.$$

2) $$y = [(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)]^{-\frac{1}{4}}(z-a_4)^{-\frac{1}{3}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_2}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-a_3}+\frac{2}{3}\frac{1}{z-a_4},$$
$$q = \left[\frac{1}{36}(2a_2+2a_3+a_4)-\frac{5}{36}z\right]\frac{1}{(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)},$$

algebraische Integrale.

3) $$y = [(z-a_1)\dots(z-a_4)]^{-\frac{1}{4}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz},\quad q = -\frac{1}{4}\frac{1}{R},\quad R = (z-a_3)(z-a_4),$$ [448

algebraische Integrale.

4) $$y = [(z-a_1)(z-a_2)]^{-\frac{1}{4}}R^{-\frac{1}{3}}\omega,\quad R = (z-a_3)(z-a_4);$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz},\quad q = -\frac{2}{9}\frac{1}{R},$$

algebraische Integrale.

5) $$y = [(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)]^{-\frac{1}{4}}\omega;$$
$$p = \frac{3}{4}(z-a_4)^{-1},\quad q = 0,$$

algebraische Integrale.

IV. $A = 3$.

1) $$R = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3),\quad y = R^{-\frac{1}{4}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz},\quad q = \frac{\pi^2}{\Omega^2}\frac{1}{R},$$

wo Ω ein Periodicitätsmodul des elliptischen Integrals $\int R^{-\frac{1}{2}}dz$,

$$\omega_1 = e^{\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}}dz},\quad \omega_2 = e^{-\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}}dz}.$$

2) $$y = [(z-a_1)(z-a_2)]^{-\frac{1}{4}}(z-a_3)^{-\frac{1}{3}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-a_2}+\frac{2}{3}\frac{1}{z-a_3},$$ [449

$$q = \left[\frac{1}{36}(2a_1 + 2a_2 + a_3) - \frac{5}{36}z\right]\frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)},$$

algebraische Integrale.

3) $$y = R^{-\frac{2}{3}}\omega, \quad R = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3);$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R^{-\frac{2}{3}}dz.$$

4) $$(z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{2}{3}}(z-a_3)^{-\frac{5}{6}} = R, \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_2} + \frac{5}{6}\frac{1}{z-a_3},$$
$$q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

5) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{5}{6}}\omega, \quad R = (z-a_2)(z-a_3);$$
$$p = \frac{5}{6}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{5}{36}\frac{1}{R},$$

algebraische Integrale.

6) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{2}{3}}\omega, \quad R = (z-a_2)(z-a_3);$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{2}{9}\frac{1}{R},$$

algebraische Integrale.

450] 7) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}\omega, \quad R = (z-a_2)(z-a_3);$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{1}{36}\frac{1}{R},$$

algebraische Integrale.

8) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{1}{3}}(z-a_3)^{-\frac{2}{3}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_2} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_3}, \quad q = -\frac{1}{18}\frac{1}{(z-a_2)(z-a_3)},$$

algebraische Integrale.

9) $$y = [(z-a_1)(z-a_2)]^{-\frac{1}{2}}(z-a_3)^{-\frac{2}{3}}\omega;$$
$$p = \tfrac{2}{3}(z-a_3)^{-1}, \quad q = 0,$$

algebraische Integrale.

V. $A = 2$.

1) $$(z-a_1)^{-\frac{2}{3}}(z-a_2)^{-\frac{5}{6}} = R, \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_1} + \frac{5}{6}\frac{1}{z-a_2}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

2) $$R = (z-a_1)(z-a_2), \quad y = R^{-\frac{3}{4}}\omega;$$
$$p = \frac{3}{4}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R^{-\frac{3}{4}}dz.$$

3) $$R = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{5}{6}}, \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1} + \frac{5}{6}\frac{1}{z-a_2}, \quad q = 0,$$ [451
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

4) $$R = (z-a_1)(z-a_2), \quad y = R^{-\frac{2}{3}}\omega;$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R^{-\frac{2}{3}}dz.$$

5) $$R = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{3}{4}}, \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1} + \frac{3}{4}\frac{1}{z-a_2}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

6) $$R = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{2}{3}}, \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_2}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

7) $$R = (z-a_1)(z-a_2), \quad y = R^{-\frac{5}{6}}\omega;$$
$$p = \frac{5}{6}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{5}{36}\frac{1}{R},$$

algebraische Integrale.

8) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{5}{6}}\omega;$$
$$p = 0, \quad q = 0,$$

algebraische Integrale.

452] Für diejenigen Differentialgleichungen, denen algebraische Integrale zugehören, ist z eine rationale Function $\chi(\zeta)$ von ζ. Substituirt man in Gleichung (B.) in N.

$$z_1 = \chi(\zeta_1), \quad z_2 = \chi(\zeta_2),$$

so erhält man zur Bestimmung von ζ_1, ζ_2 als Functionen von u_1, u_2 die Gleichungen, welche für die hyperelliptischen Functionen erster Ordnung bestehen.

Für die Fälle IV. 3), 4), V. 1), 2), 3), 4), 5), 6) ergiebt sich aus der Abhandlung der Herren Briot et Bouquet, im Journal de l'École Polytechnique, t. XXI, p. 222, dass z eine eindeutige doppeltperiodische Function $\chi(\zeta)$ von ζ ist.

Ebenso stellt für die Fälle III. 1), IV. 1), z eine eindeutige Function $\chi(\zeta)$ von ζ dar, von der Beschaffenheit

$$\chi(2\pi i\zeta) = \chi(\zeta),$$
$$\chi\left(\frac{\Omega^1}{\Omega}2\pi i\zeta\right) = \chi(\zeta),$$

wo Ω^1 einen zweiten von Ω verschiedenen Periodicitätsmodul des Integrals $\int R^{-\frac{1}{2}}dz$ bedeutet. Substituirt man in die Gleichungen (B.) in N.

$$z_1 = \chi(\zeta_1), \quad z_2 = \chi(\zeta_2),$$

so gehen diese Gleichungen für III. 1), IV. 1), über in

$$\zeta_1^{\frac{1}{2}} + \zeta_2^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi i}{\Omega}u_1,$$

453]
$$\zeta_1^{-\frac{1}{2}} + \zeta_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{-\pi i}{\Omega}u_2,$$

dagegen für IV. 3), 4) und V. 1) bis 6) in

$$\zeta_1 + \zeta_2 = u_1,$$
$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = u_2,$$

so dass in allen diesen Fällen die Coefficienten der quadratischen Gleichung für z_1, z_2 (N. p. 174[1])) sich mit Hülfe der elliptischen Functionen darstellen lassen.

Heidelberg, Juni 1880.

1) S. 188 dieses Bandes. Sch.

XXXIV.

AUSZUG AUS EINEM SCHREIBEN DES HERRN L. FUCHS AN C. W. BORCHARDT.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 90, 1881, S. 71—73.)

In einem Résumé der Resultate meiner Arbeit »über eine Klasse von [71
Functionen etc.«, welche ich in den Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Februar 1880 p. 170—176[1]) veröffentlicht habe, befindet sich p. 173[2]) daselbst folgender Satz:

I. Sind $f(z)$ und $\varphi(z)$ ein willkürliches Fundamentalsystem von Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten, und genügen für jeden singulären Punkt die Wurzeln r_1, r_2 der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichung den Bedingungen

$$r_2 = r_1 + 1 \quad \text{oder} \quad r_1 = -1 + \frac{1}{n}, \quad r_2 = -1 + \frac{2}{n} \quad (n \text{ ganze positive Zahl}),$$

sowie die Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung den Bedingungen

$$\varrho_2 = \varrho_1 + 1 \quad \text{oder} \quad \varrho_1 = 1 + \frac{1}{\nu}, \quad \varrho_2 = 1 + \frac{2}{\nu} \quad (\nu \text{ ganze positive Zahl}),$$

und enthalten die Entwickelungen der Lösungen der Differentialgleichung in der Umgebung eines singulären Punktes keine Logarithmen, so wird durch

1) Abh. XXX, S. 185 ff. dieses Bandes. Sch.
2) Ebenda, S. 187. Sch.

die Gleichung

$$\text{(F.)}\qquad \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \zeta$$

z als eindeutige Function von ζ definirt.

In meiner in Ihrem Journal Bd. 89, p. 151 sqq.[1]) enthaltenen Arbeit, in welcher die oben genannten Resultate entwickelt wurden, ist der obige Satz als Satz I. p. 161[2]) aufgenommen worden, in einer etwas veränderten Form, welche weniger deutlich ist und die Möglichkeit eines Missverständnisses nicht 72] ausschliesst. Auf diesen Umstand wurde ich aufmerksam gemacht durch eine gütige Mittheilung des Herrn Henri Poincaré, professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

Ich erlaube mir daher hier einige Erläuterungen zu diesem Satze hinzuzufügen.

Man ziehe in der z-Ebene von jedem der singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ der Differentialgleichung einen beliebigen Schnitt, von a_i den Schnitt q_i. Diese Schnitte erstrecken sich sämmtlich bis zum Punkte $z = \infty$, und sind nur der Beschränkung unterworfen, weder sich selbst noch einer den anderen zu schneiden. Bezeichnen wir die so zerschnittene z-Ebene mit T. Werden für einen willkürlichen Werth $z = z_0$, $f(z)$ und $\varphi(z)$, sowie ihre ersten Ableitungen willkürlich gewählt, so sind diese Functionen, folglich auch ζ in T überall eindeutig bestimmt. Überschreitet man nach und nach die einzelnen Schnitte $q_1, q_2, \ldots, q_\varrho$ in beliebiger Reihenfolge und jeden beliebig oft, so mögen die so entstehenden Flächen mit T_1, T_2, T_3 etc. bezeichnet werden. Ihre Anzahl ist unendlich gross, wenn nicht $f(z)$ und $\varphi(z)$ algebraische Functionen sind. In jeder dieser Flächen T_i ist ζ eine eindeutige Function von z. — Wir stellen nunmehr in der ζ-Ebene durch die Gleichung (F.) die Abbildungen der einzelnen Blätter T, T_1, T_2, T_3 etc. her. Die der Fläche T_i entsprechende Abbildungsfläche in der ζ-Ebene möge mit S_i bezeichnet werden. So lange nicht in einem Blatte T_i, $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch, d. h. für jeden Werth von z, unendlich werden, erfüllt die zugehörige Abbildung S_i ebenfalls eine Fläche, mag T_i durch eine endliche oder eine unendliche Anzahl von Überschreitungen der Schnitte $q_1, q_2, \ldots, q_\varrho$ erhalten worden sein. Sind da-

1) Abh. XXXI, S. 191 ff. dieses Bandes. Sch.

2) Ebenda, S. 202. Sch.

gegen in einem Blatte T_i, welches durch unendlich oft wiederholtes Überschreiten der Schnitte q erhalten worden, $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch unendlich, so ist die Abbildung S_i von T_i ein Punkt.

Die Gesammtheit der Abbildungen $S, S_1, S_2, \ldots$ bildet eine zusammenhängende Fläche in der ζ-Ebene. Diejenigen dieser Abbildungen, welche nicht solchen Flächen T_i zugehören, in denen $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch unendlich werden, enthalten nach den Entwickelungen meiner Arbeit in Ihrem Journal p. 158—160[1]) keinen Verzweigungspunkt; die Gesammtheit solcher Abbildungen constituirt daher eine Fläche σ in der ζ-Ebene, welche diese Ebene überall nur einfach bedeckt. An der Begrenzung dieser Fläche σ befinden sich die Punkte, welche als Abbildungen solcher Flächen T_i auftreten, innerhalb deren $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch unendlich werden, da diese durch Grenzübergang aus den die Fläche σ [73 constituirenden Flächen erhalten werden.

Der Sinn des Satzes I. p. 161[2]) meiner Arbeit in Ihrem Journal geht nun dahin, dass z innerhalb der Fläche σ eine überall meromorphe Function von ζ sei. Aus ihm geht alsdann das gleich nachfolgende Corollar hervor, wovon in den späteren Theilen der Arbeit Gebrauch gemacht wird, dass nämlich $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ nicht für zwei verschiedene Werthe von z einen und denselben Werth annimmt, vorausgesetzt natürlich, dass dieser Quotient nicht von z unabhängig wird, oder was dasselbe besagt, dass nicht $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch unendlich werden.

Wird einer der Grenzpunkte nach jeder Richtung von Flächen S umgeben, so ist zu den obengenannten Bedingungen noch eine auf die in den Coefficienten der Differentialgleichung enthaltenen Constanten bezügliche hinzuzufügen.

Heidelberg, den 7. Juni 1880.

1) Abh. XXXI, S. 198—202 dieses Bandes. Sch.

2) S. 202 dieses Bandes. Sch.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 226, Zeile 6 p. 161 statt p. 159,

" " , " 13 Man ziehe statt Zieht man.

2) Die in dem Schlussabsatze der vorstehenden Abhandlung erwähnte Bedingung für die Coefficienten der Differentialgleichung, die in gewissen Fällen den in dem Satze I. (S. 225) enthaltenen Bedingungen hinzugefügt werden muss, tritt bei den Fällen III. 1) und IV. 1) der in der Abhandlung XXXIII (S. 220 ff.) aufgestellten Tabelle auf; sie ist transcendenter Natur und besteht darin, dass beidemal die in dem Coefficienten q vorkommende Constante Ω gleich einem Periodicitätsmodul des elliptischen Integrals $\int R^{-\frac{1}{2}} dz$ zu wählen ist (a. a. O. S. 221).

Sch.

XXXIVa.

SUR LES FONCTIONS PROVENANT DE L'INVERSION DES INTÉGRALES DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES[1]).

(Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, 2e série, t. 4, 1880, p. 328—336.)

Dans une Communication, insérée dans les Nachrichten von der [328
K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, numéro de février 1880, p. 170 et suiv.[2]), j'ai défini des fonctions de plusieurs variables qui doivent leur naissance à l'inversion des intégrales des équations diffé- [329
rentielles linéaires.

J'ai donné en ce lieu, et avec plus de détails dans le Journal de Borchardt, t. 89, p. 151, etc.[3]), un exemple des fonctions de cette sorte, en introduisant, pour le cas des équations différentielles du second ordre, les restrictions suivantes:

Les fonctions z_1, z_2 de u_1, u_2 doivent atteindre les points singuliers de l'équation différentielle pour des valeurs finies de u_1, u_2, tandis que dans la représentation des solutions de l'équation différentielle aux environs des points singuliers ne doivent pas entrer de logarithmes. De plus, tous ces points singuliers doivent avoir la propriété que les solutions y deviennent infinies ou bien y subissent des ramifications.

Il est manifeste que ces restrictions ne sont pas nécessaires toutes à la fois. Quant aux restrictions nécessaires, je les ai développées, pour des

[1]) Traduction des Mémoires XXXIII et XXXIV. Sch.

[2]) Mém. XXX, p. 185 et suiv. de ce volume. Sch.

[3]) Mém. XXXI, p. 191 et suiv. de ce volume. Sch.

équations différentielles d'ordre quelconque, dans un travail qui doit paraître bientôt.

Le but de la Note actuelle est de présenter le Tableau des équations différentielles qui répondent aux restrictions faites pour les exemples dont je viens de parler. La Note déjà mentionnée, insérée dans les Nachrichten de Goettingue, à laquelle nous aurons à nous reporter, sera désignée par la lettre N.

Dans ce Tableau, que nous dressons ci-après, p et q désignent les coefficients de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\omega}{dz^2}+p\frac{d\omega}{dz}+q\omega = 0,$$

et A le nombre des points singuliers de l'équation différentielle (A.) de N.

Pour toute équation différentielle admettant des intégrales algébriques, nous nous bornerons, pour abréger, à la remarque »intégrales algébriques«, tandis que pour les autres nous donnons un système fondamental d'intégrales ω_1, ω_2 de l'équation différentielle en ω.

I. $A = 6$.

$$R = (z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_6), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = 0, \quad q = 0,$$

intégrales algébriques.

330]

II. $A = 5$.

1)
$$R = (z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_5), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-a_4}+\frac{1}{z-a_5}\right), \quad q = -\frac{1}{4}\frac{1}{(z-a_4)(z-a_5)},$$

intégrales algébriques.

2)
$$R = (z-a_1)\dots(z-a_5), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = 0, \quad q = 0,$$

intégrales algébriques.

III. $A = 4$.

1)
$$R = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = \frac{\pi^2}{\Omega^2}\frac{1}{R},$$

Ω désignant un module de périodicité de l'intégrale elliptique $\int R^{-\frac{1}{2}}dz$,

$$\omega_1 = e^{\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}}dz}, \quad \omega_2 = e^{-\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}}dz}.$$

2)
$$y = [(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)]^{-\frac{1}{2}}(z-a_4)^{-\frac{2}{3}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_2}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-a_3}+\frac{2}{3}\frac{1}{z-a_4},$$
$$q = \left[\frac{1}{36}(2a_2+2a_3+a_4)-\frac{5}{36}z\right]\frac{1}{(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)},$$

intégrales algébriques.

3)
$$y = [(z-a_1)\dots(z-a_4)]^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{1}{4}\frac{1}{R}, \quad R = (z-a_3)(z-a_4),$$

intégrales algébriques.

4)
$$y = [(z-a_1)(z-a_2)]^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{2}{3}}\omega, \quad R = (z-a_3)(z-a_4);$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{2}{9}\frac{1}{R},$$

intégrales algébriques. [331

5)
$$y = [(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)]^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \tfrac{3}{2}(z-a_4)^{-1}, \quad q = 0,$$

intégrales algébriques.

IV. $A = 3$.

1)
$$R = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = \frac{\pi^2}{\Omega^2}\frac{1}{R},$$

Ω étant un module de périodicité de l'intégrale elliptique $\int R^{-\frac{1}{2}}dz$,

$$\omega_1 = e^{\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}}dz}, \quad \omega_2 = e^{-\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}}dz}.$$

2)
$$y = [(z-a_1)(z-a_2)]^{-\frac{1}{2}}(z-a_3)^{-\frac{2}{3}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-a_2}+\frac{2}{3}\frac{1}{z-a_3},$$

$$q = \left[\frac{1}{36}(2a_1 + 2a_2 + a_3) - \frac{5}{36}z\right]\frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)},$$

intégrales algébriques.

3) $$y = R^{-\frac{2}{3}}\omega, \quad R = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3),$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R^{-\frac{2}{3}}dz.$$

4) $$R = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{2}{3}}(z-a_3)^{-\frac{5}{6}}, \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_2} + \frac{5}{6}\frac{1}{z-a_3}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

5) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{5}{6}}\omega, \quad R = (z-a_2)(z-a_3);$$
$$p = \frac{5}{6}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{5}{36}\frac{1}{R},$$

332] intégrales algébriques.

6) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{2}{3}}\omega, \quad R = (z-a_2)(z-a_3);$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{2}{9}\frac{1}{R},$$

intégrales algébriques.

7) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}\omega, \quad R = (z-a_2)(z-a_3);$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{1}{36}\frac{1}{R},$$

intégrales algébriques.

8) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}}(z-a_3)^{-\frac{2}{3}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_2} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_3}, \quad q = -\frac{1}{18}\frac{1}{(z-a_2)(z-a_3)},$$

intégrales algébriques.

9) $$y = [(z-a_1)(z-a_2)]^{-\frac{1}{2}}(z-a_3)^{-\frac{2}{3}}\omega;$$
$$p = \tfrac{2}{3}(z-a_3)^{-1}, \quad q = 0,$$

intégrales algébriques.

V. $A = 2$.

1) $$R = (z-a_1)^{-\frac{2}{3}}(z-a_2)^{-\frac{5}{6}}; \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_1} + \frac{5}{6}\frac{1}{z-a_2}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

2) $$R = (z-a_1)(z-a_2), \quad y = R^{-\frac{3}{4}}\omega;$$
$$p = \frac{3}{4}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R^{-\frac{3}{4}}dz.$$

3) $$R = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{5}{6}}, \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1} + \frac{5}{6}\frac{1}{z-a_2}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

4) $$R = (z-a_1)(z-a_2), \quad y = R^{-\frac{2}{3}}\omega;$$ [333
$$p = \frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R^{-\frac{2}{3}}dz.$$

5) $$R = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{3}{4}}, \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1} + \frac{3}{4}\frac{1}{z-a_2}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

6) $$R = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{2}{3}}, \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_2}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

7) $$R = (z-a_1)(z-a_2), \quad y = R^{-\frac{5}{6}}\omega;$$
$$p = \frac{5}{6}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{5}{36}\frac{1}{R},$$

intégrales algébriques.

8) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{5}{6}}\omega;$$
$$p = 0, \quad q = 0,$$

intégrales algébriques.

Pour les équations différentielles qui admettent des intégrales algébriques, z est une fonction rationnelle $\chi(\zeta)$ de ζ. En substituant dans l'équation (B.) de N.

$$z_1 = \chi(\zeta_1), \quad z_2 = \chi(\zeta_2),$$

on obtient, pour la détermination des ζ_1, ζ_2 comme fonctions de u_1, u_2 les équations qui ont lieu pour les fonctions hyperelliptiques du premier ordre.

Pour les cas IV. 3), 4), V. 1), 2), 3), 4), 5), 6), il résulte du Mémoire de MM. Briot et Bouquet (Journal de l'École Polytechnique, t. XXI, p. 222) que z est une fonction uniforme et doublement périodique $\chi(\zeta)$ de ζ.

De même, pour les cas III. 1), IV. 1), z représente une fonction uni-
334] forme $\chi(\zeta)$ de ζ, telle que

$$\chi(2\pi i\zeta) = \chi(\zeta), \quad \chi\left(\frac{\Omega_1}{\Omega} 2\pi i\zeta\right) = \chi(\zeta),$$

où Ω_1 désigne un second module de périodicité de l'intégrale $\int R^{-\frac{1}{2}} dz$, différent de Ω. En substituant dans les équations (B.) de N.

$$z_1 = \chi(\zeta_1), \quad z_2 = \chi(\zeta_2),$$

ces équations deviennent, pour les cas III. 1), IV. 1),

$$\zeta_1^{\frac{1}{2}} + \zeta_2^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi i}{\Omega} u_1,$$

$$\zeta_1^{-\frac{1}{2}} + \zeta_2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\pi i}{\Omega} u_2,$$

tandis que, pour les cas IV. 3), 4) et V. 1), 2), ..., 6), elles deviennent

$$\zeta_1 + \zeta_2 = u_1, \quad \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = u_2,$$

de sorte que pour tous ces cas les coefficients de l'équation quadratique pour z_1, z_2 (N., p. 174 [1]) sont représentables au moyen des fonctions elliptiques.

Heidelberg, juin 1880.

1) P. 183 de ce volume. Sch.

Extrait d'une Lettre adressée par M. Fuchs à M. Borchardt.

Dans un résumé des résultats de mon travail Sur une classe de fonctions, etc., que j'ai publié dans les Nachrichten de Goettingue (février 1880, p. 170—176 [1]), se trouve (p. 173 [2]) la proposition suivante:

I. Si $f(z)$ et $\varphi(z)$ forment un système fondamental arbitraire de solutions d'une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre à coefficients rationnels, et que pour tout point singulier les racines r_1, r_2 de l'équation fondamentale déterminatrice correspondante satisfassent aux conditions

$$r_2 = r_1 + 1 \quad \text{ou} \quad r_1 = -1 + \frac{1}{n}, \quad r_2 = -1 + \frac{2}{n}$$

(n étant un nombre entier positif), tandis que les racines ϱ_1, ϱ_2 [335
de l'équation fondamentale déterminatrice correspondante à $z = \infty$ satisfont aux conditions

$$\varrho_2 = \varrho_1 + 1 \quad \text{ou} \quad \varrho_1 = 1 + \frac{1}{\nu}, \quad \varrho_2 = 1 + \frac{2}{\nu}$$

(ν étant un nombre entier positif), et que de plus les développements des solutions de l'équation différentielle aux environs des points singuliers ne contiennent pas de logarithmes, l'équation

$$\text{(F.)} \qquad \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \zeta$$

détermine z comme fonction uniforme de ζ.

Dans mon travail inséré dans votre Journal (t. 89, p. 151, et suiv. [3]), dans lequel j'ai développé les résultats mentionnés, la proposition précédente a été présentée (p. 161 [4]) comme proposition I., sous une forme un peu modifiée, laquelle, étant d'une moindre clarté, n'éloigne pas la possibilité d'une mésintelligence. C'est M. H. Poincaré, professeur à la Faculté des Sciences de Caen, qui par une aimable Communication a attiré mon attention sur cette circonstance.

1) Mém. XXX, p. 185 et suiv. de ce volume. Sch.
2) Ibid. p. 187. Sch.
3) Mém. XXXI, p. 191 et suiv. de ce volume. Sch.
4) Ibid. p. 202. Sch.

Je prends maintenant la liberté de joindre ici quelques éclaircissements sur cette proposition.

Soit menée dans le plan des z, par chacun des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ de l'équation différentielle, une coupure quelconque, la coupure q_i par le point a_i. Que toutes ces coupures soient supposées continuées jusqu'au point $z = \infty$ et soumises seulement à la restriction de ne pas se croiser ni avec elles-mêmes ni entre elles. Désignons par T le plan des z ainsi découpé. Si pour une valeur arbitraire $z = z_0$ on attribue à $f(z)$ et $\varphi(z)$, ainsi qu'à leurs premières dérivées, des valeurs arbitraires, ces fonctions, ainsi que ζ, se trouvent déterminées uniformément dans toute l'étendue de T. En franchissant successivement les diverses coupures $q_1, q_2, \ldots, q_\varrho$ dans un ordre quelconque et un nombre quelconque de fois chacune, on obtient des surfaces que l'on peut désigner par $T_1, T_2, T_3, \ldots$. Ces surfaces sont en nombre infini quand les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne sont pas algébriques. Dans chacune de ces surfaces T_i, ζ est une fonction uniforme de z. Établissons maintenant au moyen 336] de l'équation (F.) la représentation des diverses feuilles $T, T_1, T_2, \ldots$ sur le plan des ζ. Soit désignée par S_i la surface qui représente ainsi sur le plan des ζ la surface T_i. Tant que, sur une feuille T_i, $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne sont pas identiquement infinis, c'est-à-dire infinis pour toute valeur de z, S_0 qui correspond à T_i, remplira également une surface, soit que T_i provienne d'un nombre fini de transgressions des coupures $q_1, q_2, \ldots, q_\varrho$, soit qu'il provienne d'un nombre infini. Au contraire, si $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont identiquement infinis sur une feuille T_i provenant d'un nombre infini de transgressions des coupures q, la représentante S_i de T_i se réduira en un point.

L'ensemble des représentantes $S, S_1, S_2, \ldots$ forme une surface non découpée (zusammenhängend) dans le plan des ζ. Celles de ces représentantes qui ne correspondent pas à des surfaces T_i sur laquelles $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont identiquement infinis n'admettent pas de points de ramification d'après les développements de mon Mémoire (p. 158—160 de votre Journal[1]); l'ensemble de ces représentantes constitue donc sur le plan des ζ une surface σ, qui couvre ce plan partout simplement. Sur les bornes de cette surface σ se trouvent les points qui jouent le rôle des représentantes des surfaces T dans l'intérieur desquelles $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont identiquement infinis parce que ces points peuvent être obtenus par le passage à la limite des surfaces qui constituent σ.

1) P. 198—202 de ce volume. Sch.

Le sens de la proposition I. de mon travail (p. 161 de votre Journal[1]) revient maintenant à ce que z est une fonction méromophe de ζ dans l'intérieur de la surface σ. De là découle le corollaire immédiatement suivant, dont il est fait usage dans la partie ultérieure du même travail, que $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ ne peut pas admettre une même valeur pour deux valeurs différentes de z, étant supposé nécessairement que ce quotient n'est pas indépendant de z, ou, ce qui est la même chose, que $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne sont pas identiquement infinis.

Si maintenant un des points limites est entouré en tous sens par des surfaces S, il faut, en dehors des restrictions déjà mentionnées, qu'une autre relation ait lieu encore entre les constantes contenues dans les coefficients de l'équation différentielle.

Heidelberg, 7. juin 1880.

1) P. 202 de ce volume. Sch.